III 다항함수의 적분법

1. 부정적분과 정적분
2. 정적분의 활용

아르키메데스
(Archimedes, B.C. 287? ~B.C. 212)
포물선으로 둘러싸인 영역의 넓이와 구의 부피를 구하였다.
(출처: 하워드 이브스, 『수학의 위대한 순간들』)

리만
(Riemann, G. F. B., 1826~1866)
정적분의 개념을 엄밀하게 정의하고, 리만 적분의 토대를 마련하였다.
(출처: 하워드 이브스, 『수학사』)

학습목표

- **부정적분**의 뜻을 안다.
- 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, **다항함수의 부정적분**을 구할 수 있다.
- **정적분**의 뜻을 알고, **다항함수의 정적분**을 구할 수 있다.
- 곡선으로 둘러싸인 **도형의 넓이**를 구할 수 있다.
- **속도와 거리**에 대한 문제를 해결할 수 있다.

순간과 전체를 보다

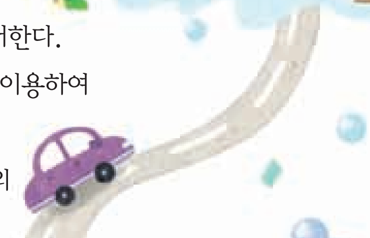
곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이나 물체의 부피를 구하는 방법은 고대부터 연구하여 개발되어 왔는데 이때 적분법이 이용된다.

적분은 우주로 쏘아 올린 로켓의 이동 거리나 궤도를 제어하고, 다리나 댐을 건설하거나 지진에 견딜 수 있는 건물을 설계하는 데 중요한 역할을 하는 도구이며, 이 밖에도 의학이나 경제학 등 다양한 분야에서 폭넓게 사용되고 있다.

운전자의 조작 없이 자동차가 스스로 주변 환경을 인식하고 도로 상황을 판단하여 목적지까지 주행하는 무인 자동차의 시대이다. 무인 자동차를 만들기 위해서는 로봇 및 컴퓨터 공학, GPS, 관성 항법 장치와 같은 첨단 기술이 필요하다. 이 중 관성 항법 장치는 비행기, 잠수함 등에 널리 이용되는 장치로, 물체의 속도와 각도에 변화가 생기면 동서남북 방향의 가속도를 측정하여 위도와 경도를 계산해 운행 거리 및 현재의 위치를 알아내고 경로를 벗어나지 않도록 제어한다.

이와 같이 움직이는 물체의 처음 위치와 순간의 변화를 알면 적분을 이용하여 전체의 변화를 알아낼 수 있다.

이 단원에서는 부정적분과 정적분의 뜻과 성질을 알고 다항함수의 정적분을 구하는 방법을 알아본다.



1 부정적분과 정적분

준비학습

1 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=-2$

(2) $y=x^3$

(3) $y=3x+4$

(4) $y=x^2-6x+7$

2 곡선 $y=x^2+2x$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기를 구하시오.

1 부정적분

● 부정적분의 뜻을 안다.

부정적분이란 무엇일까

생각 톡

다음은 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대한 학생들의 대화이다.

탐구 도함수 $f'(x)$가 $2x$인 함수 $f(x)$를 추측해 보자.

배로(Barrow, I., 1630~1677)
영국의 수학자로 적분과 미분이 역연산임을 최초로 알아내었다.

위의 생각 톡에서

$$(x^2)'=2x,\ (x^2+2)'=2x,\ (x^2-3)'=2x$$

이므로 함수 x^2, x^2+2, x^2-3의 도함수는 모두 $2x$이다.

일반적으로 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉

$$F'(x)=f(x)$$

일 때 $F(x)$를 $f(x)$의 **부정적분**이라고 한다.

예를 들어 x^2, x^2+2, x^2-3은 모두 $2x$의 부정적분이다.

두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 모두 함수 $f(x)$의 부정적분이면

$$F'(x)=f(x),\ G'(x)=f(x)$$

이므로

$$\{G(x)-F(x)\}'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

이다. 그런데 도함수가 0인 함수는 상수함수이므로 그 상수를 C라고 하면

$$G(x)-F(x)=C,\ 즉\ G(x)=F(x)+C$$

이다.

따라서 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면 $f(x)$의 부정적분은 모두

$$F(x)+C \ (C\text{는 상수})$$

로 나타낼 수 있고, 이것을 기호로

$$\int f(x)dx$$

와 같이 나타낸다. 즉

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

이다. 이때 C를 **적분상수**라고 한다.

기호 $\int$은 합을 뜻하는 라틴어 'Summa'의 첫 글자 S를 길게 늘여 쓴 것이다.

$\int f(x)dx$에서 $f(x)$를 피적분함수라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

부정적분

$F'(x)=f(x)$일 때,

$$\int f(x)dx = F(x)+C \ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$f(x) \underset{\text{미분}}{\overset{\text{적분}}{\rightleftarrows}} \int f(x)dx$

함수 $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 적분한다고 하고, 그 계산법을 적분법이라고 한다.

보기

1. $(3x)'=3$이므로 $\int 3\,dx = 3x+C$
2. $(2x^2)'=4x$이므로 $\int 4x\,dx = 2x^2+C$

문제 1 **다음 부정적분을 구하시오.**

(1) $\int 7\,dx$ (2) $\int 6x^2\,dx$

문제 2 **다음 등식을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하시오.** (단, C는 적분상수)

(1) $\int f(x)dx = x^2-5x+C$ (2) $\int f(x)dx = x^3+2x^2+C$

설명하기

함수 $f(x)=x^2$에 대하여 $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}$와 $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx$를 각각 구해 보고, 그 차이점을 설명해 보자.

2 부정적분의 계산

● 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.

함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 부정적분은 무엇일까

생각 톡

다음은 함수 $f(x)$와 그 도함수 $f'(x)$를 표로 나타낸 것이다.

$f(x)$	$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{2}x^2+5$		$\frac{1}{4}x^4$	$\frac{1}{4}x^4-3$	$\frac{1}{5}x^5$
$f'(x)$			x^2			

탐구 ① 위의 표를 완성해 보자.

탐구 ② 탐구 ①의 결과로부터 n이 양의 정수일 때, $f'(x)=x^n$인 함수 $f(x)$를 추측해 보자.

위의 생각 톡에서 다음을 알 수 있다.

$$\left(\frac{1}{2}x^2\right)'=x\text{이므로}\qquad \int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C$$

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2\text{이므로}\qquad \int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3+C$$

$$\left(\frac{1}{4}x^4\right)'=x^3\text{이므로}\qquad \int x^3\,dx=\frac{1}{4}x^4+C$$

일반적으로 n이 양의 정수일 때, $\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n$이므로 다음이 성립한다.

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 부정적분

n이 양의 정수일 때,

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

한편 $(x)'=1$이므로 다음이 성립한다.

$$\int 1\,dx=x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$\int 1\,dx$를 간단히 $\int dx$로 나타내기도 한다.

문제 1 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int x^5 dx$　　(2) $\int x^{10} dx$　　(3) $\int x^{99} dx$

함수의 실수배, 합, 차의 부정적분은 어떻게 구할까

함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알아보자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 한 부정적분을 각각 $F(x)$, $G(x)$라고 하면

$\int f(x)dx=F(x)+C_1$, $\int g(x)dx=G(x)+C_2$ (C_1, C_2는 적분상수)이고

$$F'(x)=f(x),\ G'(x)=g(x)$$

이므로 다음을 알 수 있다.

1 0이 아닌 실수 k에 대하여 $\{kF(x)\}'=kF'(x)=kf(x)$이므로

$$\int kf(x)dx=kF(x)+C \ (C\text{는 적분상수}) \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. 한편

$$k\int f(x)dx=k\{F(x)+C_1\}$$
$$=kF(x)+kC_1 \qquad \cdots\cdots ②$$

이다. 여기서 C, C_1은 모두 임의의 상수이므로 ①과 ②는 같은 꼴이 된다.

따라서 $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$이다.

2 $\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$이므로

$$\int\{f(x)+g(x)\}dx=F(x)+G(x)+C \ (C\text{는 적분상수}) \qquad \cdots\cdots ③$$

이다. 한편

$$\int f(x)dx+\int g(x)dx=F(x)+G(x)+C_1+C_2 \qquad \cdots\cdots ④$$

이다. 여기서 C, C_1, C_2는 모두 임의의 상수이므로 ③과 ④는 같은 꼴이 된다.

따라서 $\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$이다.

스스로 개념탐구

위와 같은 방법으로 다음이 성립함을 확인해 보자.

$$\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수의 실수배, 합, 차의 부정적분

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

❶ $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 0이 아닌 실수)

❷ $\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

❸ $\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

오른쪽 성질 ❷, ❸은 세 개 이상의 함수에 대해서도 성립한다.

예제 1 부정적분 $\int(3x^2+4x-1)dx$를 구하시오.

풀이 $\int(3x^2+4x-1)dx=\int 3x^2\,dx+\int 4x\,dx-\int 1\,dx$

$$=3\int x^2\,dx+4\int x\,dx-\int dx$$

$$=3\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right)+4\left(\frac{1}{2}x^2+C_2\right)-(x+C_3)$$

$$=x^3+2x^2-x+3C_1+4C_2-C_3$$

이때 $3C_1+4C_2-C_3=C$라고 하면

$$\int(3x^2+4x-1)dx=x^3+2x^2-x+C$$

답 x^3+2x^2-x+C

적분상수가 여러 개일 때에는 이들을 묶어서 하나의 적분상수 C로 나타낼 수 있다.

문제 2 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int(2x-1)dx$ (2) $\int(6x^2+10x)dx$

(3) $\int(-4x^3+9x^2+3x)dx$ (4) $\int(3x+1)(x-3)dx$

예제 2 **다음 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하시오.**

$$f'(x)=3x^2+2x-2,\ f(0)=1$$

풀이 $f'(x)=3x^2+2x-2$이므로

$$f(x)=\int(3x^2+2x-2)dx=x^3+x^2-2x+C$$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 구하는 함수 $f(x)$는

$$f(x)=x^3+x^2-2x+1$$

답 $f(x)=x^3+x^2-2x+1$

문제 3 **다음 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하시오.**

(1) $f'(x)=2x+3,\ f(0)=-1$

(2) $f'(x)=-9x^2+4x-5,\ f(1)=0$

문제 4 **곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기는 $4x+1$이다. 이 곡선이 점 $(1,\ 2)$를 지날 때, 함수 $f(x)$를 구하시오.**

유추하기

부정적분 $\int(x+1)^2dx$를 구할 때, 다음과 같이 $(x+1)^2$을 전개하지 않고 구할 수 있다.

$f(x)=(x+1)^3$이라고 하자. 이때 $f(x)=(x+1)(x+1)(x+1)$이므로 함수의 곱의 미분법을 이용하여 도함수 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=1\cdot(x+1)(x+1)+(x+1)\cdot1\cdot(x+1)+(x+1)(x+1)\cdot1$$
$$=3(x+1)^2$$

따라서 $(x+1)^2=\frac{1}{3}f'(x)$이므로 다음이 성립한다.

$$\int(x+1)^2dx=\int\frac{1}{3}f'(x)dx=\frac{1}{3}f(x)+C$$
$$=\frac{1}{3}(x+1)^3+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

1 위와 같은 방법으로 부정적분 $\int(4x+3)^2dx$를 구해 보자.

2 부정적분 $\int(x+1)^3dx$를 구할 때, 위와 같이 $(x+1)^3$을 전개하지 않고 구하는 방법을 추론해 보고, 그 결과를 $(x+1)^3$을 전개한 후 적분한 결과와 비교해 보자.

3 정적분

- 정적분의 뜻을 안다.

정적분이란 무엇일까

생각 톡

다음은 함수 $f(x)=2x$의 서로 다른 두 부정적분 $F_1(x)$와 $F_2(x)$이다.

$$F_1(x)=x^2+C_1, \qquad F_2(x)=x^2+C_2$$

탐구 ① $F_1(3)-F_1(1)$의 값과 $F_2(3)-F_2(1)$의 값을 구하여 비교해 보자.

탐구 ② 두 실수 a, b에 대하여 $F_1(b)-F_1(a)$의 값과 $F_2(b)-F_2(a)$의 값을 구하여 비교해 보자.

위의 생각 톡에서 함수 $f(x)=2x$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$F(x)=x^2+C \ (C\text{는 적분상수})$$

이므로

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= (b^2+C)-(a^2+C) \\ &= b^2-a^2 \end{aligned}$$

이다.

따라서 $F(b)-F(a)$의 값은 적분상수 C의 값에 관계없이 정해진다.

함수 $f(x)$가 두 실수 a, b를 포함하는 구간에서 연속일 때, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 $F(x)$의 변화량 $F(b)-F(a)$를 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 **정적분**이라 하고, 이것을 기호로

$$\int_a^b f(x)dx$$

와 같이 나타낸다.

즉 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$이다.

이때 $F(b)-F(a)$를 기호로

$$\Big[F(x)\Big]_a^b$$

와 같이 나타낸다.

정적분 $\int_a^b f(x)dx$에서 a를 아래끝, b를 위끝이라고 한다.

정적분에서 변수를 x 대신 다른 문자를 사용해도 그 값은 변하지 않는다.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^b f(t)dt \\ &= \int_a^b f(u)du \end{aligned}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

정적분

함수 $f(x)$가 두 실수 a, b를 포함하는 구간에서 연속일 때, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분은

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값을 구하는 것을 함수 $f(x)$를 a에서 b까지 적분한다고 한다.

예제 1 **정적분 $\int_{-1}^{3}(3x^2+1)dx$의 값을 구하시오.**

풀이 $\int(3x^2+1)dx=x^3+x+C$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3}(3x^2+1)dx&=\Big[x^3+x\Big]_{-1}^{3}\\&=(3^3+3)-\{(-1)^3+(-1)\}\\&=30-(-2)\\&=32\end{aligned}$$

정적분의 계산에서 적분상수는 고려하지 않는다.

답 32

문제 1 **다음 정적분의 값을 구하시오.**

(1) $\int_{-2}^{0}(6x-1)dx$

(2) $\int_{1}^{2}(4x^3+9x^2-2x)dx$

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^a f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^a=F(a)-F(a)=0$$

이다. 즉 다음이 성립한다.

$$\int_a^a f(x)dx=0$$

또

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a),$$

$$\int_b^a f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_b^a=F(a)-F(b)=-\{F(b)-F(a)\}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

문제 2 **다음 정적분의 값을 구하시오.**

(1) $\int_2^2 (7x^2-3)dx$

(2) $\int_1^{-1} (4x-5)dx$

적분과 미분은 어떤 관계가 있을까

적분과 미분의 관계를 알아보자.

함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하면 $f(t)$의 a에서 x $(a<x<b)$까지의 정적분은

$$\int_a^x f(t)dt=\Big[F(t)\Big]_a^x=F(x)-F(a)$$

이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\}=F'(x)-0=f(x)$$

일반적으로 적분과 미분의 관계는 다음과 같다.

적분과 미분의 관계

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \ (\text{단, } a<x<b)$$

보기 $\frac{d}{dx}\int_1^x (t^2+t-2)dt=x^2+x-2$

문제 3 다음을 구하시오.

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x (2t^3+t)dt$ (2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-1}^x (t+2)(t^2-2t+3)dt$

예제 2 모든 실수 x에 대하여 등식 $\displaystyle\int_1^x f(t)dt=x^3+x+a$를 만족시키는 함수 $f(x)$와 상수 a의 값을 구하시오.

풀이 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\int_1^x f(t)dt=\frac{d}{dx}(x^3+x+a)$$

$$f(x)=3x^2+1$$

또 $x=1$을 주어진 등식의 양변에 대입하면

$$\int_1^1 f(t)dt=1+1+a, \qquad 0=2+a$$

$$a=-2$$

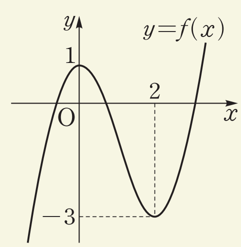
답 $f(x)=3x^2+1$, $a=-2$

문제 4 모든 실수 x에 대하여 등식 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt=3x^2+2x-5$를 만족시키는 함수 $f(x)$와 양수 a의 값을 구하시오.

설명하기 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $F(x)$를 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$라고 하자.

1 함수 $y=F(x)$의 그래프가 원점을 지나는지 확인해 보자.

2 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 함수 $y=F(x)$의 그래프 위의 점 $(2, F(2))$에서의 접선의 기울기를 구하고 그 방법을 설명해 보자.



4 정적분의 계산

- 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.

정적분에는 어떤 성질이 있을까

생각 톡

두 함수 $f(x)=2x$, $g(x)=3x^2$에 대하여 다음을 알아보자.

탐구 ① $\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 g(x)dx$의 값을 구해 보자.

탐구 ② $\int_0^2 \{f(x)+g(x)\}dx$의 값을 구하여 **탐구 ①**의 결과와 비교해 보자.

함수의 실수배, 합, 차의 정적분을 알아보자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 한 부정적분을 각각 $F(x)$, $G(x)$라고 하면

$$F'(x)=f(x),\ G'(x)=g(x)$$

이고

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),\ \int_a^b g(x)dx=G(b)-G(a)$$

이므로 다음을 알 수 있다.

❶ 상수 k에 대하여

$$\{kF(x)\}'=kF'(x)=kf(x)$$

이므로

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x)dx&=kF(b)-kF(a)\\&=k\{F(b)-F(a)\}\\&=k\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

❷ $\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$

이므로

$$\begin{aligned}\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx&=\{F(b)+G(b)\}-\{F(a)+G(a)\}\\&=\{F(b)-F(a)\}+\{G(b)-G(a)\}\\&=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

스스로 개념탐구 앞과 같은 방법으로 다음이 성립함을 확인해 보자.

$$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

정적분의 성질 (1)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때

❶ $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

❷ $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

❸ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

예제 1 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_0^2 (2x^2-3x+5)dx$ (2) $\int_{-1}^4 (x+2)^2dx-\int_{-1}^4 (x-2)^2dx$

풀이 (1)
$$\begin{aligned}\int_0^2 (2x^2-3x+5)dx&=\int_0^2 2x^2\,dx-\int_0^2 3x\,dx+\int_0^2 5\,dx\\&=2\int_0^2 x^2\,dx-3\int_0^2 x\,dx+\int_0^2 5\,dx\\&=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2-3\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2+\left[5x\right]_0^2\\&=\frac{16}{3}-6+10\\&=\frac{28}{3}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int_{-1}^4 (x+2)^2dx-\int_{-1}^4 (x-2)^2dx&=\int_{-1}^4 \{(x+2)^2-(x-2)^2\}dx\\&=\int_{-1}^4 8x\,dx\\&=\left[4x^2\right]_{-1}^4\\&=60\end{aligned}$$

답 (1) $\frac{28}{3}$ (2) 60

문제 1 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_{1}^{3}(6x^2+4x+2)dx$ (2) $\int_{0}^{4}(3x^2+x)dx+\int_{0}^{4}(5-x)dx$

(3) $\int_{-2}^{1}(2x^2+4)dx-2\int_{-2}^{1}(x^2-x+2)dx$

함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때, 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\int_{a}^{c} f(x)dx+\int_{c}^{b} f(x)dx&=\Big[F(x)\Big]_{a}^{c}+\Big[F(x)\Big]_{c}^{b}\\&=\{F(c)-F(a)\}+\{F(b)-F(c)\}\\&=F(b)-F(a)\\&=\int_{a}^{b} f(x)dx\end{aligned}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

정적분의 성질 (2)

함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때,

$$\int_{a}^{c} f(x)dx+\int_{c}^{b} f(x)dx=\int_{a}^{b} f(x)dx$$

정적분의 성질 (2)는 a, b, c의 대소 관계에 상관없이 성립한다.

보기 $\int_{0}^{1} 2x\,dx+\int_{1}^{2} 2x\,dx=\int_{0}^{2} 2x\,dx=\Big[x^2\Big]_{0}^{2}=4$

문제 2 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_{-1}^{1}(4x+1)dx+\int_{1}^{2}(4x+1)dx$

(2) $\int_{2}^{3}(3x^2-x+2)dx+\int_{1}^{2}(3x^2-x+2)dx$

(3) $\int_{-2}^{0}(x+1)^2dx-\int_{1}^{0}(x+1)^2dx$

예제 2 정적분 $\int_0^3 |x-1|dx$의 값을 구하시오.

절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값을 경계로 구간을 나눈다.

풀이 $f(x)=|x-1|$이라고 하면 닫힌구간 $[0, 3]$에서

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & (0\le x\le 1) \\ x-1 & (1\le x\le 3) \end{cases}$$

따라서 구하는 정적분의 값은

$$\begin{aligned}\int_0^3 |x-1|dx &= \int_0^1 (-x+1)dx+\int_1^3 (x-1)dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^3 \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{5}{2}$

문제 3 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_{-3}^1 |2x+4|dx$ (2) $\int_0^2 |x^2-1|dx$

이야기 수학

미적분으로 혜성의 궤도를 밝히다

영국의 천문학자 핼리(Halley, E., 1656~1742)는 주기적으로 나타나는 혜성이 있음을 발견하고 혜성이 출현하는 시기를 정확히 예측한 것으로 유명하다. 당시 혜성이 나타나는 것은 재앙의 전조와 같은 초자연적인 현상으로 여겨졌으나 핼리는 과거에 출현한 혜성의 기록을 수집하고 뉴턴(Newton, I., 1642~1727)의 미적분학과 역학을 이용하여 혜성의 궤도를 분석하였다. 그 결과 핼리는 1531년, 1607년 그리고 1682년에 나타난 혜성의 궤도의 특징이 매우 비슷하다는 것을 알아냈다. 그리고 이들이 동일한 혜성이라는 결론을 내리고, 이 혜성이 1758년에 다시 출현할 것이라고 예측했다. 그는 혜성이 다시 나타나는 것을 보지 못하고 사망했으나 그의 예측은 정확히 적중하였다. 1758년의 크리스마스 밤에 혜성이 관측되었고, 이 혜성은 그의 이름을 따서 '핼리혜성'이라고 불리게 되었다.

핼리혜성의 발견은 인류가 최초로 혜성의 궤도를 알아낸 사건이면서 이를 분석하는 데 이용된 미적분학의 위력을 확인한 사건이기도 했다.

(출처: 『Newton Highlight 뉴턴의 대발명 미분과 적분』, 2011년)

수학 역량 플러스

문제 해결 의사소통

정적분을 포함한 등식에서 함수 구하기

함수 $f(x)$가 $f(x)=g(x)+\int_a^b f(t)dt$ (a, b는 실수)와 같이 정적분을 포함한 꼴로 주어질 때, 정적분 $\int_a^b f(t)dt$의 값이 상수임을 이용하면 $f(x)$를 구할 수 있다.

예를 들어 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=-4x+\int_0^3 f(t)dt$일 때, 함수 $f(x)$는 다음과 같이 구한다.

$\int_0^3 f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓으면 $\qquad f(x)=-4x+k$

$f(t)=-4t+k$를 $\int_0^3 f(t)dt=k$에 대입하면

$\int_0^3 (-4t+k)dt=k, \qquad \left[-2t^2+kt\right]_0^3=k$

$-18+3k=k, \qquad k=9$

따라서 $f(x)=-4x+9$이다.

활동 1 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=x^2+2x+3\int_0^1 f(t)dt$일 때, 함수 $f(x)$를 구해 보자.

활동 2 다음은 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=3x^2+\int_0^2 (2x-1)f(t)dt$일 때, 함수 $f(x)$를 구하는 방법에 대한 두 학생의 대화이다. 대화를 읽고 함수 $f(x)$를 구해 보자.

: $\int_0^2 (2x-1)f(t)dt$를 상수로 놓고 함수 $f(x)$를 구하려고 했더니 답을 구할 수가 없네. 무엇이 잘못된 것일까?

: $\int_0^2 (2x-1)f(t)dt$는 상수가 아니잖아.

중단원 마무리

❶ 부정적분

(1) 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉

$$F'(x)=f(x)$$

일 때 $F(x)$를 $f(x)$의 $\boxed{}$이라고 한다.

(2) $F'(x)=f(x)$일 때,

$$\int f(x)dx=F(x)+C \text{ (단, } C\text{는 상수)}$$

이때 C를 $\boxed{}$라고 한다.

❷ 함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 부정적분

n이 양의 정수일 때,

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{\boxed{}}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

❸ 정적분

(1) 함수 $f(x)$가 두 실수 a, b를 포함하는 구간에서 연속일 때, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

를 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 $\boxed{}$이라고 한다.

(2) **적분과 미분의 관계**

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\boxed{} \text{ (단, } a<x<b\text{)}$$

❹ 정적분의 성질

(1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때

① $\int_a^b kf(x)dx=\boxed{}$ (단, k는 상수)

② $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

③ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

(2) 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때,

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^{\boxed{}} f(x)dx$$

기본 문제

1 다음 등식을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하시오. (단, C는 적분상수)

(1) $\int f(x)dx=4x+C$

(2) $\int f(x)dx=2x^3-x^2+x+C$

2 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int 5dx$ (2) $\int 8x^3dx$

(3) $\int (3x^2-4x+7)dx$

3 다음 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여 $f(3)$의 값을 구하시오.

$$f'(x)=6x+2, \ f(1)=-1$$

4 다음을 구하시오.

(1) $\frac{d}{dx}\int_{-2}^x (-5t^2+4t)dt$

(2) $\frac{d}{dx}\int_1^x (t+3)(t^2+2t)dt$

5 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_1^4 (2x+1)dx$

(2) $\int_{-1}^2 (6x^2+4x-1)dx$

(3) $\int_1^3 (2x+1)^2dx-\int_1^3 (4x^2+x+1)dx$

(4) $\int_0^2 |x^2-3x+2|dx$

표준 문제

6 함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$와 또 다른 부정적분 $G(x)$에 대하여

$$F(x)=x^3+2x^2-3x-4,\quad G(0)=1$$

일 때, $G(1)$의 값을 구하시오.

7 등식

$$\int\{1-3f(x)\}dx=x(10-x^2)+C$$

를 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하시오. (단, C는 적분상수)

8 $\int(x^2+2x+4)^2dx-\int(x^2-2x+4)^2dx=ax^4+bx^2+C$가 성립할 때, 상수 a, b의 값을 구하시오. (단, C는 적분상수)

서술형 **9** 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여

$$f(0)=1,\ F(x)=xf(x)-2x^3+x^2$$

일 때, 함수 $f(x)$를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

10 함수 $f(x)=2x^3+3x^2-x+1$에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$의 값을 구하시오.

11 함수 $f(x)=2x+1$이 $\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx = a\left\{\int_0^1 f(x)dx\right\}^2$을 만족시킬 때, 상수 a의 값을 구하시오.

문제 해결

12 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $3x^2+8x-2$이다. $\int_0^2 f(x)dx=\frac{2}{3}$일 때, 함수 $f(x)$를 구하시오.

13 함수 $f(x)$가 $f(x)=3x^2-2x+\int_0^2 f(t)dt$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

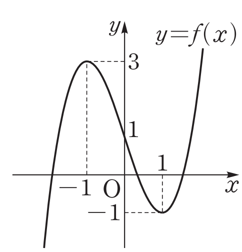
14 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x (x-t)f(t)dt = x^3+x^2-5x+3$$

일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

서술형

15 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $\int_{-2}^2 f(x)dx$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



발전 문제

16 다항함수 $y=f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2x+a$이고 다항식 $f(x)$가 x^2-4x+3으로 나누어떨어질 때, $f(-1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수)

서술형 **17** 함수 $f(x)=x^2+ax+b$가

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{1} f(x)dx$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. (단, a, b는 상수)

추론 **18** 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $\int_{8}^{9} f(x)dx$의 값을 구하시오.

(가) $\int_{0}^{2} f(x)dx=0$

(나) $\int_{n}^{n+3} f(x)dx=\int_{n}^{n+1} 2x\,dx$ (단, $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$)

문제 해결 **19** 함수 $f(a)$가 $f(a)=\int_{1}^{3} |x-a|dx$이다. 함수 $f(a)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, $M-m$의 값을 구하시오. (단, $1\le a\le 3$)