다음은 2015년 ‘인구의 날’에 발표된『세계와 한국의 인구 현황 및 전망』의 내용 중 일부이다.

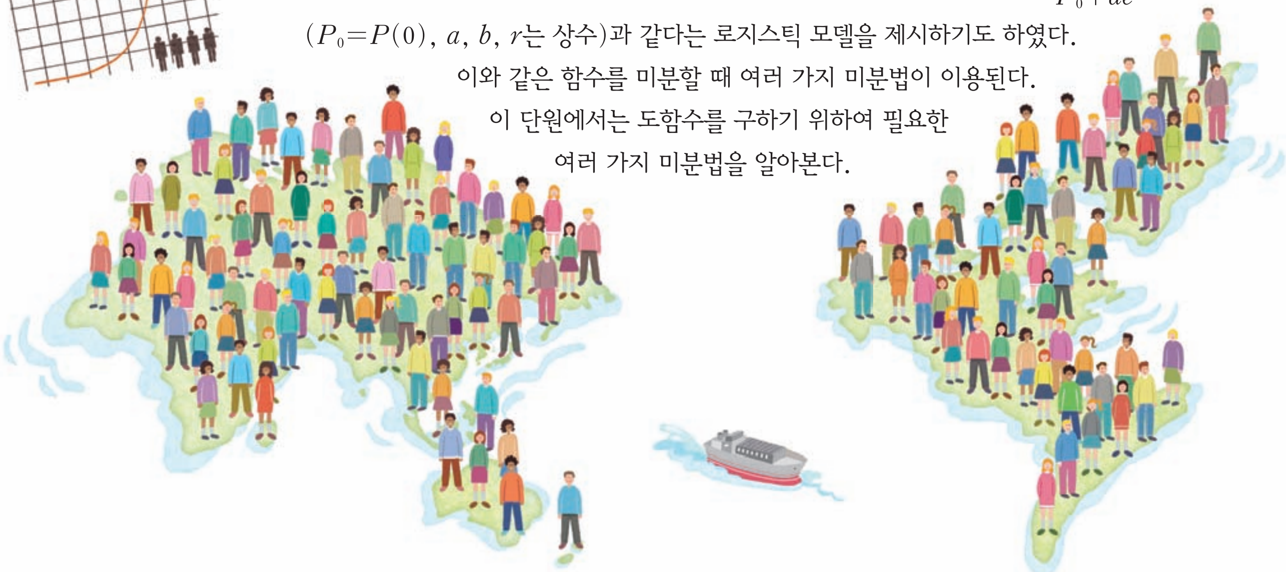
◎ 2015년 세계 인구는 73억 2천만 명으로, 2000년에 비해 1.2배 증가하였고, 향후 15년 동안 유사한 속도로 증가하여 2030년에는 84억 2천만 명에 이를 전망이다.

◎ 2015년 한국 인구는 5천 1백만 명으로, 2000년에 비해 1.1배 증가하였고, 향후 15년 동안은 소폭 증가에 그쳐 2030년에 5천 2백만 명으로 정점에 이를 전망이다.

(출처: 통계청, 2017년)

미래의 인구수는 어떻게 예측할 수 있을까? 시각 t에서의 인구수를 조사하여 미분가능한 함수를 유도한 후 이 함수의 도함수를 이용하면 앞으로의 인구수를 예측할 수 있다. 벨기에의 수학자 페르휠스트(Verhulst, P. F., 1804~1849)는 시각 t에서 인구수 $P(t)$는 $P(t)=\dfrac{bP_0}{P_0+ae^{-rt}}$ $(P_0=P(0),\ a,\ b,\ r$는 상수)과 같다는 로지스틱 모델을 제시하기도 하였다.

이와 같은 함수를 미분할 때 여러 가지 미분법이 이용된다.
이 단원에서는 도함수를 구하기 위하여 필요한
여러 가지 미분법을 알아본다.



2 여러 가지 미분법

준비학습

1 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=x^3$ (2) $y=\cos x$

(3) $y=\ln x$ (4) $y=e^x$

2 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=(x+5)(x^2-x+1)$ (2) $y=e^x \sin x$

1

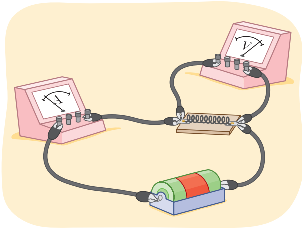
함수의 몫의 미분법

- 함수의 몫을 미분할 수 있다.

함수의 몫은 어떻게 미분할까

생각톡

전압이 1 V일 때, 어떤 도체의 저항 $x\,\Omega$과 전류 y A 사이에는 $y=\dfrac{1}{x}$의 관계가 있다고 한다.



탐구 x가 a에서 $a+\Delta x$로 변할 때, y의 평균변화율 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$를 Δx에 대한 식으로 나타내어 보자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $g(x)\neq 0$일 때, 함수 $y=\dfrac{1}{g(x)}$과 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 도함수를 구해 보자.

먼저 함수 $y=\dfrac{1}{g(x)}$에 대하여

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{1}{g(x)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{g(x+\Delta x)g(x)}}{\Delta x} \\ &= -\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\times\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\right\} \\ &= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \\ &= -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} \end{aligned}$$

함수 $g(x)$가 미분가능하면 연속이므로 $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)=g(x)$ 이다.

이다.

한편 함수 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$에서 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=f(x)\times\dfrac{1}{g(x)}$이므로 함수의 곱의 미분법에 의하여

$$\begin{aligned} y' &= f'(x)\times\frac{1}{g(x)}+f(x)\times\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)}{g(x)}-f(x)\times\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} \\ &= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \end{aligned}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수의 몫의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)(g(x)\neq 0)$가 미분가능할 때

❶ $y=\dfrac{1}{g(x)}$이면 $\quad y'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

❷ $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$이면 $\quad y'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

예제 1 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=\dfrac{1}{x+1}$ (2) $y=\dfrac{e^x}{x^2+3}$

풀이 (1) $y'=-\dfrac{(x+1)'}{(x+1)^2}=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

(2) $$y'=\dfrac{(e^x)'(x^2+3)-e^x(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}$$
$$=\dfrac{e^x(x^2+3)-e^x\times 2x}{(x^2+3)^2}$$
$$=\dfrac{e^x(x^2-2x+3)}{(x^2+3)^2}$$

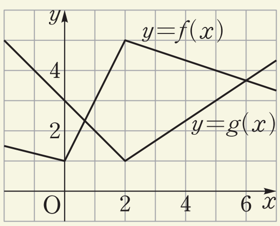
답 (1) $y'=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ (2) $y'=\dfrac{e^x(x^2-2x+3)}{(x^2+3)^2}$

문제 1 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=\dfrac{3}{2x+1}$ (2) $y=\dfrac{\ln x}{x}$ (3) $y=\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$

문제 해결하기

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다.



1 $u(x)=f(x)g(x)$일 때, $u'(1)$의 값을 구해 보자.

2 $v(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$일 때, $v'(5)$의 값을 구해 보자.

함수 $y=x^n$ (n은 정수)의 도함수는 무엇일까

n이 양의 정수일 때, 함수 $y=x^n$의 도함수는 $y'=nx^{n-1}$이다.

이제 n이 0 또는 음의 정수일 때, 함수 $y=x^n$의 도함수를 구해 보자.

n이 음의 정수일 때, $n=-m$으로 놓으면 m은 양의 정수이므로 함수의 몫의 미분법에 의하여

$$\begin{aligned} y' &= (x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} \\ &= -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

이다.

또 $n=0$일 때, $y=x^n$에서 $y=x^0=1$로 정의하면 $y'=0$이다.

즉 $n=0$일 때도 $y'=nx^{n-1}$이 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수 $y=x^n$ (n은 정수)의 도함수

n이 정수일 때, $y=x^n$이면

$$y'=nx^{n-1}$$

예제 2 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=x^{-2}$ (2) $y=\dfrac{3x^5-1}{x^3}$

풀이 (1) $y'=(x^{-2})'=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}=-\dfrac{2}{x^3}$

(2) $y'=\left(\dfrac{3x^5-1}{x^3}\right)'=(3x^2-x^{-3})'$

$=3\times 2x^{2-1}-(-3)x^{-3-1}=6x+3x^{-4}=6x+\dfrac{3}{x^4}$

답 (1) $y'=-\dfrac{2}{x^3}$ (2) $y'=6x+\dfrac{3}{x^4}$

문제 2 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=x^{-5}e^x$ (2) $y=\dfrac{x^3+x^2+1}{x^5}$

탄젠트함수의 도함수는 어떻게 구할까

함수의 몫의 미분법을 이용하여 함수 $y=\tan x$의 도함수를 구해 보자.

$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$이므로 함수의 몫의 미분법에 의하여

$$\begin{aligned} y'=(\tan x)'&=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\ &=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x \end{aligned}$$

이다.

따라서 다음이 성립한다.

$y=\tan x$이면 $\quad y'=\sec^2 x$

예제 3 $y=\sec x$**이면** $y'=\sec x\tan x$**임을 보이시오.**

증명 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$이므로 함수의 몫의 미분법에 의하여

$$\begin{aligned} y'=(\sec x)'&=\left(\frac{1}{\cos x}\right)' \\ &=-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ &=\frac{1}{\cos x}\times\frac{\sin x}{\cos x} \\ &=\sec x\tan x \end{aligned}$$

문제 3 **다음이 성립함을 보이시오.**

(1) $y=\csc x$이면 $\quad y'=-\csc x\cot x$

(2) $y=\cot x$이면 $\quad y'=-\csc^2 x$

문제 4 **다음 함수를 미분하시오.**

(1) $y=\sin x\tan x$ (2) $y=x\sec x$

2 합성함수의 미분법

- 합성함수를 미분할 수 있다.

합성함수는 어떻게 미분할까

생각톡

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$에서 $f(u)=u^2$, $g(x)=3x$이다.

탐구 ① $y=u^2$에서 $\dfrac{dy}{du}$를 구하고, $u=3x$에서 $\dfrac{du}{dx}$를 구해 보자.

탐구 ② 합성함수 $y=f(g(x))$를 구하고 $\dfrac{dy}{dx}$를 구해 보자.

탐구 ③ $\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$를 x에 대한 식으로 나타내고 $\dfrac{dy}{dx}$와 비교해 보자.

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수를 구해 보자.

$u=g(x)$에서 x의 증분 Δx에 대한 u의 증분을 Δu라 하고, $y=f(u)$에서 u의 증분 Δu에 대한 y의 증분을 Δy라고 하면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}\ (\Delta u\neq 0)$$

이다. 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능하므로

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{dy}{du},\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{du}{dx}$$

이다. 그런데 미분가능한 함수 $u=g(x)$는 연속이므로 $\Delta x\longrightarrow 0$이면 $\Delta u\longrightarrow 0$이다.

따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\&=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

이때 $\dfrac{dy}{du}=f'(u)=f'(g(x))$이고 $\dfrac{du}{dx}=g'(x)$이므로

$$y'=f'(g(x))g'(x)$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

합성함수의 미분법

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad y'=f'(g(x))g'(x)$$

예제 1 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=(2x+1)^2$

(2) $y=\sin(6x-2)$

풀이 (1) $u=2x+1$로 놓으면 $y=u^2$이므로

$$\frac{dy}{du}=2u,\ \frac{du}{dx}=2$$

$$\begin{aligned} y'&=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} \\ &=2u\times 2=4u \\ &=4(2x+1) \end{aligned}$$

(2) $u=6x-2$로 놓으면 $y=\sin u$이므로

$$\frac{dy}{du}=\cos u,\ \frac{du}{dx}=6$$

$$\begin{aligned} y'&=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} \\ &=\cos u\times 6=6\cos u \\ &=6\cos(6x-2) \end{aligned}$$

답 (1) $y'=4(2x+1)$ (2) $y'=6\cos(6x-2)$

문제 1 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=\dfrac{1}{(3x-2)^3}$

(2) $y=e^{3x}$

(3) $y=\ln(5x+2)$

(4) $y=\cos(3x^2+2x-1)$

문제 2 미분가능한 함수 $y=f(ax+b)$(a, b는 상수)에 대하여

$$y'=af'(ax+b)$$

임을 보이시오.

합성함수의 미분법을 이용하여 로그함수 $y=\ln|x|$의 도함수를 구해 보자.

(i) $x>0$일 때, $y=\ln|x|=\ln x$이므로

$$y'=\frac{1}{x}$$

(ii) $x<0$일 때, $y=\ln|x|=\ln(-x)$이므로 합성함수의 미분법에 의하여

$$y'=\frac{1}{-x}\times(-x)'=\frac{1}{-x}\times(-1)=\frac{1}{x}$$

(i), (ii)에서 $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$이다.

한편 $\log_a|x|=\dfrac{\ln|x|}{\ln a}$ $(a>0,\ a\neq1)$이므로 함수 $y=\log_a|x|$ $(a>0,\ a\neq1)$의 도함수는 $y'=(\log_a|x|)'=\left(\dfrac{\ln|x|}{\ln a}\right)'=\dfrac{(\ln|x|)'}{\ln a}=\dfrac{1}{x\ln a}$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

로그함수의 도함수

❶ $y=\ln|x|$이면 $y'=\dfrac{1}{x}$

❷ $y=\log_a|x|$ $(a>0,\ a\neq1)$이면 $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$

미분가능한 함수 $f(x)$ $(f(x)\neq0)$에 대하여 합성함수의 미분법을 이용하여 함수 $y=\ln|f(x)|$의 도함수를 구하면 다음과 같다.

$$y'=(\ln|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

예제 2 함수 $y=\ln|e^x-1|$을 미분하시오.

풀이 $y'=\dfrac{(e^x-1)'}{e^x-1}=\dfrac{e^x}{e^x-1}$

답 $y'=\dfrac{e^x}{e^x-1}$

문제 3 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=\ln|\sin x|$

(2) $y=\log_5|x^2-1|$

함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 도함수는 무엇일까

합성함수의 미분법을 이용하여 n이 실수일 때, 함수 $y=x^n\,(x>0)$의 도함수를 구해 보자.

$y=x^n$의 양변에 자연로그를 취하면 $\ln y=\ln x^n$에서 $\ln y=n\ln x$이다.

로그함수의 도함수와 합성함수의 미분법을 이용하여 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y}=\frac{n}{x}$$

이므로

$$y'=y\times\frac{n}{x}=x^n\times\frac{n}{x}=nx^{n-1}$$

이다.

n이 실수일 때, 함수 $y=x^n\,(x\le 0)$의 도함수가 존재하면 $y'=nx^{n-1}$이 성립함이 알려져 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수 $y=x^n$ (n은 실수, $x>0$)의 도함수

n이 실수일 때, $y=x^n\,(x>0)$이면

$$y'=nx^{n-1}$$

보기 $y=\sqrt{x}$이면 $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$이므로

$$y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

문제 4 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=x\sqrt{x}$

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

적용하기

지수함수 $y=a^x\,(a>0,\ a\ne 1)$의 도함수가 $y'=a^x\ln a$임을 배웠다. 이를 합성함수의 미분법을 이용하여 다음과 같은 순서로 확인해 보자.

❶ $y=a^x$일 때, $\ln y=x\ln a$임을 확인한다.

❷ $\ln y=x\ln a$의 양변을 x에 대하여 미분하여 $y'=a^x\ln a$임을 확인한다.

수학 역량 플러스

추론 문제 해결

다양한 미분법의 활용

어떤 함수의 도함수를 구할 때, 다양한 미분법을 이용할 수 있는데 로그함수의 도함수와 합성함수의 미분법을 적절히 이용하면 계산이 편리해지는 경우도 있다.

함수 $f(x)=x^x\ (x>0)$의 도함수 $f'(x)$를 다음 두 가지 방법으로 구해 보자.

방법 1 $x^x=e^{x\ln x}$임을 이용

$f(x)=e^{x\ln x}$이므로

$$\begin{aligned} f'(x)&=e^{x\ln x}\times(x\ln x)' \\ &=e^{x\ln x}\times\left(\ln x+x\times\frac{1}{x}\right) \\ &=e^{x\ln x}\times(\ln x+1) \\ &=x^x(\ln x+1) \end{aligned}$$

방법 2 자연로그 이용

함수 $f(x)=x^x\ (x>0)$에서 $f(x)>0$이므로 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=x\ln x$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$$

$$f'(x)=f(x)(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$$

활동 함수 $g(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\ (x>-1)$의 도함수 $g'(x)$를 위의 두 가지 방법으로 구해 보자.

3 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

- 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.

매개변수로 나타낸 함수는 어떻게 미분할까

생각 톡

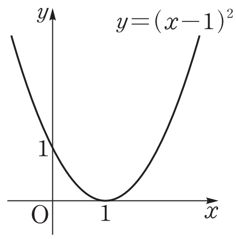
좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 x좌표, y좌표가 각각 다음과 같다.

$$x=t+1,\ y=t^2$$

탐구 ① t를 x에 대한 식으로 나타내어 보자.

탐구 ② y를 x에 대한 식으로 나타내어 보자.

위의 **생각 톡**의 **탐구 ②**에서 $y=(x-1)^2$을 얻는다. 따라서 $x=t+1,\ y=t^2$은 곡선 $y=(x-1)^2$을 나타냄을 알 수 있다.



이와 같이 x와 y 사이의 함수 관계가 변수 t를 매개로 하여

$$x=f(t),\ y=g(t) \qquad \cdots\cdots ①$$

의 꼴로 나타날 때 변수 t를 **매개변수**라 하고, ①을 매개변수로 나타낸 함수라고 한다.

두 함수 $x=f(t),\ y=g(t)$가 t에 대하여 미분가능하고 $f'(t)\neq0$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$를 구해 보자.

매개변수 t의 증분 $\varDelta t$에 대한 x의 증분을 $\varDelta x$, y의 증분을 $\varDelta y$라고 하면

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{\dfrac{\varDelta y}{\varDelta t}}{\dfrac{\varDelta x}{\varDelta t}}$$

이다. 그런데 함수 $x=f(t)$는 미분가능하고 $f'(t)\neq0$이므로 $\varDelta x\to0$일 때 $\varDelta t\to0$이다. 따라서

함수 $x=f(t)$가 미분가능하고 $f'(t)\neq0$일 때, 역함수가 존재하며 역함수는 연속임이 알려져 있다. 따라서 $\varDelta x\to0$일 때 $\varDelta t\to0$이다.

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\varDelta x\to0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta t\to0}\frac{\dfrac{\varDelta y}{\varDelta t}}{\dfrac{\varDelta x}{\varDelta t}}$$

$$=\frac{\displaystyle\lim_{\varDelta t\to0}\frac{\varDelta y}{\varDelta t}}{\displaystyle\lim_{\varDelta t\to0}\frac{\varDelta x}{\varDelta t}}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

매개변수로 나타낸 함수의 미분법

두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t에 대하여 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$일 때,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

예제 1 **매개변수로 나타낸 함수 $x=3t+1$, $y=t^3$에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하시오.**

풀이 $\frac{dx}{dt}=3$, $\frac{dy}{dt}=3t^2$이므로 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2}{3}=t^2$

답 $\frac{dy}{dx}=t^2$

문제 1 **다음 매개변수로 나타낸 함수에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하시오.**

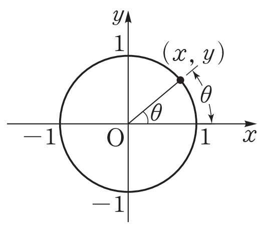
(1) $x=2t+1$, $y=3t-1$

(2) $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t\ (0<t<2\pi)$

이야기 수학

매개변수를 이용한 곡선의 다양한 표현

원 $x^2+y^2=1$에서 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 호의 길이는 θ이다. 이 θ를 매개변수로 하여 원의 방정식을 나타내면 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$이다.

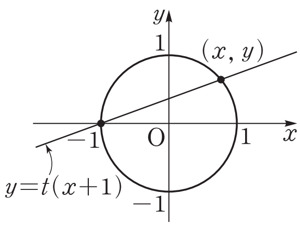


원의 방정식을 또 다른 매개변수를 사용하여 나타낼 수도 있다.

원 위의 점 $(-1, 0)$을 지나고 기울기가 t인 직선의 방정식은 $y=t(x+1)$이고, 이 직선의 방정식과 원의 방정식을 연립하여 풀면

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ y=\frac{2t}{1+t^2}\ (x\neq -1)$$

이다.



즉 이것은 점 $(-1, 0)$을 지나는 직선의 기울기 t를 매개변수로 하여 원의 방정식을 나타낸 것이다.

이와 같이 매개변수를 이용하면 하나의 곡선을 다양한 방법으로 표현할 수 있다.

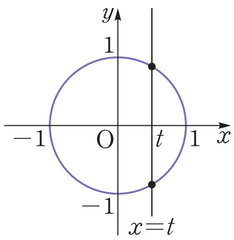
4 음함수의 미분법

- 음함수를 미분할 수 있다.

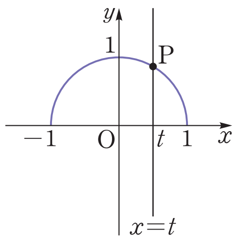
음함수 꼴로 표현된 함수는 어떻게 미분할까

생각톡

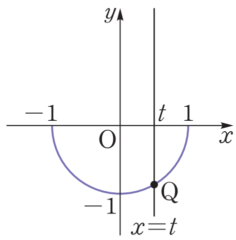
다음은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원과 반원이 직선 $x=t\,(-1<t<1)$와 만나는 점을 나타낸 것이다.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

탐구 ① [그림 1]에서 원이 함수의 그래프가 아닌 이유를 설명해 보자.

탐구 ② [그림 2], [그림 3]에서 두 점 P, Q의 좌표를 각각 t에 대한 식으로 나타내어 보자.

원의 방정식 $x^2+y^2=1$에서 y는 x의 함수가 아니다. 그러나 y의 값의 범위를 $y\geq0$ 또는 $y\leq0$으로 정하면

$$y=\sqrt{1-x^2} \text{ 또는 } y=-\sqrt{1-x^2}$$

이므로 y는 x의 함수가 된다.

일반적으로 방정식 $f(x,\ y)=0$이 주어졌을 때, x와 y의 값의 범위를 적당히 정하면 x의 함수 y를 얻을 수 있음이 알려져 있다.

이와 같이 x의 함수 y가 방정식 $f(x,\ y)=0$의 꼴로 주어졌을 때, x의 함수 y가 **음함수** 꼴로 주어졌다고 한다.

방정식 $x^2+y^2=1$에서 y를 x의 함수로 보고 $\dfrac{dy}{dx}$를 구해 보자.

$x^2+y^2=1$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+\frac{d}{dx}(y^2)=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.

이때 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}(y^2)=\left\{\frac{d}{dy}(y^2)\right\}\frac{dy}{dx}=2y\frac{dy}{dx}$$

이므로 ①에서

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\ (y\neq 0)$$

이다.

일반적으로 음함수 꼴로 주어진 함수는 다음과 같이 미분한다.

음함수의 미분법

x의 함수 y가 $f(x,\ y)=0$의 꼴로 주어졌을 때에는 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

예제 1 방정식 $xy-1=0$으로 주어진 x의 함수 y에 대하여 $\frac{dy}{dx}$를 구하시오.

풀이 $xy-1=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(xy)-\frac{d}{dx}(1)=\frac{d}{dx}(0)$$

$$\frac{d}{dx}(x)\times y+x\times\frac{d}{dx}(y)=0$$

$$y+x\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

답 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}\ (x\neq 0)$

문제 1 다음 방정식으로 주어진 x의 함수 y에 대하여 $\frac{dy}{dx}$를 구하시오.

(1) $x^2+2x+y^2=0$

(2) $y^2-4x=0$

(3) $x^2+\frac{y^2}{4}=1$

(4) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

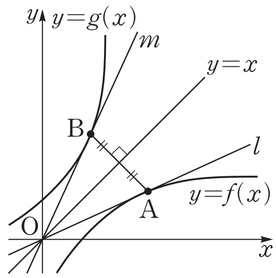
5 역함수의 미분법

● 역함수를 미분할 수 있다.

역함수는 어떻게 미분할까

생각 톡

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. 이때 두 그래프 위의 점 A, B에서의 접선 l, m이 모두 원점을 지난다고 하자.



탐구 ① 점 A의 좌표가 (a, b)일 때, 점 B의 좌표를 구해 보자.

탐구 ② 직선 l의 기울기와 직선 m의 기울기는 어떤 관계가 있는지 말해 보자.

탐구 ③ 함수 $g(x)$가 미분가능할 때, $f'(a)$와 $g'(b)$는 어떤 관계가 있는지 말해 보자.

미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능할 때, $g(x)$의 도함수를 구해 보자.

역함수의 성질에 의하여 $f(g(x))=x$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x)=1,\ \text{즉}\ g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}\ (f'(g(x))\neq 0)$$

이다. 이때 $f(a)=b$, 즉 $g(b)=a$이면 다음이 성립한다.

$$g'(b)=\frac{1}{f'(g(b))}=\frac{1}{f'(a)}\ (\text{단, } f'(a)\neq 0)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

$f'(g(k))=0$을 만족시키는 k에 대하여 $x=k$에서 역함수 $g(x)$가 미분가능하지 않음이 알려져 있다.

역함수의 미분법

미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능할 때

❶ $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$ (단, $f'(g(x))\neq 0$)

❷ $f(a)=b$, 즉 $g(b)=a$이면 $g'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$ (단, $f'(a)\neq 0$)

참고 $y=g(x)$에서 $x=f(y)$이므로 $\dfrac{dy}{dx}=g'(x)$, $\dfrac{dx}{dy}=f'(y)=f'(g(x))$이다.

따라서 ❶에서 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}\left(\dfrac{dx}{dy}\neq 0\right)$과 같이 쓸 수도 있다.

역함수의 미분법을 이용하면 역함수를 직접 구하지 않고도 역함수의 미분계수를 구할 수 있다.

예제 1 **함수 $f(x)=x^3+2x$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $g'(3)$의 값을 구하시오.**

풀이 $g(3)=a$라고 하면 $\quad f(a)=3$

즉 $a^3+2a=3$이므로

$$a^3+2a-3=0, \qquad (a-1)(a^2+a+3)=0$$

그런데 $a^2+a+3>0$이므로 $\quad a=1$

따라서 $g(3)=1$이고, $f'(x)=3x^2+2$에서 $f'(1)=5$이므로

$$g'(3)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

문제 1 **함수 $f(x)=x^3+8$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 다음 값을 구하시오.**

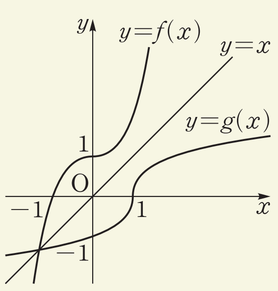
(1) $g'(0)$ (2) $g'(7)$

문제 2 **함수 $f(x)=\tan x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 다음 값을 구하시오.**

(1) $g'(1)$ (2) $g'(\sqrt{3})$

유추하기

함수 $f(x)=x^3+1$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 오른쪽은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프이다.



1 함수 $g(x)$를 구해 보자.

2 $f(0)$과 $f'(0)$의 값을 구해 보자.

3 $f'(g(a))=0$을 만족시키는 a에 대하여 $x=a$에서 함수 $g(x)$가 미분가능한지 알아보자.

6 이계도함수

● 이계도함수를 구할 수 있다.

이계도함수란 무엇일까

생각 톡

함수 $f(x)=x^3$에 대하여 다음을 알아보려고 한다.

탐구 ① 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구해 보자.

탐구 ② 함수 $f'(x)$의 도함수를 추측해 보자.

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능할 때, 함수 $f'(x)$의 도함수

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

를 $f(x)$의 **이계도함수**라 하고, 이것을 기호로

$$f''(x),\ y'',\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

와 같이 나타낸다.

보기 함수 $y=x^3+2x^2+3x$의 도함수는 $y'=3x^2+4x+3$이고, 이계도함수는 $y''=6x+4$이다.

문제 1 다음 함수의 이계도함수를 구하시오.

(1) $y=x^4-x^3$ (2) $y=(2x+1)^5$

예제 1 다음 함수의 이계도함수를 구하시오.

(1) $y=e^x$ (2) $y=\cos 2x$

풀이 (1) $y'=e^x$이므로 $y''=e^x$

(2) $y'=-\sin 2x\times 2=-2\sin 2x$이므로 $y''=-2\cos 2x\times 2=-4\cos 2x$

답 (1) $y''=e^x$ (2) $y''=-4\cos 2x$

문제 2 다음 함수의 이계도함수를 구하시오.

(1) $y=e^{3x}$ (2) $y=\ln x$

(3) $y=\sin 3x$ (4) $y=\tan x$

예제 2 다음 함수의 이계도함수를 구하시오.

(1) $y=\frac{1}{x+1}$ (2) $y=xe^x$

풀이 (1) $y'=-\frac{1}{(x+1)^2}$이므로

$$y''=-\frac{-2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{2}{(x+1)^3}$$

(2) $y'=e^x+xe^x=(1+x)e^x$이므로

$$y''=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$$

답 (1) $y''=\frac{2}{(x+1)^3}$ (2) $y''=(2+x)e^x$

문제 3 다음 함수의 이계도함수를 구하시오.

(1) $y=\frac{1}{x^2+2}$ (2) $y=e^x\sin x$

(3) $y=x\ln x$ (4) $y=\cos^2 x$

문제 4 a, b, c가 상수일 때, 함수 $y=ae^{-cx}+be^{cx}$에 대하여 다음이 성립함을 보이시오.

$$y''-c^2y=0$$

이야기 수학

곡선의 휘어진 정도를 알려 주는 이계도함수

휘어진 모니터는 시각적으로 편안함을 준다고 한다. 또 안경 대신 눈의 각막에 직접 붙여 사용하는 콘택트렌즈가 편안하게 느껴지도록 하려면 렌즈의 휘어진 정도를 고려해야 한다.

이계도함수를 이용하면 곡선이 어느 정도 휘었는지를 알 수 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 휘어진 정도를 계산할 때 $\frac{|f''(a)|}{[1+\{f'(a)\}^2]^{\frac{3}{2}}}$의 값을 이용하기 때문이다.

예를 들어 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 $\frac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$의 값은 $x=0$일 때 가장 크므로 곡선 $y=x^2$은 점 $(0, 0)$에서 가장 많이 휘었음을 알 수 있다.

(출처: Larson, R. 외, 『Essential Calculus: Early Transcendental Functions』)

중단원 마무리

• 정답 및 풀이 184쪽

❶ 함수의 몫의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ $(g(x)\neq 0)$가 미분가능할 때

(1) $y=\dfrac{1}{g(x)}$이면 $\quad y'=\boxed{\qquad}$

(2) $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$이면 $\quad y'=\boxed{\qquad\qquad}$

❷ 합성함수의 미분법

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad y'=f'(g(x))g'(x)$$

❸ 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t에 대하여 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$일 때,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

❹ 음함수의 미분법

x의 함수 y가 $f(x, y)=0$의 꼴로 주어졌을 때에는 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

❺ 역함수의 미분법

미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능할 때

(1) $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$ (단, $f'(g(x))\neq 0$)

(2) $f(a)=b$이면 $\quad g'(b)=\boxed{\quad}$ (단, $f'(a)\neq 0$)

❻ 이계도함수

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능할 때, 함수 $f'(x)$의 도함수를 $f(x)$의 $\boxed{\qquad}$라 하고, 이것을 기호로

$f''(x)$, y'', $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$와 같이 나타낸다.

기본 문제

1 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ (2) $y=\dfrac{\tan x}{x}$

(3) $y=\ln(2x^2+x-1)$ (4) $y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$

2 매개변수로 나타낸 함수 $x=2t-1$, $y=t^3+3$에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

3 방정식 $x^2-xy+y^2=1$로 주어진 x의 함수 y에 대하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

4 함수 $f(x)=x^3-2$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $g'(-1)$의 값을 구하시오.

5 다음 함수의 이계도함수를 구하시오.

(1) $y=x^3+x^2+1$ (2) $y=\ln 5x$

표준 문제

6 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(3)=2$, $f'(3)=-2$를 만족시킬 때, 함수 $g(x)=\dfrac{x^2+1}{f(x)}$에 대하여 $g'(3)$의 값을 구하시오.

문제 해결

7 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(2x-1)=(x^2+1)^2$을 만족시킬 때, $f'(3)$의 값을 구하시오.

8 두 함수 $f(x)=\cos 2x$, $g(x)=e^x$에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{g(f(x))-\sqrt{e}}{x-\frac{\pi}{6}}$의 값을 구하시오.

9 매개변수 t로 나타낸 곡선 $x=\dfrac{1-3t}{t^2+1}$, $y=\dfrac{2t}{t^2+1}$에 대하여 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{dy}{dx}$의 값을 구하시오.

10 곡선 $x^3-y^3-axy+b=0$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값이 -3일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

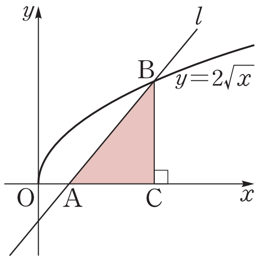
• 정답 및 풀이 185쪽

서술형 **11** 함수 $f(x)=\ln(e^x-1)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 양수 a에 대하여 $\frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{g'(a)}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

12 함수 $f(x)=(x^2+a)e^x$이 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)\geq0$을 만족시킬 때, 실수 a의 최솟값을 구하시오.

발전 문제

문제 해결 **13** 오른쪽 그림과 같이 점 A$(1,\ 0)$을 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 곡선 $y=2\sqrt{x}$와 만나는 점을 B, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라고 하자. 점 C의 x좌표가 t일 때의 삼각형 ABC의 넓이를 $f(t)$라고 할 때, $f'(4)$의 값을 구하시오.



서술형 **14** 함수 $f(x)=x^{\ln x}\,(x>0)$에 대하여 $f'(e)$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

15 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 1이다. 함수 $f(2x)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,\ a)$에서의 접선의 기울기는 b이다. 이때 a, b의 값을 구하시오.