II 삼각함수

푸리에
(Fourier, J. B. J., 1768~1830)
'푸리에의 정리'를 발표하여 삼각함수 이론의 발전에 크게 기여하였다.

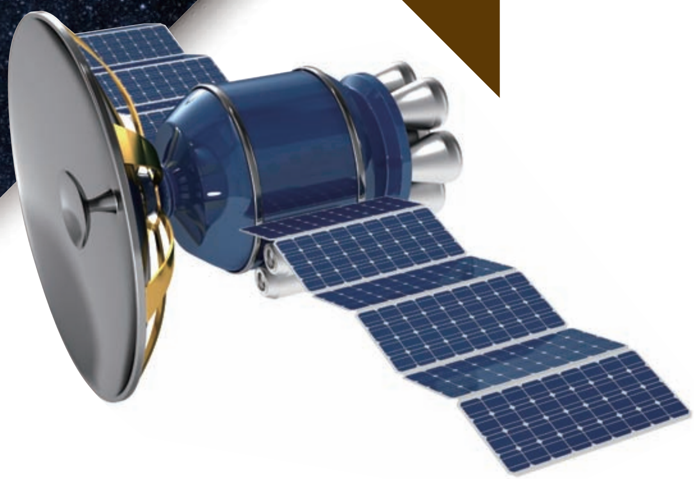
(출처: 하워드 이브스, 『수학사』)

레기오몬타누스
(Regiomontanus, 1436~1476)
대표 저서 『삼각법의 모든 것』은 천문학에서 삼각법을 분리해 내었다는 수학사적 의미를 갖는다.

(출처: 김화영, 『교과서를 만든 수학자들』)

학습목표

- **일반각**과 **호도법**의 뜻을 안다.
- **삼각함수**의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
- **사인법칙**과 **코사인법칙**을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.



반복되는 현상을 관찰하다

우리 주위에는 지구의 자전과 공전, 달의 모양의 변화, 밀물과 썰물의 변화, 심장 박동 등과 같이 일정한 간격으로 반복되는 현상들이 있다. 이와 같이 반복되는 현상들은 삼각함수로 가장 잘 설명된다. 삼각함수는 진동이나 음향, 전파 등을 연구하거나 위치나 넓이를 측량할 때 활용된다.

일정한 시간마다 같은 현상이 반복되는 것을 주기 운동이라고 한다. 시계추의 움직임이나 자동차 엔진 속 피스톤의 움직임은 주기 운동의 대표적인 예이다.

이와 같이 주기 운동을 하는 물체의 움직임을 그래프로 나타내면 물결 모양이 그려진다. 계절에 따른 기온의 변화, 낮과 밤의 길이의 변화, 해수면의 높이의 변화 등과 같이 주기적으로 반복되는 자연 현상들도 비슷한 모양의 그래프로 나타난다.

이 단원에서는 이러한 주기적인 현상을 설명할 수 있는 삼각함수를 알아본다.

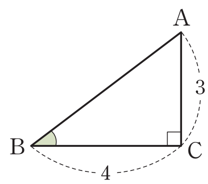
(출처: 서울과학교사모임, 『시크릿 스페이스』, 『국제신문』, 2012. 9. 17.)

1 삼각함수

준비학습

1 오른쪽 직각삼각형 ABC에서 다음 삼각비의 값을 구하시오.

(1) $\sin B$　　(2) $\cos B$　　(3) $\tan B$



2 다음 표를 완성하시오.

삼각비 \ A	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin A$					
$\cos A$					
$\tan A$					

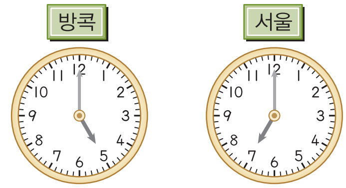
1 일반각과 호도법

- 일반각과 호도법의 뜻을 안다.

일반각이란 무엇일까

생각톡

서울이 오전 7시일 때, 방콕은 오전 5시이다.

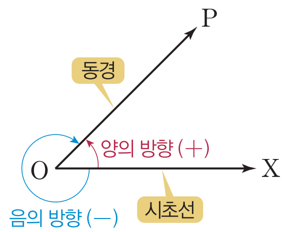


탐구 ① 방콕에서 서울로 올 때, 방콕 현지 시각에 맞추어져 있는 시계를 서울 현지 시각에 맞추려면 분침을 시곗바늘이 도는 방향으로 최소 몇 바퀴 돌려야 하는지 말해 보자.

탐구 ② 분침을 한 바퀴 돌렸을 때 회전한 각의 크기는 $360°$이다. **탐구 ①**에서 분침이 회전한 각의 크기가 얼마일지 말해 보자.

지금까지는 $0°$에서 $360°$까지의 각만을 사용하여 각의 크기를 나타내었다. 이제 각의 크기의 범위를 확장해 보자.

오른쪽 그림과 같이 두 반직선 OX, OP에 의하여 정해진 $\angle XOP$의 크기는 반직선 OP가 점 O를 중심으로 고정된 반직선 OX의 위치에서 반직선 OP의 위치까지 회전한 양으로 정의한다.



이때 반직선 OX를 **시초선**, 반직선 OP를 **동경**이라고 한다.

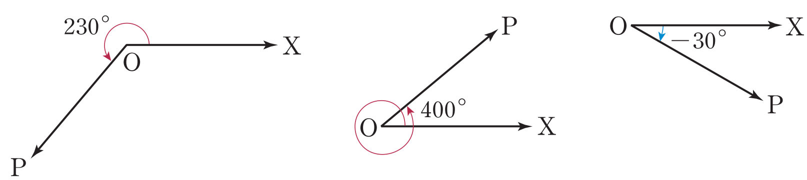
시초선(始初線)은 처음 시작하는 선이라는 뜻이고, 동경(動徑)은 움직이는 선이라는 뜻이다.

동경 OP가 점 O를 중심으로 회전할 때, 시곗바늘이 도는 방향과 반대인 방향을 양의 방향, 시곗바늘이 도는 방향을 음의 방향이라고 한다.

이때 양의 방향으로 회전하여 생기는 각의 크기는 양의 부호$(+)$를, 음의 방향으로 회전하여 생기는 각의 크기는 음의 부호$(-)$를 붙여서 나타낸다.

양의 부호$(+)$는 보통 생략한다.

보기 시초선이 반직선 OX일 때, $230°$, $400°$, $-30°$를 나타내는 동경 OP의 위치를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

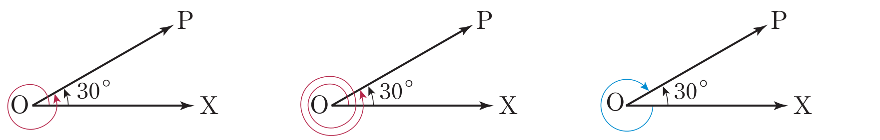


문제 1 **다음 각을 나타내는 시초선 OX와 동경 OP의 위치를 그림으로 나타내시오.**

(1) $120°$　　(2) $570°$　　(3) $-315°$

시초선 OX는 고정되어 있으므로 $\angle$XOP의 크기가 정해지면 동경 OP의 위치는 하나로 정해진다. 그런데 동경 OP가 양의 방향 또는 음의 방향으로 한 바퀴 이상 회전할 수 있으므로 동경 OP의 위치가 정해져도 $\angle$XOP의 크기는 하나로 정해지지 않는다.

예를 들어 시초선 OX와 $30°$를 이루는 위치에 있는 동경 OP가 나타내는 각의 크기는 다음 그림과 같이 여러 가지이다.



$360° \times 1 + 30° = 390°$　　$360° \times 2 + 30° = 750°$　　$360° \times (-1) + 30° = -330°$

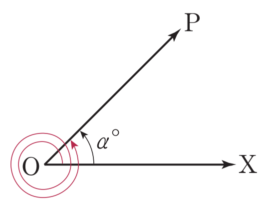
보통 $\alpha°$는 $0° \le \alpha° < 360°$인 것을 택한다.

일반적으로 시초선 OX와 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를 $\alpha°$라고 하면 $\angle$XOP의 크기는

$$360° \times n + \alpha° \ (n\text{은 정수})$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

이것을 동경 OP가 나타내는 **일반각**이라고 한다.



문제 2 **다음 각의 동경이 나타내는 일반각을 $360° \times n + \alpha°$의 꼴로 나타내시오.**

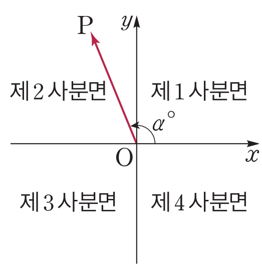
(단, n은 정수, $0° \le \alpha° < 360°$)

(1) $40°$　　(2) $840°$　　(3) $-60°$　　(4) $-650°$

좌표평면에서 시초선은 보통 원점에서 x축의 양의 방향으로 정한다.

동경 OP가 좌표축 위에 있을 때에는 어느 사분면에도 속하지 않는다.

오른쪽 그림과 같이 좌표평면에서 시초선을 원점 O에서 x축의 양의 방향으로 잡을 때, 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면에 있는 동경 OP가 나타내는 각을 각각 제1사분면의 각, 제2사분면의 각, 제3사분면의 각, 제4사분면의 각이라고 한다.



보기 $1210° = 360° \times 3 + 130°$이므로 $1210°$는 제2사분면의 각이다.

문제 3 **다음 각은 제몇 사분면의 각인지 말하시오.**

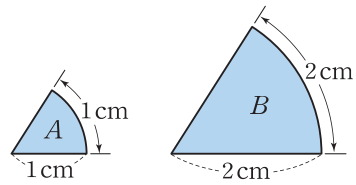
(1) $420°$　　(2) $940°$　　(3) $-580°$　　(4) $-745°$

호도법이란 무엇일까

생각 톡

오른쪽 그림에서 부채꼴 A는 반지름의 길이와 호의 길이가 모두 1 cm이고, 부채꼴 B는 반지름의 길이와 호의 길이가 모두 2 cm이다.

탐구 투명 필름을 이용하여 두 부채꼴 A, B의 중심각의 크기를 비교해 보자.

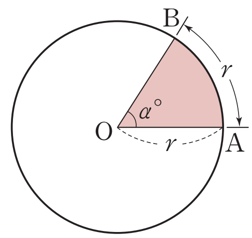


육십분법은 원의 둘레를 360 등분 하여 각 호에 대한 중심각의 크기를 1도(°), 1도의 육십분의 일을 1분(′), 1분의 육십분의 일을 1초(″)로 정의하여 각의 크기를 나타내는 방법이다.

지금까지는 각의 크기를 나타낼 때, 30°, 60°와 같이 도(°)를 단위로 하는 육십분법을 사용하였다.

이제 각의 크기를 나타내는 새로운 방법을 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 원에서 길이가 r인 호 AB의 중심각의 크기를 $\alpha°$라고 하면 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로



$$r : 2\pi r = \alpha° : 360°, \text{ 즉 } \alpha° = \frac{180°}{\pi}$$

이다.

따라서 중심각의 크기 $\alpha°$는 반지름의 길이 r에 관계없이 항상 일정하다.

라디안(radian)은 반지름(radius)과 각(angle)을 나타내는 영어 단어의 합성어이다.

이 일정한 각의 크기 $\frac{180°}{\pi}$를 1**라디안**(radian)이라 하고, 이것을 단위로 각의 크기를 나타내는 방법을 **호도법**이라고 한다.

호도법(弧度法)은 호(弧)의 길이를 이용하여 각의 크기(度)를 나타내는 방법이다.

호도법과 육십분법 사이에는 다음 관계가 성립한다.

1라디안은 약 57°17′45″이다.

호도법과 육십분법

$$1\text{라디안} = \frac{180°}{\pi}, \quad 1° = \frac{\pi}{180}\text{라디안}$$

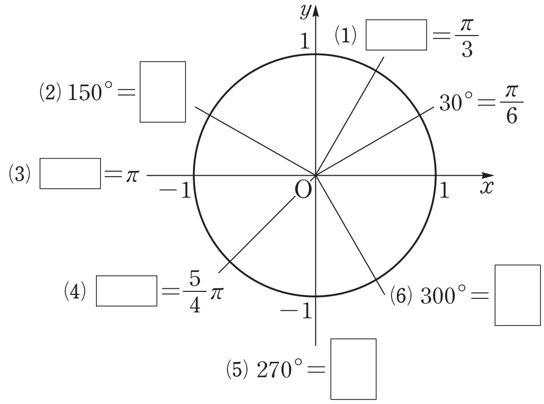
참고 호도법으로 나타낸 각의 크기는 반지름의 길이에 대한 호의 길이의 비를 나타낸 실수이므로 보통 단위인 라디안을 생략하고 1, $\frac{\pi}{4}$, π와 같이 나타낸다.

보기

❶ $45° = 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$

❷ $\frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi \times \frac{180°}{\pi} = 120°$

문제 4　**다음 그림에서 $\square$ 안에 알맞은 각을 호도법 또는 육십분법으로 나타내시오.**

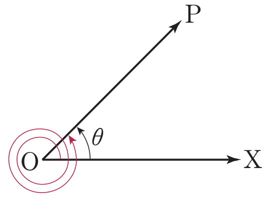


호도법으로 일반각을 나타내 보자.

시초선 OX와 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를 θ라고 하면 동경 OP가 나타내는 일반각은

$$2n\pi+\theta \ (n\text{은 정수})$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.



보통 θ는 $0\le\theta<2\pi$인 것을 택한다.

문제 5　**다음 각의 동경이 나타내는 일반각을 $2n\pi+\theta$의 꼴로 나타내시오.**

(단, n은 정수, $0\le\theta<2\pi$)

(1) $\frac{\pi}{6}$　(2) $\frac{13}{4}\pi$　(3) $-\frac{4}{3}\pi$　(4) -3π

부채꼴의 호의 길이와 넓이는 어떻게 구할까

중심각의 크기를 호도법으로 나타낸 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구해 보자.

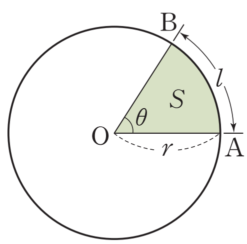
오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 길이를 l이라고 하면 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로

$$l : 2\pi r=\theta : 2\pi, \text{ 즉 } l=r\theta$$

이다. 또 부채꼴 OAB의 넓이를 S라고 하면 부채꼴의 넓이도 중심각의 크기에 정비례하므로

$$S : \pi r^2=\theta : 2\pi, \text{ 즉 } S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$$

이다.



$l=r\theta$이므로
$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}r\times r\theta=\frac{1}{2}rl$

이상을 정리하면 다음과 같다.

부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

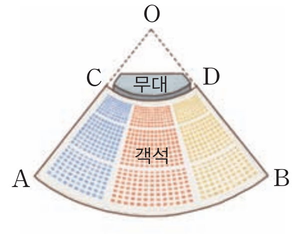
❶ $l=r\theta$ ❷ $S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$

문제 6 **다음을 구하시오.**

(1) 반지름의 길이가 6 cm, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴의 호의 길이와 넓이

(2) 호의 길이가 3π cm, 넓이가 3π cm^{2}인 부채꼴의 반지름의 길이와 중심각의 크기

문제 7 **오른쪽 그림은 어느 공연장의 무대와 객석이다. 부채꼴 OAB에서 호 AB의 길이는 52 m, 부채꼴 OCD에서 호 CD의 길이는 20 m이고 $\overline{AC}=\overline{BD}=24$ m일 때, 다음에 답하시오.**

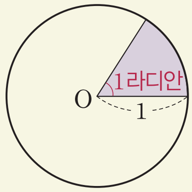


(1) 부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 구하시오.

(2) 이 공연장의 객석 부분인 도형 ABDC의 넓이를 구하시오.

문제 해결하기

오른쪽 그림은 반지름의 길이가 1인 원에 중심각의 크기가 1라디안인 부채꼴을 나타낸 것이다.



1 반지름의 길이가 1, 중심각의 크기가 2라디안인 부채꼴을 그리고, 그 넓이를 구해 보자.

2 반지름의 길이가 1인 원에 중심각의 크기가 2라디안인 부채꼴을 겹치지 않게 최대 몇 개까지 그릴 수 있는지 구해 보자.

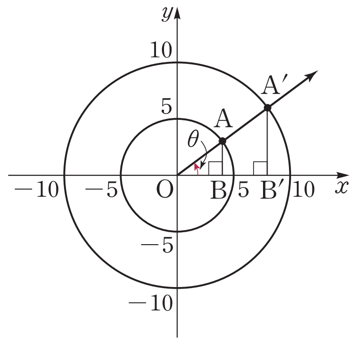
2 삼각함수

● 삼각함수의 뜻을 안다.

삼각함수란 무엇일까

생각 톡

오른쪽 그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 5, 10인 두 원이 있다. 각 θ를 나타내는 동경과 두 원이 만나는 점을 각각 $A(4,\ 3)$, $A'(8,\ 6)$이라 하고, 두 점 A, A′에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 B, B′이라고 하자.

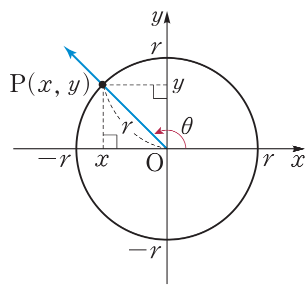


탐구 ① 직각삼각형 AOB에서 $\sin\theta$의 값을 구해 보자.

탐구 ② 직각삼각형 A′OB′에서 $\sin\theta$의 값을 구해 보자.

지금까지는 삼각비를 $0°$에서 $90°$까지의 범위에서만 다루었다. 이제 삼각비의 개념을 일반각의 경우로 확장해 보자.

오른쪽 그림과 같이 좌표평면에서 시초선을 원점 O에서 x축의 양의 방향으로 잡을 때, 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를 θ라고 하자. 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원과 동경 OP의 교점을 $P(x,\ y)$라고 하면



$$\frac{y}{r},\ \frac{x}{r},\ \frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

의 값은 r의 값에 관계없이 θ의 값에 따라 각각 하나로 정해진다.

따라서

$$\theta \longrightarrow \frac{y}{r},\ \theta \longrightarrow \frac{x}{r},\ \theta \longrightarrow \frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

와 같은 대응은 모두 θ에 대한 함수이다.

이들 함수를 차례대로 θ에 대한 **사인함수**, **코사인함수**, **탄젠트함수**라 하고, 이것을 기호로 각각 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$와 같이 나타낸다.

sin, cos, tan는 각각 sine, cosine, tangent의 약자이다.

즉 $\sin\theta=\frac{y}{r}$, $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq 0)$이다.

위에서 정의한 함수들을 통틀어 θ에 대한 **삼각함수**라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

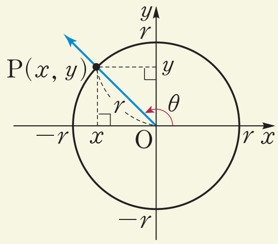
삼각함수

오른쪽 그림에서

$$\sin\theta=\frac{y}{r}$$

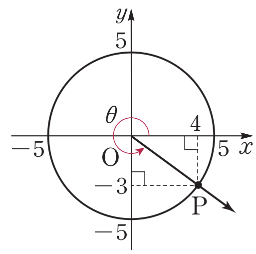
$$\cos\theta=\frac{x}{r}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$



보기 각 θ를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하는 원의 교점이 P$(4,\ -3)$일 때, $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$이므로

$$\sin\theta=-\frac{3}{5},\ \cos\theta=\frac{4}{5},\ \tan\theta=-\frac{3}{4}$$

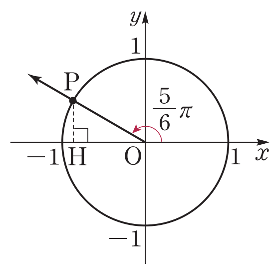


문제 1 **각 θ를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하는 원의 교점이 P$(-12,\ -5)$일 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구하시오.**

예제 1 **$\theta=\frac{5}{6}\pi$일 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구하시오.**

풀이 오른쪽 그림과 같이 각 $\theta=\frac{5}{6}\pi$를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 고 하자.

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 단위원이라고 한다.



$\overline{\mathrm{OP}}=1$이고 $\angle\mathrm{POH}=\frac{\pi}{6}$이므로 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이다.

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{OP}}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$,

$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OP}}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 $\sin\theta=\frac{1}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

답 $\sin\theta=\frac{1}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

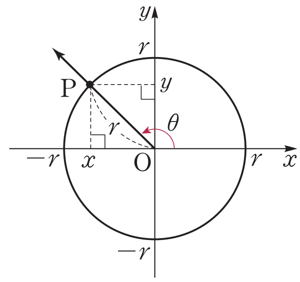
문제 2 **다음 각 θ에 대하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구하시오.**

(1) $\frac{5}{4}\pi$ (2) $\frac{13}{6}\pi$ (3) $300°$ (4) $-225°$

삼각함수의 값의 부호는 어떻게 정해질까

삼각함수의 값의 부호가 각 사분면에서 어떻게 되는지 조사해 보자.

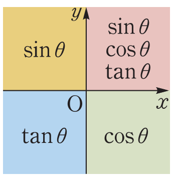
오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면

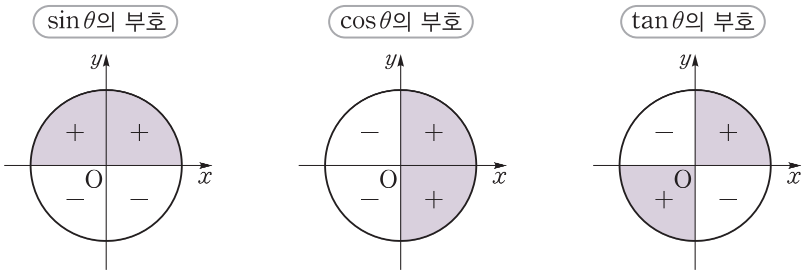


$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq0)$$

이다. 따라서 삼각함수의 값의 부호는 점 P의 x좌표, y좌표의 부호에 의하여 결정되므로 각 θ가 제몇 사분면의 각인지에 따라 다음과 같이 정해진다.

각 사분면에서 삼각함수의 값의 부호가 +인 것을 나타내면 다음과 같다.





보기 $\frac{6}{5}\pi$는 제3사분면의 각이므로

$$\sin\frac{6}{5}\pi<0,\ \cos\frac{6}{5}\pi<0,\ \tan\frac{6}{5}\pi>0$$

문제 3 **다음 각 θ에 대하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값의 부호를 말하시오.**

(1) $\frac{11}{6}\pi$　　(2) $-\frac{3}{4}\pi$　　(3) 160°　　(4) 440°

예제 2 **$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$을 만족시키는 각 θ는 제몇 사분면의 각인지 말하시오.**

풀이 $\sin\theta<0$이므로 각 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.
$\cos\theta>0$이므로 각 θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.
따라서 각 θ는 제4사분면의 각이다.

답 제4사분면

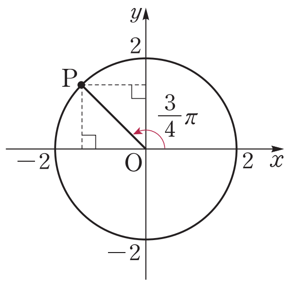
문제 4 **다음 조건을 만족시키는 각 θ는 제몇 사분면의 각인지 말하시오.**

(1) $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$　　(2) $\cos\theta\tan\theta>0$

삼각함수 사이에는 어떤 관계가 있을까

생각톡

오른쪽 그림과 같이 각 $\theta=\frac{3}{4}\pi$를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원의 교점을 P라고 하자.

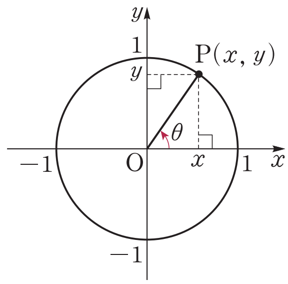


탐구 ① 점 P의 좌표를 이용하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구해 보자.

탐구 ② 탐구 ①의 결과를 이용하여 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$와 $\tan\theta$의 값을 비교해 보자.

탐구 ③ 탐구 ①의 결과를 이용하여 $(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2$의 값을 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 $\mathrm{P}(x, y)$라고 하면 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$이므로 $x\neq0$이면



$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

이다. 또 단위원에서 $x^2+y^2=1$이므로

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

이다.

$(\sin\theta)^2$, $(\cos\theta)^2$은 각각 $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$로 나타낸다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

삼각함수 사이의 관계

❶ $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ❷ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

예제 3 θ가 제2사분면의 각이고 $\sin\theta=\frac{3}{5}$일 때, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구하시오.

풀이 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\left(\frac{4}{5}\right)^2$

그런데 θ가 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

$$\cos\theta=-\frac{4}{5}$$

또 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\tan\theta=-\frac{3}{4}$

답 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$, $\tan\theta=-\frac{3}{4}$

문제 5 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이고 $\cos\theta=-\frac{5}{13}$일 때, $\sin\theta$, $\tan\theta$의 값을 구하시오.

예제 4 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$일 때, $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구하시오.

풀이 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\quad 1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$

$$\sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$$

답 $-\frac{4}{9}$

문제 6 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sin\theta\cos\theta$

(2) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

문제 7 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$

(2) $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

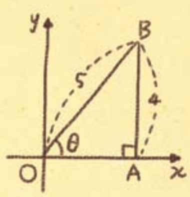
오류 찾기

다음은 건우가 $0\le\theta<2\pi$이고 $\sin\theta=\frac{4}{5}$일 때, $\cos\theta$의 값을 구한 풀이이다. 건우의 풀이가 틀린 이유를 설명하고 바른 답을 구해 보자.

$\sin\theta=\frac{4}{5}$이므로 오른쪽 그림과 같은 좌표평면 위의 직각삼각형 OAB를 생각할 수 있다.

이때 $\overline{OA}=\sqrt{5^2-4^2}=3$이므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{3}{5}$$



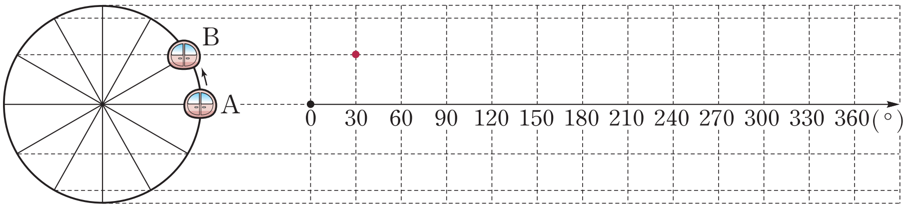
3 삼각함수의 그래프

● 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.

사인함수와 코사인함수의 그래프는 어떻게 그릴까

생각 톡

다음은 대관람차가 회전할 때 곤돌라의 높이의 변화를 알아보기 위하여 그림으로 나타낸 것이다. A지점에서 출발한 한 곤돌라가 시곗바늘이 도는 방향과 반대인 방향으로 30°만큼 회전하여 B지점에 이르렀을 때, 출발점으로부터의 곤돌라의 높이는 아래와 같이 나타낼 수 있다.



탐구 ① 이와 같은 방법으로 30°만큼씩 더 회전할 때의 곤돌라의 높이를 위의 그림에 점을 찍어 나타내 보자.

탐구 ② 탐구 ①에서 나타낸 점들을 매끄러운 곡선으로 연결해 보자.

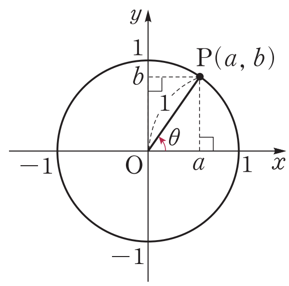
사인함수의 그래프를 그려 보자.

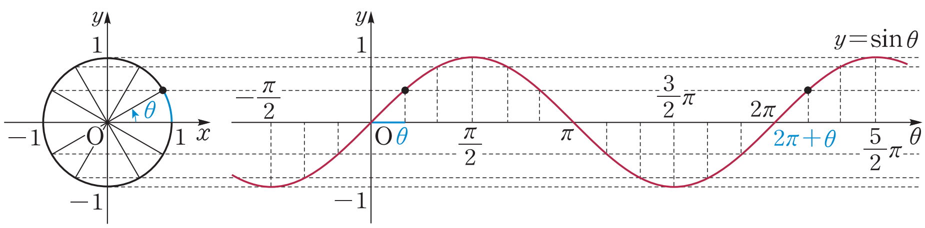
오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라고 하면

$$\sin\theta = b$$

이므로 $\sin\theta$의 값은 점 P의 y좌표로 정해진다.

따라서 점 P가 단위원 위를 움직일 때 순서쌍 $(\theta,\ \sin\theta)$를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내어 사인함수 $y=\sin\theta$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

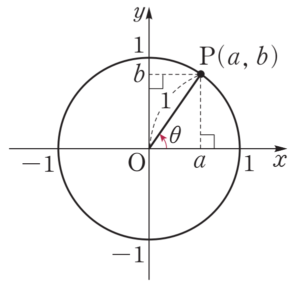




앞의 그래프에서 알 수 있듯이 함수 $y=\sin\theta$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이다.

또 함수 $y=\sin\theta$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $\sin(-\theta)=-\sin\theta$이다.

같은 방법으로 코사인함수의 그래프를 그려 보자.

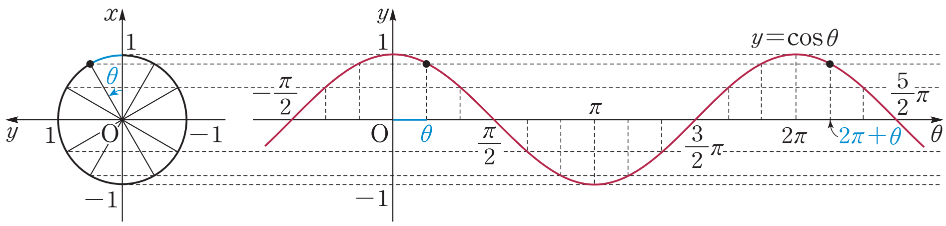


오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P$(a,\ b)$라고 하면

$$\cos\theta=a$$

이므로 $\cos\theta$의 값은 점 P의 x좌표로 정해진다.

따라서 점 P가 단위원 위를 움직일 때 순서쌍 $(\theta,\ \cos\theta)$를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내어 코사인함수 $y=\cos\theta$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



위의 그래프에서 알 수 있듯이 함수 $y=\cos\theta$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이다.

또 함수 $y=\cos\theta$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $\cos(-\theta)=\cos\theta$이다.

함수의 정의역의 원소는 보통 x로 나타내므로 이제부터 사인함수 $y=\sin\theta$, 코사인함수 $y=\cos\theta$에서 θ를 x로 바꾸어 $y=\sin x$, $y=\cos x$로 나타내기로 한다.

한편 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프는 모두 2π 간격으로 같은 모양이 반복되므로 모든 실수 x에 대하여

$$\sin(x+2n\pi)=\sin x,\ \cos(x+2n\pi)=\cos x\ (n\text{은 정수})$$

가 성립한다.

일반적으로 함수 f의 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여

$$f(x+p)=f(x)$$

를 만족시키는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때, 함수 f를 **주기함수**라 하고, 이러한 상수 p 중에서 최소인 양수를 그 함수의 **주기**라고 한다.

따라서 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$는 모두 주기가 2π인 주기함수이다.

$\sin(x+2\pi)=\sin x$
$\sin(x+4\pi)=\sin x$
$\vdots$
이 중 $\sin(x+p)=\sin x$를 만족시키는 최소인 양수 p는 2π이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 성질

❶ 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$이다.

❷ $y=\sin x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고,
$y=\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 즉

$$\sin(-x)=-\sin x,\ \cos(-x)=\cos x$$

❸ 주기가 2π인 주기함수이다. 즉

$$\sin(2n\pi+x)=\sin x,\ \cos(2n\pi+x)=\cos x\ (\text{단, } n\text{은 정수})$$

보기

❶ $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

❷ $\cos\frac{7}{3}\pi=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

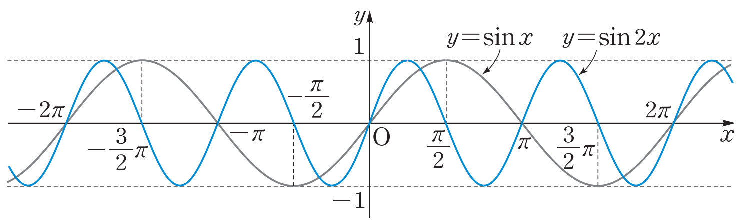
문제 1 다음 삼각함수의 값을 구하시오.

(1) $\sin\frac{9}{4}\pi$

(2) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

예제 1 함수 $y=\sin 2x$의 치역과 주기를 구하고, 그 그래프를 그리시오.

풀이 $-1 \le \sin 2x \le 1$이므로 치역은 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$이다.
또 $\sin 2x=\sin(2x+2\pi)=\sin 2(x+\pi)$이므로 주기는 π이다.
따라서 함수 $y=\sin 2x$의 그래프는 다음과 같다.



답 풀이 참조

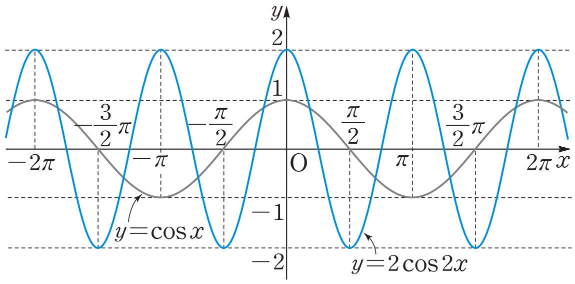
문제 2 다음 함수의 치역과 주기를 구하고, 그 그래프를 그리시오.

(1) $y=\cos 3x$

(2) $y=\sin\frac{x}{2}$

예제 2 **함수 $y=2\cos 2x$의 치역과 주기를 구하고, 그 그래프를 그리시오.**

풀이 $-1\le\cos 2x\le 1$에서 $-2\le 2\cos 2x\le 2$이므로 치역은 $\{y\mid -2\le y\le 2\}$이다.
또 $2\cos 2x=2\cos(2x+2\pi)=2\cos 2(x+\pi)$이므로 주기는 π이다.
따라서 함수 $y=2\cos 2x$의 그래프는 다음과 같다.



답 풀이 참조

문제 3 **다음 함수의 치역과 주기를 구하고, 그 그래프를 그리시오.**

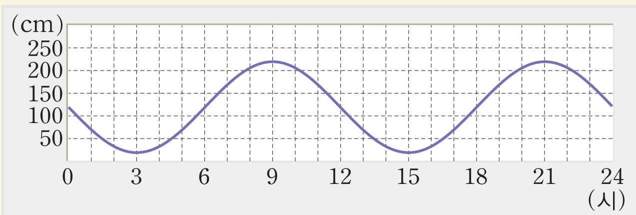
(1) $y=\dfrac{1}{2}\sin x$　　　　(2) $y=-\cos\dfrac{x}{2}$

문제 4 **다음 함수의 치역과 주기를 구하고, 그 그래프를 그리시오.**

(1) $y=3\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$　　　　(2) $y=\sin 3x-1$

적용하기

다음은 어느 날 거제도 앞바다에서 관측한 해수면의 높이를 나타낸 그래프이다.



(출처: 국립해양조사원, 2016)

위의 그래프에서 x시일 때의 해수면의 높이를 y cm라고 하면 다음이 성립한다고 한다.

$$y=100\sin\frac{\pi}{6}(x-6)+120\ (0\le x<24)$$

1　낮 12시일 때의 해수면의 높이를 구해 보자.

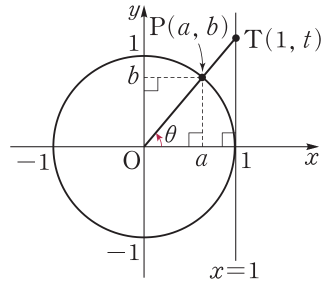
2　해수면의 높이가 가장 높을 때와 가장 낮을 때의 해수면의 높이를 각각 구해 보자.

3　주어진 함수의 주기를 구해 보자.

탄젠트함수의 그래프는 어떻게 그릴까

탄젠트함수의 그래프를 그려 보자.

오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라고 하자.

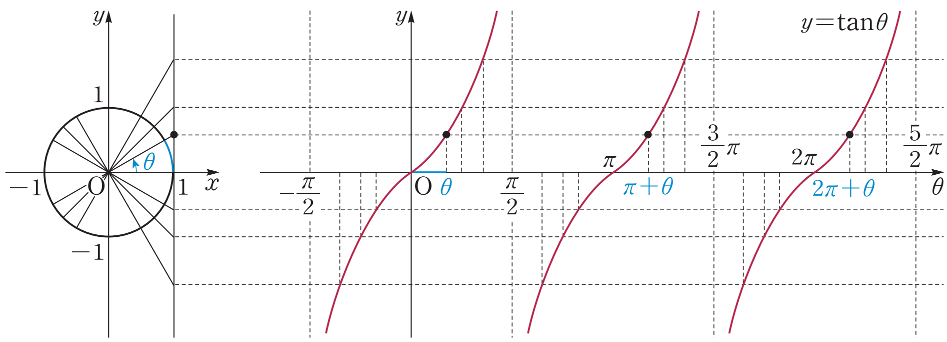


$\theta \neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)일 때, 직선 $x=1$과 동경 OP의 연장선의 교점을 $\mathrm{T}(1,\ t)$라고 하면

$$\tan\theta=\frac{b}{a}=\frac{t}{1}=t$$

이므로 $\tan\theta$의 값은 점 T의 y좌표로 정해진다.

따라서 점 P가 단위원 위를 움직일 때 순서쌍 $(\theta,\ \tan\theta)$를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내어 탄젠트함수 $y=\tan\theta$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



한편 $\theta=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)일 때, 각 θ를 나타내는 동경 OP는 y축 위에 있으므로 $\tan\theta$의 값은 정의되지 않는다. 따라서 함수 $y=\tan\theta$의 정의역은 $n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)가 아닌 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다. 이때 직선 $\theta=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)는 함수 $y=\tan\theta$의 그래프의 점근선이다.

또 함수 $y=\tan\theta$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $\tan(-\theta)=-\tan\theta$이다.

사인함수, 코사인함수와 마찬가지로 탄젠트함수 $y=\tan\theta$에서도 θ를 x로 바꾸어 $y=\tan x$로 나타내기로 한다.

한편 함수 $y=\tan x$의 그래프는 π 간격으로 같은 모양이 반복되므로 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여

$$\tan(x+n\pi)=\tan x \ (n\text{은 정수})$$

가 성립한다.

따라서 함수 $y=\tan x$는 주기가 π인 주기함수이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수 $y=\tan x$의 성질

❶ 정의역은 $n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)가 아닌 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

❷ 그래프의 점근선은 직선 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

❸ 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉

$$\tan(-x)=-\tan x$$

❹ 주기가 π인 주기함수이다. 즉

$$\tan(n\pi+x)=\tan x \text{ (단, } n\text{은 정수)}$$

보기 ❶ $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

❷ $\tan\frac{5}{4}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

문제 5 다음 삼각함수의 값을 구하시오.

(1) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ (2) $\tan\frac{7}{6}\pi$

예제 3 함수 $y=\tan 2x$의 주기와 점근선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그리시오.

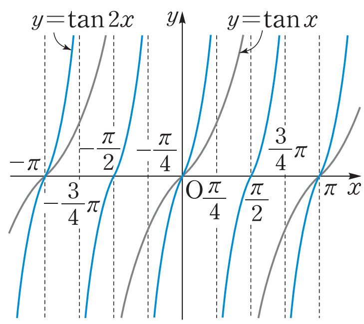
풀이 $\tan 2x=\tan(2x+\pi)=\tan 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$이므로 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

또 점근선의 방정식은

$$2x=n\pi+\frac{\pi}{2}\ (n\text{은 정수})$$

에서 $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)이다.

따라서 함수 $y=\tan 2x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

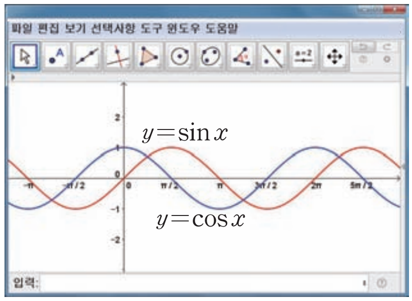
문제 6 다음 함수의 주기와 점근선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그리시오.

(1) $y=\frac{1}{2}\tan x+1$ (2) $y=\tan\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$

삼각함수에는 어떤 성질이 있을까

생각 톡

오른쪽은 컴퓨터 기하 프로그램을 이용하여 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프를 그린 것이다.



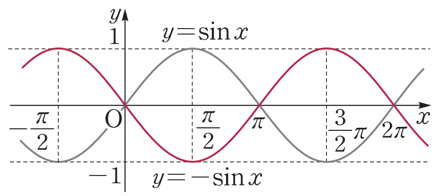
탐구 ① 함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\pi$만큼 평행이동하면 어떤 함수의 그래프와 일치하는지 말해 보자.

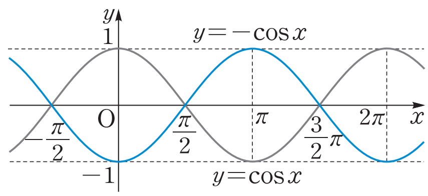
탐구 ② 함수 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동하면 어떤 함수의 그래프와 일치하는지 말해 보자.

함수 $y=\sin x$와 함수 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\pi$만큼 평행이동하면 각각 $y=-\sin x$, $y=-\cos x$의 그래프와 일치한다. 따라서

$$\sin(\pi+x)=-\sin x$$
$$\cos(\pi+x)=-\cos x$$

이다.





한편 함수 $y=\tan x$의 주기는 π이므로

$$\tan(\pi+x)=\tan x$$

이다.

또 위의 식의 양변에 각각 x 대신 $-x$를 대입하여 정리하면

$\pi-x=\pi+(-x)$로 생각할 수 있다.

$$\sin(\pi-x)=-\sin(-x)=\sin x$$
$$\cos(\pi-x)=-\cos(-x)=-\cos x$$
$$\tan(\pi-x)=\tan(-x)=-\tan x$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$$\sin(\pi+x)=-\sin x,\quad \sin(\pi-x)=\sin x$$
$$\cos(\pi+x)=-\cos x,\quad \cos(\pi-x)=-\cos x$$
$$\tan(\pi+x)=\tan x,\quad \tan(\pi-x)=-\tan x$$

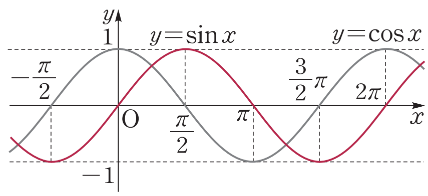
보기 ❶ $\sin\frac{5}{4}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

❷ $\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

문제 7 다음 삼각함수의 값을 구하시오.

(1) $\sin\frac{5}{6}\pi$ (2) $\cos\frac{5}{4}\pi$ (3) $\tan\frac{4}{3}\pi$

함수 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동하면 $y=\sin x$의 그래프와 일치한다.



따라서

$$\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. 이때 ①의 양변에 x 대신 $\frac{\pi}{2}+x$를 대입하면

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x \qquad \cdots\cdots ②$$

이고, ②의 양변에 x 대신 $\frac{\pi}{2}+x$를 대입하면

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin(\pi+x)=-\sin x \qquad \cdots\cdots ③$$

이다. 한편 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$이므로 ②, ③에 의하여

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\frac{\cos x}{-\sin x}=-\frac{1}{\tan x} \qquad \cdots\cdots ④$$

이다.

또 ②, ③, ④의 양변에 각각 x 대신 $-x$를 대입하여 정리하면

$\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{2}+(-x)$로 생각할 수 있다.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(-x)=\cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin(-x)=\sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\frac{1}{\tan(-x)}=\frac{1}{\tan x}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x,\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x,\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x},\qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$$

보기

❶ $\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

❷ $\tan\frac{2}{3}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}=-\sqrt{3}$

문제 8 $\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$ **일 때, 다음 삼각함수의 값을 구하시오.**

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ (2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ (3) $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

문제 9 **다음 식의 값을 구하시오.**

(1) $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ (2) $\tan(\pi-\theta)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

지금까지 배운 삼각함수의 성질을 이용하면 일반각에 대한 삼각함수를 $0°$에서 $90°$까지의 각에 대한 삼각함수로 나타낼 수 있다.

따라서 이 책의 181쪽에 있는 삼각함수표를 이용하면 일반각에 대한 삼각함수의 값을 알 수 있다.

보기

$\sin 220°=\sin(180°+40°)$
$=-\sin 40°$

이고, 오른쪽 삼각함수표에서

$\sin 40°=0.6428$이므로

$\sin 220°=-0.6428$

각(θ)	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391

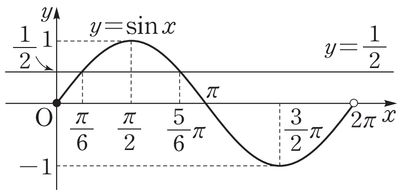
문제 10 **삼각함수표를 이용하여 다음 삼각함수의 값을 구하시오.**

(1) $\sin 95°$ (2) $\cos 520°$ (3) $\tan(-430°)$

삼각함수를 포함한 방정식과 부등식은 어떻게 풀까

생각톡

오른쪽 그림은 함수 $y=\sin x\,(0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$을 나타낸 것이다.



탐구 ① 함수 $y=\sin x\,(0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표를 말해 보자.

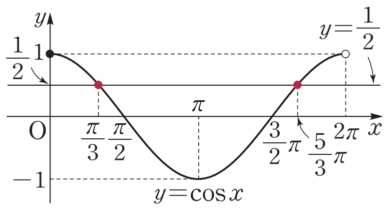
탐구 ② 함수 $y=\sin x\,(0\le x<2\pi)$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위를 말해 보자.

$\sin x=\frac{1}{2}$, $\tan x>1$과 같이 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식은 삼각함수의 그래프를 이용하여 풀 수 있다.

예제 4 **$0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $2\cos x-1=0$을 푸시오.**

풀이 주어진 식을 정리하면 $\cos x=\frac{1}{2}$이므로 함수 $y=\cos x\,(0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표가 구하는 해이다. 따라서 구하는 해는

$$x=\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x=\frac{5}{3}\pi$$



답 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

문제 11 **$0\le x<2\pi$일 때, 다음 방정식을 푸시오.**

(1) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $3\tan x-\sqrt{3}=0$

문제 12 **골프공이 날아가는 방향과 지면이 이루는 각의 크기를 θ로 하여 초속 v m로 골프공을 쳤을 때, 골프공의 수평 이동 거리를 D m라 하면**

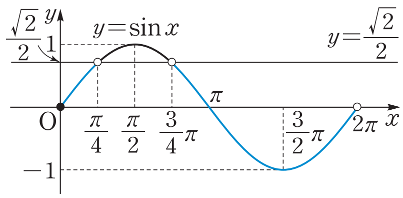
$$D=\frac{v^2\sin 2\theta}{10}$$

라고 한다. 초속 $20\sqrt{6}$ m로 친 골프공의 수평 이동 거리가 120 m일 때, 골프공이 날아가는 방향과 지면이 이루는 각의 크기를 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$

예제 5 $0 \le x < 2\pi$일 때, 부등식 $\sqrt{2}\sin x < 1$을 푸시오.

풀이 주어진 식을 정리하면 $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 함수 $y=\sin x\ (0 \le x < 2\pi)$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위가 구하는 해이다. 따라서 구하는 해는

$$0 \le x < \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{3}{4}\pi < x < 2\pi$$



답 $0 \le x < \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi < x < 2\pi$

문제 13 $0 \le x < 2\pi$일 때, 다음 부등식을 푸시오.

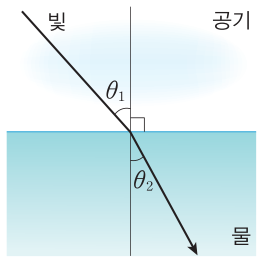
(1) $2\cos x + \sqrt{3} \le 0$ (2) $-1 < \tan x < 1$

문제 14 오른쪽 그림과 같이 빛이 공기 중에서 물을 통과할 때, 물과 공기의 경계면에 수직인 직선과 빛이 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하면

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{4}{3}$$

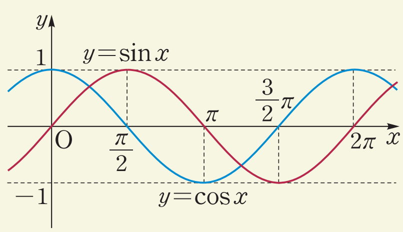
라고 한다. $\sin\theta_1 \le \frac{2}{3}$일 때, θ_2의 값의 범위를 구하시오.

$\left(\text{단, } 0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2},\ 0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}\right)$



문제 해결하기

오른쪽 그림은 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프를 나타낸 것이다.



1 오른쪽 그래프를 이용하여 $0 \le x < 2\pi$일 때 방정식 $\sin x = \cos x$의 해를 구하는 방법을 말해 보고, 그 해를 구해 보자.

2 오른쪽 그래프를 이용하여 $0 \le x < 2\pi$일 때 부등식 $\sin x > \cos x$의 해를 구하는 방법을 말해 보고, 그 해를 구해 보자.

공학 도구 활용

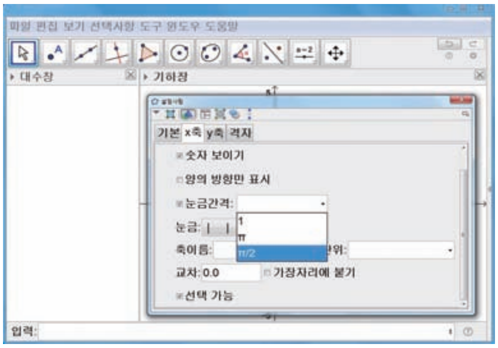
정보 처리 추론

삼각함수의 그래프의 이해

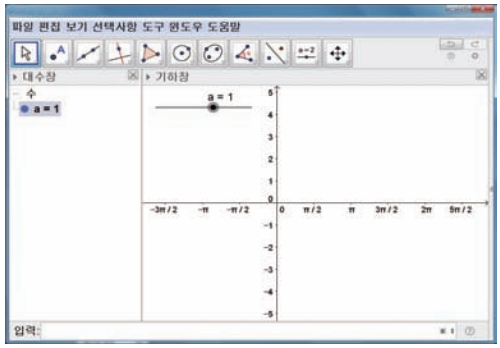
컴퓨터 기하 프로그램을 이용하면 삼각함수의 그래프의 모양을 쉽고 정확하게 알 수 있다.

다음은 컴퓨터 기하 프로그램을 이용하여 함수 $y=a\sin bx$ (a, b는 상수)의 그래프를 그리는 과정이다.

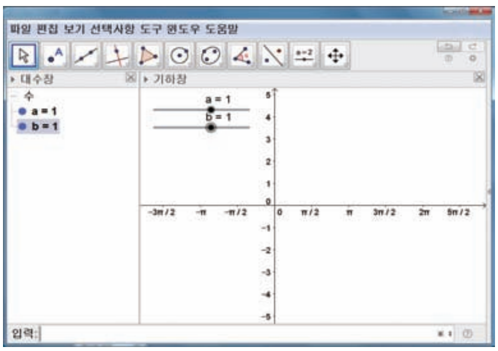
❶ 선택사항–고급 기능–설정사항–기하창–x축에서 x축의 눈금 간격을 π/2로 설정한다.



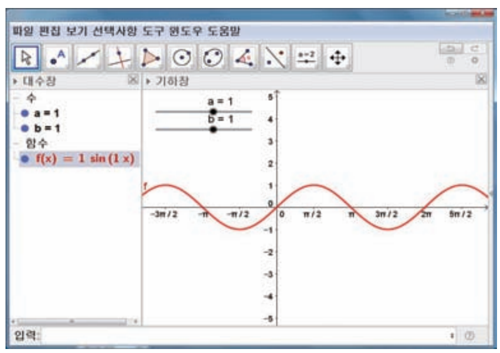
❷ 입력 창에 'a'를 입력하고 Enter↵를 누른 후 슬라이더 만들기를 선택하여 a에 대한 슬라이더를 만든다.



❸ ❷와 같은 방법으로 b에 대한 슬라이더를 만든다.



❹ 입력 창에 'y=a∗sin(bx)'를 입력하고 Enter↵를 누르면 처음에는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 그려진다.



❺ a, b에 대한 슬라이더의 각각의 점을 움직이면 a, b의 값에 따른 함수 $y=a\sin bx$의 그래프가 그려진다.

활동 1 b의 값은 1로 고정하고 a의 값만 변화시킬 때, a의 값에 따라 함수 $y=a\sin x$의 그래프의 모양이 어떻게 변하는지 설명해 보자.

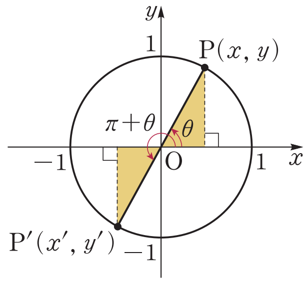
활동 2 a의 값은 1로 고정하고 b의 값만 변화시킬 때, b의 값에 따라 함수 $y=\sin bx$의 그래프의 모양이 어떻게 변하는지 설명해 보자.

수학 역량 플러스

추론 문제 해결

단위원을 이용한 삼각함수의 성질

삼각함수의 성질은 단위원을 이용하여 설명할 수도 있다.



오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면

$$\sin\theta=y,\ \cos\theta=x$$

이므로 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값은 각각 점 P의 y좌표, x좌표로 정해진다.

한편 오른쪽 그림과 같이 각 $\pi+\theta$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라고 하면 점 P와 점 P$'$은 원점에 대하여 대칭이므로

$$x'=-x,\ y'=-y$$

이다. 따라서

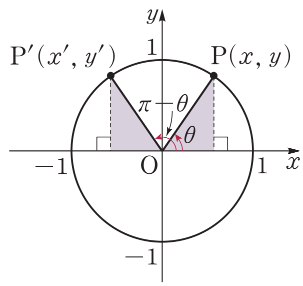
$$\sin(\pi+\theta)=y'=-\sin\theta,\ \cos(\pi+\theta)=x'=-\cos\theta$$

가 성립함을 알 수 있다.

활동 1 오른쪽 그림을 이용하여

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta,\ \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$

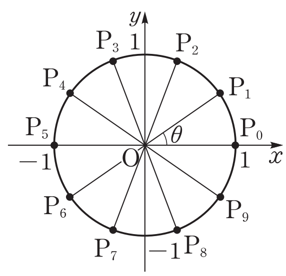
가 성립함을 설명해 보자.



활동 2 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 단위원을 10등분 하는 각 점을 차례대로 P_0, P_1, P_2, $\cdots$, P_9라고 하자. 점 P_0의 좌표는 $(1,\ 0)$이고 $\angle \mathrm{P}_0\mathrm{OP}_1=\theta$라고 할 때, 다음 식의 값을 구해 보자.

(1) $\sin\theta+\sin2\theta+\sin3\theta+\ \cdots\ +\sin10\theta$

(2) $\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta+\ \cdots\ +\cos10\theta$



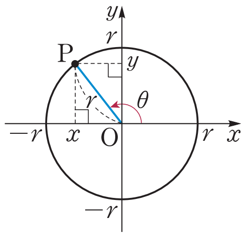
중단원 마무리

❶ 일반각과 호도법

1라디안$=\dfrac{180^\circ}{\pi}$, $1^\circ=\boxed{}$라디안

❷ 삼각함수

(1) 오른쪽 그림에서 동경 OP가 나타내는 일반각의 크기를 θ라고 할 때,



$\sin\theta=\boxed{}$

$\cos\theta=\boxed{}$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}\ (x\neq 0)$

(2) **삼각함수 사이의 관계**

$\tan\theta=\dfrac{\boxed{}}{\cos\theta}$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=\boxed{}$

❸ 삼각함수의 그래프

(1) **함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 성질**

① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\boxed{}$이다.

② $y=\sin x$의 그래프는 원점, $y=\cos x$의 그래프는 $\boxed{}$에 대하여 각각 대칭이다.

③ 주기가 $\boxed{}$인 주기함수이다.

(2) **함수 $y=\tan x$의 성질**

① 정의역은 $\boxed{}$가 아닌 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

② 그래프의 점근선은 직선 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

③ 그래프는 $\boxed{}$에 대하여 대칭이다.

④ 주기가 $\boxed{}$인 주기함수이다.

기본 문제

1 다음 각을 육십분법은 호도법으로, 호도법은 육십분법으로 나타내시오.

(1) 240° (2) -405°

(3) $\dfrac{2}{5}\pi$ (4) $-\dfrac{7}{6}\pi$

2 원점 O와 점 P$(6,\ -8)$에 대하여 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구하시오.

3 다음 함수의 주기를 구하고, 그 그래프를 그리시오.

(1) $y=3\sin x$

(2) $y=\cos\dfrac{x}{4}$

(3) $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

4 다음 삼각함수의 값을 구하시오.

(1) $\sin\dfrac{7}{3}\pi$

(2) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(3) $\tan\dfrac{5}{6}\pi$

5 $0\leq x<2\pi$일 때, 다음 방정식과 부등식을 푸시오.

(1) $\sin x=-\dfrac{1}{2}$ (2) $\cos x\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

• 정답 및 풀이 167쪽

표준 문제

6 각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 일치할 때, 각 θ의 크기를 모두 구하시오. (단, $0<\theta<\pi$)

7 $\sin\theta\cos\theta<0$, $\sin\theta\tan\theta>0$을 만족시키는 각 θ는 제몇 사분면의 각인지 말하시오.

8 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$ (2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

9 주기가 π인 함수만을 보기에서 있는 대로 고르시오.

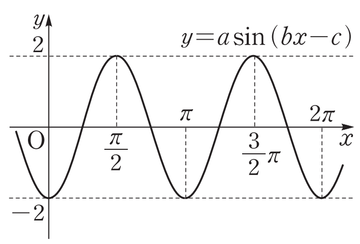
보기

ㄱ. $y=-\sin 2x$ ㄴ. $y=\cos\dfrac{x}{2}$ ㄷ. $y=2\tan x$

ㄹ. $y=\dfrac{1}{2}\sin x-1$ ㅁ. $y=|\cos x|$ ㅂ. $y=\tan\pi x$

문제 해결

10 함수 $y=a\sin(bx-c)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, b, c의 값을 구하시오. (단, $a>0$, $b>0$, $0<c<\pi$)



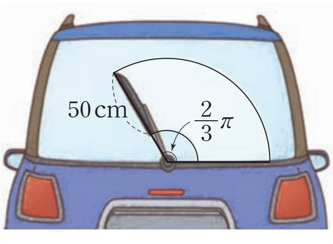
11 다음 식을 간단히 하시오.

$$\sin(\pi-\theta)\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos(\pi+\theta)$$

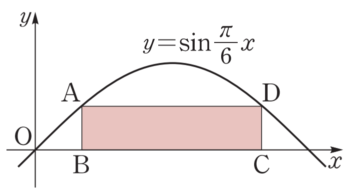
서술형 **12** $0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $\cos x=\frac{1}{3}$의 모든 근의 합을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

발전 문제

창의·융합 **13** 오른쪽 그림은 어느 자동차의 와이퍼가 $\frac{2}{3}\pi$만큼 회전한 모양을 나타낸 것이다. 이 와이퍼에서 유리창을 닦는 고무판의 길이가 50 cm이고, 고무판이 회전하면서 닦는 부분의 넓이가 1500π cm^{2}일 때, 고무판이 회전하면서 닦는 부분의 둘레의 길이를 구하시오. (단, 고무판이 회전하면서 닦는 부분의 모양은 부채꼴의 일부이다.)



14 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\sin\frac{\pi}{6}x$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분에 직사각형 ABCD가 내접하고 있다. $\overline{BC}=4$일 때, 직사각형 ABCD의 넓이를 구하시오.



서술형 **15** 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\cos^2 x+3\sin x-a<0$이 항상 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.