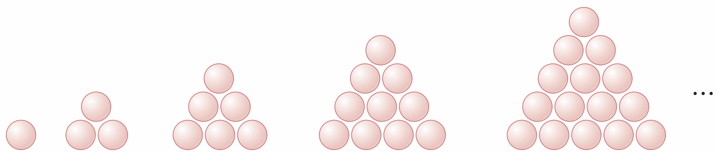
우리는 주변에서 타일을 깔아 놓은 모양이나 과일을 쌓아 올린 모양과 같이 일정한 규칙에 따라 배열된 도형을 흔히 볼 수 있다. 고대 그리스 피타고라스학파는 이러한 도형과 수를 연결하여 도형수를 연구하였다. 도형수란 도형의 모양으로 배열한 점의 개수와 도형을 대응시킨 것으로 삼각수, 사각수 등이 있다.

삼각수는 다음 그림과 같이 정삼각형 모양으로 점을 배열할 때, 배열한 점의 개수 1, 3, 6, 10, 15, …를 말하며 n번째 삼각수는 1부터 n까지의 자연수의 합과 같다.



$1 \quad 3=1+2 \quad 6=1+2+3 \quad 10=1+2+3+4 \quad 15=1+2+3+4+5 \quad \cdots$

이 단원에서는 기호 $\sum$의 뜻과 성질을 이해하고, 여러 가지 수열의 합을 구하는 방법을 알아본다.

(출처: 레이먼드 플러드, 로빈 윌슨, 『위대한 수학자의 수학의 즐거움』)

2 수열의 합

준 비 학 습

1 다음 수열의 일반항 a_n을 추측해 보시오.

$$\frac{1}{1\times2},\ \frac{1}{2\times3},\ \frac{1}{3\times4},\ \frac{1}{4\times5},\ \cdots$$

2 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $1+3+5+\cdots+19$　　　　(2) $3+3^2+3^3+\cdots+3^{10}$

1 기호 $\sum$의 뜻과 성질

- $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

기호 $\sum$는 무엇을 의미할까

생각톡

$3+6+9+12+15$는 '수열 $\{3n\}$의 첫째항부터 제5항까지의 합'으로 나타낼 수 있다.

탐구 위와 같은 방법으로 $5+10+15+\cdots+100$은 어떻게 나타낼 수 있는지 말해 보자.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

을 기호 $\sum$를 사용하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k$와 같이 나타낼 수 있다. 즉

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

이다.

제n항까지

$\sum_{k=1}^{n} a_k$ ← 일반항

첫째항부터

a_k를 차례대로 더한다.

기호 Σ는 합을 뜻하는 Sum의 첫 글자 S에 해당하는 그리스 문자의 대문자로 '시그마(sigma)'라고 읽는다.

이때 $\sum_{k=1}^{n} a_k$는 일반항 a_k의 k에 $1, 2, 3, \cdots, n$을 차례대로 대입하여 얻은 n개의 항 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$의 합을 뜻한다.

한편 $\sum_{k=1}^{n} a_k$는 k 대신에 다른 문자를 사용하여

$$\sum_{i=1}^{n} a_i,\ \sum_{j=1}^{n} a_j,\ \sum_{l=1}^{n} a_l$$

등과 같이 나타내기도 한다.

보기

① $2+4+6+\cdots+64=\sum_{k=1}^{32} 2k$

② $\sum_{i=1}^{15} 5^i=5+5^2+5^3+\cdots+5^{15}$

문제 1 다음을 기호 $\sum$를 사용하여 나타내시오.

(1) $6+6^2+6^3+\cdots+6^n$

(2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^9}$

(3) $1+4+7+\cdots+22$

(4) $1\times3+3\times5+5\times7+\cdots+19\times21$

문제 2 다음을 기호 $\sum$를 사용하지 않은 합의 꼴로 나타내시오.

(1) $\sum_{k=1}^{5} 4k$

(2) $\sum_{k=1}^{9} k^3$

(3) $\sum_{i=1}^{12} 2^i$

(4) $\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{j+1}$

$\sum_{k=m}^{n} a_k$는 첫째항부터 제 n항까지의 합에서 첫째항부터 제 $(m-1)$항까지의 합을 뺀 것과 같으므로 다음이 성립한다.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{m-1} a_k$$

(단, $2\le m\le n$)

$m\le n$일 때 수열 $\{a_n\}$의 제 m항부터 제 n항까지의 합

$$a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n$$

은 기호 $\sum$를 사용하여 $\sum_{k=m}^{n} a_k$와 같이 나타낸다.

보기 ❶ $6+7+8+\cdots+n=\sum_{k=6}^{n} k$

❷ $\sum_{k=4}^{15} 2^k=2^4+2^5+2^6+\cdots+2^{15}$

문제 3 다음을 기호 $\sum$를 사용하여 나타내시오.

(1) $7^{10}+7^{11}+7^{12}+\cdots+7^{20}$

(2) $5\times6+6\times7+7\times8+\cdots+n(n+1)$

문제 4 다음을 기호 $\sum$를 사용하지 않은 합의 꼴로 나타내시오.

(1) $\sum_{k=6}^{11} 3k$

(2) $\sum_{k=3}^{8} k^2$

토론하기

지수와 현우는 합 $2+4+\cdots+1024$를 다음과 같이 생각하였다.


지수

첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제 512 항까지의 합이야.

첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합이야.


현우

1 두 사람이 생각한 합을 기호 $\sum$를 사용하여 각각 나타내 보고, 두 사람이 다르게 생각한 이유를 말해 보자.

2 기호 $\sum$를 사용하면 편리한 점에 대하여 토론해 보자.

기호 $\sum$에는 어떤 성질이 있을까

기호 $\sum$의 성질을 알아보자.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)&=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots+(a_n+b_n)\\&=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)\\&=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k\end{aligned}$$

가 성립한다.

같은 방법으로

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$$

도 성립함을 알 수 있다.

또 상수 c에 대하여

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}ca_k&=ca_1+ca_2+ca_3+\cdots+ca_n\\&=c(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)=c\sum_{k=1}^{n}a_k\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+c+\cdots+c}_{n\text{개}}=cn$$

이 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$\sum$의 성질

❶ $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

❷ $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

❸ $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

❹ $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

보기

❶ $\sum_{k=1}^{n}(4a_k+9b_k)=\sum_{k=1}^{n}4a_k+\sum_{k=1}^{n}9b_k=4\sum_{k=1}^{n}a_k+9\sum_{k=1}^{n}b_k$

❷ $\sum_{k=1}^{200}3=3\times200=600$

문제 5 $\sum_{k=1}^{10}a_k=20$, $\sum_{k=1}^{10}b_k=30$**일 때, 다음 식의 값을 구하시오.**

(1) $\sum_{k=1}^{10}(3a_k-4b_k)$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+5)$

2 여러 가지 수열의 합

- 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

여러 가지 수열의 합은 어떻게 구할까

생각 톡

오른쪽은 어느 로봇 박람회에서 로봇을 첫 번째 줄에는 1대, 두 번째 줄에는 2대, 세 번째 줄에는 3대, 네 번째 줄에는 4대를 진열한 것이다. 이와 같은 규칙으로 로봇을 열 번째 줄까지 세우려고 한다.

탐구 ① 첫 번째 줄부터 열 번째 줄까지 각 줄에 세운 로봇의 대수의 합을 기호 $\sum$를 사용하여 나타내 보자.

탐구 ② 첫 번째 줄부터 열 번째 줄까지 각 줄에 세운 로봇의 대수의 합을 구해 보자.

자연수의 거듭제곱의 합을 구해 보자.

1부터 n까지의 자연수의 합은 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로 다음과 같다.

$$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

이제 1부터 n까지의 자연수의 제곱의 합

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2$$

을 구해 보자.

항등식 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$의 k에 1, 2, 3, $\cdots$, n을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned}
&k=1\text{일 때,} && 2^3-1^3=3\times1^2+3\times1+1\\
&k=2\text{일 때,} && 3^3-2^3=3\times2^2+3\times2+1\\
&k=3\text{일 때,} && 4^3-3^3=3\times3^2+3\times3+1\\
& && \vdots\\
&k=n\text{일 때,} && (n+1)^3-n^3=3\times n^2+3\times n+1
\end{aligned}$$

이다. 위의 n개의 등식을 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
(n+1)^3-1^3&=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\
&=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\times\frac{n(n+1)}{2}+n
\end{aligned}$$

이다.

즉 $3\sum_{k=1}^{n}k^2=(n+1)^3-3\times\frac{n(n+1)}{2}-(n+1)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$ 이므로 다음이 성립한다.

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

스스로 개념탐구

항등식 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$을 이용하여 다음이 성립함을 확인해 보자.

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

보기 ① $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{10\times11\times21}{6}=385$

② $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3=\sum_{k=1}^{6}k^3=\left(\frac{6\times7}{2}\right)^2=441$

문제 1 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+15^2$

(2) $2^3+4^3+6^3+8^3+10^3$

예제 1 다음 식의 값을 구하시오.

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)$$

풀이 $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

답 $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

문제 2 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sum_{k=1}^{10} k(k-1)(k+1)$　　　(2) $1\times5+2\times6+3\times7+\cdots+12\times16$

일반항이 분수의 꼴이고 분모가 두 일차식의 곱으로 나타나는 수열의 합을 구할 때에는 다음 등식을 이용하면 편리하다.

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\text{(단, }A\neq B\text{)}$$

예제 2 $\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{k(k+1)}$의 값을 구하시오.

풀이 $\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{99}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$

$=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$

답 $\frac{99}{100}$

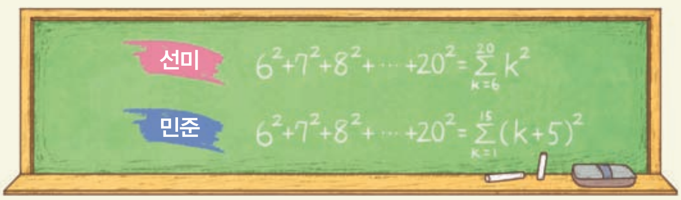
문제 3 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$

(2) $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

비교하기

다음은 선미와 민준이가 $6^2+7^2+8^2+\cdots+20^2$을 기호 $\sum$를 사용하여 나타낸 것이다.



1　선미와 민준이가 나타낸 두 가지 방법의 차이점을 말해 보자.

2　선미와 민준이가 나타낸 식의 값을 각각 구해 보자.

수학 역량 플러스

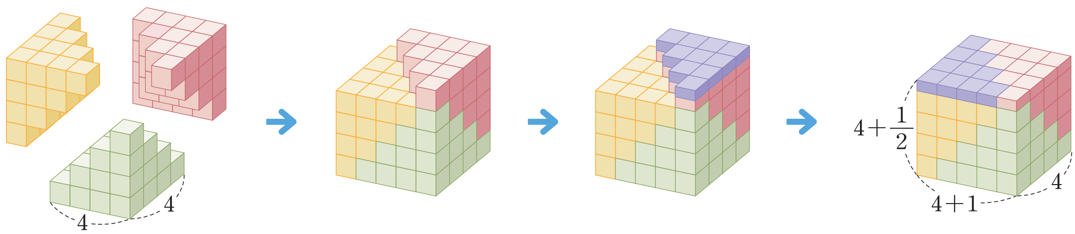
도형을 이용한 자연수의 거듭제곱의 합

추론 의사소통

활동 1 다음 그림은 세 입체도형으로 하나의 직육면체를 만들어

$$3(1^2+2^2+3^2+4^2)=4(4+1)\left(4+\frac{1}{2}\right)$$

이 성립함을 보인 것이다.



위의 그림과 등식을 이용하여

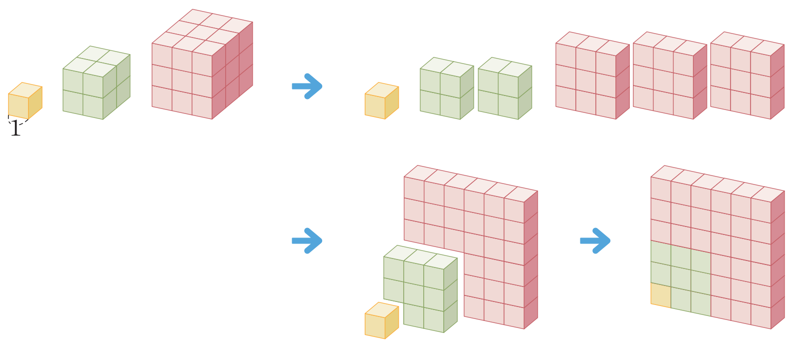
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

이 성립함을 설명해 보자.

활동 2 다음 그림은 세 정육면체로 하나의 직육면체를 만들어

$$1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$$

이 성립함을 보인 것이다.



위의 그림과 등식을 이용하여

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

이 성립함을 설명해 보자.

중단원 마무리

❶ 기호 $\sum$의 뜻과 성질

(1) 기호 $\sum$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 기호 $\sum$를 사용하여

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\boxed{}$$

와 같이 나타낸다.

(2) $\sum$의 성질

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

② $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\boxed{}$

③ $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

④ $\sum_{k=1}^{n}c=\boxed{}$ (단, c는 상수)

❷ 여러 가지 수열의 합

① $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\boxed{}$

③ $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\boxed{}$

기본 문제

1 다음을 기호 $\sum$를 사용하여 나타내시오.

(1) $1+2+3+\cdots+30$

(2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{16}}$

(3) $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{100\times102}$

2 다음을 기호 $\sum$를 사용하지 않은 합의 꼴로 나타내시오.

(1) $\sum_{k=1}^{12}(2k-1)$

(2) $\sum_{k=1}^{5}3^{k-1}$

3 $\sum_{k=1}^{20}a_k=10$, $\sum_{k=1}^{20}b_k=20$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sum_{k=1}^{20}(2a_k+b_k)$

(2) $\sum_{k=1}^{20}(a_k-2b_k+5)$

4 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sum_{k=1}^{9}(2k+3)$

(2) $\sum_{k=1}^{16}k(k+4)$

(3) $\sum_{k=1}^{10}(k+1)(k^2-k+1)$

표준 문제

5 $\sum_{k=1}^{10} a_k=15$, $\sum_{k=1}^{10} a_k^2=35$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^2$의 값을 구하시오.

6 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sum_{k=1}^{19}(k+1)^2-\sum_{k=2}^{20}k^2$

(2) $\sum_{k=1}^{15}(2k+1)^2-4\sum_{k=1}^{15}k(k+1)$

(3) $\sum_{k=1}^{10}(2^{k-1}+3)$

7 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $3^3+4^3+5^3+\cdots+9^3$

(2) $1\times19+2\times18+3\times17+\cdots+19\times1$

8 $\sum_{k=1}^{10}(k+2)(k+p)=45$를 만족시키는 상수 p의 값을 구하시오.

9 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k=2^n-1$일 때, $\sum_{k=1}^{15} a_{2k}$의 값을 구하시오.

서술형 **10** 다음 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

$$1,\ \frac{1}{1+2},\ \frac{1}{1+2+3},\ \frac{1}{1+2+3+4},\ \cdots$$

11 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\cdots+\frac{1}{48\times50}$

(2) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

발전 문제

문제 해결 **12** 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4=6$, $a_{12}=38$일 때, $\sum_{k=1}^{100}a_{2k}-\sum_{k=1}^{100}a_{2k-1}$의 값을 구하시오.

서술형 **13** 자연수 n에 대하여 이차방정식 $x^2-2nx+2n-3=0$의 두 근을 a_n, b_n이라고 할 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k{}^2+b_k{}^2)$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

문제 해결 **14** 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+2n$일 때, $\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$의 값을 구하시오.