II 미분법

1 여러 가지 함수의 미분
2 여러 가지 미분법
3 도함수의 활용

베르누이
(Bernoulli, John, 1667~1748)
함숫값이 최대 또는 최소가 되는 함수를 구하는 방법인 변분법의 발전에 기여하였다.

라그랑주
(Lagrange, J. L., 1736~1813)
미분과 적분을 엄밀화하였고, 이계도함수의 기호 f''을 처음 사용하였다.

(출처: 허민, 『수학자의 뒷모습 Ⅱ』)

학습목표

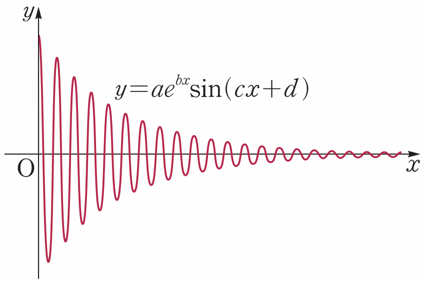
- **지수함수, 로그함수, 삼각함수의 극한**을 구하고, **미분**할 수 있다.
- **삼각함수의 덧셈정리**를 이해한다.
- **함수의 몫, 합성함수, 매개변수로 나타낸 함수, 음함수, 역함수를 미분**할 수 있다.
- **이계도함수**를 구할 수 있다.
- **도함수를 활용**하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

변화를 예측하는 도구

미분은 운동과 변화를 설명하는 수학의 한 분야이다. 힘이 작용하여 속도와 가속도가 생기는 물체의 움직임, 화학 물질의 반응, 개체 수의 변화 등과 같은 다양한 변화를 예측하고 설명하는 데에 응용되는 수학이 바로 미분이다. 또 대기의 흐름을 분석하여 날씨를 예측하거나 신경 세포들 사이의 미세한 자극의 교환을 이해하는 데도 미분이 이용된다.

17세기에 체계화된 미분은 자연 과학의 중요한 토대가 되었고, 과학 발전의 원동력이 되었다.

앞뒤로 움직이는 해적선 모양의 놀이 기구나 기타 줄의 진동은 마찰 등의 영향으로 진동의 폭이 점점 줄어들다가 결국은 멈추게 되는데 이와 같은 운동을 나타낼 때 $y=ae^{bx}\sin(cx+d)$의 꼴의 함수가 쓰인다고 한다.



이와 같이 복잡한 물리적 현상을 식으로 나타낼 때 $y=ax+b$, $y=e^x$, $y=\sin x$ 등과 같은 함수들을 사용하고, 이 함수들의 도함수를 이용하여 여러 가지 물리적 현상의 변화를 이해할 수 있다.

이 단원에서는 여러 가지 함수의 도함수를 알아본다.

1 여러 가지 함수의 미분

준비학습

1 다음 함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=2^x$ (2) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ (3) $y=\sin x$ (4) $y=\cos 2x$

2 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x-2}{2x^2+3}$

3 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=x^2$ (2) $y=-x^3-2x+3$

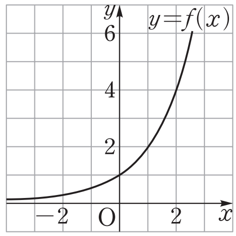
1 지수함수와 로그함수의 극한

- 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다.

지수함수의 극한은 어떻게 구할까

생각 톡

오른쪽 그림은 함수 $f(x)=2^x$의 그래프이다.



탐구 그래프를 이용하여 다음 극한을 추측해 보자.

(1) $\lim_{x\to0} f(x)$ (2) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (3) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

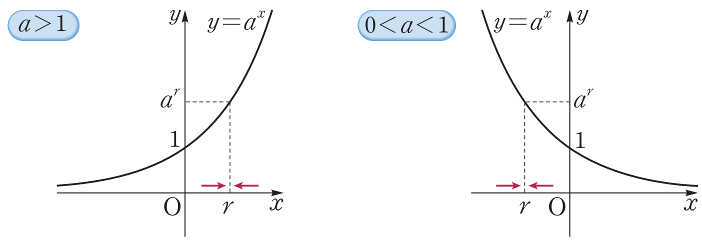
지수함수의 극한에 대하여 알아보자.

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프에서 실수 r에 대하여

$$\lim_{x\to r} a^x = a^r$$

임을 알 수 있다. 즉 지수함수 $y=a^x$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$\lim_{x\to r} f(x)=f(r)$
$\Longleftrightarrow$ 함수 $f(x)$가 $x=r$에서 연속이다.



또 $x\to\infty$ 또는 $x\to-\infty$일 때 지수함수 $y=a^x$의 극한은 다음과 같음을 알 수 있다.

❶ $a>1$일 때, $\lim_{x\to\infty} a^x=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x=0$

❷ $0<a<1$일 때, $\lim_{x\to\infty} a^x=0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x=\infty$

보기 $\lim_{x\to2} 3^x=9$, $\lim_{x\to\infty} 5^x=\infty$, $\lim_{x\to3}\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{8}{27}$, $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=\infty$

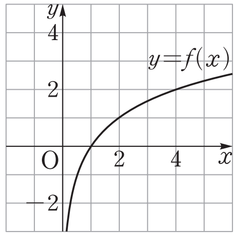
문제 1 다음 극한을 조사하시오.

(1) $\lim_{x\to4} 2^x$ (2) $\lim_{x\to-\infty} 7^x$ (3) $\lim_{x\to2}\left(\frac{3}{5}\right)^x$ (4) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x$

로그함수의 극한은 어떻게 구할까

생각톡

오른쪽 그림은 함수 $f(x)=\log_2 x$의 그래프이다.



탐구 그래프를 이용하여 다음 극한을 추측해 보자.

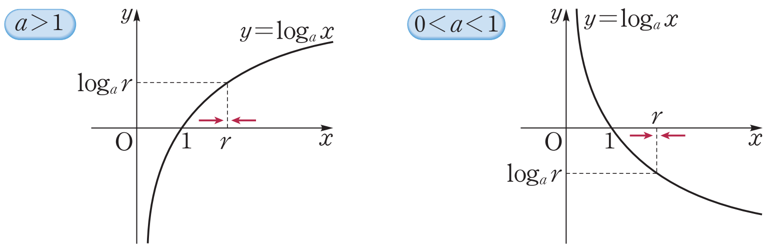
(1) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ (2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

로그함수의 극한에 대하여 알아보자.

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 그래프에서 양의 실수 r에 대하여

$$\lim_{x\to r}\log_a x=\log_a r$$

임을 알 수 있다. 즉 로그함수 $y=\log_a x$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.



또 $x\to 0+$ 또는 $x\to\infty$일 때 로그함수 $y=\log_a x$의 극한은 다음과 같음을 알 수 있다.

❶ $a>1$일 때, $\lim\limits_{x\to 0+}\log_a x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=\infty$

❷ $0<a<1$일 때, $\lim\limits_{x\to 0+}\log_a x=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=-\infty$

보기 $\lim\limits_{x\to 3}\log_3 x=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\log_4 x=\infty$, $\lim\limits_{x\to 2}\log_{\frac{1}{2}} x=-1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{3}} x=-\infty$

문제 2 다음 극한을 조사하시오.

(1) $\lim\limits_{x\to 0+}\log_3 x$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_5 x$

(3) $\lim\limits_{x\to 0+}\log_{\frac{1}{3}} x$ (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{4}} x$

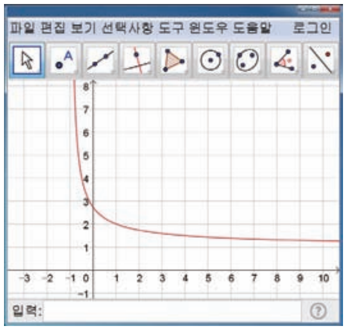
무리수 e란 무엇일까

생각 톡

오른쪽 그림은 컴퓨터 프로그램을 이용하여 함수

$$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}\ (x\neq 0)$$

의 그래프를 그린 것이다.



탐구 ① $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$의 값이 존재하는지 말해 보자.

탐구 ② 부등식 $n<\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}<n+1$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구해 보자.

극한값 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$에 대하여 알아보자.

위의 생각 톡에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$의 값은 어떤 일정한 값에 가까워지고 있음을 짐작할 수 있다.

실제로 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$은 일정한 값에 수렴함이 알려져 있는데, 그 값을

$$e$$

와 같이 나타낸다.

이때 e는 무리수이고, 그 값은

$$e=2.71828182845904\cdots$$

임이 알려져 있다.

오일러 (Euler, L., 1707~1783)
스위스의 수학자로 처음으로 수 2.71828⋯을 나타내는 데 문자 e를 사용하였고, e가 무리수임을 증명하였다.
(출처: 엘리 마오, 『오일러가 사랑한 수 e』)

이상을 정리하면 다음과 같다.

무리수 e

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$에서 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to 0+$일 때 $t\to\infty$이므로 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$$

예제 1 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$　　(2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$

풀이 (1) $2x=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 0$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{2}{t}}=\lim_{t\to 0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{2}=e^{2}$$

(2) $\frac{3}{x}=t$로 놓으면 $x \longrightarrow \infty$일 때 $t \longrightarrow 0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to 0+}(1+t)^{\frac{3}{t}}=\lim_{t\to 0+}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{3}=e^{3}$$

답 (1) e^2 (2) e^3

문제 3 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{5}{x}}$　　(2) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$　　(4) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{-x}$

자연로그란 무엇일까

밑이 e인 로그 $\log_e x$를 x의 **자연로그**라 하고, 이것을 간단히

$$\ln x$$

와 같이 나타낸다.

보기 $\ln e=\log_e e=1$, $\ln\frac{1}{e}=\log_e\frac{1}{e}=-1$

문제 4 다음 값을 구하시오.

(1) $\ln e^3$　　(2) $\ln\sqrt{e}$

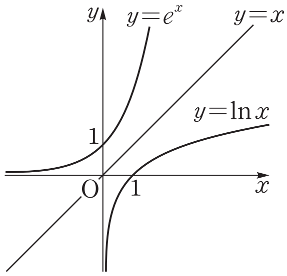
무리수 e를 밑으로 하는 지수함수를

$$y=e^x$$

으로 나타낸다.

$y=\ln x \Longleftrightarrow x=e^y$

로그함수 $y=\ln x$의 역함수는 지수함수 $y=e^x$이고, 두 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



함수 $f(x)$에서 실수 r에 대하여 $\lim_{x \to r} f(x)$가 존재하고, $f(x)>0$, $\lim_{x \to r} f(x)>0$이면 1이 아닌 양수 a에 대하여 다음이 성립함이 알려져 있다.

$$\lim_{x \to r}\{\log_a f(x)\}=\log_a\left\{\lim_{x \to r} f(x)\right\}$$

이를 이용하여 극한값을 구해 보자.

예제 2 **다음 극한값을 구하시오.**

(1) $\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ (2) $\lim_{x \to 0}\frac{e^x-1}{x}$

풀이 (1) $\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x \to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x \to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$=\ln\left\{\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}=\ln e=1$$

(2) $e^x-1=t$로 놓으면 $x=\ln(1+t)$이고 $x \longrightarrow 0$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x \to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t \to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t \to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}$$

$$=\frac{1}{\ln\left\{\lim_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}}=\frac{1}{\ln e}=1$$

답 (1) 1 (2) 1

문제 5 **다음 극한값을 구하시오.**

(1) $\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}$ (2) $\lim_{x \to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$

문제 6 $a>0$, $a\neq1$**일 때,** $\lim_{x \to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$**임을 보이시오.**

설명하기

영국의 수학자 뉴턴(Newton, I., 1642~1727)은 시간에 따른 물체의 온도 변화는 그 물체의 온도와 주위의 온도 차에 비례한다는 것을 발견하였는데, 이것을 뉴턴의 냉각 법칙이라고 한다.

즉 물체의 처음 온도가 T_0이고, 주위의 온도가 T_1로 일정할 때, t시간 후 물체의 온도를 $T(t)$라고 하면 다음이 성립한다고 한다.

$$T(t)=T_1+(T_0-T_1)e^{-at} \text{ (단, } a\text{는 양의 상수)}$$

온도가 일정한 방 안에 뜨거운 물을 놓아두면 물의 온도는 방 안의 온도에 가까워짐을 설명해 보자.

(출처: Pickover, C. A., 『Archimedes to Hawking: Laws of Science and the Great Minds Behind Them』)

수학 역량 플러스

창의·융합 문제 해결

재미있는 수 e

무리수 e는 실생활에서 다양하게 이용되는 매우 중요한 수이다.

스위스의 수학자 베르누이(Bernoulli, J., 1654~1705)는 다음과 같은 문제를 생각하다 최초로 극한값 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$이 존재함을 보였다고 한다.

연이율이 100 %인 예금 상품에 a원을 예금한다고 하자.
1년에 1번 100 %의 이자가 붙는다면 1년 후의 원리합계는 $a(1+1)^1=2a$(원)이다.
1년을 2번으로 나누어 50 %의 이자가 복리로 붙는다면 1년 후의 원리합계는 $a\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$원,
1년을 4번으로 나누어 25 %의 이자가 복리로 붙는다면 1년 후의 원리합계는 $a\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$원,
1년을 n번으로 나누어 $\left(\frac{1}{n}\times 100\right)$ %의 이자가 복리로 붙는다면 1년 후의 원리합계는 $a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$원이다.
만약 이자가 붙는 기간이 한없이 짧아지면, 즉 $n \longrightarrow \infty$이면 1년 후의 원리합계는 얼마일까?

(출처: 데이비드 애치슨 저·황선욱 역, 『수학 세상 가볍게 읽기』)

위에서 $\lim_{n\to\infty} a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=ae$이므로 1년 후의 원리합계는 원금 a원의 약 2.7배임을 알 수 있다.

활동 무리수 e를 이용하여 다음 물음의 답을 구해 보자.

서로 다른 n개의 자물쇠와 각 자물쇠마다 하나씩 맞는 n개의 열쇠가 있다.
자물쇠와 열쇠를 무작위로 한 쌍씩 짝 지은 후 열쇠로 자물쇠를 열어 본다고 하자. 이때 한 쌍의 자물쇠와 열쇠가 서로 맞지 않을 확률은 $\frac{n-1}{n}$이므로 짝 지어진 모든 자물쇠와 열쇠가 서로 맞지 않을 확률은 $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$이다.
만약 자물쇠와 열쇠가 무한히 많으면, 즉 $n \longrightarrow \infty$이면 이 확률은 얼마일까?

2 지수함수와 로그함수의 미분

- 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.

지수함수의 도함수는 어떻게 구할까

생각톡

함수 $y=e^x$에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$이 성립한다.

탐구 위의 식을 이용하여 함수 $y=e^x$의 $x=1$에서의 미분계수를 구해 보자.

지수함수의 도함수를 구해 보자.

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 도함수는
$f'(x)$
$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

지수함수 $y=e^x$에서 도함수의 정의에 의하여

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x$$

이다. 즉 $y=e^x$이면 $y'=e^x$이다.

$a>0$, $a\neq 1$일 때,
$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

또 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$에서

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\ln a$$

이다. 즉 $y=a^x$이면 $y'=a^x\ln a$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

지수함수의 도함수

1. $y=e^x$이면 $y'=e^x$
2. $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$이면 $y'=a^x\ln a$

예제 1 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=e^{x+1}$ (2) $y=3^x(x+1)$

풀이 (1) $y'=(e^{x+1})'=(e\times e^x)'=e(e^x)'=e\times e^x=e^{x+1}$

(2) $y'=(3^x)'(x+1)+3^x(x+1)'$
$=3^x\ln 3\times(x+1)+3^x=3^x(x\ln 3+\ln 3+1)$

답 (1) $y'=e^{x+1}$ (2) $y'=3^x(x\ln 3+\ln 3+1)$

문제 1 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=5^{x-1}$ (2) $y=x^2e^x$

로그함수의 도함수는 어떻게 구할까

로그함수의 도함수를 구해 보자.

로그함수 $y=\ln x$에서 도함수의 정의에 의하여

$$y'=\lim_{h\to0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\ln\frac{x+h}{x}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{x}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\right\}=\frac{1}{x}\lim_{h\to0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

이다. 이때 $\frac{h}{x}=t$로 놓으면 $h\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\frac{1}{x}\lim_{h\to0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\lim_{t\to0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$$

이다. 즉 $y=\ln x$이면 $y'=\frac{1}{x}$이다.

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$, $N>0$일 때, $\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$

또 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$에서 $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$이므로

$$y'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}(\ln x)'=\frac{1}{\ln a}\times\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln a}$$

이다. 즉 $y=\log_a x$이면 $y'=\frac{1}{x\ln a}$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

로그함수의 도함수

❶ $y=\ln x$이면 $y'=\frac{1}{x}$

❷ $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$이면 $y'=\frac{1}{x\ln a}$

보기

❶ $\ln 3x=\ln 3+\ln x$이므로 $(\ln 3x)'=(\ln 3)'+(\ln x)'=\frac{1}{x}$

❷ $\log_2\frac{1}{x}=-\log_2 x$이므로 $\left(\log_2\frac{1}{x}\right)'=-(\log_2 x)'=-\frac{1}{x\ln 2}$

문제 2 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=\ln \dfrac{2}{x}$ (2) $y=3\log_5 5x$

예제 2 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=x\ln x$ (2) $y=(2x+1)\log_3 x$

풀이 (1) $y'=(x)'\ln x+x(\ln x)'$

$=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}$

$=\ln x+1$

(2) $y'=(2x+1)'\log_3 x+(2x+1)(\log_3 x)'$

$=2\log_3 x+\dfrac{2x+1}{x\ln 3}$

답 (1) $y'=\ln x+1$ (2) $y'=2\log_3 x+\dfrac{2x+1}{x\ln 3}$

문제 3 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=x^3\ln 2x$ (2) $y=(e^x+1)\log_2 x$

설명하기 다음은 평균값 정리이다.

> 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때,
>
> $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$
>
> 인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

평균값 정리를 이용하여 $x>0$일 때, 다음 부등식이 성립함을 설명해 보자.

$$\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$$

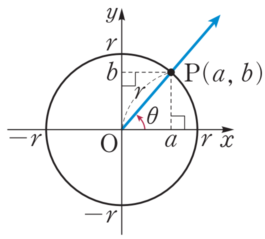
3 삼각함수의 덧셈정리

● 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

csc θ, sec θ, cot θ란 무엇일까

생각 톡

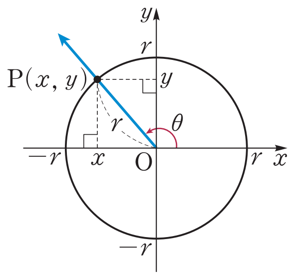
오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 교점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라고 하자.



탐구 ① $\dfrac{r}{b}$를 $\sin\theta$로 나타내어 보자.

탐구 ② $\dfrac{r}{a}$를 $\cos\theta$로 나타내어 보자.

오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면



$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}(x\neq0)$$

이고, 이들 함수를 차례대로 θ에 대한 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수라고 한다.

한편

$$\frac{r}{y}(y\neq0),\ \frac{r}{x}(x\neq0),\ \frac{x}{y}(y\neq0)$$

의 값도 r의 값에 관계없이 θ의 값에 따라 각각 하나로 정해진다.

따라서

$$\theta\longrightarrow\frac{r}{y}\ (y\neq0),\ \theta\longrightarrow\frac{r}{x}\ (x\neq0),\ \theta\longrightarrow\frac{x}{y}\ (y\neq0)$$

와 같은 대응도 모두 θ에 대한 함수이다.

이들 함수를 차례대로 θ에 대한 코시컨트함수, 시컨트함수, 코탄젠트함수라 하고, 이것을 기호로 각각

$$\mathbf{csc}\,\theta,\ \mathbf{sec}\,\theta,\ \mathbf{cot}\,\theta$$

와 같이 나타낸다.

csc, sec, cot는 각각 cosecant, secant, cotangent의 약자이다.

즉 $\csc\theta=\dfrac{r}{y}(y\neq0)$, $\sec\theta=\dfrac{r}{x}(x\neq0)$, $\cot\theta=\dfrac{x}{y}(y\neq0)$이다.

이와 같은 함수들도 θ에 대한 삼각함수라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

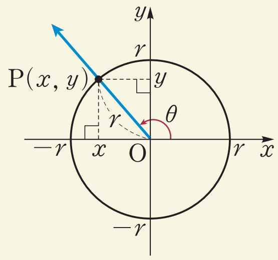
삼각함수

오른쪽 그림에서

$$\csc\theta=\frac{r}{y}\ (y\neq 0)$$

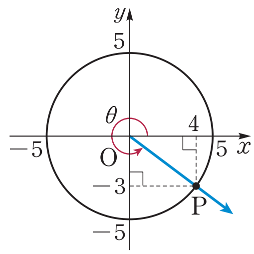
$$\sec\theta=\frac{r}{x}\ (x\neq 0)$$

$$\cot\theta=\frac{x}{y}\ (y\neq 0)$$



보기 각 θ를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하는 원의 교점이 $\mathrm{P}(4,\ -3)$일 때, $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$이므로

$$\csc\theta=-\frac{5}{3},\ \sec\theta=\frac{5}{4},\ \cot\theta=-\frac{4}{3}$$



문제 1 각 θ를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하는 원의 교점이 $\mathrm{P}(-5,\ 12)$일 때, $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$의 값을 구하시오.

삼각함수의 정의에서 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta},\ \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},\ \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

보기
❶ $\csc\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$

❷ $\sec 60°=\frac{1}{\cos 60°}=2$

❸ $\cot\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}$

문제 2 다음 삼각함수의 값을 구하시오.

(1) $\csc\frac{7}{6}\pi$　　(2) $\sec\left(-\frac{9}{4}\pi\right)$　　(3) $\cot 300°$

삼각함수 사이에

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

의 관계가 성립한다. 이것을 이용하여 또 다른 삼각함수 사이의 관계를 알아보자.

①의 양변을 $\cos^2\theta$ $(\cos\theta\neq 0)$로 나누면

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

이고 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$, $\dfrac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$이므로

$$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$$

이다.

스스로 개념탐구 위와 같은 방법으로 $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$가 성립함을 확인해 보자.

이상을 정리하면 다음과 같다.

삼각함수 사이의 관계

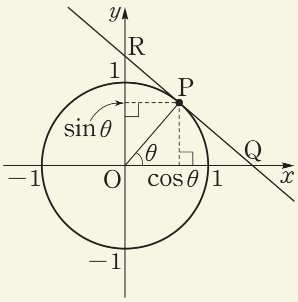
❶ $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$

❷ $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

문제 3 $\tan\theta=2$일 때, $\csc^2\theta+\sec^2\theta$의 값을 구하시오.

표현하기

오른쪽 그림과 같이 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, y축과 만나는 점을 R라고 하자. 다음 선분의 길이를 θ에 대한 삼각함수로 나타내어 보자. (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



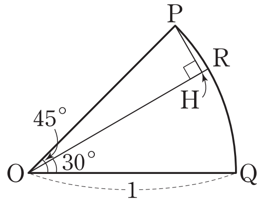
(1) $\overline{\mathrm{OQ}}$　　(2) $\overline{\mathrm{OR}}$

(3) $\overline{\mathrm{PQ}}$　　(4) $\overline{\mathrm{PR}}$

삼각함수의 덧셈정리란 무엇일까

생각톡

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 부채꼴 POQ에서 $\angle\mathrm{POQ}=45^\circ$, $\angle\mathrm{ROQ}=30^\circ$이다. 점 P에서 선분 OR에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



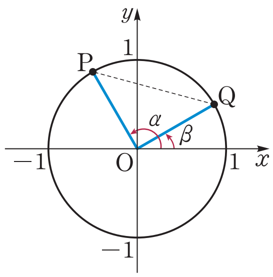
탐구 다음에서 두 선분 PH, OH의 길이를 나타내는 값을 각각 찾아보자.

$$\sin 15^\circ,\quad \cos 15^\circ,\quad \tan 15^\circ$$

두 각 α, β를 사용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$의 삼각함수를 나타내는 방법을 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 좌표평면에서 두 각 α, β를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 각각 P, Q라고 하면

$$\mathrm{P}(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\ \mathrm{Q}(\cos\beta,\ \sin\beta)$$



원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 단위원이라고 한다.

이다. 이때 두 점 사이의 거리를 구하는 공식에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}^2&=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2\\&=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta\\&\quad+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta\\&=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

이고, 삼각형 POQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}^2&=\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{OQ}}^2-2\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\cos(\alpha-\beta)\\&=1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos(\alpha-\beta)\\&=2-2\cos(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

코사인법칙
삼각형 ABC에서
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

이다. 따라서

$$2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$$

이다. 즉 다음이 성립한다.

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad\cdots\cdots ①$$

①에서 β 대신 $-\beta$를 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$
$\cos(-\theta)=\cos\theta$

이다. 즉 다음이 성립한다.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad\cdots\cdots ②$$

한편 ②에서 α 대신 $\frac{\pi}{2}-\alpha$를 대입하여 정리하면

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

이다. 즉 다음이 성립한다.

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ③$$

스스로 개념탐구

③에서 β 대신 $-\beta$를 대입하여 다음이 성립함을 확인해 보자.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ④$$

한편 ②, ④로부터

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

이다. 이 식에서 분자, 분모를 $\cos\alpha\cos\beta\,(\cos\alpha\cos\beta\neq0)$로 나누어 정리하면

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

이다. 즉 다음이 성립한다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \quad \cdots\cdots ⑤$$

스스로 개념탐구

⑤에서 β 대신 $-\beta$를 대입하여 다음이 성립함을 확인해 보자.

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

이상을 정리하면 다음과 같고, 이것을 삼각함수의 **덧셈정리**라고 한다.

삼각함수의 덧셈정리

❶ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

❷ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

❸ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

보기 ❶ $\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

❷ $\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

❸ $\tan 105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)=\dfrac{\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ\tan 45^\circ}$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times 1}=-2-\sqrt{3}$$

문제 4 **다음 삼각함수의 값을 구하시오.**

(1) $\sin\frac{\pi}{12}$ (2) $\cos\frac{7}{12}\pi$ (3) $\tan\frac{5}{12}\pi$

예제 1 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$**이고** $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{1}{2}$**일 때,** $\sin(\alpha+\beta)$**의 값을 구하시오.**

풀이 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$일 때 $\cos\alpha>0$이므로

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$0<\beta<\frac{\pi}{2}$일 때 $\sin\beta>0$이므로

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$$

답 $\dfrac{1+2\sqrt{6}}{6}$

문제 5 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$**이고** $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=-\frac{12}{13}$**일 때, 다음 삼각함수의 값을 구하시오.**

(1) $\sin(\alpha-\beta)$ (2) $\cos(\alpha+\beta)$ (3) $\tan(\alpha+\beta)$

예제 2 좌표평면에서 두 직선 $y=-3x+2$와 $y=2x$가 이루는 예각의 크기를 구하시오.

풀이 두 직선 $y=-3x+2$와 $y=2x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라고 하면

$$\tan\alpha=-3,\ \tan\beta=2$$

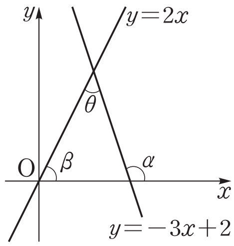
두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면

$$\theta=\alpha-\beta$$

이므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$$
$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{-3-2}{1+(-3)\times2}=1$$

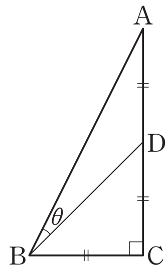
따라서 구하는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$이다.



답 $\frac{\pi}{4}$

문제 6 좌표평면에서 두 직선 $x+2y+2=0$과 $3x+y=0$이 이루는 예각의 크기를 구하시오.

문제 7 오른쪽 그림과 같이 $\angle C=90°$이고 $\overline{AC}=2\overline{BC}$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 D, $\angle ABD$의 크기를 θ라고 할 때, $\tan\theta$의 값을 구하시오.

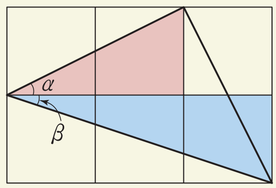


증명하기

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$이고 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$, $\tan\beta=\frac{1}{3}$일 때, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$임을 다음 두 가지 방법으로 확인해 보자.

방법 1 한 변의 길이가 1인 정사각형 6개를 겹치지 않게 붙여 놓은 오른쪽 그림 이용

방법 2 삼각함수의 덧셈정리 이용



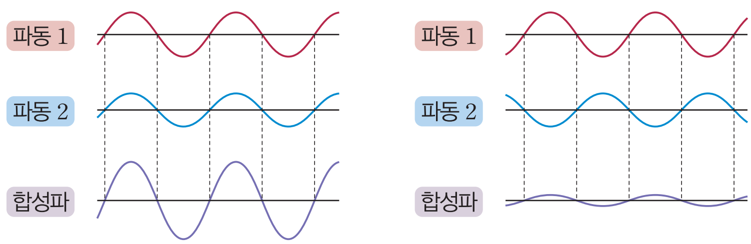
삼각함수의 덧셈정리의 활용

문제 해결 창의·융합

귓가에 댄 소라 껍데기에서 소리가 나는 것은 주위의 여러 가지 소리 중에서 소라 껍데기의 고유 진동수와 진동수가 같은 소리의 파동이 합성되어 더 크게 울려 나오기 때문이다.

한편 항공기의 엔진에서 엄청난 소음이 발생하지만 기내가 조용한 것은 엔진의 소음과 반대되는 음파를 생성하여 파동을 합성시켜 소음을 제거하기 때문이다.

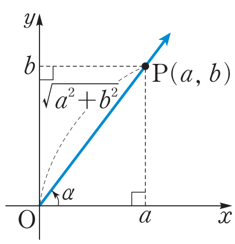
이와 같이 두 파동이 만나면 파동이 합성되어 마치 하나의 파동처럼 보이는데 이 하나의 파동을 합성파라고 한다.



[소리가 커지는 합성파] [소리가 작아지는 합성파]

합성파는 각 파동을 나타내는 삼각함수의 합으로 나타낼 수 있다. 예를 들어 두 파동 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 합성파는 $y=\sin x+\cos x$이고, 이것은 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$와 같다.

이제 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $a\sin x+b\cos x\,(a\neq 0,\ b\neq 0)$를 $r\sin(x+\alpha)\,(r>0)$의 꼴로 나타내어 보자.



좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여 동경 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α라고 하면 $\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$이므로

$$\begin{aligned} a\sin x+b\cos x &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin x+\sin\alpha\cos x) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha) \end{aligned}$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

(출처: Julian, L. D., 『Mathematics of Wave Propagation』)

활동 다음 식을 $r\sin(x+\alpha)$의 꼴로 나타내고, 최댓값과 최솟값을 구해 보자. (단, $r>0$, $0<\alpha<2\pi$)

(1) $\sin x+\sqrt{3}\cos x$ (2) $3\sin x+4\cos x$

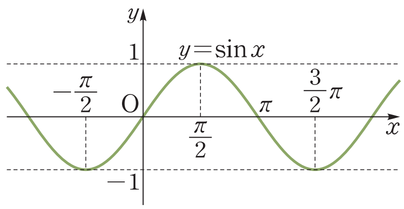
4 삼각함수의 극한

- 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

삼각함수의 극한은 어떻게 구할까

생각 톡

오른쪽 그림은 함수 $y=\sin x$의 그래프이다.



탐구 그래프를 이용하여 다음 극한값을 추측해 보자.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x$　　(2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin x$

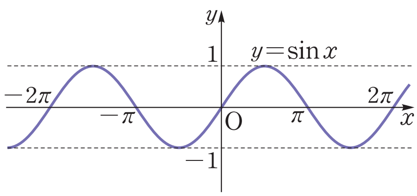
삼각함수의 극한에 대하여 알아보자.

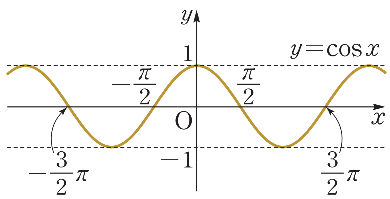
삼각함수 $y=\sin x$와 $y=\cos x$의 그래프에서 실수 a에 대하여

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a, \quad \lim_{x \to a} \cos x = \cos a$$

임을 알 수 있다. 즉 삼각함수 $y=\sin x$와 $y=\cos x$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

> $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$
> $\Longleftrightarrow$ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다.





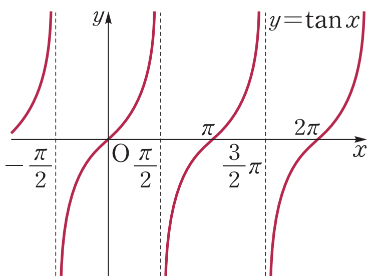
또 삼각함수 $y=\tan x$의 그래프에서

$a \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 a에 대하여

$$\lim_{x \to a} \tan x = \tan a$$

임을 알 수 있다. 즉 삼각함수 $y=\tan x$는

$x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수의 집합에서 연속이다.



문제 1 다음 극한값을 구하시오.

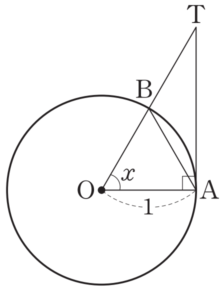
(1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \sin 3x$　　(2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \cos 4x$　　(3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \tan 2x$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$의 값은 어떻게 구할까

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$의 값을 구해 보자.

(i) $0 < x < \frac{\pi}{2}$일 때,

오른쪽 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원에서 $\angle$AOB의 크기를 x라 하고, 점 A에서의 접선과 선분 OB의 연장선의 교점을 T라고 하자.



삼각형 AOB, 부채꼴 AOB, 삼각형 AOT의 넓이 사이에는

두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인각의 크기가 θ인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$이다.
또 반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta$이다.

$$\triangle\text{AOB} < (\text{부채꼴 AOB의 넓이}) < \triangle\text{AOT}$$

인 관계가 성립하고, $\overline{\text{TA}} = \tan x$이므로

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x, \text{ 즉 } \sin x < x < \tan x$$

이다. $\sin x > 0$이므로 각 변을 $\sin x$로 나누면

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \text{ 즉 } 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \alpha$이면
$\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$

이다. 그런데 $\lim_{x \to 0+} \cos x = 1$이므로

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

이다.

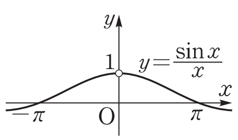
(ii) $-\frac{\pi}{2} < x < 0$일 때,

$x = -t$로 놓으면 $x \to 0-$일 때 $t \to 0+$이므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \to 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \to 0+} \frac{\sin(-t)}{-t}$$
$$= \lim_{t \to 0+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.



함수 $\frac{\sin x}{x}$의 극한

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

예제 1 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$ (2) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$

풀이 (1) $3x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to0}\left(3\times\frac{\sin 3x}{3x}\right)$$
$$=3\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=3\times1=3$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}$$
$$=1\times1=1$$

답 (1) 3 (2) 1

문제 2 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{5x}$ (2) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}$

예제 2 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ (2) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

풀이 (1) $x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$일 때 $t\longrightarrow0$이고 $\cos x=\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin t$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=-\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=-1$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}$$
$$=1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

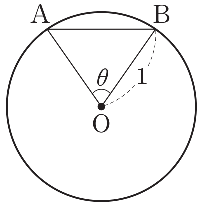
답 (1) -1 (2) $\frac{1}{2}$

문제 3 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$

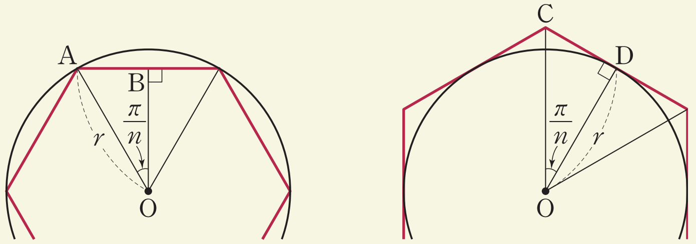
(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$

문제 4 오른쪽 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원에서 $\angle\mathrm{AOB}=\theta$라고 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$의 값을 구하시오.



증명 하기

다음 그림은 반지름의 길이가 r인 원에 내접하는 정n각형과 외접하는 정n각형을 그린 것이다.



내접하는 정n각형의 둘레의 길이를 $f(n)$, 외접하는 정n각형의 둘레의 길이를 $g(n)$이라고 하면

$$f(n)=n\times 2\overline{\mathrm{AB}}=n\times 2\times r\sin\frac{\pi}{n}=2rn\sin\frac{\pi}{n},$$

$$g(n)=n\times 2\overline{\mathrm{CD}}=n\times 2\times r\tan\frac{\pi}{n}=2rn\tan\frac{\pi}{n}$$

이다. 이때 반지름의 길이가 r인 원의 둘레의 길이를 l이라고 하면

$$f(n)<l<g(n)$$

이 성립한다.

1 극한값 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(n)$과 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}g(n)$을 구하고 이를 이용하여 반지름의 길이가 r인 원의 둘레의 길이가 $2\pi r$임을 확인해 보자.

2 **1**과 같은 방법으로 반지름의 길이가 r인 원의 넓이가 πr^2임을 확인해 보자.

5 사인함수와 코사인함수의 미분

- 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.

사인함수와 코사인함수의 도함수는 어떻게 구할까

생각 톡

함수 $y=\sin x$에 대하여 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$이 성립한다.

탐구 위의 식을 이용하여 함수 $y=\sin x$의 $x=0$에서의 미분계수를 구해 보자.

삼각함수 $y=\sin x$와 $y=\cos x$의 도함수를 구해 보자.

함수 $y=\sin x$에서 도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}
y'&=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{\cos x\sin h}{h}\\
&=\sin x\lim_{h\to0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}\\
&=\cos x
\end{aligned}$$

$\lim_{h\to0}\frac{\cos h-1}{h}=0$

$\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}=1$

이다. 즉 $y=\sin x$이면 $y'=\cos x$이다.

또 함수 $y=\cos x$에서 도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}
y'&=\lim_{h\to0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{\cos x(\cos h-1)-\sin x\sin h}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{\cos x(\cos h-1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{\sin x\sin h}{h}\\
&=\cos x\lim_{h\to0}\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}\\
&=-\sin x
\end{aligned}$$

이다. 즉 $y=\cos x$이면 $y'=-\sin x$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

사인함수와 코사인함수의 도함수

❶ $y=\sin x$이면 $y'=\cos x$

❷ $y=\cos x$이면 $y'=-\sin x$

예제 1 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=x\sin x$ (2) $y=\sin x\cos x$

풀이 (1) $y'=(x)'\sin x+x(\sin x)'$
$=1\times\sin x+x\cos x$
$=\sin x+x\cos x$

(2) $y'=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'$
$=\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)$
$=\cos^2 x-\sin^2 x$

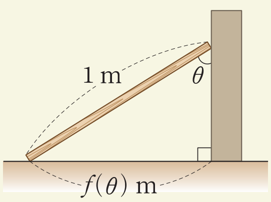
답 (1) $y'=\sin x+x\cos x$ (2) $y'=\cos^2 x-\sin^2 x$

문제 1 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=\sin^2 x$ (2) $y=e^x\cos x$

적용하기

오른쪽 그림과 같이 길이가 1 m인 막대가 지면과 수직인 벽에 기대어 미끄러지고 있다. 막대와 벽이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, 막대의 아래 끝에서 벽까지의 거리를 $f(\theta)$ m라고 하자.



1 $f(\theta)$를 구해 보자.

2 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값을 구해 보자.

중단원 마무리

❶ 무리수 e와 자연로그

(1) **무리수 e**: $e=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(2) **자연로그**: 밑이 e인 로그 $\log_e x$를 x의 자연로그라 하고, 이것을 간단히 $\ln x$와 같이 나타낸다.

❷ 지수함수와 로그함수의 미분

(1) $y=e^x$이면 $y'=e^x$

(2) $y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$이면 $y'=\boxed{\quad\quad}$

(3) $y=\ln x$이면 $y'=\boxed{\quad}$

(4) $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$이면 $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$

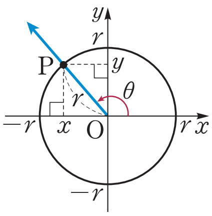
❸ 삼각함수

오른쪽 그림에서

$\csc\theta=\dfrac{r}{y}\ (y\neq0)$

$\sec\theta=\dfrac{r}{x}\ (x\neq0)$

$\cot\theta=\dfrac{x}{y}\ (y\neq0)$



❹ 삼각함수의 덧셈정리

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\boxed{\quad\quad\quad\quad}$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(3) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta)=\boxed{\quad\quad\quad}$

❺ 삼각함수의 극한

$\lim_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

❻ 사인함수와 코사인함수의 미분

(1) $y=\sin x$이면 $y'=\cos x$

(2) $y=\cos x$이면 $y'=\boxed{\quad\quad}$

기본 문제

1 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^x$ (2) $\lim_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}$

(3) $\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+4x)}{x}$ (4) $\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(3+x)-\ln3}{x}$

2 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=3e^{2x}$ (2) $y=3^{2x+1}$

(3) $y=\ln5x$ (4) $y=\log_3 7x$

3 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}\ \left(\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$일 때, $\sin2\theta$의 값을 구하시오.

4 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to0}\dfrac{\tan4x}{\sin3x}$ (2) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin(-x)}{\sin3x}$

5 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=x+2\sin x$ (2) $y=x^3\cos x$

• 정답 및 풀이 182쪽

표준 문제

6 다음 극한값을 구하시오.

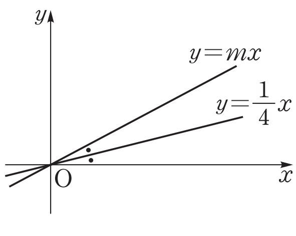
(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x^2+x}$ (2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)}$

서술형 **7** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{e^x-1}=4$를 만족시키는 상수 a, b의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

8 함수 $f(x)=\log_2 x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$의 값을 구하시오.

9 이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 두 근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$일 때, $\tan(\alpha-\beta)$의 값을 구하시오. (단, $\tan\alpha>\tan\beta$)

문제 해결 **10** 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=mx$가 x축의 양의 방향과 이루는 예각을 직선 $y=\frac{1}{4}x$가 이등분한다. 이때 상수 m의 값을 구하시오.



11 $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{\ln(x+b)}=3$을 만족시키는 상수 a, b의 값을 구하시오.

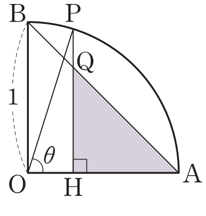
12 함수 $f(x)=e^{-x}\sin x$에 대하여 $0<x<2\pi$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 모두 구하시오.

발전 문제

13 함수 $f(x)=\begin{cases}1+a\ln x & (0<x\le1)\\ -bx+3 & (x>1)\end{cases}$이 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

추론

14 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, $\angle$POH$=\theta$라고 하자. 또 선분 AB와 선분 PH의 교점을 Q라고 할 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $S(\theta)$라고 하자. 이때 $\lim_{\theta\to0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta^4}$의 값을 구하시오.



서술형

15 함수 $f(x)=\begin{cases}5\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x} & (x\ne0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$에 대하여 $f'(0)$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.