산 정상에 오르면 비석같이 생긴 돌에 숫자와 글씨가 새겨진 삼각점을 볼 수 있는데 이는 삼각측량법에서 기준이 되는 점들이다. 삼각측량법이란 기준이 되는 두 삼각점 사이의 거리를 이용하여 다른 한 점까지의 거리를 알아내는 방법이다. 이 삼각측량법의 원리를 3차원 공간에 적용한 것이 GPS(Global Positioning System)이다. GPS는 GPS 위성이 보내는 신호를 수신하여 GPS 위성과의 거리를 계산하고 이를 이용하여 물체의 위치를 파악하는 기술로 항공기나 선박의 자동 항법 장치, 교통 관제, 지도 제작 등 광범위한 분야에 활용되고 있다.

이 단원에서는 삼각측량법의 기본이 되는 사인법칙과 코사인법칙을 알아본다.

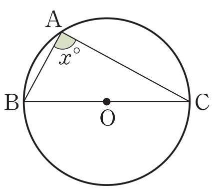
(출처: 『한겨레』, 2011. 1. 27., 두산백과사전, 2016)

2 삼각함수의 활용

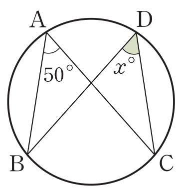
준비학습

1 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

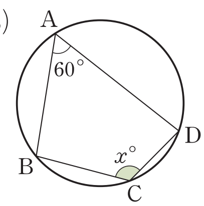
(1)



(2)

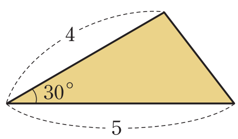


(3)

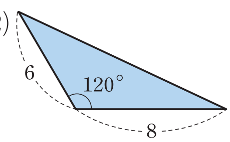


2 다음 삼각형의 넓이를 구하시오.

(1)



(2)



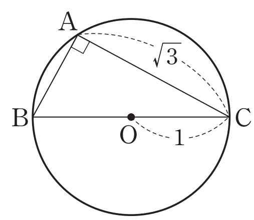
1 사인법칙과 코사인법칙

- 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

사인법칙이란 무엇일까

생각톡

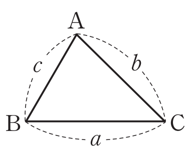
오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 직각삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{3}$이다.



탐구 ① $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A}$의 값을 구하여 원의 지름의 길이와 비교해 보자.

탐구 ② $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin B}$의 값을 구하여 원의 지름의 길이와 비교해 보자.

삼각형 ABC에서 ∠A, ∠B, ∠C의 크기를 각각 A, B, C로 나타내고, 이들의 대변의 길이를 각각 a, b, c로 나타내기로 한다.



위의 생각톡에서 $\sin A=1$이고 $\sin B=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}}$이므로 $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A}$와 $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin B}$의 값이 모두 원의 지름 BC의 길이와 같음을 알 수 있다.

일반적으로 삼각형의 세 변의 길이와 세 각의 크기 사이에는 다음과 같은 관계가 성립하고, 이것을 **사인법칙**이라고 한다.

> **사인법칙**
>
> 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면
>
> $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

사인법칙을 증명해 보자.

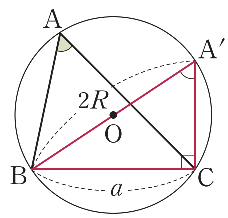
삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 R라고 할 때, ∠A의 크기에 따라 다음의 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $A<90^\circ$일 때,

원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

점 B를 지나는 지름 BA′을 그으면 $A=A'$이고
$\angle\mathrm{BCA'}=90^\circ$, $\overline{\mathrm{BA'}}=2R$이므로

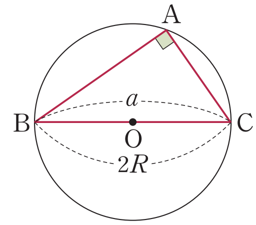
$$\sin A=\sin A'=\frac{a}{2R}$$



(ii) $A=90^\circ$일 때,

$\sin A=1$, $a=2R$이므로

$$\sin A=1=\frac{a}{2R}$$



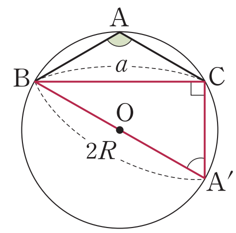
(iii) $A>90^\circ$일 때,

원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다.

점 B를 지나는 지름 $\mathrm{BA'}$을 그으면 $A=180^\circ-A'$이고

$\angle \mathrm{BCA'}=90^\circ$, $\overline{\mathrm{BA'}}=2R$이므로

$$\sin A=\sin(180^\circ-A')=\sin A'=\frac{a}{2R}$$



(i), (ii), (iii)에서 $\angle \mathrm{A}$의 크기에 관계없이

$$\sin A=\frac{a}{2R}, \text{ 즉 } \frac{a}{\sin A}=2R$$

가 성립한다.

같은 방법으로 $\dfrac{b}{\sin B}=2R$, $\dfrac{c}{\sin C}=2R$도 성립함을 알 수 있다.

따라서 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$이다.

예제 1 **삼각형 ABC에서 $a=4\sqrt{3}$, $A=60^\circ$, $B=45^\circ$일 때, 다음을 구하시오.**

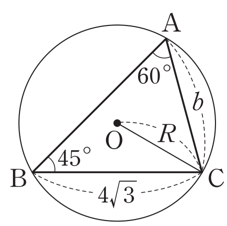
(1) b (2) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이 R

풀이 (1) 사인법칙에 의하여 $\dfrac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{b}{\sin 45^\circ}$에서

$$b=\frac{4\sqrt{3}\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}=4\sqrt{2}$$

(2) 사인법칙에 의하여 $2R=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$에서

$$R=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=4$$



답 (1) $4\sqrt{2}$ (2) 4

문제 1 **삼각형 ABC에서 다음을 구하시오.**

(단, R는 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이이다.)

(1) $b=6$, $A=75^\circ$, $C=45^\circ$일 때, c와 R

(2) $b=2\sqrt{2}$, $c=2$, $B=135^\circ$일 때, A와 R

예제 2 삼각형 ABC에서 $a\sin A=b\sin B$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하시오.

풀이 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R}$$

위의 두 식을 $a\sin A=b\sin B$에 대입하여 정리하면

$$a^2-b^2=0, \qquad (a+b)(a-b)=0$$

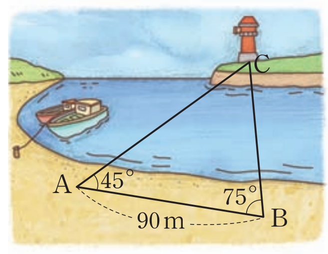
이때 $a>0$, $b>0$이므로 $\qquad a=b$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

답 $a=b$인 이등변삼각형

문제 2 삼각형 ABC에서 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하시오.

예제 3 오른쪽 그림과 같이 90 m 떨어진 해안가의 두 지점 A, B에서 등대가 있는 C지점을 바라보고 측량하였더니 $\angle\mathrm{CAB}=45^\circ$, $\angle\mathrm{CBA}=75^\circ$이었다. 두 지점 B, C 사이의 거리를 구하시오.



풀이 삼각형 ABC에서 $\qquad C=180^\circ-(A+B)=60^\circ$

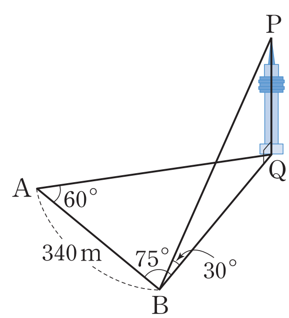
사인법칙에 의하여 $\dfrac{90}{\sin 60^\circ}=\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin 45^\circ}$에서

$$\overline{\mathrm{BC}}=\frac{90\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}=30\sqrt{6}\ (\mathrm{m})$$

따라서 구하는 거리는 $30\sqrt{6}$ m이다.

답 $30\sqrt{6}$ m

문제 3 타워의 높이를 구하기 위하여 오른쪽 그림과 같이 340 m 떨어진 두 지점 A, B에서 측량하였더니 $\angle\mathrm{QAB}=60^\circ$, $\angle\mathrm{QBA}=75^\circ$, $\angle\mathrm{PBQ}=30^\circ$이었다. 타워의 높이 PQ의 길이를 구하시오.



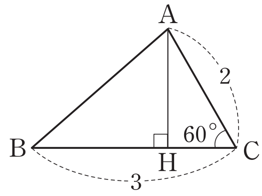
코사인법칙이란 무엇일까

생각 톡

오른쪽 삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=2$, $\overline{BC}=3$, $C=60°$이고, 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

탐구 ① 삼각형 AHC에서 선분 AH와 선분 CH의 길이를 구해 보자.

탐구 ② 탐구 ①의 결과를 이용하여 변 AB의 길이를 구해 보자.



레기오몬타누스
(Regiomontanus, 1436~1476)
독일의 수학자로 사인법칙, 코사인법칙 등을 정리하였다.

일반적으로 삼각형의 세 변의 길이와 세 각의 크기 사이에는 다음과 같은 관계가 성립하고, 이것을 **코사인법칙**이라고 한다.

코사인법칙

삼각형 ABC에서

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

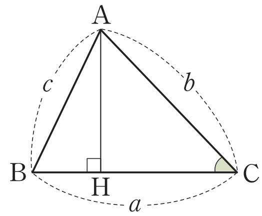
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

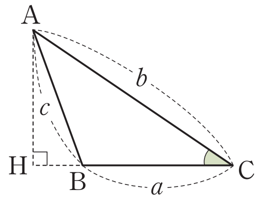
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

코사인법칙을 증명해 보자.

삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, ∠C의 크기에 따라 다음의 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $C<90°$일 때,





두 경우 모두

$$\overline{BH}=|\overline{BC}-\overline{CH}|=|a-b\cos C|$$

이고, $\overline{AH}=b\sin C$이므로

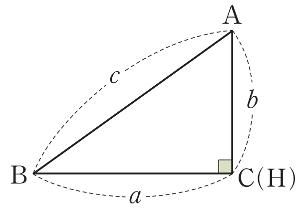
$$\begin{aligned}c^2&=\overline{BH}^2+\overline{AH}^2\\&=|a-b\cos C|^2+(b\sin C)^2\\&=a^2-2ab\cos C+b^2\cos^2 C+b^2\sin^2 C\\&=a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}$$

피타고라스 정리는 코사인법칙의 특별한 경우이다.

(ii) $C=90°$일 때,

$\cos C=0$이므로

$$c^2=a^2+b^2$$
$$=a^2+b^2-2ab\cos C$$

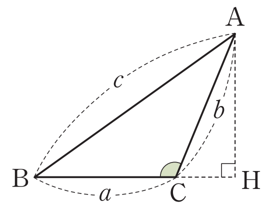


(iii) $C>90°$일 때,

$$\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CH}}=a+b\cos(180°-C)$$
$$=a-b\cos C$$

이고, $\overline{\mathrm{AH}}=b\sin(180°-C)=b\sin C$이므로

$$c^2=\overline{\mathrm{BH}}^2+\overline{\mathrm{AH}}^2$$
$$=(a-b\cos C)^2+(b\sin C)^2$$
$$=a^2-2ab\cos C+b^2\cos^2 C+b^2\sin^2 C$$
$$=a^2+b^2-2ab\cos C$$



(i), (ii), (iii)에서 ∠C의 크기에 관계없이 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$가 성립한다.

같은 방법으로

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

도 성립함을 알 수 있다.

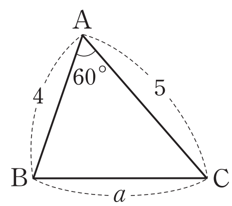
예제 4 **삼각형 ABC에서 $A=60°$, $b=5$, $c=4$일 때, a를 구하시오.**

풀이 코사인법칙에 의하여

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$=5^2+4^2-2\times5\times4\times\cos 60°=21$$

이때 $a>0$이므로 $a=\sqrt{21}$

답 $\sqrt{21}$



문제 4 **삼각형 ABC에서 다음을 구하시오.**

(1) $a=2\sqrt{3}$, $b=1$, $C=30°$일 때, c

(2) $a=3$, $c=4$, $B=120°$일 때, b

삼각형 ABC에서 세 변의 길이 a, b, c를 알면 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

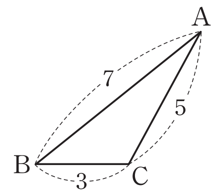
이므로 세 각의 크기 A, B, C를 구할 수 있다.

예제 5 삼각형 ABC에서 $a=3$, $b=5$, $c=7$일 때, C를 구하시오.

풀이 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\frac{1}{2}$$

이때 $0°<C<180°$이므로 $\qquad C=120°$

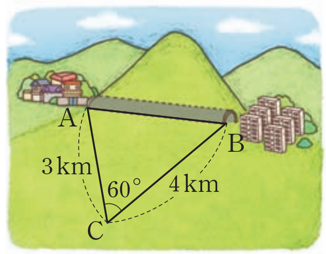


답 $120°$

문제 5 삼각형 ABC에서 $a=2$, $b=3$, $c=4$일 때, $\cos B$의 값을 구하시오.

문제 6 삼각형 ABC에서 $a\cos C=c\cos A$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하시오.

예제 6 두 지점 A, B를 직선으로 연결하는 터널의 길이를 구하기 위하여 오른쪽 그림과 같이 C지점에서 측량하였더니 $\overline{\mathrm{AC}}=3\,\mathrm{km}$, $\overline{\mathrm{BC}}=4\,\mathrm{km}$, $\angle\mathrm{ACB}=60°$이었다. 이때 터널의 길이를 구하시오.



풀이 $\overline{\mathrm{AB}}=x\,\mathrm{km}$라고 하면 코사인법칙에 의하여

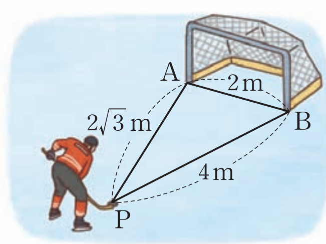
$$x^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos60°=13$$

이때 $x>0$이므로 $\qquad x=\sqrt{13}$

따라서 구하는 터널의 길이는 $\sqrt{13}\,\mathrm{km}$이다.

답 $\sqrt{13}\,\mathrm{km}$

문제 7 오른쪽 그림과 같이 한 선수가 아이스하키 골대의 두 기둥 A, B로부터 각각 $2\sqrt{3}\,\mathrm{m}$, $4\,\mathrm{m}$ 떨어진 지점 P에 있다. 골대의 폭이 $2\,\mathrm{m}$일 때, $\angle\mathrm{APB}$의 크기를 구하시오.



설명하기

삼각형에서 내각의 크기가 클수록 그 대변의 길이도 길다. 즉 크기가 가장 큰 내각의 대변의 길이가 가장 길고, 크기가 가장 작은 내각의 대변의 길이가 가장 짧다.

삼각형 ABC에서 a, b의 값이 일정할 때, $\angle\mathrm{C}$의 크기가 커질수록 c의 값도 커짐을 코사인법칙을 이용하여 설명해 보자.

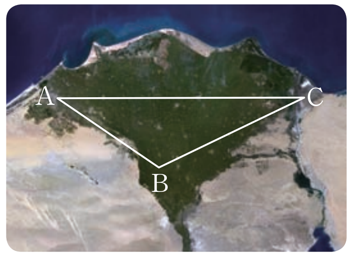
2 삼각형의 넓이

● 삼각함수를 활용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.

삼각함수를 활용하여 삼각형의 넓이를 어떻게 구할까

생각 톡

강의 하류에는 유속이 줄어들어 퇴적물이 쌓이게 되는데 이렇게 퇴적된 지형은 하늘에서 본 모양이 삼각형에 가까워 삼각주라고 부른다.
오른쪽은 이집트 나일강의 하류에 형성된 삼각주의 항공 사진이다. 이 삼각주 위의 세 지점 A, B, C에 대하여
$\overline{\mathrm{AB}}=120\text{ km}$, $\overline{\mathrm{BC}}=160\text{ km}$, $\angle\mathrm{ABC}=120°$이다.



(출처: 두산백과사전, 2016)

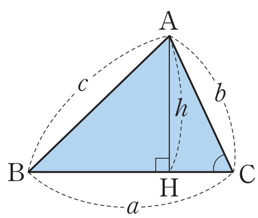
탐구 ① 점 A에서 변 BC의 연장선에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이를 구해 보자.

탐구 ② 삼각형 ABC의 넓이를 구해 보자.

삼각형에서 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기를 알 때, 그 삼각형의 넓이를 구해 보자.

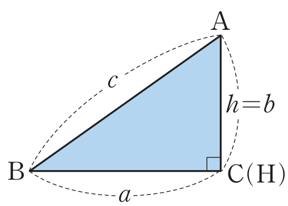
삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, $\overline{\mathrm{AH}}=h$라고 하면 $\angle\mathrm{C}$의 크기에 따라 다음의 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $C<90°$일 때,



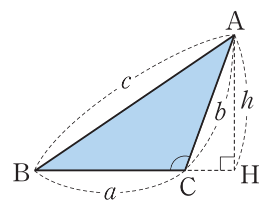
$h=b\sin C$

(ii) $C=90°$일 때,



$h=b=b\sin C$

(iii) $C>90°$일 때,



$h=b\sin(\pi-C)=b\sin C$

(i), (ii), (iii)에서 $\angle\mathrm{C}$의 크기에 관계없이 $h=b\sin C$이므로 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ab\sin C$$

이다.

같은 방법으로 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

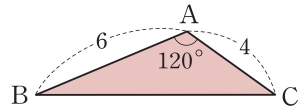
삼각형의 넓이

삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$$

보기 삼각형 ABC에서 $A=120°$, $b=4$, $c=6$일 때, 이 삼각형의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$
$$=\frac{1}{2}\times4\times6\times\sin 120°=6\sqrt{3}$$



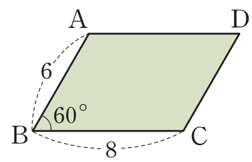
문제 1 **다음 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.**

(1) $a=3$, $b=8$, $C=45°$　　(2) $a=6$, $c=10$, $B=150°$

문제 2 **오른쪽 평행사변형 ABCD에서**

$$\overline{AB}=6,\ \overline{BC}=8,\ \angle ABC=60°$$

일 때, 이 평행사변형의 넓이를 구하시오.



예제 1 **삼각형 ABC에서 $a=5$, $b=8$, $c=7$일 때, 다음을 구하시오.**

(1) $\sin C$　　(2) 삼각형 ABC의 넓이

풀이 (1) 코사인법칙에 의하여

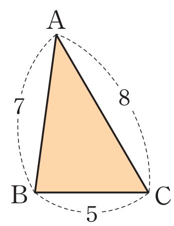
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\frac{1}{2}$$

이때 $\sin C>0$이므로

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

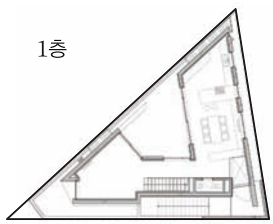
$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times5\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$$



답 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $10\sqrt{3}$

문제 3 **세 변의 길이가 8, 13, 15인 삼각형의 넓이를 구하시오.**

문제 4 오른쪽은 세 변의 길이의 비가 $4:5:6$인 삼각형 모양의 땅에 건설한 주택의 1층 평면도이다. 이 땅의 넓이가 $60\sqrt{7}\,\mathrm{m}^2$일 때, 가장 짧은 변의 길이를 구하시오.



예제 2 삼각형 ABC의 넓이를 S, 외접원의 반지름의 길이를 R라고 할 때,

$$S=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

임을 증명하시오.

증명 사인법칙에 의하여

$$b=2R\sin B,\ c=2R\sin C$$

위의 두 식을 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$에 대입하면

$$S=\frac{1}{2}\times 2R\sin B\times 2R\sin C\times\sin A$$
$$=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

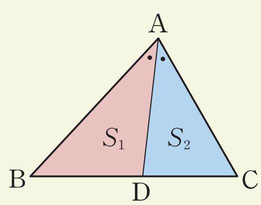
문제 5 삼각형 ABC의 넓이를 S, 외접원의 반지름의 길이를 R라고 할 때, $S=\frac{abc}{4R}$임을 증명하시오.

증명하기

삼각형 ABC에서 $\angle$A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 하면 다음이 성립한다.

$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}\qquad\cdots\cdots\ ①$$

삼각형 ABD의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라고 할 때, 다음의 과정에 따라 ①이 성립함을 증명해 보자.



1. $\angle$BAD$=\angle$CAD임을 이용하여 $S_1:S_2=\overline{AB}:\overline{AC}$임을 증명해 보자.
2. 꼭짓점 A에서 변 BC 또는 그 연장선에 내린 수선의 길이를 이용하여 $S_1:S_2=\overline{BD}:\overline{CD}$임을 증명해 보자.
3. 1, 2를 이용하여 ①이 성립함을 확인해 보자.

수학 역량 플러스

문제 해결 창의·융합

땅따먹기 놀이

지아와 준수가 다음과 같은 규칙으로 땅따먹기 놀이를 하고 있다.

❶ 각자 한 변의 길이가 10 cm인 정사각형을 그려서 자신의 영역으로 정한다.

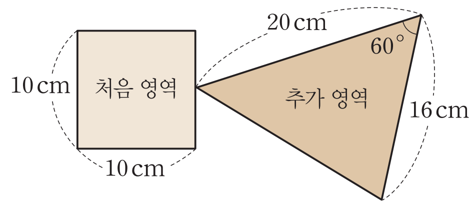
❷ 각자 자신의 영역에 돌멩이를 놓고 손가락으로 튕겨서 세 번 만에 다시 자신의 영역에 들어오면 돌멩이가 멈추었던 지점들을 꼭짓점으로 하는 다각형을 자신의 영역에 추가한다. 이때 영역은 경계선을 포함한다.

❸ ❷를 반복하여 더 많은 영역을 확보하는 사람이 이긴다.

예를 들어 지아가 처음 영역인 정사각형의 한 변 위에 돌멩이를 놓고 손가락으로 튕겨서 세 번 만에 만든 다각형이 오른쪽 그림과 같을 때, 추가 영역의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 20\times 16\times \sin 60^\circ = 80\sqrt{3}$$

이므로 지아의 영역의 넓이는 $(100+80\sqrt{3})\,\text{cm}^2$이다.

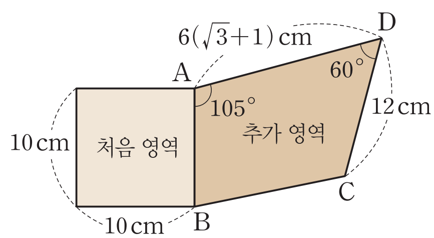


활동 준수가 처음 영역인 정사각형의 한 꼭짓점 위에 돌멩이를 놓고 손가락으로 튕겨서 세 번 만에 만든 다각형이 오른쪽 그림과 같다.

(1) 코사인법칙을 이용하여 선분 AC의 길이를 구해 보자.

(2) 사인법칙을 이용하여 $\angle$CAD의 크기를 구해 보자.

(3) 준수의 영역의 넓이를 구해 보자.

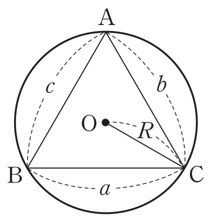


중단원 마무리

❶ 사인법칙

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\square}=\frac{\square}{\sin C}=\square$$



❷ 코사인법칙

삼각형 ABC에서

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-\square$$
$$c^2=\square-2ab\cos C$$

❸ 삼각형의 넓이

삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C$$
$$=\frac{1}{2}bc\square$$
$$=\frac{1}{2}\square\sin B$$

기본 문제

1 삼각형 ABC에서 다음을 구하시오. (단, R는 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이이다.)

(1) $a=2\sqrt{6}$, $A=60°$, $C=45°$일 때, c와 R

(2) $a=2$, $b=4$, $A=30°$일 때, B와 R

(3) $b=\sqrt{2}$, $B=45°$, $C=105°$일 때, a와 R

2 삼각형 ABC에서 다음을 구하시오.

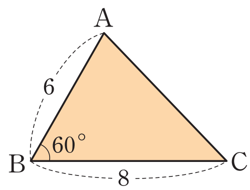
(1) $A=45°$, $b=5\sqrt{2}$, $c=6$일 때, a

(2) $a=6$, $c=12$, $B=120°$일 때, b

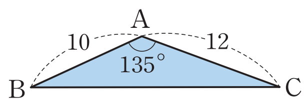
(3) $a=2$, $b=3$, $c=\sqrt{7}$일 때, C

3 다음 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

(1)



(2)



4 삼각형 ABC에서 $a=7$, $b=5$, $c=4$일 때, 다음을 구하시오.

(1) $\sin A$

(2) 삼각형 ABC의 넓이

• 정답 및 풀이 169쪽

표준 문제

5 반지름의 길이가 4인 원에 내접하는 삼각형 ABC에 대하여 $a+b+c=12$일 때, $\sin A+\sin B+\sin C$의 값을 구하시오.

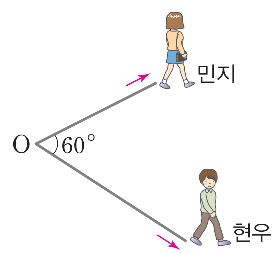
서술형 **6** 삼각형 ABC에서 $a=5$, $b=3$, $C=120°$일 때, 이 삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

7 다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하시오.

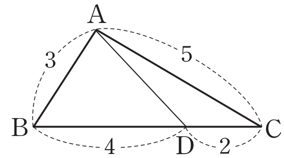
(1) $a\sin^2 A=c\sin^2 C$

(2) $\sin A\cos C=\sin B$

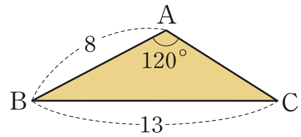
8 오른쪽 그림과 같이 지점 O에서 민지와 현우가 60°의 각을 이루며 동시에 출발하여 민지는 매초 1.5 m의 속력으로, 현우는 매초 2 m의 속력으로 각각 전방을 향해 걸어가고 있다. 출발한 지 10초 후의 두 사람 사이의 거리를 구하시오.



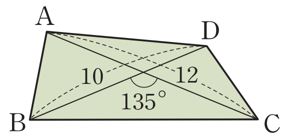
문제 해결 **9** 오른쪽 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=5$이고, 변 BC 위의 한 점 D에 대하여 $\overline{BD}=4$, $\overline{DC}=2$일 때, $\overline{AD}$의 길이를 구하시오.



10 오른쪽 삼각형 ABC에서 $A=120°$이고 $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=13$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.



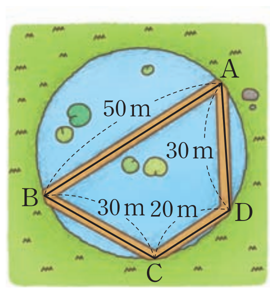
11 오른쪽 사각형 ABCD에서 두 대각선의 길이가 각각 12, 10이고 두 대각선이 이루는 각의 크기가 135°일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 구하시오.



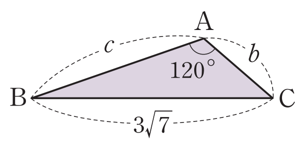
발전 문제

서술형 **12** 삼각형 ABC에서 $\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$일 때, 이 삼각형의 세 내각 중에서 크기가 가장 큰 내각의 크기를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

창의·융합 **13** 오른쪽 그림과 같이 원 모양의 호수에 네 지점 A, B, C, D를 연결하는 네 개의 다리가 있다. $\overline{AB}=50\text{ m}$, $\overline{BC}=30\text{ m}$, $\overline{CD}=20\text{ m}$, $\overline{DA}=30\text{ m}$일 때, 이 호수의 넓이를 구하시오.



14 오른쪽 삼각형 ABC에서 $A=120°$, $\overline{BC}=3\sqrt{7}$이고 $b+c=9$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.



대단원 마무리

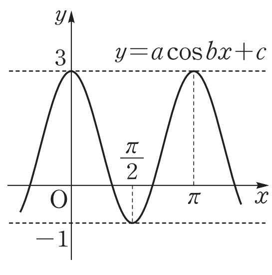
• 정답 및 풀이 170쪽

01 넓이가 8π이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴의 반지름의 길이와 호의 길이를 구하시오.

02 θ가 제3사분면의 각이고 $\tan\theta=\frac{1}{2}$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값을 구하시오.

03 함수 $y=a\cos bx+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 상수 a, b, c의 값을 구하시오.

(단, $a>0$, $b>0$)



04 함수 $y=\sin\pi x$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{10}x$의 교점의 개수를 구하시오.

05 함수 $y=-\cos^2 x+\cos x$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, Mm의 값을 구하시오.

06 다음 식의 값을 구하시오.

$$\tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\ \cdots\ \times\tan 88^\circ\times\tan 89^\circ$$

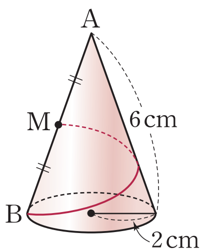
07 $0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $\sin x+|\sin x|=1$의 해를 구하시오.

08 $0 \le x < \frac{5}{2}\pi$일 때, 방정식 $3\sin x = 2$를 만족시키는 x의 값을 작은 것부터 차례대로 α, β, γ라고 하자. 이때 $\cos\left(\alpha + \frac{\beta+\gamma}{2}\right)$의 값을 구하시오.

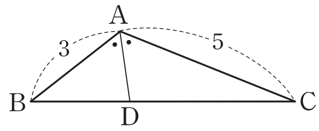
09 $0 \le x < 2\pi$일 때, 부등식 $0 < \cos x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$를 푸시오.

10 삼각형 ABC에서 세 내각의 크기의 비가 $A : B : C = 1 : 1 : 4$일 때, 세 변의 길이의 비 $a : b : c$를 구하시오.

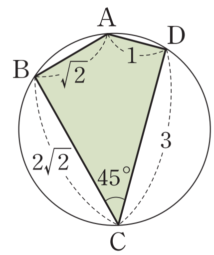
11 오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 2 cm, 모선의 길이가 6 cm인 원뿔에서 모선 AB의 중점을 M이라고 하자. 점 B에서 출발하여 원뿔의 옆면을 따라 점 M에 이르는 최단 거리를 구하시오.



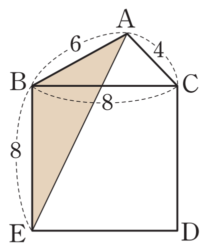
12 오른쪽 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=5$, $\angle A = 120°$이다. $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, $\overline{AD}$의 길이를 구하시오.



13 오른쪽 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에서 $\overline{AB}=\sqrt{2}$, $\overline{BC}=2\sqrt{2}$, $\overline{CD}=3$, $\overline{DA}=1$, $\angle BCD = 45°$일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 구하시오.



14 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=4$인 삼각형 ABC에서 선분 BC를 한 변으로 하는 정사각형 BEDC를 만들었다. 이때 삼각형 ABE의 넓이를 구하시오.



서술형

• 정답 및 풀이 171쪽

15 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{5}{4}$일 때, $\sin\theta-\cos\theta$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$

풀이

16 함수 $f(x)=a\sin\frac{x}{3}+b$의 최댓값은 4이고 $f\left(\frac{5}{2}\pi\right)=\frac{3}{2}$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. (단, $a>0$)

풀이

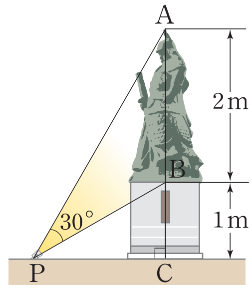
17 $0\le x<2\pi$일 때, 부등식

$$2\sin^2 x-\cos x-1>0$$

의 해를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

18 오른쪽 그림과 같이 높이가 1 m인 받침대 위에 키가 2 m인 동상이 세워져 있다. P지점에 조명을 설치하여 밤에도 동상을 볼 수 있게 하려고 한다. $\angle APB=30°$일 때, $\overline{PC}$의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



풀이

자기 평가

만족 보통 미흡

❶ 일반각과 호도법의 뜻을 알고 있다.

❷ 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.

❸ 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

보충 계획

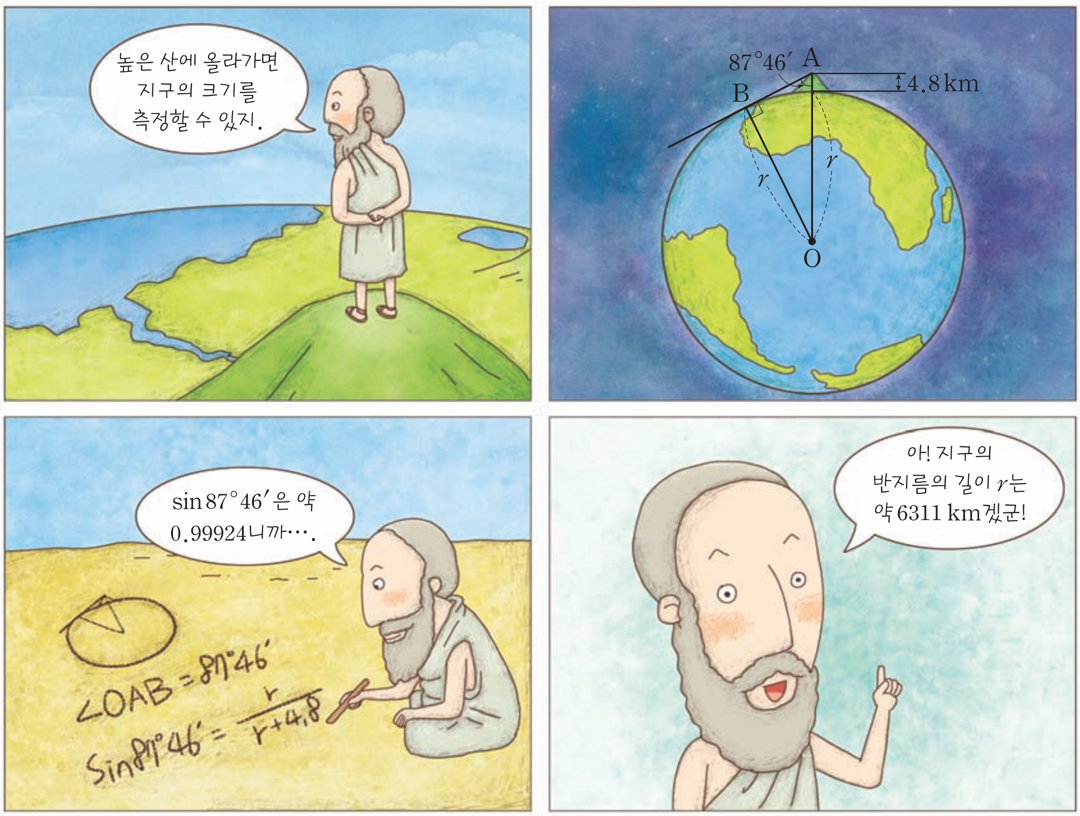
부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

창의·융합 프로젝트

지구의 크기를 측정한 수학자

삼각함수는 고대 그리스에서 천문학을 연구하면서부터 시작되었다. 특히 히파르코스(Hipparchos, B.C. 190?~B.C. 125?)는 천체 운동에 대한 계산의 기초로서 삼각법을 고안하였고, 이를 이용하여 지구의 크기를 측정하였다.

다음은 히파르코스가 지구의 크기를 측정한 방법을 만화로 구성한 것이다.



히파르코스가 구한 지구의 반지름의 길이 6311 km는 오늘날 알려진 지구의 평균 반지름의 길이인 6400 km와 큰 차이가 없다.

(출처: EBS MATH, 2016)

과제 역사 속에서 지구의 크기를 측정한 수학자들의 이야기를 찾아보고 그 내용을 발표해 보자.

세상 속 수학

Math X Technology

삼각함수로 소리를 표현하다

우리 주변에서 흔히 관찰할 수 있는 주기적인 현상은 삼각함수를 이용하여 표현할 수 있다. 프랑스의 수학자 푸리에(Fourier, J. B. J., 1768~1830)는 1822년에 모든 주기적인 현상은 적당한 사인함수들의 합으로 표현할 수 있다는 사실을 밝혀냈는데, 이것을 푸리에 분석이라고 한다.

푸리에 분석을 이용하면 모든 소리의 파동을 여러 개의 단순한 파동으로 분리할 수 있는데, 이는 소리에 섞인 잡음을 제거하는 방법으로 활용된다. 첨단 기기를 이용하여 소리를 먼 곳으로 전송할 때에는 여러 가지 이유로 잡음이 섞이게 된다. 이때 푸리에 분석을 이용하여 전달하려는 소리와 잡음이 섞인 소리의 파동을 단순한 파동으로 분리하면 잡음 제거가 가능해진다. 이와 같은 원리는 사람의 목소리를 분석하여 주인의 목소리에만 반응하는 로봇을 개발하거나 심전도 검사에서 불필요한 잡음을 제거할 때도 활용된다.

한편 새로운 소리를 만들어 낼 때도 푸리에 분석을 활용할 수 있다. 악기 중에서 플루트는 가장 순수한 소리를 내는 것으로 알려져 있는데, 플루트가 내는 소리를 그래프로 표현하면 함수 $y=\sin x$의 그래프와 비슷한 모양이 된다. 이와 같은 단순한 모양의 파동 몇 개가 합쳐지면 복잡한 모양의 파동이 만들어지는데, 신시사이저는 이 원리를 이용하여 수십 가지의 악기 소리를 낼 수 있다.

(출처: 『세계일보』, 2007. 3. 26.,
신동근, 『신경망 기반의 심전도신호 특징 추출 및 선택에 의한 부정맥 진단』)

진로 탐색

소리 공학자 | 소리 공학자는 음성 분석 시스템을 연구하여 다양한 응용 콘텐츠를 개발한다. 이는 범죄 수사, 음성 인식 기능, 보안 장치 등 여러 분야에 활용된다.