II 다항함수의 미분법

1 미분계수와 도함수

2 도함수의 활용

뉴턴
(Newton, I., 1642∼1727)
물체의 순간적인 운동과 무한소 개념을 사용하여 미적분학을 발견하였다.
(출처: 하워드 이브스, 『수학사』)

라이프니츠
(Leibniz, G. W., 1646∼1716)
미적분학을 창시하였고, 기호 $\frac{dy}{dx}$, $\int f(x)dx$를 사용하였다.
(출처: 계영희, 『계영희 교수의 명화와 함께 떠나는 수학사 여행』)

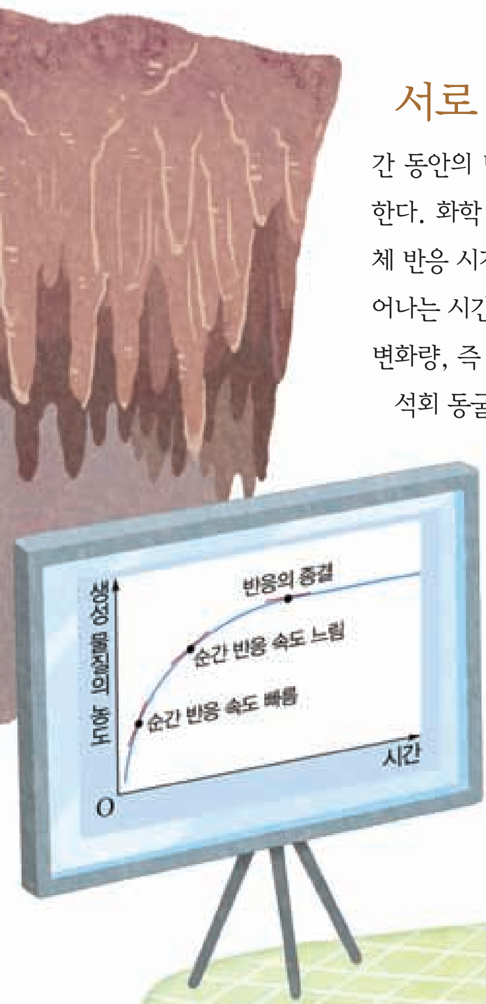
학습목표

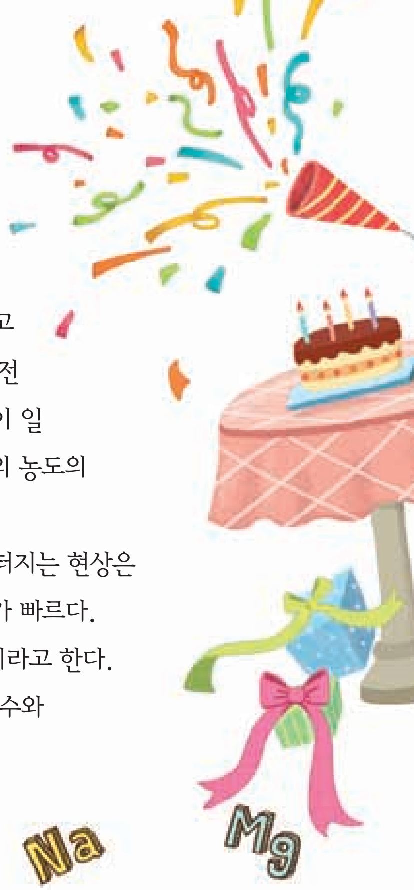
- **미분계수**의 뜻을 알고 그 값을 구할 수 있으며, **미분계수의 기하적 의미**를 이해한다.
- **미분가능성과 연속성의 관계**를 이해한다.
- **함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수**를 구할 수 있다.
- 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 **미분법**을 알고, **다항함수의 도함수**를 구할 수 있다.
- **도함수를 활용**하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

순간의 변화에서 찾는 미래의 모습

우리 주변의 모든 것들은 매 순간 변하고 있다. 예를 들어 산을 오를 때 기온은 해발 고도에 따라 달라지고, 달리는 자동차는 순간순간 위치가 달라지며, 제품의 가격은 수요와 공급에 따라 달라진다.

이러한 순간의 변화를 관찰하면 움직이는 물체의 속도를 구할 수 있고, 기업에서는 최적의 생산량을 정할 수도 있으며, 연료 효율이 높은 자동차를 설계할 수도 있다. 이러한 변화를 세밀히 관찰하는 데에는 미분이 중요한 역할을 한다.



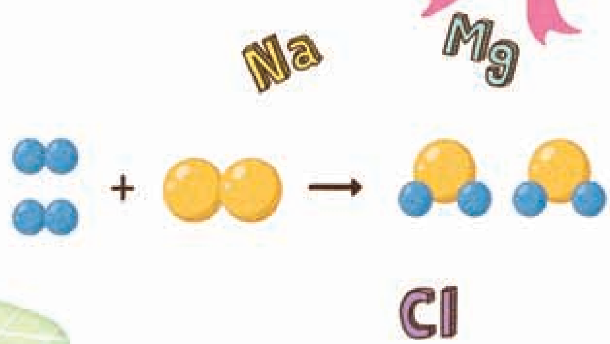


서로 다른 물질이 만나 새로운 물질이 생성될 때, 일정 시간 동안의 반응 물질 또는 생성 물질의 농도의 변화량을 반응 속도라고 한다. 화학 반응이 일어나기 전과 후의 반응 물질의 농도의 변화량을 전체 반응 시간으로 나누면 평균 반응 속도를 얻을 수 있는데, 이때 반응이 일어나는 시간을 거의 0에 가깝게 하면 매우 짧은 시간 동안의 반응 물질의 농도의 변화량, 즉 순간 반응 속도를 얻을 수 있다.

석회 동굴이 생성되는 현상은 반응 속도가 매우 느린 반면에 폭죽이 터지는 현상은 우리 눈으로 그 모습을 확인하기 어려울 만큼 반응 속도가 빠르다.

이와 같이 순간의 변화를 다루는 수학의 영역을 미분이라고 한다.

이 단원에서는 함수의 극한의 개념을 바탕으로 미분계수와 도함수를 알아본다.



1 미분계수와 도함수

준비학습

1 다음 두 점을 지나는 직선의 기울기를 구하시오.

(1) $(3,\ 1),\ (6,\ 10)$　　(2) $(-5,\ 2),\ (-1,\ 0)$

2 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-12}{x+3} & (x\neq-3) \\ 1 & (x=-3) \end{cases}$ 이 $x=-3$에서 연속인지 불연속인지 조사하시오.

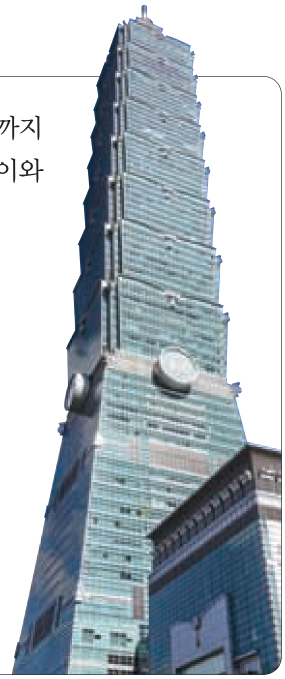
1 미분계수

- 미분계수의 뜻을 알고 그 값을 구할 수 있으며, 미분계수의 기하적 의미를 이해한다.
- 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.

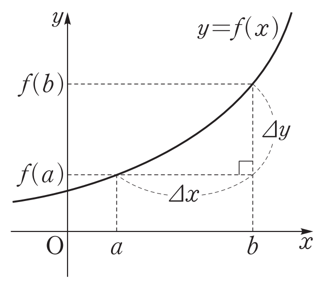
평균변화율이란 무엇일까

생각 톡

다음은 어느 고층 건물의 고속 엘리베이터가 1층에서 출발하여 꼭대기 층까지 멈추지 않고 올라갈 때, 5층을 지나는 순간과 90층을 지나는 순간의 높이와 올라갈 때까지 걸린 시간을 알려주는 상황판이다.



탐구 이 엘리베이터는 5층에서 90층까지 1초에 평균 몇 m씩 움직였다고 할 수 있는지 말해 보자.



함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, 함숫값은 $f(a)$에서 $f(b)$까지 변한다.

이때 x의 값의 변화량 $b-a$를 x의 **증분**, y의 값의 변화량 $f(b)-f(a)$를 y의 **증분**이라 하고, 이것을 기호로 각각

$$\Delta x,\ \Delta y$$

와 같이 나타낸다.

Δ는 차를 뜻하는 Difference의 첫 글자 D에 해당하는 그리스 문자이다.

즉

$$\Delta x=b-a,$$
$$\Delta y=f(b)-f(a)=f(a+\Delta x)-f(a)$$

이다.

또 x의 증분 Δx에 대한 y의 증분 Δy의 비

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

를 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 **평균변화율**이라고 한다.

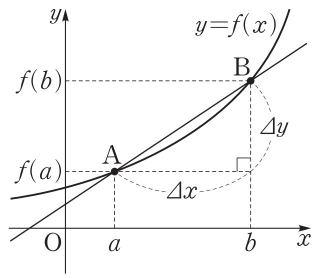
이상을 정리하면 다음과 같다.

평균변화율

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\varDelta x)-f(a)}{\varDelta x}$$

오른쪽 그림에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기와 같음을 알 수 있다.



예제 1 함수 $f(x)=x^2$에서 x의 값이 다음과 같이 변할 때의 평균변화율을 구하시오.

(1) 1에서 4까지 변할 때 (2) a에서 $a+\varDelta x$까지 변할 때

풀이 (1) $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}=\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{4^2-1^2}{3}=5$

(2) $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}=\dfrac{f(a+\varDelta x)-f(a)}{(a+\varDelta x)-a}=\dfrac{(a+\varDelta x)^2-a^2}{\varDelta x}$

$=\dfrac{2a\varDelta x+(\varDelta x)^2}{\varDelta x}=2a+\varDelta x$

답 (1) 5 (2) $2a+\varDelta x$

문제 1 함수 $f(x)=x^2+x$에서 x의 값이 다음과 같이 변할 때의 평균변화율을 구하시오.

(1) -2에서 2까지 변할 때 (2) 1에서 $1+\varDelta x$까지 변할 때

문제 2 어떤 제약 회사에서 개발한 약을 환자에게 투여하여 혈중 농도를 조사하였더니 기준량을 투여한 지 t시간 후의 약제의 혈중 농도 $f(t)$ %가

$$f(t)=-\frac{2}{3}t^3+2t^2\ (0\le t\le 3)$$

이었다. 약을 투여한 지 1시간 후부터 2시간 후까지의 약제의 혈중 농도의 평균변화율을 구하시오.

(출처: Thomas Jr., George B., 『Thomas' Calculus』)

미분계수란 무엇일까

생각톡

다음은 함수 $y=\frac{1}{2}x^2$에서 x의 값이 1에서 $1+\varDelta x$까지 변할 때의 평균변화율을 스프레드시트를 이용하여 계산한 것이다.

	A	B	C	D
1	a	Δx	Δy	Δy/Δx
2	1	1	1.5	1.5
3	1	0.1	0.105	1.05
4	1	0.01	0.01005	1.005
5	1	0.001	0.0010005	1.0005
6	1	0.0001	0.000100005	1.00005

탐구 $\varDelta x$의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$의 값은 어떤 값에 한없이 가까워지는지 추측해 보자.

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\varDelta x$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{f(a+\varDelta x)-f(a)}{\varDelta x}$$

이다. 여기서 $\varDelta x \longrightarrow 0$일 때 이 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\varDelta x \to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x \to 0}\frac{f(a+\varDelta x)-f(a)}{\varDelta x} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

가 존재하면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능**하다고 한다.

이때 이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 **순간변화율** 또는 **미분계수**라 하고, 이것을 기호로

$$f'(a)$$

와 같이 나타낸다.

또 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 x에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다.

특히 함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x에서 미분가능하면 $f(x)$는 미분가능한 함수라고 한다.

한편 ①에서 $a+\varDelta x=x$라고 하면 $\varDelta x=x-a$이고, $\varDelta x \longrightarrow 0$일 때 $x \longrightarrow a$이므로 $f'(a)$를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\varDelta x \to 0}\frac{f(a+\varDelta x)-f(a)}{\varDelta x} \\ &= \lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{aligned}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

미분계수

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

예제 2 함수 $f(x)=2x^2$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하시오.

풀이 1

$$\begin{aligned}f'(1)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(1+\Delta x)^2-2\times 1^2}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}(4+2\Delta x)\\&=4\end{aligned}$$

풀이 2

$$\begin{aligned}f'(1)&=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2\times 1^2}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{2(x+1)(x-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}2(x+1)\\&=4\end{aligned}$$

답 4

문제 3 다음 함수의 $x=2$에서의 미분계수를 구하시오.

(1) $f(x)=3x+1$　　(2) $f(x)=-x^2+5$

문제 4 용량이 180000 L인 원기둥의 모양의 물탱크에 물이 가득 차 있다. 토리첼리(Torricelli, E., 1608~1647)의 법칙에 의하면 이 물탱크의 바닥에 있는 밸브를 연 지 t분 후에 남아 있는 물의 양 $V(t)$ L는

$$V(t)=180000\left(1-\frac{t}{60}\right)^2\ (0\le t\le 60)$$

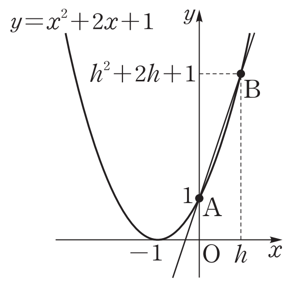
이다. 밸브를 연 지 20분 후에 물탱크에 남아 있는 물의 양의 순간변화율을 구하시오.

(출처: Stewart, J., 『Calculus』)

미분계수는 기하학적으로 어떤 의미를 가질까

생각톡

오른쪽 그림은 곡선 $y=x^2+2x+1$과 그 위의 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(h,\ h^2+2h+1)$을 나타낸 것이다.



탐구 ① h가 0에 한없이 가까워질 때, 점 B는 어떤 점에 한없이 가까워지는지 말해 보자.

탐구 ② h가 0에 한없이 가까워질 때, 직선 AB는 어떤 직선에 한없이 가까워지는지 말해 보자.

함수의 그래프에서 미분계수의 기하적 의미를 알아보자.

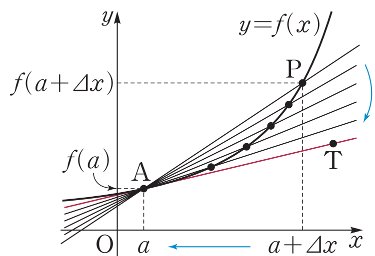
함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다고 하자.

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{P}(a+\Delta x,\ f(a+\Delta x))$를 지나는 직선 AP의 기울기와 같다.

이때 $\Delta x \longrightarrow 0$이면 점 P는 곡선 $y=f(x)$를 따라 점 A에 한없이 가까워지고, 직선 AP는 오른쪽 그림과 같이 점 A를 지나는 일정한 직선 AT에 한없이 가까워진다.



이 직선 AT를 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이라 하고, 점 A를 접점이라고 한다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

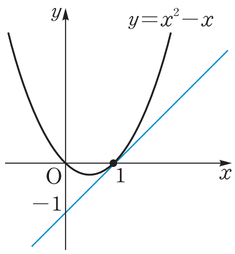
는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선 AT의 기울기를 나타낸다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

미분계수의 기하적 의미

함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

예제 3 곡선 $y=x^2-x$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기를 구하시오.



풀이 $f(x)=x^2-x$라고 하면 점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$과 같으므로

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{(1+\Delta x)^2-(1+\Delta x)\}-(1^2-1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (1+\Delta x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

답 1

문제 5 다음 곡선 위의 주어진 점에서의 접선의 기울기를 구하시오.

(1) $y=-x^2+2x \quad (-1, -3)$　　(2) $y=2x^2-x+1 \quad (0, 1)$

미분가능성과 연속성은 어떤 관계가 있을까

함수의 미분가능성과 연속성 사이에는 어떤 관계가 있는지 알아보자.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $x=a$에서의 미분계수

$$f'(a)=\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

가 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a}\{f(x)-f(a)\} &= \lim_{x \to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right\} \\ &= \lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x \to a}(x-a) \\ &= f'(a)\cdot 0=0 \end{aligned}$$

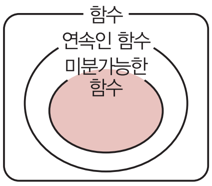
이다. 따라서

$$\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

$\lim_{x \to a}\{f(x)-k\}=0$
$\Longleftrightarrow \lim_{x \to a} f(x)=k$
(단, k는 실수)

이상을 정리하면 다음과 같다.



미분가능성과 연속성

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

위의 역은 성립하지 않는다. 즉 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 경우가 있다.

예제 4 **함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않음을 보이시오.**

증명 $f(0)=0$이고 $\lim_{x \to 0} f(x)=\lim_{x \to 0}|x|=0$이므로

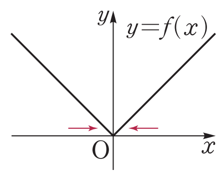
$$\lim_{x \to 0} f(x)=f(0)$$

즉 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이다.

그런데

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x}=\lim_{x \to 0+} \frac{x}{x}=1,$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x}=\lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x}=-1$$



이므로 극한값 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

문제 6 **함수 $f(x)=|x^2-1|$의 $x=1$에서의 연속성과 미분가능성을 조사하시오.**

판별하기

다음은 두 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & (x \geq 0) \\ 2x & (x<0) \end{cases}$, $g(x)=x|x|$에 대한 지혜와 상우의 대화이다.

지혜와 상우의 이야기가 각각 옳은지 말해 보자.


지혜: 함수 $f(x)$는 구간으로 나누어 정의되어 있으니까 구간의 경곗값인 $x=0$에서 미분가능하지 않아.


상우: 함수 $g(x)$는 식에 $|x|$가 포함되어 있으니까 $x=0$에서 미분가능하지 않아.

공학 도구 활용

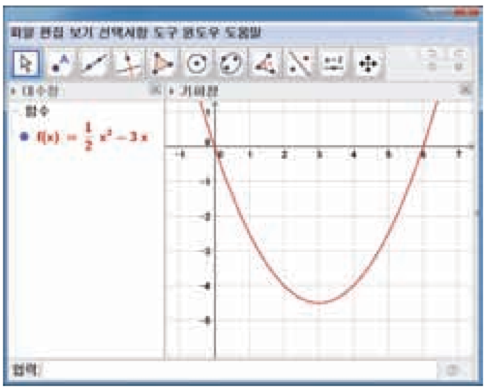
정보 처리 추론

미분계수의 기하적 의미 확인하기

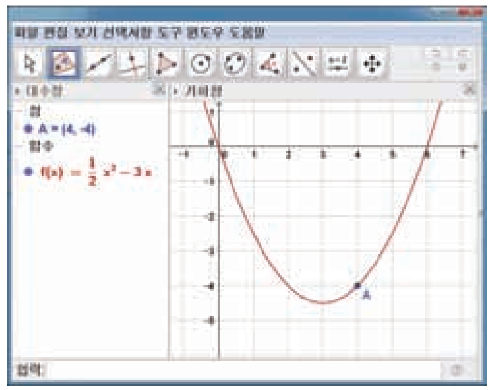
컴퓨터 기하 프로그램을 이용하면 곡선 위의 한 점에서의 접선을 그릴 수 있다.

다음과 같은 방법으로 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-3x$ 위의 점 $(4,\ -4)$에서의 접선을 그려 보고, $x=4$에서의 미분계수의 기하적 의미를 확인해 보자.

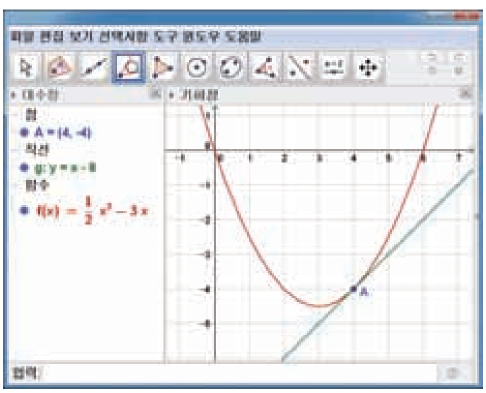
❶ 입력창에 'f(x)=1/2x^2−3x'를 입력한 후 Enter↵를 누르면 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-3x$가 그려진다.



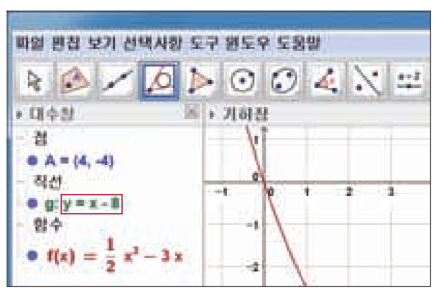
❷ 대상 위의 점을 선택하여 점 $\mathrm{A}(4,\ -4)$를 표시한다.



❸ 접선을 선택하고 곡선과 점 A를 선택하면 곡선 위의 점 A에서의 접선이 그려진다.



❹ 대수창에서 접선의 방정식은 $y=x-8$이고 접선의 기울기는 1임을 알 수 있다. 실제로 함수 $y=\frac{1}{2}x^2-3x$의 $x=4$에서의 미분계수를 구해 보면 접선의 기울기와 같음을 확인할 수 있다.



활동 위와 같은 방법으로 곡선 $y=-x^3$ 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선을 그려 보고, 그 접선의 기울기가 함수 $y=-x^3$의 $x=1$에서의 미분계수와 같음을 확인해 보자.

2 도함수

- 함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다.
- 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.

도함수란 무엇일까

생각톡

다음은 함수 $f(x)=x^2$과 실수 a에 대하여 $f'(a)$의 값을 구한 것이다.

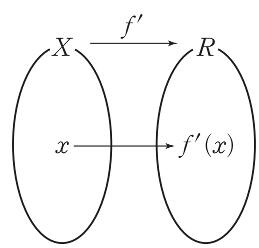
$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}(2a+\Delta x)=2a$$

탐구 ① $f'(1)$, $f'(2)$의 값을 구해 보자.

탐구 ② 실수 a에 $f'(a)$를 대응시키면 그 대응은 함수인지 말해 보자.

위의 생각톡의 함수 $f(x)$에서 실수 a의 값에 따라 $f'(a)$의 값은 오직 하나씩 정해지므로 실수 a에 미분계수 $f'(a)$를 대응시키면 그 대응은 함수이다.

일반적으로 함수 $y=f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x에서 미분가능할 때, 정의역의 각 원소 x에 미분계수 $f'(x)$를 대응시키면 새로운 함수를 얻는다. 이 함수를 함수 $y=f(x)$의 **도함수**라 하고, 이것을 기호로



$$f'(x),\ y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x)$$

와 같이 나타낸다. 즉

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

도함수

미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Δx 대신에 h를 사용하면
$f'(x)$
$=\lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

함수 $f(x)$ $\xrightarrow{\text{미분}}$ 도함수 $f'(x)$

함수 $f(x)$에서 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 $f(x)$를 x에 대하여 미분한다고 하고, 그 계산법을 미분법이라고 한다.

또 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 도함수 $f'(x)$의 식에 $x=a$를 대입한 값이다.

예제 1 **함수 $f(x)=x^2+3x$의 도함수를 구하시오.**

풀이
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^2+3(x+h)\}-(x^2+3x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2+3h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(2x+h+3)\\
&= 2x+3
\end{aligned}
$$

답 $f'(x)=2x+3$

$f(x)=x^2+3x$일 때 함수 $y=f(x)$의 도함수는
$y'=2x+3$,
$\dfrac{dy}{dx}=2x+3$,
$\dfrac{d}{dx}f(x)=2x+3$
과 같이 나타낼 수도 있다.

문제 1 **다음 함수의 도함수를 구하시오.**

(1) $f(x)=2x$　　(2) $f(x)=x^2-x$

(3) $f(x)=x^3+1$　　(4) $f(x)=2030$

이야기 수학

미분을 둘러싼 논쟁

17세기 영국의 수학자 뉴턴(Newton, I., 1642~1727)은 움직이는 물체의 위치와 속도를 연구하면서 미분법을 발견하였으나 그는 이 사실을 발표하지 않았다.

10여 년이 지난 후 독일의 수학자 라이프니츠(Leibniz, G. W., 1646~1716)는 곡선 위의 한 점에서의 접선을 연구하면서 미분법을 발견하여 세상에 발표하였다. 이로 인해 영국과 독일의 수학자들은 오랜 기간 동안 미분법을 누가 먼저 발견하였는가에 대하여 논쟁을 하였다. 오늘날에는 뉴턴과 라이프니츠가 각각 독자적으로 미분을 발견했다고 보고, 두 수학자의 업적을 모두 인정해 주고 있다.

(출처: 하워드 이브스, 『수학의 위대한 순간들』)

뉴턴　라이프니츠

함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수는 무엇일까

생각 톡

다음은 함수 $f(x)$와 그 도함수 $f'(x)$를 표로 나타낸 것이다.

$f(x)$	x^2	x^3	x^4	x^5
$f'(x)$	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	$5x^4$

탐구 위의 표로부터 n이 2 이상의 정수일 때, 함수 $f(x)=x^n$의 도함수 $f'(x)$를 추측해 보자.

도함수의 정의를 이용하여 함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수를 구해 보자.

$n\neq 1$일 때 $y=x^n$에서 $f(x)=x^n$이라고 하면

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)-x\}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}\}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}\} \\ &= \underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}}_{n\text{개}} \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

n이 1이 아닌 양의 정수일 때
a^n-b^n
$=(a-b)$
$\times(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$

이고, $n=1$일 때 $y=x$에서 $f(x)=x$라고 하면

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=1$$

이다.

또 상수함수 $y=c$ (c는 상수)에서 $f(x)=c$라고 하면

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=0$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$(x^n)'=nx^{n-1}$

함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)과 상수함수의 도함수

❶ $y=x^n$ (n은 양의 정수)이면

$n\neq 1$일 때 $\quad y'=nx^{n-1}$

$n=1$일 때 $\quad y'=1$

❷ $y=c$ (c는 상수)이면 $\quad y'=0$

보기 $y=x^6$이면 $y'=6x^{6-1}=6x^5$

문제 2 다음 함수의 도함수를 구하시오.

(1) $y=x^{10}$ (2) $y=100$

함수의 실수배, 합, 차는 어떻게 미분할까

생각톡

두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x$에 대하여 다음을 알아보자.

탐구 ① $f'(x)+g'(x)$를 구해 보자.

탐구 ② $\{f(x)+g(x)\}'$을 구하여 **탐구 ①**의 결과와 비교해 보자.

미분가능한 함수의 실수배, 합, 차의 미분법을 알아보자.

함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 함수 $y=cf(x)$ (c는 상수)의 도함수는

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{c\{f(x+h)-f(x)\}}{h} \\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$가 존재할 때,
$\lim\limits_{x\to a} cf(x)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)$
(단, c는 상수)

이다. 또 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 함수 $y=f(x)+g(x)$의 도함수는

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}+\{g(x+h)-g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x)+g'(x) \end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$가 존재할 때,
$\lim\limits_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$
$=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$

이다.

스스로 개념탐구

위와 같은 방법으로 함수 $y=f(x)-g(x)$의 도함수는

$$y'=f'(x)-g'(x)$$

임을 확인해 보자.

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수의 실수배, 합, 차의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

❶ $\{cf(x)\}'=cf'(x)$ (단, c는 상수)

❷ $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

❸ $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

오른쪽 성질 ❷, ❸은 세 개 이상의 함수에 대해서도 성립한다.

예제 2 함수 $y=x^2-3x+2$를 미분하시오.

풀이 $y'=(x^2-3x+2)'=(x^2)'-(3x)'+(2)'=(x^2)'-3(x)'+(2)'$

$=2x-3\times1+0=2x-3$

답 $y'=2x-3$

문제 3 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=2x^3+4x^2-7x+1$

(2) $y=x^4-2x^2-5$

함수의 곱은 어떻게 미분할까

미분가능한 함수의 곱의 미분법을 알아보자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 함수 $y=f(x)g(x)$의 도함수는

$$\begin{aligned}
y'&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to0}g(x+h)+f(x)\cdot\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

이다.

함수 $g(x)$가 미분가능하면 연속이므로 $\lim_{h\to0}g(x+h)=g(x)$

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수의 곱의 미분법은 독일의 수학자 라이프니츠의 이름을 따서 '라이프니츠 법칙'이라고도 한다.

함수의 곱의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

예제 3 함수 $y=(x^2-3)(x+2)$를 미분하시오.

풀이 $y'=\{(x^2-3)(x+2)\}'$

$=(x^2-3)'(x+2)+(x^2-3)(x+2)'$

$=2x(x+2)+(x^2-3)\cdot 1$

$=3x^2+4x-3$

답 $y'=3x^2+4x-3$

문제 4 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=(x+1)(2x-1)$

(2) $y=(x^2+x)(4x+3)$

문제 5 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 미분가능할 때, 함수의 곱의 미분법을 이용하여 함수 $y=f(x)g(x)h(x)$의 도함수가

$$y'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$

임을 보이시오.

문제 해결하기

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y=\{f(x)\}^2$의 도함수는 $y'=2f(x)f'(x)$이다.

1 함수의 곱의 미분법을 이용하여 위의 등식이 성립함을 확인해 보자.

2 다항식 x^{100}을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라고 하면

$$x^{100}=(x-1)^2Q(x)+R(x)$$

이다. 이때 함수 $y=\{f(x)\}^2$의 도함수를 이용하여 나머지 $R(x)$를 구해 보자.

수학 역량 플러스

창의·융합 의사소통

한계 비용

미분은 제품을 생산하여 판매하는 기업이 합리적인 의사 결정을 하는 데 도움을 준다.

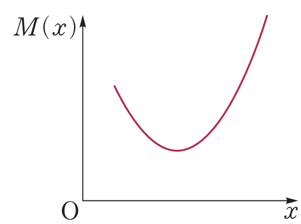
기업이 제품을 생산하는 데 필요한 생산비는 공장 건물의 임대료, 연구 개발비와 같이 생산량에 관계없이 일정한 고정 비용과 재료 구입비, 전기료와 같이 생산량에 따라 변하는 가변 비용으로 이루어진다.

(생산비)=(고정 비용)+(가변 비용)

한계 비용(Marginal Cost)은 생산량의 증분에 대한 생산비의 증분의 비, 즉 제품 한 단위를 더 생산하는 데 필요한 생산비의 증가량을 의미한다. 어떤 제품을 x단위 생산할 때, 전체 생산비를 $C(x)$, 한계 비용을 $M(x)$라고 하면 $M(x)$는 다음과 같다. (단, x는 연속으로 생각한다.)

$$M(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{C(x+\Delta x)-C(x)}{\Delta x}=C'(x)$$

한계 비용 함수 $M(x)$의 그래프는 일반적으로 오른쪽 그림과 같이 U자 모양으로 나타나는데 이것은 한계 비용이 생산량의 증가에 따라 점차 감소하다가 일정한 생산량을 초과하면 다시 증가함을 의미한다.



이러한 한계 비용은 기업이 생산량을 결정하는 중요한 기준이 된다.

(출처: 안홍식, 『경제학원론』,
Stewart, J., 『Calculus』)

활동 1 어떤 기업이 제품 A를 x단위 생산하는 데 드는 생산비를 $C(x)$라고 하면

$$C(x)=0.001x^3-0.3x^2+100x+50000\ (x\geq 0)$$

이라고 한다. $C(0)$의 값은 무엇을 의미하는지 말해 보자.

활동 2 활동 1에서 한계 비용 $M(x)$가 최소일 때의 생산량을 구해 보자.

중단원 마무리

❶ 미분계수

(1) 함수 $y=f(x)$에서

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

를 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 $\boxed{}$이라고 한다.

(2) 함수 $y=f(x)$에서 극한값 $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$가 존재하면 이 값을 $x=a$에서의 순간변화율 또는 $\boxed{}$라고 한다.

(3) **미분계수의 기하적 의미**

함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 $\boxed{}$와 같다.

❷ 미분가능성과 연속성

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

❸ 도함수

(1) 미분가능한 함수 $f(x)$에서

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

를 함수 $f(x)$의 $\boxed{}$라고 한다.

(2) **함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)과 상수함수의 도함수**

① $y=x^n$ (n은 양의 정수)이면

$n\neq 1$일 때 $y'=\boxed{}$

$n=1$일 때 $y'=\boxed{}$

② $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=\boxed{}$

❹ 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

(1) $\{cf(x)\}'=\boxed{}$ (단, c는 상수)

(2) $\{f(x)+g(x)\}'=\boxed{}$

(3) $\{f(x)-g(x)\}'=\boxed{}$

(4) $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+\boxed{}$

기본 문제

1 함수 $f(x)=x^3-4x+6$에서 x의 값이 -2에서 1까지 변할 때의 평균변화율을 구하시오.

2 함수 $f(x)=-x^2+5x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, 6)$에서의 접선의 기울기를 구하시오.

3 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+x & (x\geq 2) \\ -x^2+9x-8 & (x<2)\end{cases}$의 $x=2$에서의 연속성과 미분가능성을 조사하시오.

4 도함수의 정의를 이용하여 다음 함수의 도함수를 구하시오.

(1) $f(x)=3x-1$ (2) $f(x)=x^2+2x$

5 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=3x^2-4x+2$

(2) $y=(x+3)(2x^2+x-5)$

(3) $y=(x+1)(x+2)(x+3)$

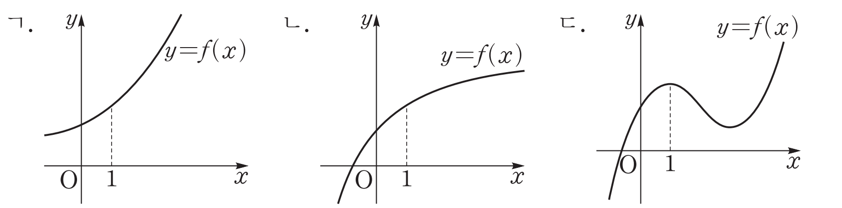
표준 문제

서술형

6 함수 $f(x)=x^2+2x+3$에서 x의 값이 -1에서 3까지 변할 때의 평균변화율과 $x=a$에서의 미분계수가 같을 때, 상수 a의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

7 보기의 함수 $y=f(x)$의 그래프 중에서 $x>1$일 때 부등식 $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \geq f'(1)$을 항상 만족시키는 것만을 있는 대로 고르시오.

보기



8 함수 $f(x)=5x^2+1$에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4-h)-f(4)}{8h}$의 값을 구하시오.

9 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(3)=-2$, $f'(3)=1$일 때, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)+2}{x^2-9}$의 값을 구하시오.

10 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$의 그래프 위의 점 $(1, -2)$에서의 접선의 기울기가 -4일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

추론

11 함수 $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & (x\geq 1) \\ x^3-x+3 & (x<1) \end{cases}$ 이 모든 실수 x에서 미분가능할 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

12 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3,\quad \lim_{x\to 1}\frac{g(x)-3}{x-1}=5$$

를 만족시킬 때, 함수 $y=f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하시오.

발전 문제

13 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}=10$일 때,

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$의 값을 구하시오.

문제 해결

14 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x, y에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$의 도함수를 구하시오.

(가) $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$	(나) $f'(0)=2$

서술형

15 다항식 x^4+ax^3+bx-6을 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $-8x-6$이다. 이때 상수 a, b의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.