III 적분법

① 여러 가지 적분법

② 정적분의 활용

케플러
(Kepler, J., 1571~1630)
포도주 통의 부피를 계산하기 위해 구분구적법을 사용하였다.

르베그
(Lebesgue, H. L., 1875~1941)
적분가능한 함수의 범위를 확장하고, 수학적으로 더욱 완성된 적분 이론을 전개하였다.

학습목표

- **치환적분법**과 **부분적분법**을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
- **여러 가지 함수의 부정적분과 정적분**을 구할 수 있다.
- **정적분과 급수의 합 사이의 관계**를 이해한다.
- 곡선으로 둘러싸인 도형의 **넓이**, 입체도형의 **부피**를 구할 수 있다.
- **속도와 거리**에 대한 문제를 해결할 수 있다.

넓이와 부피, 속도와 위치를 알아내다

도로, 다리, 댐 등의 건축 구조물을 만들 영역의 넓이나 구조물의 부피를 구할 때 적분이 이용된다. 또 비행기를 공중에 뜰 수 있게 하려면 공기의 흐름을 분석하여 공기가 만들어 내는 힘을 계산해야 하는데 공기가 흐르는 공간을 작은 영역으로 나누어 속도의 변화량에 대한 방정식을 만들고, 이 방정식을 적분함으로써 공기의 압력과 속도를 계산할 수 있다.

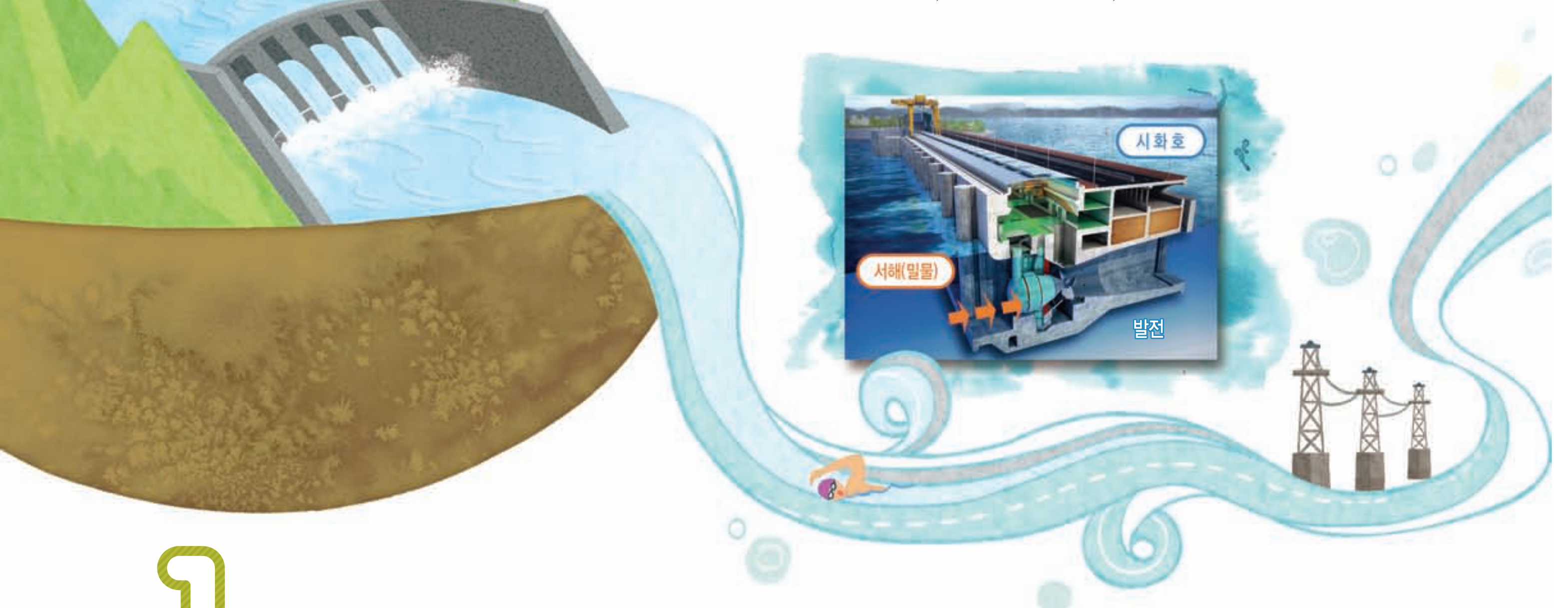
이와 같이 적분은 건축학, 항공학 등 다양한 분야에서 활용된다.

친환경 발전으로 주목받는 조력 발전은 바다의 밀물과 썰물의 차를 이용하여 전기를 생산하는 방식이다. 기본 원리는 밀물과 썰물의 차가 큰 만이나 강 하구에 저수지를 만들어 바닷물을 가두었다가 물의 높이 차를 이용하여 위치 에너지를 운동 에너지로 바꾸어 발전기를 회전시키는 것이다.

저수지 안쪽 물의 높이가 h일 때의 단면의 넓이를 $S(h)$, 만조 때 물의 높이를 H, 물의 밀도를 k, 중력 가속도를 g라고 하면 간조 때 저수지 안의 물이 가진 위치 에너지 E는 적분을 이용하여 $E=\int_0^H kghS(h)dh$로 계산할 수 있다.

이 단원에서는 지수함수, 로그함수 및 삼각함수를 포함하는 여러 가지 함수의 적분법을 알아본다.

(출처: K-water, 시화호 조력 발전소, 2017년)



1 여러 가지 적분법

준비학습

1 다음 부정적분과 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int(3x^2-2x+1)dx$

(2) $\int_{-1}^{0}(x^3-x^2+1)dx+\int_{0}^{1}(x^3-x^2+1)dx$

2 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=\sqrt[3]{x^2}$

(2) $y=\sin 2x$

(3) $y=\ln 3x$

(4) $y=e^{4x}$

1 여러 가지 함수의 부정적분

● 여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있다.

함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분은 무엇일까

생각 톡

다음은 함수 $f(x)$와 그 도함수 $f'(x)$를 나타낸 표이다.

$f(x)$	x^3	$x^{\frac{3}{2}}$	x^{-1}	$x^{-\frac{2}{3}}$
$f'(x)$	$3x^2$	$\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$	$-x^{-2}$	$-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$

탐구 위의 표를 이용하여 다음 표의 빈칸을 채워 보자. (단, $f(x)$의 상수항은 0이다.)

$f'(x)$	x^2	$x^{\frac{1}{2}}$	x^{-2}	$x^{-\frac{5}{3}}$
$f(x)$				

$f(x) \underset{\text{미분}}{\overset{\text{적분}}{\rightleftarrows}} \int f(x)dx$

부정적분은 미분의 역의 과정이므로 미분으로부터 여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있다.

함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분을 구해 보자.

$n\neq-1$일 때, 함수 $y=x^n$의 미분법에서 $\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n$이므로

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \ (C\text{는 적분상수})$$

이다.

일반적으로 부정적분에서 적분상수는 C로 나타낸다.

$n=-1$일 때, 로그함수의 미분법에서 $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$이므로

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분

❶ $n\neq-1$일 때, $\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

❷ $n=-1$일 때, $\int x^{-1}\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C$

보기 ❶ $\int \sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\dfrac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

❷ $\int \dfrac{2}{x}\,dx=2\int \dfrac{1}{x}\,dx=2\ln|x|+C$

문제 1 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int \dfrac{1}{x^3}\,dx$　　(2) $\int x\sqrt{x}\,dx$

예제 1 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int \dfrac{x^3-3x+2}{x^2}\,dx$　　(2) $\int \dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}\,dx$

① $\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$
(단, k는 0이 아닌 상수)

② $\int \{f(x)+g(x)\}\,dx$
$=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$

③ $\int \{f(x)-g(x)\}\,dx$
$=\int f(x)\,dx-\int g(x)\,dx$

풀이 (1) $\int \dfrac{x^3-3x+2}{x^2}\,dx=\int\left(x-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)dx$

$=\int x\,dx-3\int \dfrac{1}{x}\,dx+2\int \dfrac{1}{x^2}\,dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2-3\ln|x|-\dfrac{2}{x}+C$

(2) $\int \dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}\,dx=\int \dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{x}\,dx$

$=\int\left(1+2x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{x}\right)dx$

$=\int 1\,dx+2\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx+\int \dfrac{1}{x}\,dx$

$=x+4x^{\frac{1}{2}}+\ln|x|+C$

$=x+4\sqrt{x}+\ln|x|+C$

답 (1) $\dfrac{1}{2}x^2-3\ln|x|-\dfrac{2}{x}+C$　(2) $x+4\sqrt{x}+\ln|x|+C$

문제 2 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int \dfrac{x^2-2}{x^3}\,dx$　　(2) $\int \dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

지수함수의 부정적분은 어떻게 구할까

지수함수의 미분법으로부터 다음이 성립함을 알 수 있다.

$(e^x)'=e^x$이므로 $\int e^x\,dx=e^x+C$

$(a^x)'=a^x\ln a\,(a>0,\ a\neq1)$이므로 $\int a^x\,dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$

이상을 정리하면 다음과 같다.

지수함수의 부정적분

❶ $\int e^x\,dx=e^x+C$

❷ $\int a^x\,dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$ (단, $a>0,\ a\neq1$)

예제 2 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int e^{x+2}dx$ (2) $\int(2^x+1)(2^x-1)dx$

풀이 (1) $\int e^{x+2}dx=\int(e^x\times e^2)dx=e^2\int e^x\,dx$

$=e^2e^x+C=e^{x+2}+C$

(2) $\int(2^x+1)(2^x-1)dx=\int(2^{2x}-1)dx=\int(4^x-1)dx$

$=\int 4^x dx-\int 1\,dx=\dfrac{4^x}{\ln 4}-x+C$

$=\dfrac{2^{2x}}{2\ln 2}-x+C=\dfrac{2^{2x-1}}{\ln 2}-x+C$

답 (1) $e^{x+2}+C$ (2) $\dfrac{2^{2x-1}}{\ln 2}-x+C$

문제 3 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int\dfrac{xe^x+1}{x}dx$ (2) $\int(e^{x-1}-2^{x+1})dx$

문제 4 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=2e^{x-1}-3x^2$이고 $f(1)=-1$일 때, $f(x)$를 구하시오.

삼각함수의 부정적분은 어떻게 구할까

삼각함수의 미분법으로부터 다음이 성립함을 알 수 있다.

$(\sin x)'=\cos x$이므로 $\int \cos x\, dx=\sin x+C$

$(\cos x)'=-\sin x$이므로 $\int \sin x\, dx=-\cos x+C$

$(\tan x)'=\sec^2 x$이므로 $\int \sec^2 x\, dx=\tan x+C$

$(\cot x)'=-\csc^2 x$이므로 $\int \csc^2 x\, dx=-\cot x+C$

이상을 정리하면 다음과 같다.

삼각함수의 부정적분

❶ $\int \sin x\, dx=-\cos x+C$

❷ $\int \cos x\, dx=\sin x+C$

❸ $\int \sec^2 x\, dx=\tan x+C$

❹ $\int \csc^2 x\, dx=-\cot x+C$

예제 3 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int (3\sin x+2\cos x)dx$ (2) $\int \frac{\sin^3 x-1}{\sin^2 x}dx$

풀이 (1) $\int (3\sin x+2\cos x)dx=3\int \sin x\, dx+2\int \cos x\, dx$

$=-3\cos x+2\sin x+C$

(2) $\int \frac{\sin^3 x-1}{\sin^2 x}dx=\int (\sin x-\csc^2 x)dx$

$=\int \sin x\, dx-\int \csc^2 x\, dx$

$=-\cos x+\cot x+C$

답 (1) $-3\cos x+2\sin x+C$ (2) $-\cos x+\cot x+C$

문제 5 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int (\cos x-3\csc^2 x)dx$ (2) $\int \frac{2\cos^3 x+3}{\cos^2 x}dx$

삼각함수의 부정적분을 구할 때에는 주어진 삼각함수를 적분하기 쉬운 형태로 변형한 다음 적분한다.

예제 4 **다음 부정적분을 구하시오.**

(1) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx$ (2) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$

풀이 (1) $\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\dfrac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=\dfrac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x}=1+\cos x$이므로

$$\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx=\int(1+\cos x)dx=\int 1\,dx+\int \cos x\,dx$$
$$=x+\sin x+C$$

$\tan^2 x+1=\sec^2 x$

(2) $$\int \tan^2 x\,dx=\int(\sec^2 x-1)dx=\int \sec^2 x\,dx-\int 1\,dx$$
$$=\tan x-x+C$$

답 (1) $x+\sin x+C$ (2) $\tan x-x+C$

문제 6 **다음 부정적분을 구하시오.**

(1) $\displaystyle\int \cos x\tan x\,dx$ (2) $\displaystyle\int \cot^2 x\,dx$

문제 7 **곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나고, 이 곡선 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $\sin x+\cos x$일 때, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$의 값을 구하시오.**

적용하기

오늘날 과도한 삼림 벌채, 가축 방목, 환경 오염 등으로 지구 곳곳의 많은 지역이 황폐한 사막으로 변하고 있다. 이러한 사막화 현상은 황사를 유발할 뿐만 아니라 기후 변화를 일으킬 수 있으므로 사막화 방지를 위해 무분별한 자원 개발을 자제하고 자원 절약, 나무 심기 등의 노력을 기울여야 한다.
어느 지역에서 t년 후 사막화될 영역의 넓이는 $f(t)\times10^2\ \text{km}^2$이고 $f(0)=25$, $f'(t)=0.2\times1.01^t$이라고 하자.

1 $f(t)$를 구해 보자. (단, $\ln 1.01=0.01$로 계산한다.)

2 이 지역에서 20년 후 사막화될 영역의 넓이를 예측해 보자.
(단, $1.01^{10}=1.1$로 계산한다.)

2 치환적분법

- 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

치환적분법이란 무엇일까

생각 톡

탐구 함수 $(x+1)^5$의 도함수를 구하고 이를 이용하여 부정적분 $\int(x+1)^4dx$를 구해 보자.

어떤 함수의 부정적분을 직접 구하기 어려울 때, 함수의 식의 일부를 새로운 변수로 바꾸어 놓고 적분하면 편리한 경우가 있다.

변수를 바꾸어 적분하는 방법을 알아보자.

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int f(x)dx=F(x)+C \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. 이때 $F(x)$에서 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면

$$F(x)=F(g(t))$$

이다. $F(x)$를 t에 대하여 미분하면 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dt}F(x)=\frac{d}{dt}F(g(t))=F'(g(t))g'(t)=f(g(t))g'(t)$$

이다. 따라서 다음을 얻는다.

$$F(x)+C=\int f(g(t))g'(t)dt \qquad \cdots\cdots ②$$

①, ②에서 다음 등식이 성립한다.

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$

이와 같이 변수를 다른 변수로 바꾸어 적분하는 방법을 **치환적분법**이라고 한다.

합성함수의 미분법
$y=f(u)$, $u=g(x)$이면
$y=f(g(x))$의 도함수는
$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$

이상을 정리하면 다음과 같다.

치환적분법

미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$

예제 1 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int(2x+1)^4 dx$ (2) $\int x\sqrt{x+1}dx$

풀이 (1) $2x+1=t$로 놓으면 $x=\frac{t-1}{2}$, $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\int(2x+1)^4 dx&=\int\left(t^4\times\frac{1}{2}\right)dt\\&=\frac{1}{2}\int t^4 dt=\frac{1}{10}t^5+C\\&=\frac{1}{10}(2x+1)^5+C\end{aligned}$$

치환적분법으로 구한 부정적분은 그 결과를 처음의 변수로 바꾸어 나타낸다.

(2) $x+1=t$로 놓으면 $x=t-1$, $\frac{dx}{dt}=1$이므로

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+1}dx&=\int\{(t-1)\sqrt{t}\times1\}dt\\&=\int\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C\\&=\frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1}-\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+C\end{aligned}$$

답 (1) $\frac{1}{10}(2x+1)^5+C$ (2) $\frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1}-\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+C$

문제 1 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int(2x-1)\sqrt{2x+1}\,dx$ (2) $\int\frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx$

문제 2 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int\cos(3x+2)dx$ (2) $\int e^{-2x+1}dx$

부정적분이 $\int f(g(x))g'(x)dx$의 꼴인 경우에는 $g(x)=t$로 놓으면

$g'(x)=\dfrac{dt}{dx}$이므로 치환적분법에 의하여 다음이 성립한다.

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(t)dt$$

예제 2 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int 2x(x^2+1)^4 dx$ (2) $\int \sin^3 x \cos x\, dx$

풀이 (1) $x^2+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\begin{aligned}\int 2x(x^2+1)^4 dx&=\int \{(x^2+1)^4\times 2x\}dx\\&=\int t^4 dt=\frac{1}{5}t^5+C\\&=\frac{1}{5}(x^2+1)^5+C\end{aligned}$$

(2) $\sin x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\cos x\, dx&=\int t^3 dt=\frac{1}{4}t^4+C\\&=\frac{1}{4}\sin^4 x+C\end{aligned}$$

답 (1) $\frac{1}{5}(x^2+1)^5+C$ (2) $\frac{1}{4}\sin^4 x+C$

문제 3 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int xe^{x^2}dx$ (2) $\int 2x\cos(x^2+2)dx$

(3) $\int \dfrac{(\ln x)^2}{x}dx$ (4) $\int \tan x\sec^2 x\, dx$

문제 4 실내 온도가 30 °C인 날에 냉장고에서 온도가 5 °C인 우유를 꺼내 놓았다. 우유를 꺼내 놓은 지 t분 후의 우유의 온도를 y °C라고 하면 시각 t에서의 우유의 온도의 변화율 $\dfrac{dy}{dt}$는

$$\frac{dy}{dt}=2.25e^{-0.09t}$$

과 같다고 한다. 우유를 꺼내 놓은 지 10분 후의 우유의 온도를 구하시오. (단, $e^{-0.9}=0.41$로 계산한다.)

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$의 꼴의 부정적분은 어떻게 구할까

부정적분이 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$의 꼴인 경우에는 $f(x)=t$로 놓으면 $f'(x)=\frac{dt}{dx}$이므로 치환적분법에 의하여 다음이 성립한다.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int \left\{\frac{1}{f(x)}\times f'(x)\right\}dx=\int \frac{1}{t}\,dt$$
$$=\ln|t|+C=\ln|f(x)|+C$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

$\frac{d}{dx}\ln|f(x)|=\frac{f'(x)}{f(x)}$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$의 꼴의 부정적분

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$$

예제 3 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}dx$　　(2) $\int \tan x\,dx$

분모의 도함수를 구하여 분자와 비교한다.

풀이 (1) $(x^2+3x+1)'=2x+3$이므로

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}dx=\int \frac{(x^2+3x+1)'}{x^2+3x+1}dx$$
$$=\ln|x^2+3x+1|+C$$

(2) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$이고 $(\cos x)'=-\sin x$이므로

$$\int \tan x\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx$$
$$=-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=-\ln|\cos x|+C$$

답 (1) $\ln|x^2+3x+1|+C$　(2) $-\ln|\cos x|+C$

문제 5 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int \frac{x^2}{x^3-2}dx$　　(2) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

(3) $\int \cot x\,dx$　　(4) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

유리함수를 적분할 때에는 그 함수를 간단한 유리함수의 합 또는 차로 나타내어 적분하면 편리한 경우가 있다.

예제 4 부정적분 $\int \frac{1}{x(x-1)}\,dx$를 구하시오.

풀이 $\frac{1}{x(x-1)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$이므로

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x-1)}\,dx&=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)dx\\&=-\ln|x|+\ln|x-1|+C\\&=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C\end{aligned}$$

답 $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$

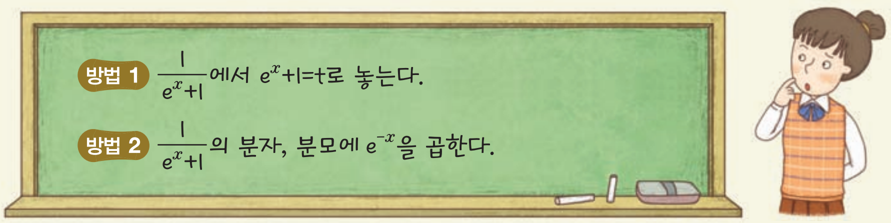
문제 6 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

(2) $\int \frac{2}{(x-1)(x-3)}\,dx$

비교하기

분수의 꼴로 된 함수 $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$의 부정적분 $\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$를 다음 두 가지 방법으로 각각 구해 보자.



3 부분적분법

● 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

부분적분법이란 무엇일까

생각 톡

부정적분 $\int x\sin x\,dx$를 구하려고 한다.

탐구 ① $(x\cos x)'$을 구하여 다음이 성립함을 확인해 보자.

$$x\sin x=-(x\cos x)'+\cos x$$

탐구 ② 탐구 ①의 등식을 이용하여 $\int x\sin x\,dx$를 구해 보자.

함수의 곱의 미분법을 이용하여 곱의 꼴로 된 함수의 부정적분을 구하는 방법을 알아보자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 함수의 곱의 미분법에서

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

이므로

$$f(x)g(x)=\int f'(x)g(x)\,dx+\int f(x)g'(x)\,dx$$

이다.

따라서

$$\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx$$

가 성립한다.

이와 같이 적분하는 방법을 **부분적분법**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

부분적분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

$$\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx$$

부분적분법을 이용할 때에는 미분하기 쉬운 것을 $f(x)$, 적분하기 쉬운 것을 $g'(x)$로 놓으면 계산하기 편리하다.

예제 1 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int xe^x\,dx$ (2) $\int \ln x\,dx$

풀이 (1) $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면 $f'(x)=1$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C=(x-1)e^x+C$$

(2) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$이므로

$$\int \ln x\,dx=x\ln x-\int\left(\frac{1}{x}\times x\right)dx=x\ln x-x+C=x(\ln x-1)+C$$

답 (1) $(x-1)e^x+C$ (2) $x(\ln x-1)+C$

문제 1 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int x\cos x\,dx$ (2) $\int x\ln x\,dx$

부분적분법을 한 번 적용하여 부정적분을 구할 수 없는 경우에는 부분적분법으로 나온 결과에 다시 부분적분법을 적용한다.

예제 2 부정적분 $\int x^2\cos x\,dx$를 구하시오.

풀이 $f(x)=x^2$, $g'(x)=\cos x$로 놓으면 $f'(x)=2x$, $g(x)=\sin x$이므로

$$\begin{aligned}\int x^2\cos x\,dx&=x^2\sin x-\int 2x\sin x\,dx\\&=x^2\sin x-2\int x\sin x\,dx \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

$u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면 $u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$이므로

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx&=-x\cos x+\int\cos x\,dx\\&=-x\cos x+\sin x+C_1 \qquad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

②를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}\int x^2\cos x\,dx&=x^2\sin x-2(-x\cos x+\sin x+C_1)\\&=(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C\end{aligned}$$

답 $(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C$

문제 2 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int x^2e^x\,dx$ (2) $\int (\ln x)^2\,dx$

수학 역량 플러스

문제 해결 의사소통

부분적분법의 반복

부분적분법을 이용하여 부정적분을 구하는 과정에서 같은 꼴이 반복되는 경우가 있다.

민정이와 준형이가 부정적분 $\int e^x \sin x\, dx$를 구하는데 다음과 같이 준형이만 올바르게 구하였다.

민정

$f(x)=\sin x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면 $f'(x)=\cos x$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx \quad \cdots\cdots ①$$

$u(x)=e^x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면 $u'(x)=e^x$, $v(x)=\sin x$이므로

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx \quad \cdots\cdots ②$$

②를 ①에 대입하여 정리하면

$$\int e^x \sin x\, dx = \int e^x \sin x\, dx$$

준형

$f(x)=e^x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면 $f'(x)=e^x$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx \quad \cdots\cdots ①$$

$u(x)=e^x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면 $u'(x)=e^x$, $v(x)=\sin x$이므로

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx \quad \cdots\cdots ②$$

②를 ①에 대입하여 정리하면

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx\right)$$

$$2\int e^x \sin x\, dx = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

활동 1 민정이의 풀이에서 $u(x)$, $v'(x)$를 바르게 고쳐 부정적분 $\int e^x \sin x\, dx$를 구해 보자.

활동 2 부정적분 $\int e^x \cos x\, dx$를 구해 보자.

4 여러 가지 함수의 정적분

- 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있다.

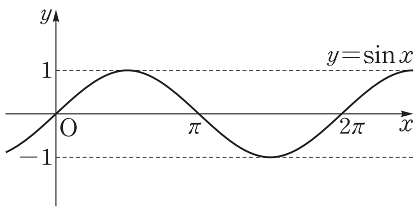
여러 가지 함수의 정적분은 어떻게 구할까

생각 톡

정적분 $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$의 값을 구하려고 한다.

탐구 ① 부정적분 $\int \sin x\, dx$를 구해 보자.

탐구 ② 탐구 ①의 결과와 정적분의 정의를 이용하여 정적분 $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$의 값을 구해 보자.



함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분은 다음과 같다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$,
$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

이를 이용하여 여러 가지 함수의 정적분의 값을 구해 보자.

예제 1 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$　　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

풀이 (1) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^2 x^{-2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$

답 (1) $\frac{1}{2}$　(2) 1

문제 1 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$　　　(2) $\int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx$

(3) $\int_1^2 e^x\,dx$　　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$

예제 2 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_0^1 (e^x+e^{-x})^2 dx$ (2) $\int_1^2 (\sqrt{x}+4x)dx+2\int_1^2 (\sqrt{x}-2x)dx$

① $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

② $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx$
$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

③ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$
$=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

④ $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$
$=\int_a^b f(x)dx$

풀이 (1) $\int_0^1 (e^x+e^{-x})^2 dx=\int_0^1 (e^{2x}+2+e^{-2x})dx$

$$=\int_0^1 e^{2x}\,dx+\int_0^1 2\,dx+\int_0^1 e^{-2x}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1+\Big[2x\Big]_0^1+\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\right)+2+\left(-\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)+2$$

(2) $\int_1^2 (\sqrt{x}+4x)dx+2\int_1^2 (\sqrt{x}-2x)dx=\int_1^2 \{\sqrt{x}+4x+2(\sqrt{x}-2x)\}dx$

$$=\int_1^2 3\sqrt{x}\,dx=3\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$

$$=2(2\sqrt{2}-1)$$

답 (1) $\frac{1}{2}\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)+2$ (2) $2(2\sqrt{2}-1)$

문제 2 다음 정적분의 값을 구하시오.

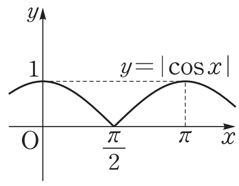
(1) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}dx$ (2) $\int_0^1 (2^x+1)^2dx-\int_0^1 (2^x-1)^2dx$

예제 3 정적분 $\int_0^\pi |\cos x|\,dx$의 값을 구하시오.

절댓값 기호 안의 식의 값의 부호에 따라 적분 구간을 나눈다.

풀이 $f(x)=|\cos x|$라고 하면

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \left(0\le x\le \frac{\pi}{2}\right)\\ -\cos x & \left(\frac{\pi}{2}\le x\le \pi\right)\end{cases}$$



따라서 구하는 정적분의 값은

$$\int_0^\pi |\cos x|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\cos x)dx$$

$$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^\pi=1+1=2$$

답 2

문제 3 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_0^2 |\sqrt{x}-1|\,dx$ (2) $\int_{-1}^1 |e^x-1|\,dx$

치환적분법을 이용하여 정적분을 어떻게 구할까

치환적분법을 이용하여 정적분을 구해 보자.

닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a) \quad \cdots\cdots \text{①}$$

이다.

그런데 $\int f(x)dx$를 구할 때, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면 치환적분법에 의하여 다음을 얻는다.

$$\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx = F(x)+C = F(g(t))+C$$

여기서 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = \Big[F(g(t))\Big]_\alpha^\beta = F(g(\beta))-F(g(\alpha)) = F(b)-F(a) \quad \cdots\cdots \text{②}$$

이다.

①, ②로부터 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

치환적분법을 이용한 정적분

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 미분가능한 함수 $x=g(t)$에 대하여 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 도함수 $g'(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

예제 4 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int_2^3 (x-2)^4 dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\, dx$

풀이 (1) $x-2=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=1$이고, $x=2$일 때 $t=0$, $x=3$일 때 $t=1$이므로

$$\int_2^3 (x-2)^4 dx=\int_0^1 t^4 dt=\left[\frac{1}{5}t^5\right]_0^1=\frac{1}{5}$$

(2) $\sin x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$이고, $x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\, dx=\int_0^1 t^2 dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

답 (1) $\dfrac{1}{5}$　(2) $\dfrac{1}{3}$

문제 4 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2} dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx$

부분적분법을 이용하여 정적분을 어떻게 구할까

부분적분법을 이용하여 정적분을 구해 보자.

닫힌구간 $[a,\ b]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때, 함수의 곱의 미분법에서

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

이므로 $f(x)g(x)$는 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$의 한 부정적분이다.

따라서 정적분의 정의에 의하여

$$\int_a^b \{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

부분적분법을 이용한 정적분

닫힌구간 $[a, b]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고, $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

예제 5 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$

풀이 (1) $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면 $f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{1\times(-\cos x)\}dx$$

$$=0+\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

(2) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x$이므로

$$\int_1^e \ln x\,dx=\Big[x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e\left(\frac{1}{x}\times x\right)dx$$

$$=e-\Big[x\Big]_1^e=e-(e-1)=1$$

답 (1) 1 (2) 1

문제 5 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

이야기 수학

미적분의 힘으로 다양한 업무를 수행하는 드론

드론은 무선 전파로 조종할 수 있는 무인 항공기로 현재 항공 촬영, 택배 등의 업무를 수행하고 있다. 드론이 자신의 위치와 다른 물체의 위치를 파악할 수 있으면 할 수 있는 일이 더 많아진다. 예를 들어 테니스공의 위치를 나타내는 식을 미분하여 공의 순간 속도를 계산한 후 어느 속도로 어느 위치에 가야 공을 받아칠 수 있는지를 계산하는 알고리즘을 이용하면 드론으로 테니스를 칠 수 있다. 또 드론의 안정적인 자동 비행을 위해 PID 제어 알고리즘을 주로 사용하는데 이 알고리즘은 비례, 적분, 미분을 이용하여 어떤 환경에서든 항상 수평을 유지하도록 값을 조절한다.

이와 같이 드론이 다양한 업무를 안정적으로 수행하는 데에 미적분이 이용된다.

(출처: 동아사이언스, 2015년)

수학 역량 플러스

문제 해결 추론

삼각함수를 이용한 치환적분법

a^2-x^2, x^2+a^2(a는 상수)의 꼴을 포함한 함수를 적분할 때에는 적분변수를 삼각함수로 치환하여 함수를 변형한 후 적분한다.

① $\sqrt{a^2-x^2}$**의 꼴 →** $x=a\sin\theta$**로 치환**

정적분 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$의 값을 구해 보자.

➡ $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$이고,

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$

이므로

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

이때 $\cos(\theta+\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$에서 $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(\cos 2\theta+1)$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\theta+1)d\theta\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

② $\frac{1}{x^2+a^2}$**의 꼴 →** $x=a\tan\theta$**로 치환**

정적분 $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$의 값을 구해 보자.

➡ $x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$이고,

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$

이므로

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta+1}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

활동 다음 정적분의 값을 구해 보자.

(1) $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$

(2) $\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\,dx$

중단원 마무리

❶ 여러 가지 함수의 부정적분

(1) 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분

① $n\neq-1$일 때,

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

② $n=-1$일 때,

$$\int x^{-1}\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx=\boxed{}+C$$

(2) 지수함수의 부정적분

① $\int e^x\,dx=e^x+C$

② $\int a^x\,dx=\boxed{}+C$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

(3) 삼각함수의 부정적분

① $\int \sin x\,dx=\boxed{}+C$

② $\int \cos x\,dx=\boxed{}+C$

③ $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$

④ $\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$

❷ 치환적분법

(1) 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면

$$\int f(x)\,dx=\int f(g(t))g'(t)\,dt$$

(2) $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\boxed{}+C$

❸ 부분적분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

$$\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int\boxed{}\,dx$$

기본 문제

1 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int\frac{2x+1}{x^3}\,dx$

(2) $\int\frac{e^{3x}-1}{e^{2x}+e^x+1}\,dx$

(3) $\int(2^x-1)^2\,dx$

(4) $\int(\sin x+5\sec^2 x)\,dx$

2 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int\frac{\ln x+3}{x}\,dx$　　(2) $\int\frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx$

(3) $\int(x-1)e^{2x}\,dx$　　(4) $\int(x+2)\sin x\,dx$

3 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_1^4\frac{(2\sqrt{x}-1)^2}{x}\,dx$　　(2) $\int_{-1}^1(e^x+3^x)\,dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sec^2 x\,dx$　　(4) $\int_0^1\frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$

4 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$

(2) $\int_0^{\pi}(1-\cos^3 x)\sin x\,dx$

(3) $\int_1^e \ln 3x\,dx$

(4) $\int_1^2 xe^{-x}\,dx$

• 정답 및 풀이 192쪽

표준 문제

5 함수 $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하자. $F(1)=0$일 때, 함수 $F(x)$를 구하시오.

6 다음 조건을 모두 만족시키는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를 구하시오.

> (가) $f'(x)+g'(x)=e^x$, $f'(x)-g'(x)=e^{-x}$
> (나) $f(0)=1$, $g(0)=0$

서술형

7 $x>0$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여

$$F(x)=xf(x)-x^2\sin x,\ F(2\pi)=4\pi$$

가 성립할 때, $f(\pi)$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

8 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $(x+1)e^x$이다. 이 곡선이 점 $(0,\ 4)$를 지날 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

9 어떤 공장에서 생산하는 제품의 시각 t에서의 수요량을 $D(t)$라고 할 때, 수요량의 변화율 $D'(t)$는 다음과 같다.

$$D'(t)=10te^{-\frac{t}{4}}$$

시각 $t=0$에서 이 제품의 수요량이 100일 때, 시각 t에서의 이 제품의 수요량 $D(t)$를 구하시오.

문제 해결 **10** $x>0$일 때, 함수 $f(x)=\int_0^x (\sqrt{t}-t)\,dt$의 극값을 구하시오.

11 함수 $f(x)$가 $f(x)=\cos \pi x+\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt$를 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

발전 문제

서술형 **12** 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=(1-\cos x)^2 \sin x$이고 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$일 때, $f(\pi)$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

13 함수 $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^3}\,dt$가 $f(a)=3$을 만족시킬 때, $\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{1+x^3}\,dx$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

추론 **14** 모든 실수 x에 대하여 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$\int_0^x f(t)\,dt=x+\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오. (단, $f(x)>0$)