도미노 놀이는 직사각형 모양의 작은 블록을 일정한 간격으로 세워 놓고 쓰러뜨리는 놀이이다. 일정한 간격으로 세워 놓은 도미노는 블록 하나가 넘어지면 다음 블록도 넘어지고, 그 다음 블록들도 차례대로 넘어지므로 처음에 세워진 블록이 넘어지면 모든 블록이 넘어지게 된다.

이와 같은 도미노의 원리는 어떤 명제가 모든 자연수에 대하여 성립함을 증명하는 방법인 수학적 귀납법에 이용된다.

이 단원에서는 수열의 귀납적 정의를 이해하고, 수학적 귀납법을 알아본다.

(출처: 두산백과사전, 2016)

3 수학적 귀납법

준비학습

1 다음 수열의 일반항 a_n을 구하시오.

(1) 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열

(2) 첫째항이 3, 공비가 4인 등비수열

2 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 다음과 같을 때, a_{n+1}을 구하시오.

(1) $a_n=n^2+n$

(2) $a_n=\dfrac{n+1}{n}$

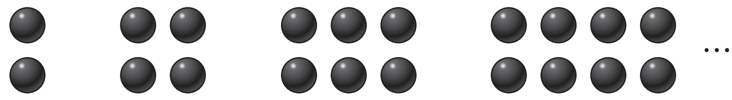
1 수열의 귀납적 정의

- 수열의 귀납적 정의를 이해한다.

수열의 귀납적 정의란 무엇일까

생각톡

다음 그림과 같이 바둑돌을 규칙적으로 배열하려고 한다.



[1단계] [2단계] [3단계] [4단계]

탐구 ① [5단계]의 바둑돌의 개수를 구해 보자.

탐구 ② [n단계]의 바둑돌의 개수를 a_n이라고 할 때, a_{n+1}을 a_n을 이용하여 나타내 보자.

위의 생각톡에서

$$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

임을 알 수 있다.

이때 관계식 $a_{n+1}=a_n+2$의 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1+2=2+2=4,$$
$$a_3=a_2+2=4+2=6,$$
$$a_4=a_3+2=6+2=8,$$
$$a_5=a_4+2=8+2=10,$$
$$\vdots$$

과 같이 수열 $\{a_n\}$의 모든 항을 구할 수 있다.

이와 같이 수열의 일반항이 주어지지 않아도 처음 몇 개의 항과 이웃하는 여러 항 사이의 관계식이 주어지면 그 수열의 모든 항을 구할 수 있다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$을

❶ 첫째항 a_1의 값

❷ 두 항 a_n, a_{n+1} 사이의 관계식 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

과 같이 정의할 수 있다.

이와 같이 수열을 처음 몇 개의 항과 이웃하는 여러 항 사이의 관계식으로 정의하는 것을 수열의 **귀납적 정의**라고 한다.

보기 $a_1=1$, $a_{n+1}=3a_n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서

$$a_2=3a_1=3\times1=3,$$
$$a_3=3a_2=3\times3=9,$$
$$a_4=3a_3=3\times9=27,$$
$$\vdots$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 $1, 3, 9, 27, \cdots$이다.

참고 ① $a_1=a$, $a_{n+1}=a_n+d$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)와 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열이다.
② $a_1=a$, $a_{n+1}=ra_n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열이다.

문제 1 **다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 제4항을 구하시오.**

(1) $a_1=4$, $a_{n+1}=a_n+5$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)
(2) $a_1=3$, $a_{n+1}=2a_n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)
(3) $a_1=7$, $a_{n+1}=a_n+4n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

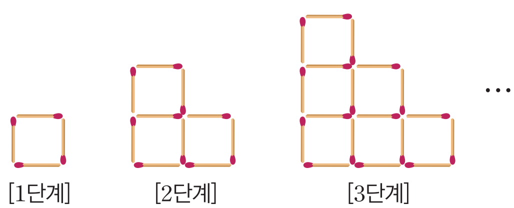
예제 1 **어느 연극 동아리 모임에 참석한 n명의 회원이 모두 서로 한 번씩 악수를 하였다. n명의 회원이 악수한 총횟수를 a_n이라고 할 때, a_1을 구하고, a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하시오.**

풀이 한 명의 회원이 참석하면 악수를 할 수 없으므로 $a_1=0$
n명의 회원이 악수한 총횟수는 a_n이고, n명의 회원이 모두 악수를 한 후 $(n+1)$번째 회원이 참석하면 $(n+1)$번째 회원은 먼저 와 있던 n명의 회원과 한 번씩 악수를 하게 되므로

$$a_{n+1}=a_n+n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

답 $a_1=0$, $a_{n+1}=a_n+n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

문제 2 **다음 그림과 같이 성냥개비를 사용하여 도형을 만들려고 한다. [n단계]의 도형을 만드는 데 필요한 성냥개비의 개수를 a_n이라고 할 때, a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하시오.**



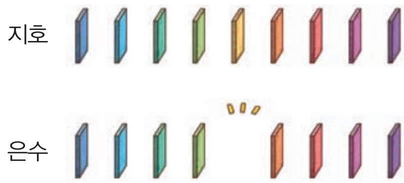
2 수학적 귀납법

- 수학적 귀납법의 원리를 이해하고, 이를 이용하여 명제를 증명할 수 있다.

수학적 귀납법이란 무엇일까

생각 톡

지호와 은수는 오른쪽 그림과 같이 도미노를 세웠다.



탐구 ① 첫 번째 블록을 넘어뜨렸을 때 지호와 은수의 도미노는 어떻게 될지 예측해 보자.

탐구 ② 하나의 블록을 넘어뜨려 모든 블록을 넘어뜨리려고 할 때, 필요한 두 가지 조건을 말해 보자.

페아노(Peano, G., 1858~1932)
이탈리아의 수학자로 자연수론을 처음으로 공리적으로 전개하였다. 페아노의 제5공리가 수학적 귀납법의 원리이다.

모든 자연수 n에 대하여 등식

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \quad \cdots\cdots ①$$

이 성립함을 등차수열의 합을 이용하지 않고 증명해 보자.

①의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립함을 보이는 것은 불가능하므로 다음과 같은 방법으로 증명해 보자.

(i) $n=1$일 때,

$$(\text{좌변})=1,\ (\text{우변})=1^2=1$$

이므로 $n=1$일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2 \quad \cdots\cdots ②$$

이다. 이때 ②의 양변에 $2k+1$을 더하면

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)$$
$$=(k+1)^2 \quad \cdots\cdots ③$$

이다. ③은 ①의 n에 $k+1$을 대입한 것과 같으므로 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

(i)에 의하여 $n=1$일 때 ①이 성립한다.

$n=1$일 때 ①이 성립하므로 (ii)에 의하여 $n=2$일 때도 ①이 성립한다.

$n=2$일 때 ①이 성립하므로 (ii)에 의하여 $n=3$일 때도 ①이 성립한다.

같은 방법으로 n이 4, 5, 6, …일 때도 ①이 성립한다.

따라서 (i), (ii)가 성립함을 보이면 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립함을 증명한 것이 된다.

이와 같은 방법으로 자연수에 대한 어떤 명제가 참임을 증명하는 방법을 **수학적 귀납법**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

예제 1 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \cdots\cdots ①$$

증명 (i) $n=1$일 때,

$$(\text{좌변})=1^2=1,\ (\text{우변})=\frac{1\times2\times3}{6}=1$$

따라서 $n=1$일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

양변에 $(k+1)^2$을 더하면

$$\begin{aligned}1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\&=\frac{k+1}{6}\{k(2k+1)+6(k+1)\}\\&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \qquad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

②는 ①의 n에 $k+1$을 대입한 것과 같으므로 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

문제 1 모든 자연수 n에 대하여 등식 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 m ($m \geq 2$인 자연수) 이상의 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

> (i) $n=m$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.
> (ii) $n=k$ $(k \geq m)$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

예제 2 $h>0$일 때, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

$$(1+h)^n > 1+nh \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

증명 (i) $n=2$일 때,

$(\text{좌변})=(1+h)^2=1+2h+h^2$, $(\text{우변})=1+2h$

이때 $h^2>0$이므로 $\quad 1+2h+h^2>1+2h$

따라서 $n=2$일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$ $(k \geq 2)$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k > 1+kh$

양변에 $1+h$를 곱하면 $1+h>0$이므로

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1} &> (1+kh)(1+h)\\ &= 1+(k+1)h+kh^2 \qquad \cdots\cdots \text{②}\end{aligned}$$

이때 $kh^2>0$이므로 $\quad 1+(k+1)h+kh^2>1+(k+1)h \qquad \cdots\cdots$ ③

②, ③에서 $\quad (1+h)^{k+1}>1+(k+1)h \qquad \cdots\cdots$ ④

④는 ①의 n에 $k+1$을 대입한 것과 같으므로 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

문제 2 $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $2^n>n^2$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

분석하기

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 다음 조건을 모두 만족시킨다고 한다.

> (i) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+2$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

1 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립하지 않는 이유를 설명해 보자.

2 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립하도록 위의 조건을 고쳐 보자.

수학 역량 플러스

창의·융합 문제 해결

하노이 탑

'하노이 탑'은 세 개의 기둥 중 어느 하나의 기둥에 크기가 큰 것부터 아래에 차례대로 쌓인 원판을 다른 기둥으로 옮기는 게임이다. 이 게임은 고대 인도의 한 사원에 있던 크기가 서로 다른 64개의 원판으로 쌓은 탑에서 유래하였고, 이 게임의 원리는 컴퓨터 프로그램에도 이용된다.

이 게임에서 원판은 다음과 같은 규칙에 따라 옮길 수 있다.

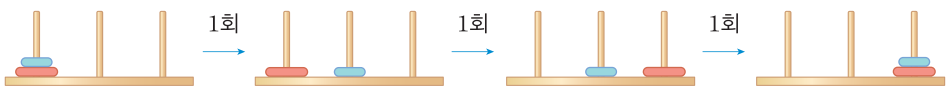
> [규칙 1] 원판은 한 번에 한 개씩만 한 기둥에서 다른 기둥으로 옮길 수 있다.
> [규칙 2] 큰 원판을 작은 원판 위에 놓을 수 없다.

위의 규칙에 따라 크기가 서로 다른 n개의 원판을 옮겨 보자.

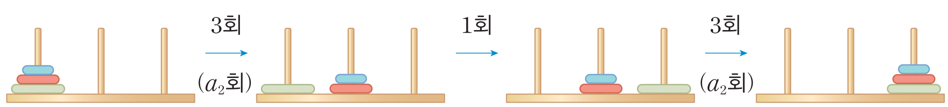
크기가 서로 다른 n개의 원판을 위의 규칙에 따라 다른 기둥으로 모두 옮기기 위한 최소 이동 횟수를 a_n이라고 하자.

원판이 1개일 때, 한 번에 옮길 수 있으므로 $a_1=1$

원판이 2개일 때, 다음 그림과 같이 세 번에 옮길 수 있으므로 $a_2=3$



원판이 3개일 때, a_3의 값을 구하는 과정은 다음 그림과 같다.



(출처: 『MATHLOVE』, 2005년 9~10월호 통권 52호)

활동 1 위의 그림을 보고 a_3을 a_2를 이용하여 나타내 보자.

활동 2 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구해 보자.

중단원 마무리

1 수열의 귀납적 정의

(1) 수열을 처음 몇 개의 항과 이웃하는 여러 항 사이의 관계식으로 정의하는 것을 수열의 $\boxed{\quad\quad}$라고 한다.

(2) **등차수열과 등비수열의 귀납적 정의**

① $a_1=a$, $a_{n+1}=a_n+d\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$와 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열이다.

② $a_1=a$, $a_{n+1}=ra_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열이다.

2 수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $n=\boxed{\quad}$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=\boxed{\quad\quad}$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

이와 같이 증명하는 방법을 $\boxed{\quad\quad}$이라고 한다.

기본 문제

1 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 제5항을 구하시오.

(1) $a_1=-1,\ a_{n+1}=a_n+4\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1=6,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

2 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$1+2+3+\ \cdots\ +n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.
(가), (나)에 알맞은 것을 구하시오.

증명

(i) $n=1$일 때,

$(\text{좌변})=1,\ (\text{우변})=\frac{1\times2}{2}=1$

따라서 $n=1$일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$1+2+3+\ \cdots\ +k=\frac{k(k+1)}{2}$$

양변에 $k+1$을 더하면

$$\begin{aligned}&1+2+3+\ \cdots\ +k+(k+1)\\&=\boxed{(가)}+(k+1)\\&=(k+1)(\boxed{(나)}+1)\\&=\frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

②는 ①의 n에 $k+1$을 대입한 것과 같으므로 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

표준 문제

3 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_7을 구하시오.

(1) $a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

4 수족관에 60 L의 물이 들어 있다. 수족관에 들어 있는 물의 $\dfrac{1}{3}$을 버리고 10 L의 물을 넣는 시행을 반복할 때, n회 시행 후 수족관에 남아 있는 물의 양을 a_n L라 고 하자. 이때 a_1을 구하고, a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하시오.

5 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1} \quad \cdots\cdots ①$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. (가), (나)에 알맞은 것을 구하시오.

증명

(i) $n=1$일 때,

$$(\text{좌변})=\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{3},\ (\text{우변})=\frac{1}{2\times1+1}=\frac{1}{3}$$

따라서 $n=1$일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

양변에 $\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$을 더하면

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\boxed{\text{(가)}}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{\boxed{\text{(나)}}}{2k+3} \quad \cdots\cdots ②$$

②는 ①의 n에 $k+1$을 대입한 것과 같으므로 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

6 $n \geq 4$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n > 2^n$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

7 모든 자연수 n에 대하여 4^n-1은 3의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

발전 문제

문제 해결

8 평면 위에 n개의 원이 있다. 이때 임의의 두 원은 서로 다른 두 점에서 만나고, 어떤 세 개의 원도 한 점에서 만나지 않는다. 이 n개의 원으로 나누어진 영역의 개수를 a_n이라고 할 때, a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하시오.

서술형

9 수열 $\{a_n\}$이 귀납적으로

$$a_1=1,\ a_{n+1}=(n+1)a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

과 같이 정의될 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{50}$을 30으로 나누었을 때의 나머지를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

추론

10 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

대단원 마무리

• 정답 및 풀이 178쪽

01 다음 수열의 일반항 a_n을 구하시오.

(1) 등차수열 35, 29, 23, 17, 11, $\cdots$

(2) 등비수열 27, -9, 3, -1, $\frac{1}{3}$, $\cdots$

02 제3항이 35, 제9항이 89인 등차수열에서 188은 제몇 항인지 구하시오.

03 첫째항이 37, 공차가 -4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{30}|a_k|$의 값을 구하시오.

04 어떤 박테리아의 수는 매시간 일정한 비율로 증가한다고 한다. 현재 a마리인 이 박테리아가 10시간 후에는 6만 마리, 20시간 후에는 9만 마리가 된다고 할 때, a의 값을 구하시오.

05 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 세 수 a, 9, b는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 3, a, b는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 이때 a, b의 값을 구하시오.

06 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}(a_{2k-1}+a_{2k})=32$일 때, $\sum_{k=1}^{20}(3a_k+5)$의 값을 구하시오.

07 첫째항이 1인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{m}a_{2k-1}=341,\ \sum_{k=1}^{m}a_{2k}=682$$

를 만족시키는 자연수 m의 값을 구하시오.

08 $\sum_{k=1}^{10}\left(\sum_{i=1}^{k}ik\right)$의 값을 구하시오.

09 $\sum_{k=1}^{n}\log_2\left(1+\frac{1}{k}\right)=7$일 때, 자연수 n의 값을 구하시오.

10 이차방정식

$$x^2+\frac{x}{n}-n-1=0\ (n\text{은 자연수})$$

의 두 근을 a_n, b_n이라고 할 때, $\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{a_k}+\frac{1}{b_k}\right)$의 값을 구하시오.

11 수열 $\{a_n\}$이 귀납적으로

$$a_1=21,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

와 같이 정의될 때, a_5를 구하시오.

12 $n(n\geq 2)$명의 학생을 두 조로 나누는 방법의 수를 a_n이라고 할 때, a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하시오.

13 다음은 모든 자연수 n에 대하여 n^3+3n^2+2n은 6의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. (가), (나), (다)에 알맞은 수들을 모두 더한 값을 구하시오.

> 증명
>
> $a_n=n^3+3n^2+2n$이라고 하자.
>
> (i) $n=1$이면 $a_1=\boxed{(가)}$이므로 6의 배수이다.
>
> (ii) $n=k$일 때 a_n이 6의 배수라고 가정하면
>
> $$(k+1)^3+3(k+1)^2+2(k+1)$$
> $$=(k^3+3k^2+2k)+\boxed{(나)}(k+1)(k+\boxed{(다)})$$
>
> 이므로 $n=k+1$일 때도 a_n은 6의 배수이다.
>
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 a_n은 6의 배수이다.

14 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$$

가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

서술형

• 정답 및 풀이 178쪽

15 100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수의 합을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

16 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n(n+1)$일 때, $\sum_{k=1}^{10} {a_k}^2$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

17 다음 수열의 첫째항부터 제15항까지의 합을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

$$\frac{1}{2^2-1},\ \frac{1}{4^2-1},\ \frac{1}{6^2-1},\ \frac{1}{8^2-1},\ \cdots$$

풀이

18 수열 $\{a_n\}$이 귀납적으로

$$a_1=6,\ a_2=-3,\ {a_{n+1}}^2=a_n a_{n+2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

와 같이 정의될 때, $\sum_{k=1}^{6} a_k$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

자기 평가

	만족	보통	미흡
❶ 등차수열과 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.			
❷ $\sum$의 뜻을 알고, $\sum$의 성질을 이용하여 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있다.			
❸ 수학적 귀납법의 원리를 이해하고, 이를 이용하여 명제를 증명할 수 있다.			

보충 계획

부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

창의·융합 프로젝트

피보나치수열

이탈리아의 수학자 피보나치(Fibonacci, 1170?~1250?)는 아라비아에서 발전된 수학을 유럽에 소개하여 유럽 여러 나라의 수학을 발전시키는 데 크게 기여하였다.

피보나치는 1202년 자신의 저서 『산반서(Liber abaci)』에서 다음과 같은 토끼의 번식에 대한 문제를 제시하였다.

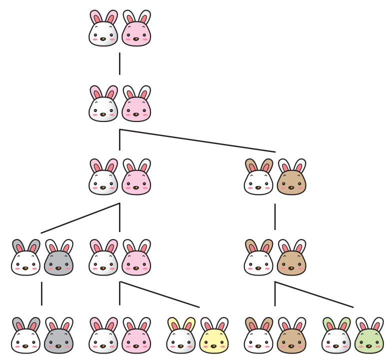
> 갓 태어난 토끼 암수 한 쌍이 있다. 이 토끼 한 쌍은 태어난 지 두 달이 되는 달부터 매달 암수 한 쌍의 토끼를 낳으며, 새로 태어난 토끼 한 쌍도 태어난 지 두 달이 되는 달부터 매달 암수 한 쌍의 토끼를 낳는다. 일 년 후 토끼는 모두 몇 쌍이 될까? (단, 토끼는 중간에 죽지 않는다.)

토끼 한 쌍이 태어난 달을 시작으로 매달 토끼가 모두 몇 쌍인지 구하여 나열하면

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \cdots$$

과 같은 수열을 얻는데, 이 수열을 '피보나치수열'이라고 한다.

피보나치수열은 해바라기 씨의 배열과 같은 자연 현상에서도 찾을 수 있다.



(출처: 알프레드S. 포사멘티어 외, 『피보나치 넘버스』)

과제 1 피보나치수열을 귀납적으로 정의해 보자.

과제 2 자연 현상 또는 일상생활에서 발견되는 피보나치수열의 예를 찾아 발표해 보자.

Math × Literature

보고 말하기 수열

세상 속 수학

다음은 어떤 규칙을 갖는 수열일까?

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, 1113213211, ⋯

이 수열은 1986년 영국의 수학자 콘웨이(Conway, J. H., 1937~)가 소개한 '보고 말하기 수열(look and say sequence)'이다. 이 수열은 소설 『뻐꾸기 알』, 『개미』에 등장하기도 하였는데, 우리나라에서는 『개미』에 등장한 후 유명해져서 '개미 수열'로 더 잘 알려져 있다.

'보고 말하기 수열'은 앞의 수를 연속된 같은 숫자의 개수와 해당 숫자로 묶어서 읽는 방식으로 만들어진다.

1
1개의 1
11
2개의 1
21
1개의 2와 1개의 1
1211
1개의 1과 1개의 2와 2개의 1
111221
3개의 1과 2개의 2와 1개의 1
312211
1개의 3과 1개의 1과 2개의 2와 2개의 1
13112221
⋮

같은 방법으로 1이 아닌 다른 정수로 시작하는 수열을 만들 수 있다.

이때 22로 시작한 수열은 22, 22, 22, 22, ⋯로 모든 항의 숫자가 같다.

또 처음 시작하는 수가 숫자 1, 2, 3만을 사용하여 만든 수이면서 연속된 같은 숫자의 개수가 3 이하이면 이 수열에서 1, 2, 3 이외의 숫자는 나오지 않는다.

(출처: J. H. Conway, 『The weird and wonderful chemistry of audioactive decay』)

진로 탐색

소설가 | 소설의 주제를 결정하고 그 주제를 가장 효과적으로 나타낼 수 있는 소재들을 찾아 적절하게 구성하여 예술적으로 표현한다. 수학의 이론 또는 그 이론의 탄생 배경이나 수학자의 삶을 소재로 한 소설을 수학 소설이라고 하는데, 수학 소설을 쓰는 소설가는 독자들이 수학의 유용성을 경험하여 수학에 흥미를 갖게 한다.