I 수열의 극한

테일러
(Taylor, B., 1685~1731)
미분가능한 함수를 그 함수의 미분계수를 계수로 하여 급수로 나타내는 방법을 생각하였다.

푸리에
(Fourier, J. B. J., 1768~1830)
주기함수를 간단한 삼각함수의 급수로 나타내는 방법을 생각하였다.

학습 목표

- **수열의 수렴, 발산**의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
- **수열의 극한에 대한 기본 성질**을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
- **등비수열**의 극한값을 구할 수 있다.
- **급수의 수렴, 발산**의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
- **등비급수**의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.
- 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

공학 기술의 바탕

수열의 극한은 천문학, 통신 공학 등 공학 기술의 여러 분야에서 중요한 역할을 한다. 분광기를 통해 별빛의 주파수를 분해하여 별을 이루는 화학 물질을 알아내고, 전송해야 하는 데이터 신호의 스펙트럼을 이용하여 통신 시스템 설계를 최적화하는 등 수열의 극한은 다양하게 활용되고 있다.

밤하늘 은하수의 수많은 별들과 바닷가 백사장의 수많은 모래알들의 개수는 정확히 셀 수 없지만 분명히 유한개일 것이다. 그렇다면 두 개의 거울을 서로 평행하게 마주 보도록 놓은 후 그 사이에 물체를 놓았을 때, 두 거울에 반사되어 나타나는 상의 개수는 어떻게 될까?

이와 같이 무수히 많은 개체의 수나 끊임없이 반복되는 현상 등 무한에 관한 문제는 알쏭달쏭하고 묘한 현상을 만들어 낸다.

이 단원에서는 무한히 계속되는 현상을 분석하고 탐구할 수 있는 수열의 극한과 그 성질을 알아본다.

1 수열의 극한

준비학습

1 다음 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하시오.

(1) $\{a_n\}$: 2, 4, 6, 8, 10, $\cdots$

(2) $\{b_n\}$: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\cdots$

2 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to 0}(x^2+1)$ (2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

1 수열의 극한

- 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

수열의 수렴이란 무엇일까

생각 톡

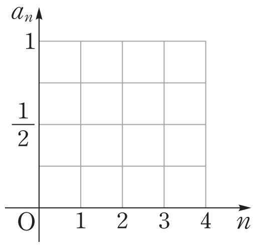
수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=\dfrac{1}{n}$이다.

탐구 ① 다음 표를 완성해 보자.

n	1	2	3	4	$\cdots$	100	$\cdots$
a_n					$\cdots$		$\cdots$

탐구 ② n의 값이 1, 2, 3, 4일 때, 순서쌍 (n, a_n)을 좌표로 하는 점을 오른쪽 좌표평면에 나타내어 보자.

탐구 ③ n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 어떻게 변하는지 추측해 보자.



수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값이 어떻게 변하는지 알아보자.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 항의 값을 스프레드시트를 이용하여 구하면 다음과 같다.

	A	B
1	n	$\{a_n\}$
2	1	2.0000000000
3	10	1.1000000000
4	100	1.0100000000
5	1000	1.0010000000
6	10000	1.0001000000
7	100000	1.0000100000
8	1000000	1.0000010000
9	⋮	⋮

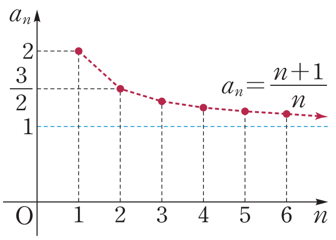
	A	B
1	n	$\{b_n\}$
2	1	1.0000000000
3	2	-0.5000000000
4	5	0.2000000000
5	10	-0.1000000000
6	15	0.0666666667
7	20	-0.0500000000
8	35	0.0285714286
9	⋮	⋮

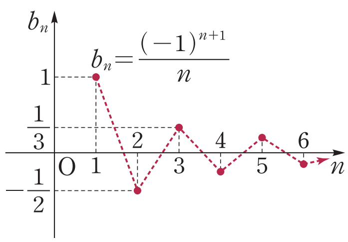
두 수열

$$\{a_n\}: 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \cdots,\ \frac{n+1}{n},\ \cdots$$

$$\{b_n\}: 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{(-1)^{n+1}}{n},\ \cdots$$

에서 n의 값이 커짐에 따라 a_n, b_n의 값의 변화를 그래프로 나타내면 다음과 같다.





위의 두 그래프에서 n의 값이 한없이 커질 때, $\dfrac{n+1}{n}$의 값은 1에 한없이 가까워지고, $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$의 값은 0에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 한다.

이때 α를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라 하고, 이것을 기호로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \quad \text{또는} \quad n\longrightarrow\infty\text{일 때 } a_n\longrightarrow\alpha$$

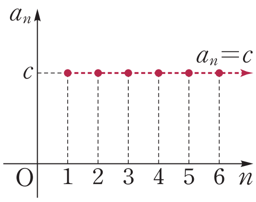
와 같이 나타낸다.

예를 들어 두 수열 $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$, $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$은 n의 값이 한없이 커질 때 각각 1, 0에 수렴하므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=0$이다.

특히 수열 $\{a_n\}$에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=c$ (c는 상수)일 때, 수열 $\{a_n\}$은 c에 수렴한다. 즉

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} c=c$$

이다.



예제 1 **다음 수열의 극한값을 구하시오.**

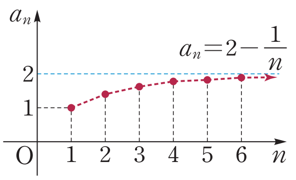
$$2-1,\ 2-\frac{1}{2},\ 2-\frac{1}{3},\ \cdots,\ 2-\frac{1}{n},\ \cdots$$

풀이 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$$a_n=2-\frac{1}{n}$$

오른쪽 그래프에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 2에 한없이 가까워지므로 이 수열은 2에 수렴한다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=2$$



답 2

문제 1 **다음 수열의 극한값을 구하시오.**

(1) $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots,\ \dfrac{1}{2^{n-1}},\ \cdots$

(2) $2,\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{10}{9},\ \cdots,\ 1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1},\ \cdots$

(3) $5,\ 5,\ 5,\ \cdots,\ 5,\ \cdots$

수열의 발산이란 무엇일까

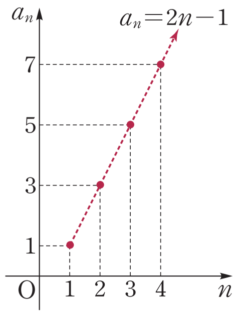
수렴하지 않는 수열에 대하여 알아보자.

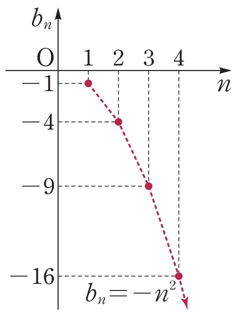
두 수열

$\{a_n\}$: 1, 3, 5, 7, ⋯, $2n-1$, ⋯

$\{b_n\}$: -1, -4, -9, -16, ⋯, $-n^2$, ⋯

에서 n의 값이 커짐에 따라 a_n, b_n의 값의 변화를 그래프로 나타내면 다음과 같다.





위의 두 그래프에서 n의 값이 한없이 커질 때, $2n-1$의 값은 한없이 커지고, $-n^2$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 두 수열은 모두 수렴하지 않는다.

이와 같이 수열이 수렴하지 않을 때, 그 수열은 발산한다고 한다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값도 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty \quad \text{또는} \quad n \to \infty\text{일 때 } a_n \to \infty$$

와 같이 나타낸다.

또 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 음의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty \quad \text{또는} \quad n \to \infty\text{일 때 } a_n \to -\infty$$

와 같이 나타낸다.

예를 들어 수열 $\{2n-1\}$은 양의 무한대로 발산하고 수열 $\{-n^2\}$은 음의 무한대로 발산하므로 $\lim_{n\to\infty}(2n-1)=\infty$, $\lim_{n\to\infty}(-n^2)=-\infty$이다.

문제 2 **다음 수열이 발산함을 확인하시오.**

(1) -1, 1, 3, ⋯, $2n-3$, ⋯

(2) -2, -8, -26, ⋯, $1-3^n$, ⋯

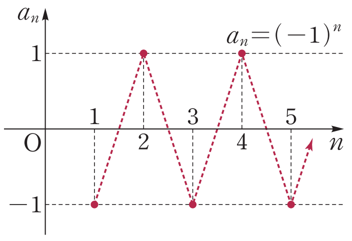
이제 수렴하지도 않고 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하지도 않는 수열에 대하여 알아보자.

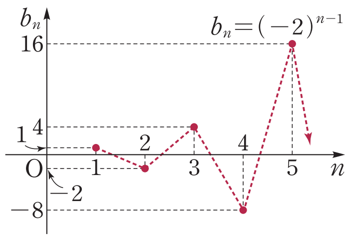
두 수열

$$\{a_n\}: -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^n,\ \cdots$$

$$\{b_n\}: 1,\ -2,\ 4,\ -8,\ \cdots,\ (-2)^{n-1},\ \cdots$$

에서 n의 값이 커짐에 따라 a_n, b_n의 값의 변화를 그래프로 나타내면 다음과 같다.





위의 두 그래프에서 n의 값이 한없이 커질 때, $(-1)^n$의 값은 -1과 1이 교대로 되고, $(-2)^{n-1}$의 값은 양수와 음수가 교대로 되면서 그 절댓값이 한없이 커진다.

이와 같이 수열이 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으면 그 수열은 **진동**한다고 한다.

수열의 수렴과 발산을 정리하면 다음과 같다.

수열의 수렴과 발산

수열 $\{a_n\}$이

❶ 수렴: $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (α는 상수)

❷ 발산: $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n=\infty \text{ (양의 무한대로 발산)} \\ \lim_{n\to\infty} a_n=-\infty \text{ (음의 무한대로 발산)} \\ \text{진동} \end{cases}$

문제 3 **다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하시오.**

(1) $\{3n-2\}$

(2) $\{1+(-1)^n\}$

(3) $\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

(4) $\left\{-\frac{n^2}{n+2}\right\}$

2 수열의 극한값의 계산

- 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

수열의 극한에는 어떤 성질이 있을까

생각톡

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이

$$a_n=2+\frac{1}{n},\ b_n=3-\frac{2}{n}$$

일 때, 오른쪽은 스프레드시트를 이용하여 a_n, b_n, a_n+b_n의 값을 구한 것이다.

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	a_n+b_n
2	1	3	1	4
3	⋮	⋮	⋮	⋮
4	10	2.1	2.8	4.9
5	⋮	⋮	⋮	⋮
6	100	2.01	2.98	4.99
7	⋮	⋮	⋮	⋮
8	1000	2.001	2.998	4.999

탐구 ① 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 극한값을 구해 보자.

탐구 ② 수열 $\{a_n+b_n\}$의 극한값을 구해 보자.

탐구 ③ **탐구** ①에서 구한 두 극한값의 합과 **탐구** ②의 극한값을 비교해 보자.

위의 생각톡에서 $\lim_{n\to\infty} a_n=2$, $\lim_{n\to\infty} b_n=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=2+3=5$$

이다. 또 수열 $\{a_n+b_n\}$의 일반항을 c_n이라고 하면

$$c_n=a_n+b_n=\left(2+\frac{1}{n}\right)+\left(3-\frac{2}{n}\right)=5-\frac{1}{n}$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} c_n=5$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n$이 성립함을 알 수 있다.

일반적으로 수렴하는 수열의 극한에 대하여 다음이 성립함이 알려져 있다.

수열의 극한에 대한 기본 성질

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

❶ $\lim_{n\to\infty} ca_n=c\lim_{n\to\infty} a_n$ (단, c는 상수)

❷ $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n$

❸ $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n$

❹ $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\times\lim_{n\to\infty} b_n$

❺ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ (단, $b_n\neq0$, $\lim_{n\to\infty} b_n\neq0$)

수열의 극한에 대한 기본 성질은 두 수열이 모두 수렴하는 경우에만 성립한다.

보기 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로 수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

❶ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=\lim_{n\to\infty}1+3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1+3\times0=1$

❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\times0=0$

문제 1 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{5}{n}\right)$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{4}{n}}{3-\frac{1}{n}}$

수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 여러 가지 수열의 극한값을 구해 보자.

예제 1 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n-1}{n^2+n+2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$

풀이 (1) 분자, 분모를 각각 n^2으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n-1}{n^2+n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}$$

$$=\frac{3+0-0}{1+0+0}=3$$

(2) 분자, 분모에 각각 $\sqrt{n^2+2n}+n$을 곱하면

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=\frac{\lim_{n\to\infty}2}{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+0}+1}=1$$

답 (1) 3 (2) 1

문제 2 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n+3}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(3n+2)}{n^2+3}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-n}$ (4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$

예제 2 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하시오.

(1) $\{n^2-5n\}$ (2) $\left\{\dfrac{-2n^2+5n}{n+2}\right\}$

풀이 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^2-5n)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{5}{n}\right)$

이때 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2=\infty$이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}\right)=1$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^2-5n)=\infty$

따라서 수열 $\{n^2-5n\}$은 양의 무한대로 발산한다.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2+5n}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n+5}{1+\frac{2}{n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left(n\times\frac{-2+\frac{5}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)$

이때 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n=\infty$이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{5}{n}}{1+\frac{2}{n}}=-2$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2+5n}{n+2}=-\infty$

따라서 수열 $\left\{\dfrac{-2n^2+5n}{n+2}\right\}$은 음의 무한대로 발산한다.

답 (1) 양의 무한대로 발산 (2) 음의 무한대로 발산

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 상수), $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$일 때
① $\alpha>0$이면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\infty$
② $\alpha<0$이면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_nb_n=-\infty$
임이 알려져 있다.

문제 3 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하시오.

(1) $\{2n^3-n^2\}$ (2) $\left\{\dfrac{-n^3-5n+4}{3n+2}\right\}$

수렴하는 수열의 극한의 대소 관계에 대하여 다음이 성립함이 알려져 있다.

수열의 극한의 대소 관계

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 상수)일 때

❶ 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\alpha \le \beta$이다.

❷ 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$이다.

예제 3 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$의 값을 구하시오. (단, θ는 상수이다.)

풀이 $-1 \le \sin n\theta \le 1$이므로 각 변을 n으로 나누면

$$-\frac{1}{n} \le \frac{\sin n\theta}{n} \le \frac{1}{n}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=0$$

답 0

문제 4 $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n\theta}{2n}$의 값을 구하시오. (단, θ는 상수이다.)

문제 5 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 부등식 $3n+1 \le na_n \le 3n+4$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

찾아보기 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에서 수열의 극한의 대소 관계에 대하여 알아보려고 한다.

1 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < b_n$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$이 성립하는 예를 찾아보자.

2 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < c_n < b_n$이고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$ (α는 상수) 일 때, $\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$가 성립하는 예를 찾아보자.

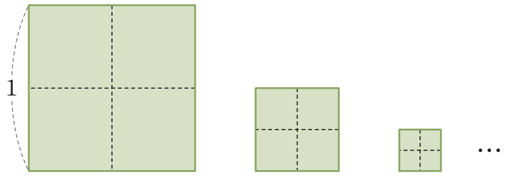
3 등비수열의 극한

● 등비수열의 극한값을 구할 수 있다.

등비수열의 극한값은 어떻게 구할까

생각 톡

다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 색종이를 4등분 하여 자르고 그중 한 정사각형을 다시 4등분 하여 자르는 과정을 반복한다.



[1단계]　[2단계]　[3단계]

탐구 ① [n단계]에서의 색종이의 넓이를 구해 보자.

탐구 ② n의 값이 한없이 커질 때, 색종이의 넓이는 어떤 값에 가까워지는지 말해 보자.

위의 생각 톡에서 각 단계에서의 색종이의 넓이는

$$1,\ \frac{1}{4},\ \left(\frac{1}{4}\right)^2,\ \left(\frac{1}{4}\right)^3,\ \cdots,\ \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1},\ \cdots$$

과 같이 등비수열을 이룬다.

이때 이 수열에서 n의 값이 한없이 커지면 색종이의 넓이는 0에 가까워지므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=0$임을 알 수 있다.

이제 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴, 발산을 공비 r의 값에 따라 알아보자.

(i) $r>1$일 때, $r=1+h\ (h>0)$로 놓으면

$$r^n=(1+h)^n>1+nh\ (n\geq 2)$$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\infty$이다.

(ii) $r=1$일 때, 수열의 모든 항이 1이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=1$이다.

(iii) $-1<r<1$일 때,

㉠ $r=0$이면 수열의 모든 항이 0이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$이다.

㉡ $r\neq 0$이면 $\frac{1}{|r|}>1$이므로 (i)에 의하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{|r^n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|r|}\right)^n=\infty$이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}|r^n|=0$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$이다.

$h>0$일 때, $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여
$(1+h)^n>1+nh$
임은 수학적 귀납법으로 증명할 수 있다.

$a_n>0$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$이다.

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$이다.

(iv) $r \le -1$일 때,

㉠ $r=-1$이면 수열 $\{r^n\}$은 $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$이므로 진동한다.

㉡ $r<-1$이면 $|r|>1$이므로 (i)에 의하여 $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이고, 수열 $\{r^n\}$의 각 항의 부호가 교대로 바뀌므로 진동한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

등비수열의 수렴과 발산

등비수열 $\{r^n\}$에서

❶ $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ (발산)

❷ $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$ (수렴)

❸ $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ (수렴)

❹ $r \le -1$일 때, 진동한다. (발산)

등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하기 위한 필요충분조건은
$-1<r\le 1$
이다.

보기 ❶ 등비수열 $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$은 공비가 $\frac{1}{3}$이고 $-1<\frac{1}{3}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$이다.

❷ 등비수열 $\{(-2)^n\}$은 공비가 -2이고 $-2<-1$이므로 진동한다. 즉 발산한다.

문제 1 **다음 수열의 수렴, 발산을 조사하시오.**

(1) $\{1.05^n\}$ (2) $\{(-0.8)^n\}$

(3) $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$ (4) $\left\{\left(-\frac{3}{2}\right)^n\right\}$

예제 1 **수열 $\left\{\frac{3^n+4^n}{2^n+4^n}\right\}$의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하시오.**

풀이 분자, 분모를 각각 4^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n}{2^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1\right\}}{\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\right\}}$$

$$=\frac{0+1}{0+1}=1$$

따라서 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 1이다.

답 수렴, 1

문제 2 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하시오.

(1) $\left\{\dfrac{2^n+1}{3^n-1}\right\}$ (2) $\left\{\dfrac{3^{n+1}}{3^n-1}\right\}$

(3) $\left\{\dfrac{2^{2n}-3^n}{4^{n+1}+3^n}\right\}$ (4) $\left\{\dfrac{5^n+3^n}{3^n+2^n}\right\}$

예제 2 $r>0$일 때, 수열 $\left\{\dfrac{1-r^n}{1+r^n}\right\}$의 수렴, 발산을 조사하시오.

풀이 (i) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{r^n}=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}-1}{\frac{1}{r^n}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-r^n}{1+r^n}=\dfrac{1-1}{1+1}=0$

(iii) $0<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-r^n}{1+r^n}=\dfrac{1-0}{1+0}=1$

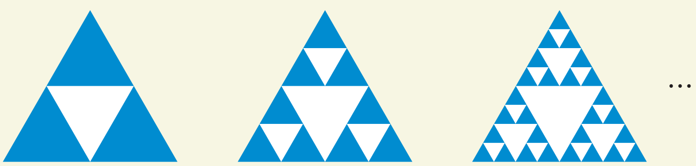
따라서 주어진 수열은 $r>1$일 때 -1에 수렴, $r=1$일 때 0에 수렴, $0<r<1$일 때 1에 수렴한다.

답 풀이 참조

문제 3 수열 $\left\{\dfrac{r^{2n+1}}{1+r^{2n}}\right\}$의 수렴, 발산을 조사하시오.

유추하기

폴란드의 수학자 시어핀스키(Sierpinski, W., 1882~1969)는 넓이가 1인 정삼각형의 각 변의 중점을 연결하여 만든 합동인 네 개의 정삼각형 중 가운데 정삼각형을 제거하고 남아 있는 세 개의 정삼각형에 같은 과정을 반복하여 다음 그림과 같은 삼각형을 생각하였다. 이것을 시어핀스키 삼각형(Sierpinski triangle)이라고 한다.



(출처: Benson, D. C., 『The Moment of Proof: Mathematical Epiphanies』)

1 남아 있는 정삼각형의 개수는 어떻게 변하는지 추측해 보자.

2 남아 있는 정삼각형의 넓이의 합은 어떤 값에 가까워지는지 추측해 보자.

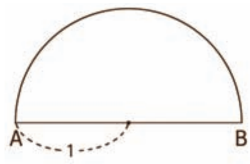
수학 역량 플러스

무한히 많은 반원의 호의 길이의 합

추론 의사소통

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 반원이 있다.

n마리의 개미가 지름의 양 끝 점인 A, B 사이를 각각 다음과 같은 방법으로 이동한다고 한다.



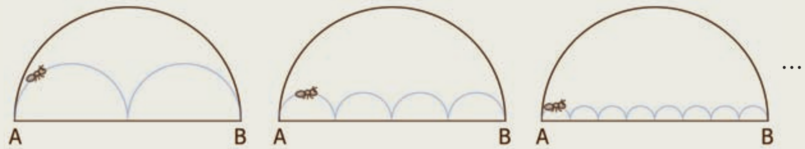
첫 번째 개미는 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 2개의 반원의 호를 따라 이동한다.

두 번째 개미는 반지름의 길이가 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$인 2^2개의 반원의 호를 따라 이동한다.

세 번째 개미는 반지름의 길이가 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$인 2^3개의 반원의 호를 따라 이동한다.

⋮

n번째 개미는 반지름의 길이가 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$인 2^n개의 반원의 호를 따라 이동한다.



활동 1 n번째 개미의 이동 거리를 구해 보자.

활동 2 형주가 잘못된 결론을 내리게 된 이유를 말해 보자.

중단원 마무리

• 정답 및 풀이 175쪽

❶ 수열의 수렴과 발산

수열 $\{a_n\}$이

(1) **수렴**: $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (α는 상수)

(2) **발산**

① $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ (양의 무한대로 발산)

② $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$ (음의 무한대로 발산)

③ $\boxed{}$

❷ 수열의 극한에 대한 기본 성질

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

① $\lim_{n\to\infty} ca_n=c\lim_{n\to\infty} a_n$ (단, c는 상수)

② $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n$

③ $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n$

④ $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\times\lim_{n\to\infty} b_n$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ (단, $b_n\neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n\neq 0$)

❸ 수열의 극한의 대소 관계

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 상수)일 때

① 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\leq b_n$이면 $\alpha\boxed{}\beta$이다.

② 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\leq c_n\leq b_n$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n=\boxed{}$이다.

❹ 등비수열의 수렴과 발산

등비수열 $\{r^n\}$에서

① $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\boxed{}$ (발산)

② $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\boxed{}$ (수렴)

③ $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\boxed{}$ (수렴)

④ $r\leq -1$일 때, 진동한다. (발산)

기본 문제

1 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하시오.

(1) $\left\{\dfrac{3n}{n^2+1}\right\}$　　(2) $\{6-n^2\}$

(3) $\left\{3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$　　(4) $\{2+(-1)^n\}$

2 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(6n+1)(n-3)}{(n+1)(3n-4)}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{5n}{\sqrt{n^2+2}}$

3 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n}-n}$

4 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 부등식

$$5n-2<a_n<5n+1$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n+1}$의 값을 구하시오.

5 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{2^{2n}}$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}}{2^n+1}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^n-4^n}{2^n+4^n}$　　(4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^{2n+1}}{9^n-1}$

표준 문제

6 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$

7 $\lim_{n\to\infty} \frac{bn+1}{an^2+2n+1}=4$가 성립하도록 하는 상수 a, b의 값을 구하시오.

서술형 **8** 수열 $\{a_n\}$에 대하여 x에 대한 이차방정식 $x^2-(n+1)x+a_n=0$은 실근을 갖고, x에 대한 이차방정식 $x^2-nx+a_n=0$은 허근을 갖는다. 이때 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2+n}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

9 수열 $\left\{\frac{r^n-3^n}{r^n+3^n}\right\}$의 수렴, 발산을 조사하시오. (단, $r\neq-3$)

10 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=2n+3^n$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{3^n}$의 값을 구하시오.

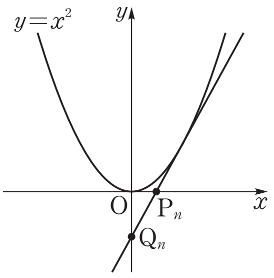
서술형 **11** 등비수열 $\left\{\left(\frac{3x-1}{2}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

12 수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+3^n a_n}{3^{n+1}-5^n a_n}=10$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

발전 문제

13 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{a_n-3b_n}$의 값을 구하시오.

문제 해결 **14** 자연수 n에 대하여 오른쪽 그림과 같이 기울기가 n이고 곡선 $y=x^2$에 접하는 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라고 하자. $l_n=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{2n^2}$의 값을 구하시오.



창의·융합 **15** 다음 그림과 같이 길이가 1인 성냥개비들을 정사각형 모양으로 배열할 때, [n단계]에서 사용한 성냥개비의 개수를 a_n, [n단계]에 있는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수를 b_n이라고 하자. 이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{4b_n}{a_n}$의 값을 구하시오.