III 수열

피보나치
(Fibonacci, 1170?~1250?)
자연 현상에서 수의 규칙성을 찾아 피보나치수열을 발견하였고, 『산반서(Liber abaci)』와 『실용 기하학(Practica Geometriae)』을 저술하였다.

(출처: 허민, 『수학자의 뒷모습 Ⅱ』)

드모르간
(De Morgan, A., 1806~1871)
'수학적 귀납법'이라는 용어를 처음으로 사용하여 자연 과학과 수학적 증명에서의 귀납법의 차이를 강조하였다.

(출처: 허민, 『수학자의 뒷모습 Ⅲ』)

학습목표

- **수열**의 뜻을 안다.
- **등차수열**과 **등비수열**의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
- Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
- 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
- 수열의 **귀납적 정의**를 이해한다.
- **수학적 귀납법**의 원리를 이해하고, 이를 이용하여 명제를 증명할 수 있다.

규칙성으로 미래를 예측하다

분열하는 세포의 수, 꽃잎의 수, 솔방울의 배열, 해바라기 씨의 배열 등 우리 주변의 여러 가지 현상에서 규칙성을 찾아볼 수 있다. 고대부터 현대에 이르기까지 수의 배열의 규칙성에 대한 연구는 지속적으로 이루어져 왔으며, 이는 인구의 변화, 주가의 변동, 적립금의 합계 등 사회 현상을 분석하고 문제를 해결하는 데 도움이 된다.

일상생활에서 일정한 수를 더하거나 곱하는 규칙에 따라 나열된 수들을 쉽게 찾아볼 수 있다. 예를 들어 달력에서 같은 요일의 날짜들은 7일 간격으로 나열되어 있고, 세계 최대의 스포츠 축제인 올림픽과 월드컵은 4년마다 열린다. 도로명 주소는 도로 양옆을 각각 홀수 번호와 짝수 번호로 지정하여 차례대로 부여하는데, 한 방향에서 건물의 도로명 주소를 확인하면 일정하게 2씩 차이가 난다.

또 일정하게 분열하는 박테리아 수나 은행의 복리 계산에서도 규칙을 찾을 수 있다.

이처럼 여러 가지 현상들에서 규칙을 찾아내면 이를 활용하여 다양한 문제를 해결할 수 있다.

이 단원에서는 등차수열과 등비수열을 이해하고, 일반항과 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구하는 방법을 알아본다.

(출처: 도로명 주소 안내시스템, 2016)

1 등차수열과 등비수열

준비학습

1 다음은 어떤 규칙에 따라 수를 나열한 것이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $1,\ 3,\ 5,\ \square,\ 9,\ \square,\ 13,\ \cdots$

(2) $1,\ \square,\ 4,\ 8,\ 16,\ \square,\ 64,\ \cdots$

2 다음 함수에 대하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$를 구하시오.

(1) $f(x)=3x+2$

(2) $f(x)=x^2+4$

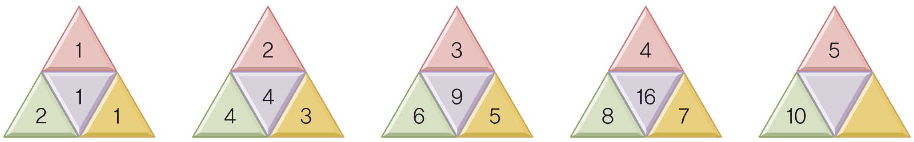
1 수열

● 수열의 뜻을 안다.

수열이란 무엇일까

생각 톡

다음 그림과 같이 삼각형 안에 수를 나열하였다.



탐구 ① 위의 그림에서 같은 색의 삼각형 안에 적혀 있는 수들을 차례대로 나열해 보고, 그 규칙을 말해 보자.

탐구 ② **탐구 ①**에서 말한 규칙을 이용하여 빈칸에 알맞은 수를 써넣어 보자.

일정한 규칙 없이 수를 나열한 것도 수열이지만 여기서는 규칙성이 있는 수열만 다룬다.

2의 배수를 2부터 차례대로 나열하면 다음과 같다.

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots$$

이와 같이 차례대로 나열된 수의 열을 **수열**이라 하고, 수열을 이루고 있는 각 수를 그 수열의 **항**이라고 한다.

이때 각 항을 앞에서부터 차례대로 첫째항, 둘째항, 셋째항, $\cdots$, n째항, $\cdots$ 또는 제1항, 제2항, 제3항, $\cdots$, 제n항, $\cdots$이라고 한다.

일반적으로 수열을 나타낼 때에는 다음과 같이 나타낸다.

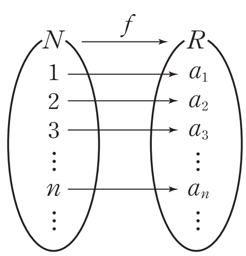
$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

이때 제n항 a_n을 그 수열의 **일반항**이라 하고, 일반항이 a_n인 수열을 간단히 $\{a_n\}$과 같이 나타낸다.

수열 $\{a_n\}$은 자연수 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots$에 수열의 각 항 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$을 차례대로 대응시킨 것이므로 수열은 자연수 전체의 집합 N에서 실수 전체의 집합 R로의 함수

$$f : N \longrightarrow R,\ f(n)=a_n$$

으로 생각할 수 있다.



이때 일반항 a_n이 n에 대한 식으로 주어지면 n에 $1,\ 2,\ 3,\cdots$을 차례대로 대입하여 수열 $\{a_n\}$의 모든 항을 구할 수 있다.

일반항이 $a_n=3n-2$인 수열을 $\{3n-2\}$와 같이 나타내기도 한다.

보기 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=3n-2$일 때,

$a_1=3\times1-2=1$, $a_2=3\times2-2=4$, $a_3=3\times3-2=7$,
$a_4=3\times4-2=10$, $\cdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \cdots$

문제 1 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 다음과 같을 때, 첫째항부터 제4항까지를 구하시오.

(1) $a_n=5n+1$ (2) $a_n=3^{n-3}$

예제 1 다음 수열의 일반항 a_n을 추측해 보시오.

(1) $3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ \cdots$ (2) $9,\ 99,\ 999,\ 9999,\ 99999,\ \cdots$

풀이 예 (1) $a_1=3=3\times1$, $a_2=6=3\times2$, $a_3=9=3\times3$, $a_4=12=3\times4$,
$a_5=15=3\times5$, $\cdots$
따라서 일반항 a_n은 $a_n=3n$으로 추측할 수 있다.

(2) $a_1=9=10^1-1$, $a_2=99=10^2-1$, $a_3=999=10^3-1$,
$a_4=9999=10^4-1$, $a_5=99999=10^5-1$, $\cdots$
따라서 일반항 a_n은 $a_n=10^n-1$로 추측할 수 있다.

답 예 (1) $a_n=3n$ (2) $a_n=10^n-1$

문제 2 다음 수열의 일반항 a_n을 추측해 보시오.

(1) $2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \cdots$ (2) $\frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \cdots$

문제 만들기

정훈이와 신혜는 다음과 같은 규칙으로 수열을 만들려고 한다.

1 정훈이와 신혜가 만든 수열의 첫째항부터 제6항까지를 각각 나열해 보자.

2 두 명씩 조를 이루어 각자 일정한 규칙에 따라 수열을 만든 후 첫째항부터 제6항까지를 나열해 보고, 상대방이 만든 수열의 규칙을 찾아보자.

2 등차수열

● 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

등차수열이란 무엇일까

생각 톡

우리나라 사람들은 나이를 표현할 때 '○살' 대신 말띠, 양띠와 같은 띠를 사용하기도 한다. 띠는 사람이 태어난 해의 지지(地支)를 동물 이름으로 상징하여 이르는 말로 모두 12띠가 있다.

(출처: 한국민족문화대백과사전, 2016)

탐구 ① 올해 나이가 1살부터 100살 사이인 사람 중에서 나와 같은 띠를 가진 사람의 나이를 작은 수부터 순서대로 나열해 보자.

탐구 ② **탐구 ①**에서 나열한 수의 규칙을 말해 보자.

수열 $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots$는 첫째항 1부터 차례대로 2를 더하여 만든 수열이다.

$$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{+2} 7 \xrightarrow{+2} 9,\ \cdots$$

이와 같이 첫째항부터 차례대로 일정한 수를 더하여 만든 수열을 **등차수열**이라 하고, 더하는 일정한 수를 **공차**라고 한다.

공차는 영어로 common difference이고, 보통 d로 나타낸다.

공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서 제n항에 공차 d를 더하면 제$(n+1)$항이 되므로

$$a_{n+1}=a_n+d\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

가 성립한다.

보기
❶ 등차수열 $2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \cdots$의 첫째항은 2이고 공차는 3이다.
❷ 등차수열 $15,\ 11,\ 7,\ 3,\ -1,\ \cdots$의 첫째항은 15이고 공차는 -4이다.

문제 1 다음 등차수열의 공차를 구하고, $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $-3,\ 1,\ 5,\ \square,\ 13,\ \cdots$

(2) $9,\ \square,\ -3,\ -9,\ -15,\ \cdots$

등차수열의 일반항은 어떻게 구할까

등차수열의 일반항을 구해 보자.

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서

$$a_1=a$$
$$a_2=a_1+d=a+d$$
$$a_3=a_2+d=(a+d)+d=a+2d$$
$$a_4=a_3+d=(a+2d)+d=a+3d$$
$$\vdots$$

이므로 일반항 a_n은

$$a_n=a+(n-1)d$$

임을 알 수 있다.

$$a_1=a+0\times d$$
$$a_2=a+1\times d$$
$$a_3=a+2\times d$$
$$a_4=a+3\times d$$
$$\vdots$$
$$a_n=a+(n-1)\times d$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

등차수열의 일반항

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은

$$a_n=a+(n-1)d$$

예제 1 **다음 등차수열의 일반항 a_n을 구하시오.**

(1) 첫째항이 3, 공차가 4인 수열

(2) 7, 4, 1, −2, −5, ⋯

풀이 (1) 첫째항이 3, 공차가 4인 등차수열의 일반항 a_n은

$$a_n=3+(n-1)\times4=4n-1$$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 7, 공차가 −3인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$$a_n=7+(n-1)\times(-3)=-3n+10$$

답 (1) $a_n=4n-1$ (2) $a_n=-3n+10$

문제 2 **다음 등차수열의 일반항 a_n을 구하시오.**

(1) 첫째항이 −4, 공차가 6인 수열

(2) 2, −2, −6, −10, −14, ⋯

문제 3 **첫째항이 12, 공차가 -5인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음에 답하시오.**

(1) 제10항을 구하시오.

(2) -53은 제몇 항인지 구하시오.

예제 2 **제4항이 15, 제11항이 57인 등차수열의 일반항 a_n을 구하시오.**

풀이 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 $a_4=15$, $a_{11}=57$이므로

$$a_4=a+3d=15 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$a_{11}=a+10d=57 \qquad \cdots\cdots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=-3, \ d=6$$

따라서 첫째항이 -3, 공차가 6이므로 일반항 a_n은

$$a_n=-3+(n-1)\times 6=6n-9$$

답 $a_n=6n-9$

문제 4 **다음을 만족시키는 등차수열의 일반항 a_n을 구하시오.**

(1) $a_3=1$, $a_7=-7$

(2) $a_2=-3$, $a_8=21$

예제 3 **첫째항이 35, 공차가 -3인 등차수열에서 처음으로 음수가 되는 항은 제몇 항인지 구하시오.**

풀이 주어진 등차수열의 일반항을 a_n이라고 하면

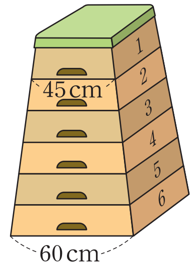
$$a_n=35+(n-1)\times(-3)=-3n+38$$

a_n이 음수가 되려면 $-3n+38<0$, 즉 $n>\frac{38}{3}=12.66\cdots$이어야 하므로 처음으로 음수가 되는 항은 제13항이다.

답 제13항

문제 5 **공차가 3, 제10항이 -26인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은 제몇 항인지 구하시오.**

문제 6 **오른쪽 그림과 같은 뜀틀에서 1단의 하단면의 폭은 $45\,\mathrm{cm}$, 6단의 하단면의 폭은 $60\,\mathrm{cm}$이고, 각 단의 하단면의 폭은 1단부터 각 단이 쌓여진 순서대로 등차수열을 이룬다. 이때 3단과 5단의 하단면의 폭을 구하시오.**



세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 **등차중항**이라고 한다. 이때 $b-a=c-b$이므로

$$b=\frac{a+c}{2}$$

이다.

a와 c의 등차중항 $b=\dfrac{a+c}{2}$ 는 a와 c의 산술평균이다.

보기 세 수 3, a, 9가 이 순서대로 등차수열을 이루면 a는 3과 9의 등차중항이므로

$$a=\frac{3+9}{2}=6$$

문제 7 **다음 네 수가 주어진 순서대로 등차수열을 이루도록 하는 실수 a, b의 값을 구하시오.**

(1) 2, a, 8, b (2) a, -7, b, -19

증명하기 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{n+1}-a_n=d\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이면 이 수열은 공차가 d인 등차수열이다.

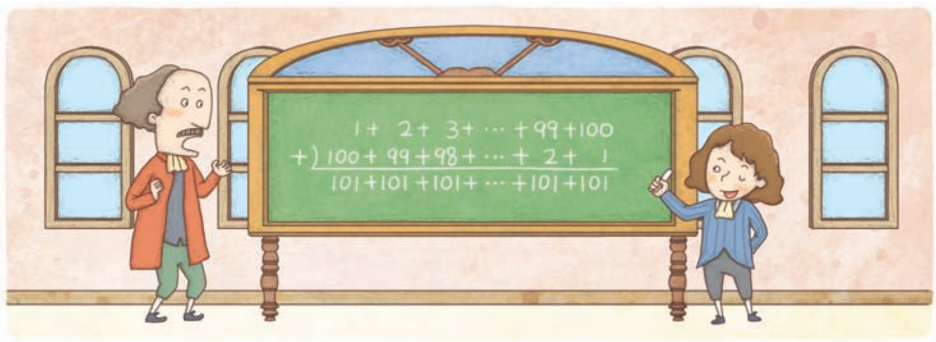
1 위의 사실을 이용하여 일반항이 $a_n=3n-1$인 수열 $\{a_n\}$은 공차가 3인 등차수열임을 증명해 보자.

2 위의 사실을 이용하여 일반항이 $a_n=pn+q$ (p, q는 상수, $p\neq0$)인 수열 $\{a_n\}$은 공차가 p인 등차수열임을 증명해 보자.

등차수열의 합은 어떻게 구할까

생각 톡

독일의 수학자 가우스(Gauss, K. F., 1777~1855)는 9살 무렵에 1부터 100까지의 자연수의 합을 다음과 같은 방법으로 계산하였다고 한다.



(출처: 하워드 이브스, 『수학사』)

탐구 ✱ 가우스가 어떤 방법으로 계산했는지 설명해 보고, 그 합을 구해 보자.

등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구해 보자.

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 제n항을 l, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-d)+l \qquad \cdots\cdots ①$$

이고, ①의 우변에서 더하는 순서를 거꾸로 하여 나타내면

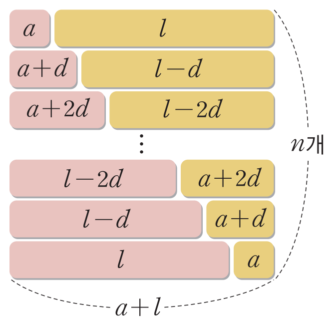
$$S_n=l+(l-d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a \qquad \cdots\cdots ②$$

이다.

①, ②를 변끼리 더하면

$$2S_n=\underbrace{(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)}_{n\text{개}}$$

$$=n(a+l)$$



이므로

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2} \qquad \cdots\cdots ③$$

이다.

이때 제n항인 l은 $l=a+(n-1)d$이므로 이것을 ③에 대입하여 정리하면

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

등차수열의 합

등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n은

① 첫째항이 a, 제 n 항이 l일 때, $S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}$

② 첫째항이 a, 공차가 d일 때, $S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

보기 ① 첫째항이 2, 제 6 항이 17인 등차수열의 첫째항부터 제 6 항까지의 합 S_6은

$$S_6=\frac{6(2+17)}{2}=57$$

② 첫째항이 -1, 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합 S_{10}은

$$S_{10}=\frac{10\{2\times(-1)+(10-1)\times3\}}{2}=125$$

문제 8 다음 등차수열의 첫째항부터 제 8 항까지의 합 S_8을 구하시오.

(1) 첫째항이 7, 제 8 항이 -15인 수열

(2) 1, 5, 9, 13, 17, $\cdots$

예제 4 두 자리 자연수 중에서 3의 배수의 합을 구하시오.

풀이 두 자리 자연수 중에서 3의 배수를 작은 것부터 순서대로 나열하면

$$12,\ 15,\ 18,\ \cdots,\ 99$$

이므로 이 수열은 첫째항이 12, 공차가 3인 등차수열이다.

이 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$$a_n=12+(n-1)\times3=3n+9$$

이고, $3n+9=99$에서 $n=30$이므로 99는 제 30 항이다.

따라서 구하는 합은 위의 수열의 첫째항부터 제 30 항까지의 합 S_{30}이므로

$$S_{30}=\frac{30(12+99)}{2}=1665$$

답 1665

문제 9 100 이상 200 이하의 자연수 중에서 4로 나누었을 때의 나머지가 1인 수의 합을 구하시오.

문제 10 첫째항부터 제 5 항까지의 합이 20, 첫째항부터 제 10 항까지의 합이 165인 등차수열의 첫째항과 공차를 구하시오.

수열의 합과 일반항 사이에는 어떤 관계가 있을까

수열의 합과 일반항 사이의 관계를 알아보자.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여

$$S_1=a_1$$
$$S_2=a_1+a_2=S_1+a_2$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3=S_2+a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=S_{n-1}+a_n$$

$$\overbrace{\underbrace{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}}_{S_{n-1}}+a_n}^{S_n}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$a_1=S_1,\ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2)$$

예제 5 **수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=3n^2-n$일 때, 일반항 a_n을 구하시오.**

풀이 $n=1$일 때, $a_1=S_1=3\times 1^2-1=2$ $\cdots\cdots$ ①

$n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(3n^2-n)-\{3(n-1)^2-(n-1)\}$$
$$=6n-4 \quad \cdots\cdots ②$$

①은 $n=1$을 ②에 대입하여 얻은 값과 같으므로 구하는 일반항 a_n은

$a_n=6n-4$

답 $a_n=6n-4$

문제 11 **수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=2n^2-3n$일 때, 일반항 a_n을 구하시오.**

오류 찾기

다음은 종현이가 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+4n+3$일 때, a_1+a_9의 값을 구한 과정이다. 잘못된 부분을 찾아 바르게 고쳐 보자.

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+4n+3-\{(n-1)^2+4(n-1)+3\}$

$=2n+3$

따라서 $a_1=2\times 1+3=5$, $a_9=2\times 9+3=21$이므로

$a_1+a_9=26$

수학 역량 플러스

문제 해결 의사소통

역사 속의 등차수열

다음은 조선 시대의 수학자 홍정하(洪正夏, 1684~?)의 『구일집(九一集)』에 수록된 등차수열을 다루는 문제와 그 풀이의 일부분이다.

갑, 을, 병, 정, 무 5명이 일정한 차이로 돈을 나누어 갖는다. 갑과 을은 71문, 정과 무는 53문을 나누어 갖는다. 5명의 몫은 각각 얼마인가?

풀이

갑과 을이 나누어 갖는 돈 71문에서 정과 무가 나누어 갖는 돈 53문을 빼면 18문이다. 이를 6으로 나누면 일정한 차이를 얻는다.

(출처: 홍정하 저·차종천 편, 『구일집』)

활동 1 병의 몫을 a, 일정한 차이를 d라 하여 식을 세운 후 위의 『구일집』의 풀이를 설명하고, 5명의 몫을 각각 구해 보자.

활동 2 『구일집』에 수록된 다음 문제를 등차수열을 이용하여 해결해 보자.

갑, 을, 병, 정, 무, 기, 경 7명이 일정한 차이로 은을 나누어 갖는다.
갑과 을은 100냥, 무, 기, 경은 96냥을 나누어 갖는다. 7명의 몫은 각각 얼마인가?

3 등비수열

● 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

등비수열이란 무엇일까

생각 톡

다음은 태조 이성계와 무학대사의 일화이다.
무학대사는 명주실 한 타래를 가지고 와서 이성계에게 아래와 같은 질문을 하였다.
"명주실 한 가닥을 반으로 접어 두 가닥이 되도록 하고, 접은 것을 다시 반으로 접어 네 가닥이 되도록 할 때, 같은 방법으로 30번 접으면 굵기는 얼마나 되겠습니까?"

(출처: 이광연, 『웃기는 수학이지 뭐야』)

탐구 ① 명주실의 굵기는 명주실의 가닥 수가 많을수록 굵어진다.
명주실을 접는 횟수에 따른 명주실의 가닥 수를 구하여 다음 표를 완성해 보자.

접는 횟수	1	2	3	4	5	⋯
가닥 수	2	4				⋯

탐구 ② 탐구 ①의 가닥 수의 규칙을 말해 보자.

수열 1, 2, 4, 8, 16, ⋯은 첫째항 1부터 차례대로 2를 곱하여 만든 수열이다.

$$1,\ \underbrace{\ }_{\times 2}\ 2,\ \underbrace{\ }_{\times 2}\ 4,\ \underbrace{\ }_{\times 2}\ 8,\ \underbrace{\ }_{\times 2}\ 16, \cdots$$

이와 같이 첫째항부터 차례대로 일정한 수를 곱하여 만든 수열을 **등비수열**이라 하고, 곱하는 일정한 수를 **공비**라고 한다.

공비는 영어로 common ratio이고, 보통 r로 나타낸다.

공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에서 제n항에 공비 r를 곱하면 제$(n+1)$항이 되므로

$$a_{n+1}=ra_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이 성립한다.

보기 등비수열 2, 6, 18, 54, 162, ⋯의 첫째항은 2이고 공비는 3이다.

문제 1 **다음 등비수열의 공비를 구하고, $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.**

(1) $-81,\ 27,\ -9,\ \square,\ -1, \cdots$

(2) $\frac{1}{16},\ \square,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1, \cdots$

등비수열의 일반항은 어떻게 구할까

등비수열의 일반항을 구해 보자.

첫째항이 a, 공비가 $r(r\neq0)$인 등비수열 $\{a_n\}$에서

$$a_1=a$$
$$a_2=a_1r=ar$$
$$a_3=a_2r=(ar)r=ar^2$$
$$a_4=a_3r=(ar^2)r=ar^3$$
$$\vdots$$

이므로 일반항 a_n은

$$a_n=ar^{n-1}$$

임을 알 수 있다.

$$a_1=ar^0$$
$$a_2=ar^1$$
$$a_3=ar^2$$
$$a_4=ar^3$$
$$\vdots$$
$$a_n=ar^{n-1}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

등비수열의 일반항

첫째항이 a, 공비가 $r(r\neq0)$인 등비수열의 일반항 a_n은

$$a_n=ar^{n-1}$$

예제 1 **다음 등비수열의 일반항 a_n을 구하시오.**

(1) 첫째항이 7, 공비가 -2인 수열　　(2) 48, 24, 12, 6, 3, ⋯

풀이 (1) 첫째항이 7, 공비가 -2인 등비수열의 일반항 a_n은

$$a_n=7\times(-2)^{n-1}$$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 48, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$$a_n=48\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

답 (1) $a_n=7\times(-2)^{n-1}$　(2) $a_n=48\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

문제 2 **다음 등비수열의 일반항 a_n을 구하시오.**

(1) 첫째항이 -5, 공비가 4인 수열　　(2) -3, 3, -3, 3, -3, ⋯

문제 3 **첫째항이 2, 공비가 -3인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음에 답하시오.**

(1) 제10항을 구하시오.　　(2) -486은 제몇 항인지 구하시오.

예제 2 **제2항이 -10, 제5항이 1250인 등비수열의 일반항 a_n을 구하시오.**

풀이 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면 $a_2=-10$, $a_5=1250$이므로

$$a_2=ar=-10 \quad \cdots\cdots ①$$
$$a_5=ar^4=1250 \quad \cdots\cdots ②$$

②÷①을 하면 $\quad r^3=-125$

그런데 r는 실수이므로 $\quad r=-5$

$r=-5$를 ①에 대입하면 $\quad -5a=-10, \quad a=2$

따라서 첫째항이 2, 공비가 -5이므로 일반항 a_n은

$$a_n=2\times(-5)^{n-1}$$

답 $a_n=2\times(-5)^{n-1}$

문제 4 **다음을 만족시키는 등비수열의 일반항 a_n을 구하시오.**

(1) $a_3=1$, $a_6=27$ (2) $a_4=48$, $a_7=-384$

문제 5 **공비가 2, 제5항이 48인 등비수열에서 처음으로 600 이상이 되는 항은 제몇 항인지 구하시오.**

문제 6 **어떤 사진 편집 프로그램에서 사진의 넓이를 변경할 때 '넓이 조정'에서 $50\ \%$를 적용하면 사진의 넓이가 원래 사진의 $50\ \%$로 줄어든다고 한다. 처음 사진의 넓이가 $2048\ \mathrm{cm}^2$일 때, $50\ \%$를 적용하는 과정을 10번 반복한 후의 사진의 넓이는 얼마인지 구하시오.**

0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 **등비중항**이라고 한다. 이때 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$이므로

$$b^2=ac$$

이다.

두 양수 a, c의 등비중항은 $b=\pm\sqrt{ac}$ 이다.
특히 $b=\sqrt{ac}$ 일 때 b는 a와 c의 기하평균이다.

보기 세 수 3, a, 48이 이 순서대로 등비수열을 이루면 a는 3과 48의 등비중항이므로
$a^2=3\times48=144$, 즉 $a=12$ 또는 $a=-12$

문제 7 **다음 네 수가 주어진 순서대로 등비수열을 이루도록 하는 실수 a, b의 값을 구하시오.**

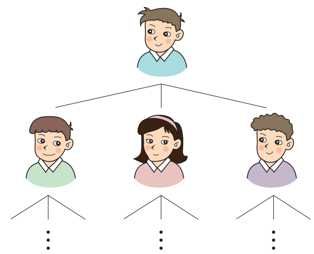
(1) 6, a, 54, b (2) a, 8, b, 128

등비수열의 합은 어떻게 구할까

생각 톡

아름다운 세상을 주제로 한 어느 영화에서 주인공은 세상을 바꿀 수 있는 작은 실천 방법을 고민하다가 한 가지 방법을 생각해 낸다.

오른쪽 그림과 같이 제일 먼저 주인공 자신이 3명을 도와주고, 이 3명도 각자 다른 3명을 도와준다. 이때 도움을 받은 사람은 반드시 도움을 받은 적이 없는 다른 사람들을 도와주어야 한다.



탐구 주인공이 3명을 도와주는 것을 [1단계], [1단계]에서 도움을 받은 사람들이 각자 다른 3명을 도와주는 것을 [2단계]라고 하자. 이와 같은 방법으로 계속할 때, [5단계]까지 도움을 받은 사람 수의 총합을 거듭제곱이 있는 식으로 나타내 보자.

등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구해 보자.

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1} \qquad \cdots\cdots ①$$

이고, ①의 양변에 r를 곱하면

$$rS_n=ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}+ar^n \qquad \cdots\cdots ②$$

이다. ①에서 ②를 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rrcl} & S_n= & a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} & \\ -) & rS_n= & ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} & +ar^n \\ \hline & (1-r)S_n= & a & -ar^n \end{array}$$

이다. 따라서 $r\neq1$일 때에는

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

이고, $r=1$일 때에는 ①에서

$$S_n=a+a+a+\cdots+a=na$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

❶ $r\neq1$일 때, $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

❷ $r=1$일 때, $S_n=na$

보기 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제15항까지의 합 S_{15}는

$$S_{15}=\frac{3(2^{15}-1)}{2-1}=3(2^{15}-1)$$

문제 8 **다음 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}을 구하시오.**

(1) 첫째항이 4, 공비가 3인 수열

(2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{48}, \cdots$

예제 3 **첫째항부터 제3항까지의 합이 26, 첫째항부터 제6항까지의 합이 728인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하시오.**

$r=1$이면
$S_3=3a=26$,
$S_6=6a=728$
을 동시에 만족시키는 a가 존재하지 않으므로 $r\neq1$이다.

풀이 주어진 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 $r(r\neq1)$, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면 $S_3=26$, $S_6=728$이므로

$$S_3=\frac{a(r^3-1)}{r-1}=26 \quad \cdots\cdots ①$$

$$S_6=\frac{a(r^6-1)}{r-1}=728 \quad \cdots\cdots ②$$

②를 변형하면 $\frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=728$

$$\frac{a(r^3-1)}{r-1}\times(r^3+1)=728 \quad \cdots\cdots ③$$

①을 ③에 대입하면 $26(r^3+1)=728$, $r^3=27$

그런데 r는 실수이므로 $r=3$

$r=3$을 ①에 대입하면 $13a=26$, $a=2$

따라서 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{2(3^n-1)}{3-1}=3^n-1$$

답 $S_n=3^n-1$

문제 9 **첫째항부터 제4항까지의 합이 4, 첫째항부터 제8항까지의 합이 104인 등비수열의 첫째항부터 제12항까지의 합을 구하시오.**

문제 10 **수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$일 때, 일반항 a_n을 구하시오.**

수학 역량 플러스

문제 해결 | 추론

만기가 된 적금은 얼마일까

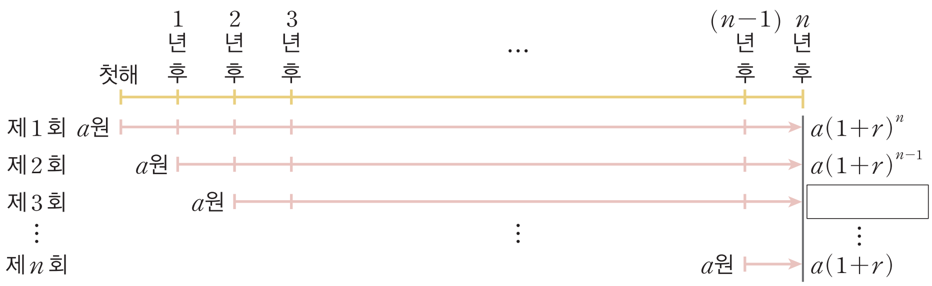
은행에 예금을 하거나 적금을 들면 은행은 약속한 기간 후에 원금과 함께 이자를 지불한다. 이때 은행으로부터 받는 원금과 이자의 합계를 원리합계라고 한다.

이자를 계산하는 방법에는 단리법과 복리법이 있는데, 단리법은 원금에만 이율을 적용하는 계산법이고, 복리법은 원금에 이자를 더한 원리합계를 새로운 원금으로 하여 이율을 적용하는 계산법이다.

(출처: 두산백과사전, 2016)

활동 1 다음은 연이율이 r이고, 1년마다 복리로 매년 초에 일정한 금액 a원을 n년 동안 적립할 때, n년째 말의 적립금의 원리합계를 구하는 과정이다. $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

첫해에 적립한 a원은 n년 동안 예금되므로 n년 후의 원리합계는 $a(1+r)^n$원이다.
그 다음 해에 적립한 a원은 $(n-1)$년 동안 예금되므로 $(n-1)$년 후의 원리합계는
$\boxed{\qquad\qquad}$원이다.
같은 방법으로 매년 적립한 a원의 n년째 말의 원리합계는 다음과 같다.



n년째 말의 적립금의 원리합계를 S_n원이라고 하면

$$S_n=a(1+r)+a(1+r)^2+a(1+r)^3+\cdots+a(1+r)^n$$
$$=\boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

활동 2 연이율이 5 %이고, 1년마다 복리로 매년 초에 10만 원씩 10년 동안 적립할 때, 10년째 말의 적립금의 원리합계를 구해 보자.

(단, $1.05^{10}=1.63$으로 계산한다.)

중단원 마무리

• 정답 및 풀이 173쪽

❶ 수열

차례대로 나열된 수의 열을 $\boxed{\quad}$이라 하고, 수열을 이루고 있는 각 수를 그 수열의 $\boxed{\quad}$이라고 한다.

❷ 등차수열

(1) 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은
$a_n=\boxed{\quad}$이다.

(2) 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 $\boxed{\quad}$이라고 하며 $b=\boxed{\quad}$이다.

(3) **등차수열의 합**
등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은
① 첫째항이 a, 제n항이 l일 때, $S_n=\boxed{\quad}$
② 첫째항이 a, 공차가 d일 때,
$S_n=\boxed{\quad}$

❸ 등비수열

(1) 첫째항이 a, 공비가 $r(r\neq0)$인 등비수열의 일반항 a_n은
$a_n=\boxed{\quad}$이다.

(2) 0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 $\boxed{\quad}$이라고 하며 $b^2=\boxed{\quad}$이다.

(3) **등비수열의 합**
첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은
① $r\neq1$일 때, $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\boxed{\quad}$
② $r=1$일 때, $S_n=\boxed{\quad}$

기본 문제

1 다음 수열의 일반항 a_n을 추측해 보시오.

(1) $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{5}{8},\ \dfrac{7}{16},\ \dfrac{9}{32},\ \cdots$

(2) $1\times3,\ 2\times5,\ 3\times7,\ 4\times9,\ 5\times11,\ \cdots$

2 다음 수열의 일반항 a_n을 구하시오.

(1) 첫째항이 -3, 공차가 5인 등차수열

(2) 등차수열 $15,\ 11,\ 7,\ 3,\ -1,\ \cdots$

(3) 첫째항이 2, 공비가 -3인 등비수열

(4) 등비수열 $9,\ 18,\ 36,\ 72,\ 144,\ \cdots$

3 다음 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}을 구하시오.

(1) 첫째항이 37, 제10항이 -13인 등차수열

(2) 첫째항이 9, 공차가 2인 등차수열

(3) 첫째항이 10, 공비가 $-\dfrac{1}{2}$인 등비수열

(4) 등비수열 $2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ \cdots$

4 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2-3n$일 때, 일반항 a_n을 구하시오.

표준 문제

5 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=10$, $a_1+a_5=26$일 때, a_8을 구하시오.

6 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제10항까지의 합이 70, 첫째항부터 제20항까지의 합이 240일 때, 첫째항부터 제30항까지의 합을 구하시오.

7 첫째항이 25, 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, S_n의 최댓값을 구하시오.

서술형 **8** 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+3n-2$일 때, 일반항 a_n과 a_7-a_1의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

9 두 수 8과 648 사이에 3개의 양수를 넣어 전체가 등비수열을 이루도록 할 때, 이 세 수를 순서대로 구하시오.

• 정답 및 풀이 173쪽

10 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 세 항 a_2, a_4, a_8이 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, a_{16}을 구하시오.

11 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 2인 등비수열에서 첫째항부터 제n항까지의 합이 처음으로 1000보다 크게 되는 n의 값을 구하시오.

발전 문제

서술형 **12** 직각삼각형의 세 변의 길이가 등차수열을 이루고 빗변의 길이가 20일 때, 이 직각삼각형의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

추론 **13** 두 자리 자연수 중에서 서로 다른 네 개의 수를 작은 것부터 순서대로 나열하였더니 공비가 자연수인 등비수열이 되었다. 이 네 수의 합이 가장 클 때 그 합을 구하시오.

문제 해결 **14** 한 변의 길이가 3인 정사각형 모양의 종이가 있다. 오른쪽 그림과 같이 첫 번째 시행에서 정사각형을 9등분 한 후 중앙의 정사각형을 색칠하고, 두 번째 시행에서 첫 번째 시행 후 남은 8개의 정사각형을 각각 9등분 한 후 중앙의 정사각형을 색칠한다. 이와 같은 시행을 9회 반복했을 때, 색칠한 부분의 넓이의 합을 구하시오.