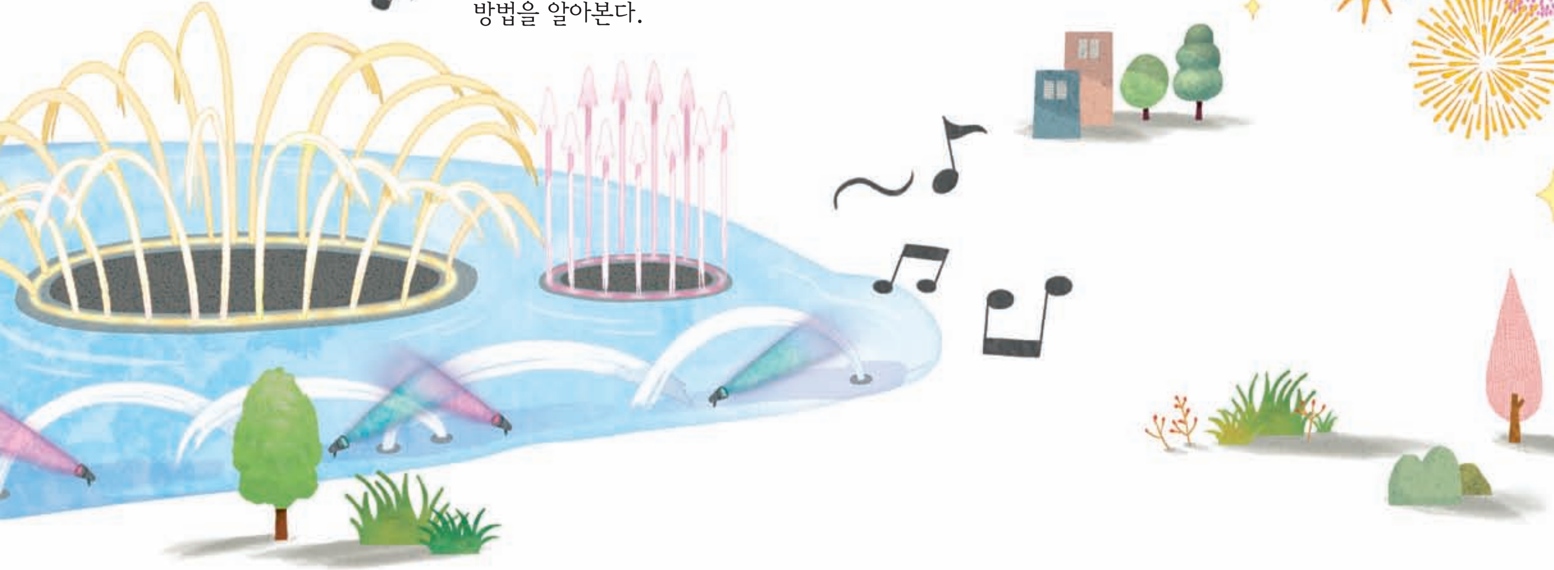
밤하늘을 아름답게 수놓는 불꽃놀이에서 불꽃은 포물선을 그리며 퍼져 나가고, 작은 불꽃 가루는 자연스럽게 떨어져 내린다. 또 음악과 함께 화려하게 펼쳐지는 분수 쇼에서 다양한 방법으로 뿜어져 올라오는 물줄기는 포물선을 그리며 퍼져 나가고, 물방울은 자연스럽게 떨어져 내린다. 이때 불꽃과 물줄기의 높이, 불꽃 가루와 물방울이 떨어지는 영역의 넓이와 물의 양 등은 정적분을 이용하여 구할 수 있다.

이 단원에서는 정적분을 활용하여 여러 가지 도형의 넓이 또는 부피를 구하는 방법과, 속도를 이용하여 움직인 거리와 위치를 구하는 방법을 알아본다.



2 정적분의 활용

준비학습

1 다음을 n에 대한 식으로 나타내시오.

(1) $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$ (2) $\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)$

2 곡선 $y=x^2-1$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

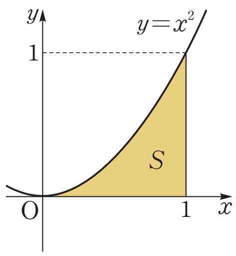
1 정적분과 급수

- 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.

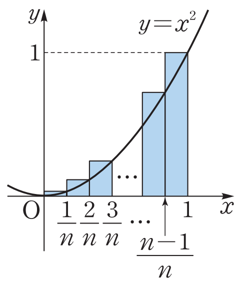
정적분과 급수 사이에는 어떤 관계가 있을까

생각 톡

[그림 1]과 같이 곡선 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 하자.
또 [그림 2]와 같이 닫힌구간 $[0,\ 1]$을 n 등분 한 각 소구간의 오른쪽 끝 점의 x좌표는 차례대로 $\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \cdots,\ \frac{n}{n}(=1)$이다. 이때 색칠한 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라고 하자.



[그림 1]



[그림 2]

탐구 ① 정적분을 이용하여 S의 값을 구해 보자.

탐구 ② 극한값 $\lim_{n\to\infty} S_n$과 S의 값을 비교해 보자.

위의 생각 톡에서 $S=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$이고,

$$S_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=\frac{1}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

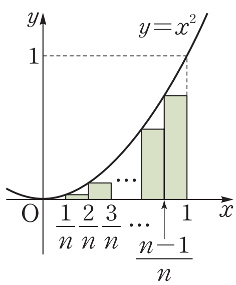
$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

이다.

한편 닫힌구간 $[0,\ 1]$을 n 등분 한 각 소구간의 왼쪽 끝 점의 x좌표는 차례대로

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n}$$

이고 오른쪽 그림에서 색칠한 직사각형의 넓이의 합을 T_n이라고 하면 T_n은 다음과 같다.



$$T_n=\frac{1}{n}\times 0^2+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

$$=\frac{1}{n^3}\{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\}=\frac{1}{n^3}\times\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

어떤 도형의 넓이나 부피를 구할 때, 이 도형을 여러 개의 기본 도형으로 나누어 그 기본 도형의 넓이나 부피의 합의 극한값으로 구하는 방법을 구분구적법이라고 한다.

이때 모든 자연수 n에 대하여 $T_n<S<S_n$이고

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$

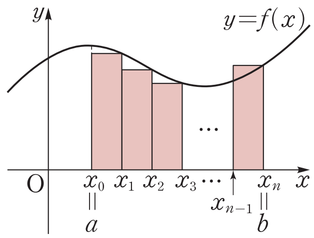
이므로 $S=\frac{1}{3}$, 즉 곡선 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{1}{3}$이다.

참고 함수 $y=x^2$과 같이 연속함수인 경우에는 $\lim_{n\to\infty} S_n$과 $\lim_{n\to\infty} T_n$ 중에서 어느 한쪽의 극한이 존재하면 나머지 한쪽의 극한이 반드시 존재하고, 그 값이 같음이 알려져 있다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x)\geq 0$일 때, 닫힌구간 $[a, b]$를 n 등분 하여 양 끝 점과 각 분점의 x좌표를 차례대로

$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=b$$

라고 하자. 또 각 소구간의 길이를 Δx라고 하면



$$\Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이다. 이때

$$S_n=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

라고 하면 n의 값이 한없이 커질 때 S_n의 극한값은 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx$$

일반적으로 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 위의 극한값 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$는 항상 존재함이 알려져 있고, 이 극한값은 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분 $\int_a^b f(x)dx$와 같다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정적분과 급수의 관계

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx\ \left(\text{단, } \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$

예제 1 정적분을 이용하여 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)$을 구하시오.

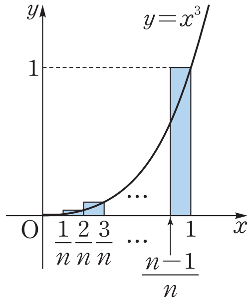
풀이 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\frac{1}{n}$

이때 $f(x)=x^3$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$$\varDelta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n},\ x_k=a+k\varDelta x=\frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\varDelta x$$
$$=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^3dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{4}$$



답 $\frac{1}{4}$

문제 1 정적분을 이용하여 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2+\left(\frac{n+2}{n}\right)^2+\left(\frac{n+3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2n}{n}\right)^2\right\}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{3}{n}$

예제 2 정적분을 이용하여 극한값 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$을 구하시오.

풀이 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

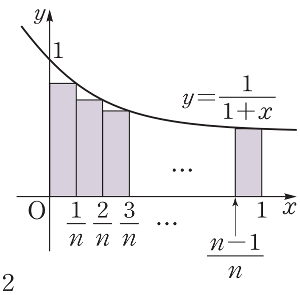
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{n}$$

이때 $f(x)=\frac{1}{1+x}$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$$\varDelta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n},\ x_k=a+k\varDelta x=\frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\varDelta x$$
$$=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\Big[\ln|1+x|\Big]_0^1=\ln 2$$



답 $\ln 2$

문제 2 정적분을 이용하여 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+e^{\frac{3}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)$ (2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{k\pi}{n}$

수학 역량 플러스

추론 | 문제 해결

정적분을 이용한 부등식의 증명

정적분과 부등식에 대한 다음 성질을 이용하여 여러 가지 부등식을 증명할 수 있다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때

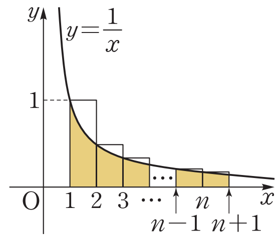
❶ $f(x)\ge 0$이면 $\int_a^b f(x)dx\ge 0$

❷ $f(x)\le g(x)$이면 $\int_a^b f(x)dx\le \int_a^b g(x)dx$

예를 들어 자연수 n에 대하여 부등식

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

이 성립함을 증명해 보자.



오른쪽 그림에서 자연수 k에 대하여 $k<x<k+1$일 때, 색칠한 부분의 넓이는 직사각형의 넓이보다 작으므로 $\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<1\times\frac{1}{k}=\frac{1}{k}$

이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

이고

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx&=\int_1^2\frac{1}{x}dx+\int_2^3\frac{1}{x}dx+\int_3^4\frac{1}{x}dx+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx\\&=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^{n+1}\\&=\ln(n+1),\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

이므로 $\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$이 성립한다.

활동 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 정적분을 이용하여 증명해 보자.

$$\ln(n+1)>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}$$

공학 도구 활용

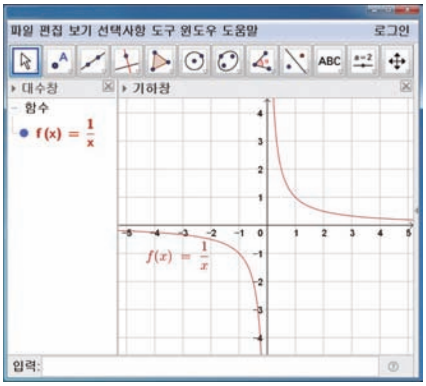
정적분과 급수의 관계

정보 처리 추론

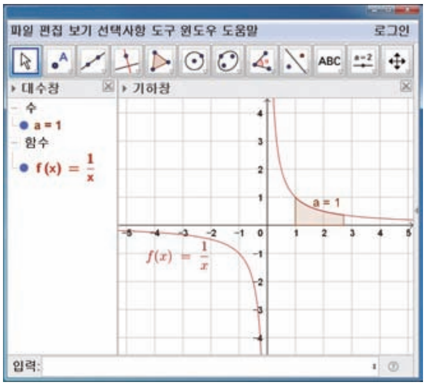
컴퓨터 프로그램을 이용하면 정적분과 급수의 관계를 확인할 수 있다.

다음과 같은 방법으로 곡선 $y=\frac{1}{x}$에서 닫힌구간 $[1,\ e]$를 n 등분 하여 직사각형을 그린 후 직사각형의 개수가 많아질수록 그 넓이의 합이 정적분 $\int_{1}^{e}\frac{1}{x}\,dx$의 값에 가까워짐을 확인해 보자.

❶ 입력 창에 'f(x)=1/x'를 입력한 후 Enter↵를 누르면 곡선 $y=\frac{1}{x}$이 그려진다.

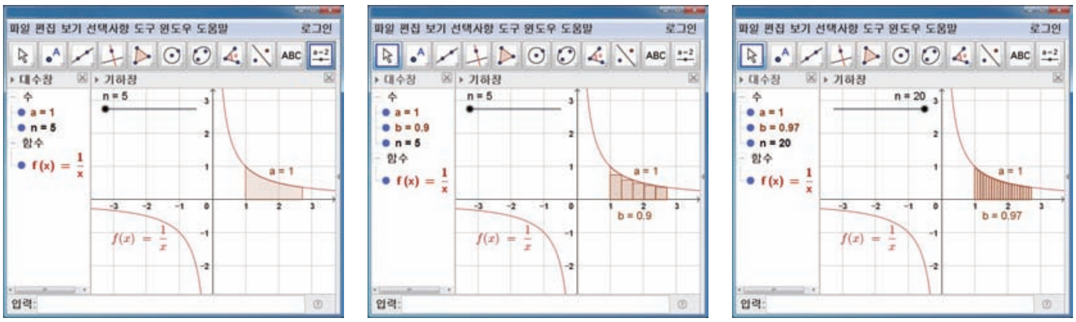


❷ 입력 창에 '**적분**[f, 1, e]'를 입력한 후 Enter↵를 누르면 $\int_{1}^{e}\frac{1}{x}\,dx=1$임을 알 수 있다.



❸ 직사각형의 개수를 정하기 위하여 슬라이더를 누른 후 이름 n, 최솟값 5, 최댓값 20, 증가 5를 입력한다. 또 입력 창에 '**하합**[abs(f), 1, e, n]'(또는 '**상합**[abs(f), 1, e, n]')을 입력한 후 슬라이더를 움직이면 직사각형의 개수와 넓이의 합이 변한다.

직사각형의 개수가 많아질수록 그 넓이의 합이 정적분 $\int_{1}^{e}\frac{1}{x}\,dx$의 값에 가까워짐을 확인할 수 있다.



활동 위와 같은 방법으로 정적분 $\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx$의 값을 구하고, 직사각형의 넓이의 합을 이용하여 직사각형의 개수가 많아질수록 그 넓이의 합이 정적분 $\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx$의 값에 가까워짐을 확인해 보자.

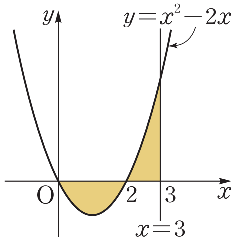
2 넓이

● 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 어떻게 구할까

생각 톡

오른쪽 그림은 곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $x=3$이다.

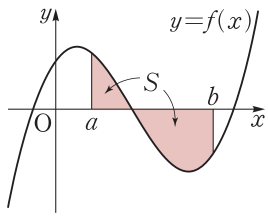


탐구 ① 곡선 $y=x^2-2x$와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분으로 나타내어 보자.

탐구 ② 탐구 ①의 정적분의 값을 구해 보자.

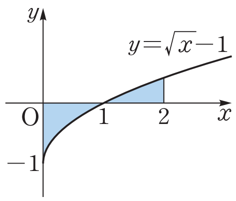
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$



예제 1 **곡선 $y=\sqrt{x}-1$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.**

풀이 곡선 $y=\sqrt{x}-1$은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이 S는

$$\begin{aligned} S&=\int_0^2 |\sqrt{x}-1|dx \\ &=\int_0^1 (-\sqrt{x}+1)dx+\int_1^2 (\sqrt{x}-1)dx \\ &=\left[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\right]_1^2 \\ &=\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1) \end{aligned}$$

답 $\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)$

문제 1 **다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.**

(1) $y=\frac{1}{x}$, x축, $x=1$, $x=e^2$

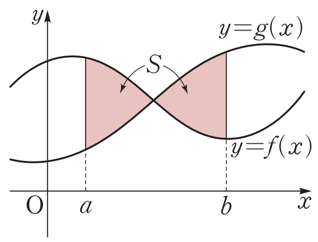
(2) $y=\sqrt{x-3}$, x축, $x=5$

(3) $y=\ln x$, x축, $x=\frac{1}{e}$, $x=e$

(4) $y=e^x-1$, x축, $x=-1$, $x=1$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

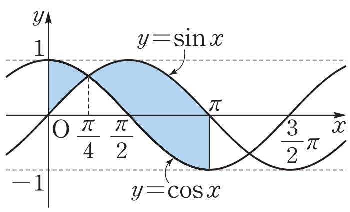


예제 2 **닫힌구간 $[0,\ \pi]$에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 및 두 직선 $x=0$, $x=\pi$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.**

풀이 닫힌구간 $[0,\ \pi]$에서 두 곡선의 교점의 x좌표는 $\sin x=\cos x$에서

$$\frac{\sin x}{\cos x}=1, \qquad \tan x=1$$

$$x=\frac{\pi}{4}$$



닫힌구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$에서 $\sin x\le\cos x$이고, 닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{4},\ \pi\right]$에서 $\cos x\le\sin x$이다.

따라서 구하는 넓이 S는

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\pi}|\sin x-\cos x|dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx\\&=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\\&=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 $2\sqrt{2}$

문제 2 **다음 도형의 넓이를 구하시오.**

(1) 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형

(2) 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 직선 $y=-x+\frac{5}{2}$로 둘러싸인 도형

문제 3 **곡선 $y=\ln x$와 원점에서 이 곡선에 그은 접선 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.**

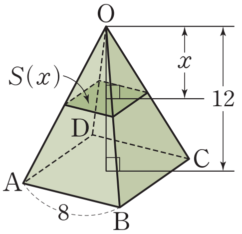
3 부피

- 입체도형의 부피를 구할 수 있다.

입체도형의 부피는 어떻게 구할까

생각톡

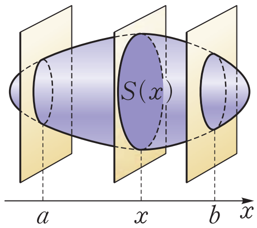
오른쪽 그림과 같이 밑면은 한 변의 길이가 8인 정사각형이고 높이가 12인 사각뿔 O−ABCD가 있다. 꼭짓점 O로부터의 거리가 x이고 밑면에 평행한 평면으로 자를 때 생기는 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하자.



탐구 ① $S(x)$를 구해 보자.

탐구 ② 정적분 $\int_0^{12} S(x)dx$의 값을 구하고, 사각뿔 O−ABCD의 부피와 비교해 보자.

어떤 입체도형이 주어졌을 때, 한 직선을 x축으로 정하여 x좌표가 a, b인 두 점을 지나고 x축에 수직인 두 평면 사이에 있는 부분의 부피 V를 구해 보자.



x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 이 입체도형을 잘랐을 때의 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하자.

x축 위의 닫힌구간 $[a,\ b]$를 n 등분 하여 양 끝 점과 각 분점의 x좌표를 차례대로

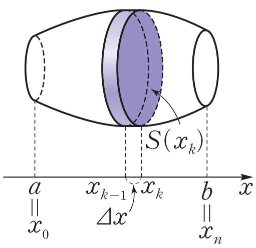
$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=b$$

라 하고, 각 소구간의 길이를 $\varDelta x$라고 하면

$$\varDelta x=\frac{b-a}{n},$$

$$x_k=a+k\varDelta x\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이다.



이때 밑면의 넓이가 $S(x_k)(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$이고 높이가 $\varDelta x$인 n개의 기둥의 부피의 합 V_n은

$$V_n=\sum_{k=1}^{n} S(x_k)\varDelta x$$

이다.

따라서 입체도형의 부피 V는 정적분과 급수의 관계에 의하여 다음과 같다.

$$V=\lim_{n\to\infty} V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S(x_k)\varDelta x$$

$$=\int_a^b S(x)dx$$

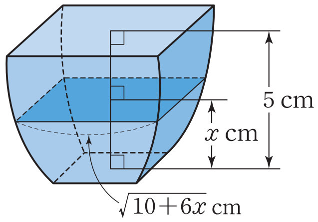
이상을 정리하면 다음과 같다.

입체도형의 부피

닫힌구간 $[a, b]$에서 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 잘랐을 때의 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

예제 1 오른쪽 그림과 같이 높이가 5 cm인 용기가 있다. 이 용기를 밑면으로부터 높이가 x cm인 지점에서 밑면에 평행한 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{10+6x}$ cm인 정사각형이다. 이 용기의 부피를 구하시오.



풀이 밑면으로부터 높이가 x cm인 지점에서 밑면에 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ cm^{2}라고 하면

$$S(x)=(\sqrt{10+6x})^2=10+6x$$

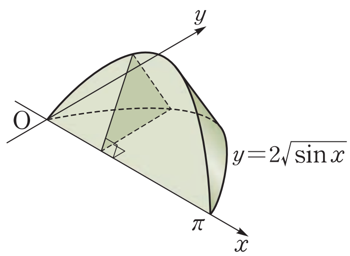
따라서 구하는 부피 V는

$$V=\int_0^5 S(x)dx=\int_0^5 (10+6x)dx$$

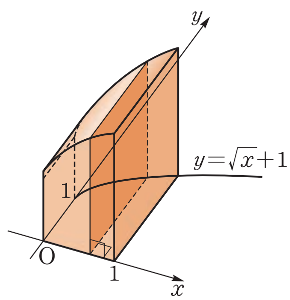
$$=\Big[10x+3x^2\Big]_0^5=125\,(\text{cm}^3)$$

답 125 cm^3

문제 1 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=2\sqrt{\sin x}\ (0\leq x\leq \pi)$와 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하시오.



문제 2 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}+1$과 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하시오.



수학 역량 플러스

문제 해결 | 추론

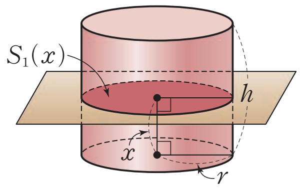
원기둥, 원뿔, 구의 부피

정적분을 이용하여 원기둥, 원뿔, 구의 부피를 구할 수 있다.

밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원기둥과 원뿔에서 밑면으로부터 높이가 x인 지점을 지나고 밑면에 평행한 평면으로 자를 때 생기는 단면의 넓이를 각각 $S_1(x)$, $S_2(x)$라고 하자. 이 원기둥과 원뿔의 부피를 구해 보자.

1 원기둥의 부피

오른쪽 그림에서 $S_1(x)=\pi r^2$이므로

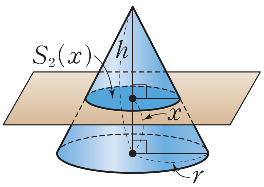


$$(\text{원기둥의 부피})=\int_0^h S_1(x)dx=\int_0^h \pi r^2 dx$$
$$=\pi r^2\Big[x\Big]_0^h=\pi r^2 h$$

이다.

2 원뿔의 부피

오른쪽 그림에서 $S_2(x):\pi r^2=(h-x)^2:h^2$이므로

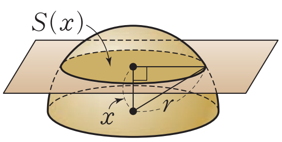


$S_2(x)=\dfrac{\pi r^2}{h^2}(h-x)^2$이다. 따라서

$$(\text{원뿔의 부피})=\int_0^h S_2(x)dx=\int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}(h-x)^2dx$$
$$=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[-\frac{1}{3}(h-x)^3\right]_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

이다.

활동 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 반구가 있다. 밑면으로부터 높이가 x인 지점을 지나고 밑면에 평행한 평면으로 자를 때 생기는 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하자.



(1) $S(x)$를 r와 x에 대한 식으로 나타내어 보자.

(2) $S(x)$와 정적분을 이용하여 반지름의 길이가 r인 구의 부피를 구해 보자.

4 속도와 거리

- 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

직선 위에서 움직인 거리는 어떻게 구할까

생각 톡

직선 도로를 일정한 속도로 달리던 어떤 자동차의 가속 페달을 밟은 지 t초 후의 속도 $v(t)$ m/s가 $v(t)=25+10t$라고 한다.

탐구 ① 가속 페달을 밟기 전의 자동차의 속도를 구해 보자.

탐구 ② 가속 페달을 밟은 후 4초 동안 자동차가 움직인 거리를 구해 보자.

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$, 시각 $t=a$에서의 위치가 x_0일 때, 시각 t에서의 점 P의 위치 x는

$$x=x_0+\int_a^t v(t)dt$$

위치 $\underset{\text{적분}}{\overset{\text{미분}}{\rightleftarrows}}$ 속도

이다. 또 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_a^b v(t)dt$$

이고, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b |v(t)|dt$$

이다.

예제 1 **원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=\sin\pi t$일 때, 다음을 구하시오.**

(1) 시각 $t=1$에서의 점 P의 위치

(2) 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리

풀이 (1) $0+\int_0^1 \sin\pi t\,dt=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$

(2) $\int_0^2 |\sin\pi t|dt=\int_0^1 \sin\pi t\,dt+\int_1^2(-\sin\pi t)dt$

$=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^1+\left[\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_1^2=\frac{4}{\pi}$

답 (1) $\frac{2}{\pi}$ (2) $\frac{4}{\pi}$

문제 1 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=8-t\sqrt{t}$ 일 때, 다음을 구하시오.

(1) 시각 t에서의 점 P의 위치

(2) 시각 $t=1$에서 $t=9$까지 점 P가 움직인 거리

문제 2 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=(t-1)e^t$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

평면 위에서 움직인 거리는 어떻게 구할까

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가

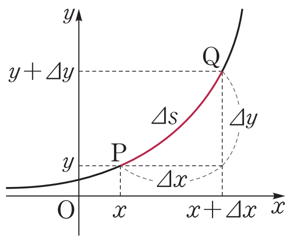
$$x=f(t),\ y=g(t)$$

일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도는 다음과 같다.

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right),\ \text{즉}\ (f'(t), g'(t))$$

이제 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s를 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 t의 증분 Δt에 대하여 x, y의 증분을 각각 Δx, Δy라고 하자. 점 P가 점 Q로 이동한다고 하면 s의 증분 Δs는 Δt가 충분히 작을 때



$$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

에 가까운 값이 되므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\end{aligned}$$

따라서 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}s&=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\\&=\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt\end{aligned}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표평면 위를 움직이는 점의 움직인 거리

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

예제 2 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가

$$x=t-\frac{1}{2}t^2,\ y=\frac{4}{3}t\sqrt{t}$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

풀이 $\frac{dx}{dt}=1-t$, $\frac{dy}{dt}=2\sqrt{t}$이므로 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^6 \sqrt{(1-t)^2+(2\sqrt{t}\,)^2}\,dt$$

$$=\int_0^6 \sqrt{t^2+2t+1}\,dt$$

$$=\int_0^6 \sqrt{(t+1)^2}\,dt=\int_0^6 (t+1)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_0^6=24$$

답 24

문제 3 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가

$$x=\ln t,\ y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

일 때, 시각 $t=\frac{1}{e}$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

문제 4 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가

$$x=3\cos t,\ y=-3\sin t$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

곡선의 길이는 어떻게 구할까

좌표평면에서 곡선의 길이를 구해 보자.

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 점 P가 움직인 경로가 겹치지 않으면 닫힌구간 $[a, b]$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이는 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리와 같다.

이때 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)(a\leq t\leq b)$의 길이 l은 다음과 같다.

$$l=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

한편 곡선 $y=f(x)$ 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)는

$$x=t,\ y=f(t)(a\leq t\leq b)$$

로 나타낼 수 있다.

따라서 곡선 $y=f(x)(a\leq x\leq b)$의 길이 l은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}l&=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt\\&=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx\end{aligned}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

곡선의 길이

❶ 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)(a\leq t\leq b)$의 겹치는 부분이 없을 때 길이 l은

$$l=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

❷ 곡선 $y=f(x)(a\leq x\leq b)$의 길이 l은

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

예제 3 $0\leq t\leq 2\pi$**일 때, 곡선** $x=1+\sin t$, $y=2-\cos t$**의 길이를 구하시오.**

풀이 $\frac{dx}{dt}=\cos t$, $\frac{dy}{dt}=\sin t$이므로 곡선의 길이 l은

$$\begin{aligned}l&=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt\\&=\int_0^{2\pi}1\,dt=\Big[\,t\,\Big]_0^{2\pi}=2\pi\end{aligned}$$

답 2π

문제 5 다음 곡선의 길이를 구하시오.

(1) $x=t^3-3t,\ y=3t^2 \quad (0 \le t \le 1)$

(2) $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t \quad \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$

예제 4 $1 \le x \le 4$일 때, 곡선 $y=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$의 길이를 구하시오.

풀이 $\frac{dy}{dx}=(x-1)^{\frac{1}{2}}$이므로 곡선의 길이 l은

$$l=\int_1^4 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_1^4 \sqrt{1+(x-1)}\,dx$$

$$=\int_1^4 \sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{14}{3}$$

답 $\frac{14}{3}$

문제 6 $0 \le x \le 4$일 때, 곡선 $y=x\sqrt{x}$의 길이를 구하시오.

설명하기

전봇대 사이의 전깃줄과 같이 줄의 양 끝을 고정하고 자연스럽게 늘어뜨렸을 때 줄이 이루는 곡선을 현수선이라고 한다. 이 곡선을 좌표평면 위에 나타내면 곡선의 방정식은 다음의 꼴이다.

$$y=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2a} \quad (\text{단, } a\text{는 양의 상수이다.})$$

(출처: Bellos, A., 『The Grapes of Math: How Life Reflects Numbers and Numbers Reflect Life』)

1 $-b \le x \le b$일 때, 곡선 $y=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2a}$과 x축 및 두 직선 $x=-b$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구해 보자.

2 $-b \le x \le b$일 때, 곡선 $y=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2a}$의 길이를 구해 보자.

3 **1**, **2**의 결과를 통하여 현수선이 다음과 같은 기하적 성질을 가짐을 설명해 보자.

> 닫힌구간 $[-b, b]$에서 현수선과 x축 및 두 직선 $x=-b$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이와 현수선의 길이의 비는 $1 : a$로 일정하다.

중단원 마무리

• 정답 및 풀이 194쪽

❶ 정적분과 급수의 관계

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx$$

$$\left(단,\ \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$

❷ 넓이

(1) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

(2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

❸ 부피

닫힌구간 $[a, b]$에서 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 잘랐을 때의 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피 V는 $V=\boxed{}$

❹ 속도와 거리

(1) 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b |v(t)|dt$$

(2) 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\boxed{}$$

(3) 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)\,(a\le t\le b)$의 겹치는 부분이 없을 때 길이 l은

$$l=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

(4) 곡선 $y=f(x)\,(a\le x\le b)$의 길이 l은

$$l=\boxed{}$$

기본 문제

1 정적분을 이용하여 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^5+\left(\frac{2}{n}\right)^5+\left(\frac{3}{n}\right)^5+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^5\right\}$$

2 다음 도형의 넓이를 구하시오.

(1) 곡선 $y=\frac{1}{x^2}$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 도형

(2) 곡선 $y=\sqrt{x}$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형

3 어떤 입체도형을 밑면으로부터 높이가 x인 지점에서 밑면에 평행한 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{16-x}$인 정사각형이다. 이 입체도형의 높이가 4일 때, 부피를 구하시오.

4 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=\cos\pi t$일 때, 출발한 후 두 번째로 운동 방향을 바꿀 때까지 움직인 거리를 구하시오.

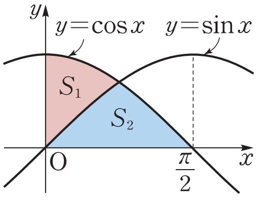
5 $1\le t\le 2$일 때, 곡선 $x=2\ln t$, $y=t+\frac{1}{t}$의 길이를 구하시오.

표준 문제

추론 **6** 정적분을 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3+\cdots+(2n)^3}{n^4}$의 값을 구하시오.

7 곡선 $y=e^x$과 이 곡선 위의 점 $(2,\ e^2)$에서의 접선 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

8 오른쪽 그림과 같이 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 두 곡선 $y=\cos x$, $y=\sin x$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 두 곡선 $y=\cos x$, $y=\sin x$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라고 하자. 이때 $\frac{S_2}{S_1}$의 값을 구하시오.



서술형 **9** 자연수 k에 대하여 닫힌구간 $[0,\ \pi]$에서 곡선 $y=k\cos x$와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=\pi$로 둘러싸인 도형의 넓이를 a_k라고 할 때, $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(k+1)a_k}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

10 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도가 각각 $v_1(t)=\sin\pi t$, $v_2(t)=2\sin 2\pi t$라고 한다. 두 점 P, Q가 원점을 출발한 후 처음으로 다시 만나는 점의 좌표를 구하시오.

11 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=\sin t+\sqrt{3}\cos t,\ y=\cos t-\sqrt{3}\sin t$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=2\pi$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

발전 문제

12 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{n^2}\left(\cos\frac{\pi}{n}+2\cos\frac{2\pi}{n}+3\cos\frac{3\pi}{n}+\cdots+n\cos\frac{n\pi}{n}\right)$$

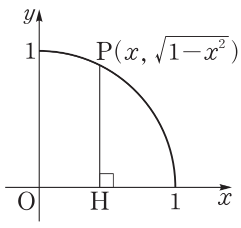
13 곡선 $y=ae^x$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=\ln 2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 곡선 $y=e^{2x}$이 이등분하도록 하는 상수 a의 값을 구하시오. (단, $a>1$)

문제 해결

14 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[(n-1)\pi,\ n\pi]$에서 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라고 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값을 구하시오.

서술형

15 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{1-x^2}\ (0\le x\le 1)$ 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ \sqrt{1-x^2})$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 PH를 한 변으로 하는 정삼각형을 x축에 수직인 평면 위에 그린다. 점 P의 x좌표가 $x=0$에서 $x=1$까지 변할 때, 이 정삼각형이 만드는 입체도형의 부피를 구하시오.



대단원 마무리

01 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=\begin{cases} e^x & (x<1) \\ \dfrac{1}{x} & (x>1) \end{cases}$$

이고 $f(1)=2e$일 때, $f(e)-f(0)$의 값을 구하시오.

02 $0<x<\pi$에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\sin x-\cos 2x$이고 $f(x)$의 극솟값이 0일 때, $f(x)$의 극댓값을 구하시오.

03 어떤 드럼을 친 직후 소리의 크기를 측정하였더니 100 dB이었고, t초 후의 소리의 크기를 $V(t)$ dB이라고 하면 소리의 크기의 순간변화율 $V'(t)$는 다음과 같다고 한다.

$$V'(t)=-20e^{-\frac{t}{5}}$$

드럼을 친 지 5초 후의 소리의 크기를 구하시오.

04 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int \cos^3 x\,dx,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5}{3}$$

를 만족시킬 때, 함수 $f(x)$를 구하시오.

05 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이고 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2$, $f(0)=e$일 때, 함수 $f(x)$를 구하시오.

06 함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=\dfrac{3}{x^2-x-2}$이고 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=3$일 때, $f(0)$의 값을 구하시오.

07 $x>0$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 할 때, $F(x)=xf(x)-x\ln x$가 성립한다. $f(e)=\frac{3}{2}$일 때, $f'(e)+f(e^2)$의 값을 구하시오.

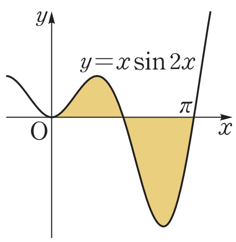
08 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 도함수는 $f'(x)=(1-x)e^{-x}+\frac{1}{x}$이고, $y=f(x)$의 그래프가 점 $\left(1,\ \frac{1}{e}\right)$을 지난다. 이때 방정식 $f(x)-xe^{-x}=2$를 만족시키는 x의 값을 구하시오.

09 정적분 $\int_1^2 \frac{8^x-1}{2^x-1}\,dx$의 값을 구하시오.

10 정적분 $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}\,dx$의 값을 구하시오.

11 함수 $f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$의 값을 구하시오.

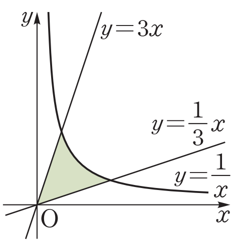
12 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=x\sin 2x\ (0\le x\le \pi)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.



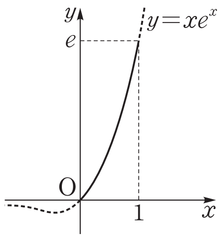
13 곡선 $y=\sqrt{x}$와 x축 및 직선 $x=9$로 둘러싸인 도형의 넓이를 곡선 $y=ax^2$이 이등분할 때, 양수 a의 값을 구하시오.

14 두 곡선 $y=-\ln(x+1)$, $y=\sin x$ 및 직선 $x=\pi$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

15 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$과 두 직선 $y=3x$, $y=\dfrac{1}{3}x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.
(단, $x>0$, $y>0$)



16 오른쪽 그림은 $0\le x\le 1$에서 정의된 함수 $f(x)=xe^x$의 그래프이다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 정적분 $\int_0^1 f(x)dx+\int_0^e g(x)dx$의 값을 구하시오.



17 높이가 20 cm인 물병에 깊이가 x cm가 되도록 물을 부으면 수면의 넓이는 $\sqrt{x+16}$ cm^{2}가 된다고 한다. 이 물병에 물을 가득 채울 때의 물의 부피를 구하시오.

18 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$일 때, 곡선 $x=2\cos^3\theta$, $y=2\sin^3\theta$의 길이를 구하시오.

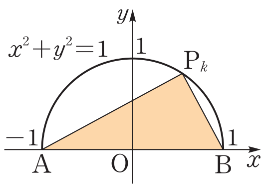
서술형

• 정답 및 풀이 196쪽

19 $f(x)=\cos x+\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)\sin t\,dt$를 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

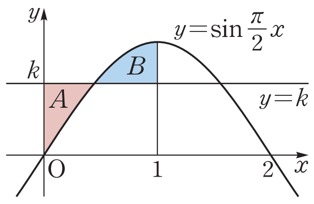
20 오른쪽 그림과 같이 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(1,\ 0)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원 $x^2+y^2=1$의 호 AB를 n 등분 하는 점을 A에서 가까운 점부터 차례대로 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_{n-1}이라고 하자. 삼각형 $\mathrm{ABP}_k$$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$의 넓이를 S_k라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



풀이

21 다음 그림과 같이 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$와 직선 $y=k$ 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 두 도형을 각각 A, B라고 하자. 두 도형 A, B의 넓이가 같을 때, 상수 k의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

(단, $0<k<1$)



풀이

22 $2\le x\le 4$일 때, 곡선 $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x$의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

자기 평가

	만족	보통	미흡
❶ 치환적분법과 부분적분법을 활용하여 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.			
❷ 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해할 수 있다.			
❸ 정적분을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이와 입체도형의 부피를 구할 수 있다.			
❹ 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결하고, 곡선의 길이를 구할 수 있다.			

보충 계획

부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

창의·융합 프로젝트

평균 기온의 계산

우리나라에서는 1일 8회의 기온을 측정한 후 관측값의 평균을 그날의 일평균 기온으로 사용하고 있다. 만약 매 순간 기온을 측정하는 것이 가능하다면 일평균 기온은 어떻게 계산할 수 있을까? 이는 연속함수의 평균을 이용하여 구할 수 있다.

1일	2일	3일
평균기온:18.2℃	평균기온:22.0℃	평균기온:17.6℃
최고기온:21.2℃	최고기온:29.4℃	최고기온:23.6℃
최저기온:15.5℃	최저기온:15.6℃	최저기온:13.4℃
평균운량:8.9	평균운량:2.6	평균운량:5.8
일강수량:4.0mm	일강수량:1.5mm	일강수량: -

(출처: 기상청, 2017년)

닫힌구간 $[a, b]$에서 정의된 연속함수 $y=f(x)$의 평균을 구해 보자.

닫힌구간 $[a, b]$를 n 등분 한 각 소구간의 길이는 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$이다. 이때 각각의 소구간에서 차례대로 n개의 임의의 점의 x좌표 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$을 선택하면 함숫값 $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \cdots, f(x_n)$의 평균은 다음과 같다.

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

$$=\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_n)}{\dfrac{b-a}{\Delta x}}$$

$$=\frac{1}{b-a}\{f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x\}$$

$$=\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \qquad \cdots\cdots ①$$

여기서 n의 값이 한없이 커지면 ①은 매우 좁은 간격으로 분포된 수많은 점에서의 함숫값들의 평균이 계산될 것이다. 이때 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

가 성립한다. 따라서 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속함수 $f(x)$의 평균을 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$와 같이 정의할 수 있다.

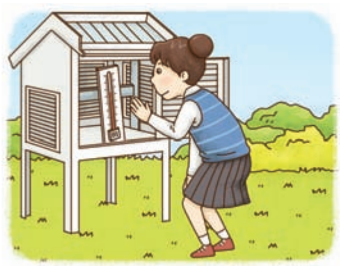
(출처: Stewart, J., 『Calculus: Early Transcendentals』)

과제 * 어떤 지역에서 오전 9시부터 t시간 후에 측정한 기온 $T(t)$는 다음과 같다고 한다.

$$T(t)=27+8\sin\frac{\pi t}{12}$$

이때 오전 9시부터 오후 9시까지의 평균 기온을 구해 보자.

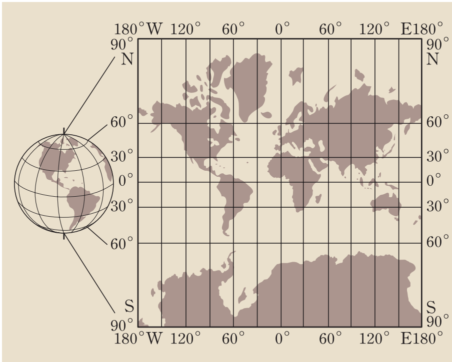
(단, 기온의 단위는 °C이다.)

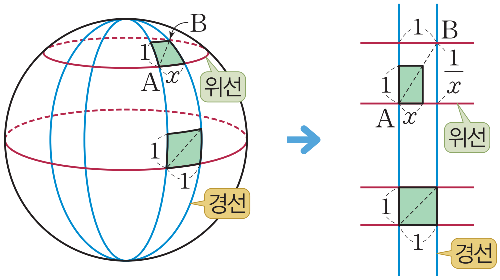


메르카토르 도법과 시컨트함수의 적분

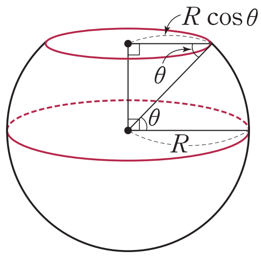
지구는 둥근 입체이므로 이것을 평면인 지도 위에 나타내면 원래 지구의 모양과는 달라진다.

이 문제를 해결하는 방법 중 하나가 메르카토르 도법인데, 네덜란드의 지리학자 메르카토르(Mercator, G., 1512~1594)가 고안하여 세계 지도의 작성에 이용되고 있다. 이 도법은 원기둥에 지구를 투시하는 방법을 개량한 것으로, 적도에서 멀어질수록 좁아지는 두 경선 사이의 간격이 일정해지도록 조정하여 지도에 나타내는 것이다.





[그림 1]



[그림 2]

즉 [그림 1]과 같이 위선 사이의 간격이 1인 두 지점 A, B를 지도상에 나타낼 때, 경선 사이의 간격이 x에서 1로 늘어난 만큼 위선 사이의 간격도 같은 비율로 늘려서 그리는 것이다. 이 비율을 구하기 위해 [그림 2]와 같이 지구의 반지름의 길이를 R라고 하면 위도 θ를 나타내는 원의 반지름의 길이는 $R\cos\theta$이므로 위도 θ에 대하여 경선 사이의 간격이 늘어나는 비는 $\frac{2\pi R}{2\pi R\cos\theta}=\sec\theta$이다. 따라서 적도와 위도가 θ인 위선 사이의 간격을 n 등분 하여 한 간격을 $\varDelta\theta$라 하고 이것을 지도상에 $c\varDelta\theta$(c는 R에 대하여 지도의 축척에 따라 생기는 상수)로 나타내면 적도와 위도가 θ인 위선 사이의 간격은

$$\sec 0\times c\varDelta\theta+\sec(\varDelta\theta)\times c\varDelta\theta+\sec(2\varDelta\theta)\times c\varDelta\theta+\cdots+\sec((n-1)\varDelta\theta)\times c\varDelta\theta$$

이고, 이 값은 n의 값이 한없이 커짐에 따라 $c\int_0^\theta \sec\theta\, d\theta$의 값에 가까워진다.

이와 같이 메르카토르 도법으로 지도를 만들 때, 시컨트함수의 적분을 이용한다.

(출처: Feeman, T. G., 『Portraits of the Earth: A Mathematician Looks at Maps』)

진로 탐색

지도 제작 기술자 | 지형 측량, 측지 측량, 항공 사진 및 원격 탐사 등으로 구축된 공간 정보를 수집하고 분석하여 지도를 제작한다. 또 산림도, 교통도 등 다양한 주제를 포함하는 주제도를 작성하는 업무를 수행한다. (출처: 워크넷, 2017년)