III 공간도형

① 공간도형
② 공간좌표

유클리드
(Euclid, B.C. 325?~B.C. 265?)
기하학 이론을 체계적으로 정리하고 집대성한『원론』을 저술하였다.

힐베르트
(Hilbert, D., 1862~1943)
유클리드의 원론의 명제를 증명하여 유클리드 기하학의 엄밀성을 추구하였다.

학습목표

- 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 **위치 관계에 대한 간단한 증명**을 할 수 있다.
- **삼수선의 정리**를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
- **정사영**의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
- 좌표공간에서 **점의 좌표**를 구할 수 있다.
- 좌표공간에서 **두 점 사이의 거리**를 구할 수 있다.
- 좌표공간에서 **선분의 내분점과 외분점의 좌표**를 구할 수 있다.
- **구의 방정식**을 구할 수 있다.

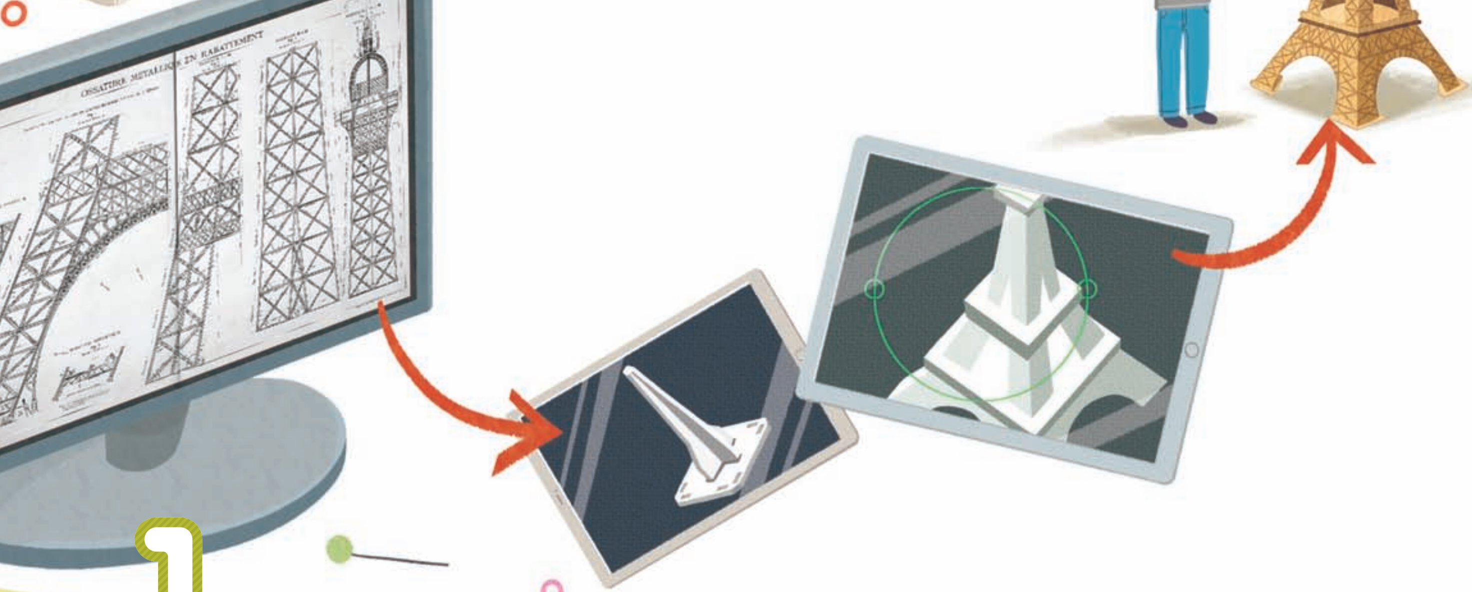
공간도형으로 이루어진 지구

지구의 지각을 구성하는 광물은 정사면체, 정육면체, 기울어진 육면체, 팔면체, 육각기둥 등과 같이 다양한 공간도형 모양의 결정 구조를 가진다. 그뿐만 아니라 우리가 사용하는 작은 도구부터 거주하는 공간, 웅장한 건축물까지 모두 공간도형으로 이루어져 있다. 따라서 공간도형의 성질을 이해하는 것은 우리가 사는 지구와 주변 환경을 이해하기 위한 첫걸음이다.

건축은 점과 선으로 그려진 설계도에서 시작한다. 설계도를 바탕으로 실제 현장에서 공간을 완성한다. 즉 2차원의 면에서 출발한 그림이 3차원의 구조를 갖는 건축물이 되는 것이다.

건축물은 기능적인 편리함뿐만 아니라 아름다움도 추구하는데, 이 두 가지를 모두 갖춘 건축물을 짓기 위해서는 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 이해가 중요하다.

이 단원에서는 공간에서의 직선, 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 하고, 삼수선의 정리와 정사영을 알아본다.



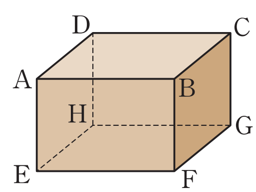
1 공간도형

준비학습

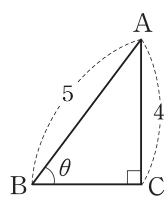
1 오른쪽 직육면체에서 다음을 구하시오.

(1) 모서리 AB와 평행한 모서리

(2) 면 ABCD와 평행한 모서리



2 오른쪽 직각삼각형 ABC에서 $\angle C=90^\circ$이고 $\overline{AB}=5$, $\overline{CA}=4$이다. $\angle B$의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.



1 위치 관계

- 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.

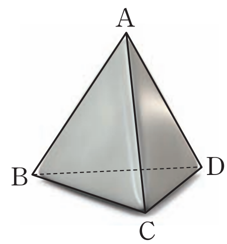
평면을 하나로 결정하는 조건은 무엇일까

생각 톡

오른쪽과 같은 사면체가 있다.

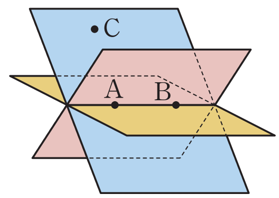
탐구 ① 세 점 A, B, C를 모두 포함하는 면의 개수를 구해 보자.

탐구 ② 네 점 A, B, C, D를 모두 포함하는 면이 있는지 확인해 보자.



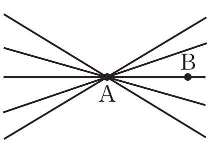
오른쪽 그림과 같이 공간에서 서로 다른 두 점 A, B를 지나는 평면은 무수히 많지만 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C를 지나는 평면은 오직 하나뿐이다.

즉 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점이 주어지면 평면이 하나로 결정된다.



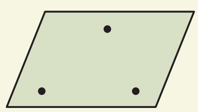
이로부터 다음과 같은 경우에 평면이 단 하나로 결정됨을 알 수 있다.

평면에서와 마찬가지로 공간에서도 한 점을 지나는 직선은 무수히 많지만 서로 다른 두 점을 지나는 직선은 단 하나로 결정된다.

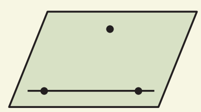


평면의 결정 조건

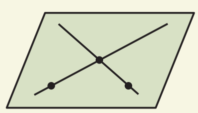
① 한 직선 위에 있지 않은 세 점



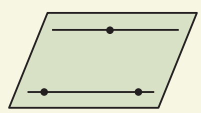
② 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점



③ 한 점에서 만나는 두 직선



④ 평행한 두 직선



문제 1 **한 평면 위에 있지 않은 네 점 A, B, C, D 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않을 때, 이 네 점으로 결정되는 서로 다른 평면의 개수를 구하시오.**

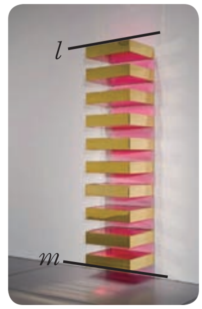
공간에서 직선, 평면은 어떤 위치 관계가 있을까

생각톡

오른쪽은 미술가 저드(Judd, D., 1928~1994)의 작품으로 똑같은 직육면체 여러 개를 벽에 나란히 고정한 것이다.

탐구 ① 직선 l과 직선 m의 위치 관계를 말해 보자.

탐구 ② 가장 위에 있는 직육면체의 밑면과 가장 아래에 있는 직육면체의 밑면의 위치 관계를 말해 보자.

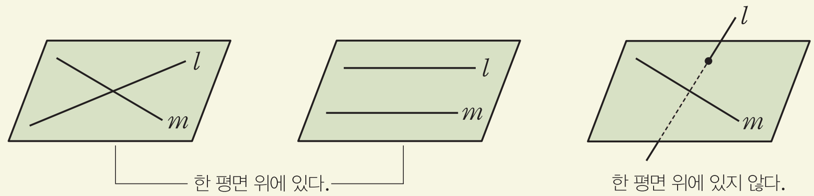


공간에서 서로 다른 두 직선의 위치 관계는 다음 세 가지 경우가 있다.

두 직선 l, m이 한 평면 위에 있으면서 만나지 않을 때, 두 직선 l, m은 평행하다고 하며 이것을 기호로 $l /\!/ m$과 같이 나타낸다.

두 직선이 만나지도 않고 평행하지도 않을 때, 두 직선은 꼬인 위치에 있다고 한다.

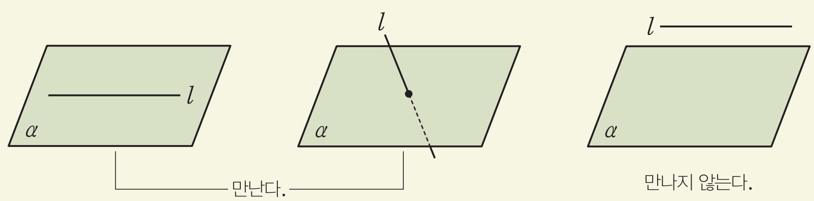
❶ 한 점에서 만난다. ❷ 평행하다. ❸ 꼬인 위치에 있다.



공간에서 직선과 평면의 위치 관계는 다음 세 가지 경우가 있다.

직선 l과 평면 α가 만나지 않을 때, 직선 l과 평면 α는 평행하다고 하며 이것을 기호로 $l /\!/ \alpha$와 같이 나타낸다.

❶ 포함된다. ❷ 한 점에서 만난다. ❸ 평행하다.



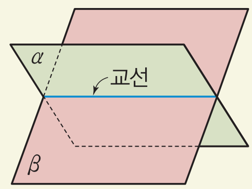
공간에서 서로 다른 두 평면은 만나는 경우와 만나지 않는 경우가 있다.

서로 다른 두 평면이 만날 때 두 평면의 공통부분은 직선이고, 이 직선을 두 평면의 **교선**이라고 한다.

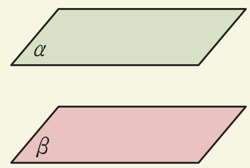
한편 두 평면 α, β가 만나지 않을 때 두 평면 α, β는 평행하다고 하고, 이것을 기호로 $\alpha /\!/ \beta$와 같이 나타낸다.

공간에서 서로 다른 두 평면의 위치 관계는 다음 두 가지 경우가 있다.

❶ 만난다.



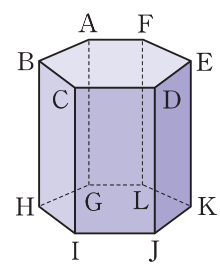
❷ 평행하다.



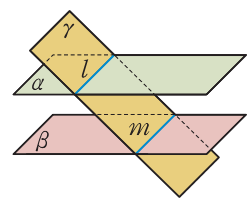
문제 2 오른쪽 그림과 같이 밑면이 정육각형인 육각기둥이 있다. 이 육각기둥의 각 면을 포함하는 평면 중에서 평면 ABHG와 다음의 위치 관계에 있는 평면을 모두 구하시오.

(1) 만난다.

(2) 평행하다.



예제 1 오른쪽 그림과 같이 평행한 두 평면 α, β가 평면 γ와 만날 때 생기는 두 교선을 각각 l, m이라고 하자. 두 직선 l, m이 평행함을 증명하시오.



증명 $\alpha /\!/ \beta$이므로 두 평면 α, β는 만나지 않는다.

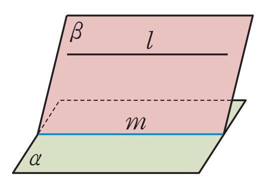
이때 직선 l은 평면 α 위에 있고 직선 m은 평면 β 위에 있으므로 두 직선 l, m도 만나지 않는다.

즉 두 직선 l, m은 평행하거나 꼬인 위치에 있다.

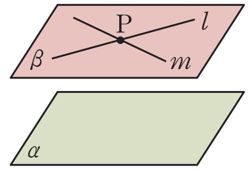
그런데 두 직선 l, m은 모두 평면 γ 위에 있으므로

$$l /\!/ m$$

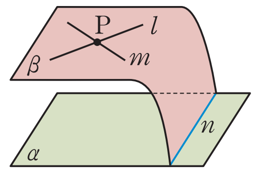
문제 3 오른쪽 그림과 같이 직선 l과 평면 α가 평행할 때, 직선 l을 포함하는 평면 β와 평면 α의 교선 m은 직선 l과 평행함을 증명하시오.



예제 2 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P를 지나고 평면 α에 평행한 서로 다른 두 직선 l, m에 의하여 결정되는 평면을 β라고 할 때, 두 평면 α, β가 평행함을 증명하시오.



증명 오른쪽 그림과 같이 두 평면 α, β가 평행하지 않고 교선 n을 공유한다고 가정하자.



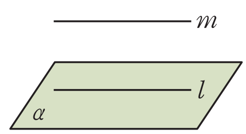
직선 n은 평면 α 위에 있고 $l /\!/ \alpha$, $m /\!/ \alpha$이므로 직선 n은 두 직선 l, m과 만나지 않는다.

그런데 세 직선 l, m, n은 모두 평면 β 위에 있으므로 $l /\!/ n$, $m /\!/ n$

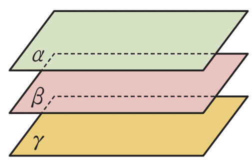
즉 $l /\!/ m$이고 이것은 두 직선 l, m이 한 점 P에서 만난다는 조건에 모순이므로

$\alpha /\!/ \beta$

문제 4 평행한 두 직선 l, m에 대하여 직선 l은 포함하고 직선 m은 포함하지 않는 평면 α가 있다. 이때 평면 α와 직선 m이 평행함을 증명하시오.



문제 5 서로 다른 세 평면 α, β, γ에 대하여 두 평면 α, β가 평행하고 두 평면 β, γ가 평행하면, 두 평면 α, γ가 평행함을 증명하시오.



판별하기

다음은 공간에서 서로 다른 세 직선 l, m, n과 서로 다른 두 평면 α, β에 대하여 세 학생이 말한 내용이다. 각 학생이 말한 내용의 참, 거짓을 판별하고, 거짓인 경우 반례를 찾아 설명해 보자.

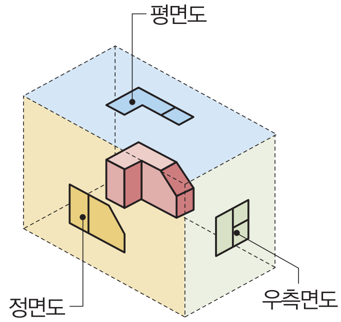
수학 역량 플러스

투영법

창의·융합 추론

입체도형을 평면 위에 나타내는 그림은 조감도, 전개도, 겨냥도, 단면도 등으로 다양하지만 주로 입체도형의 한쪽만 나타내기 때문에 전체를 파악하기 어렵다.

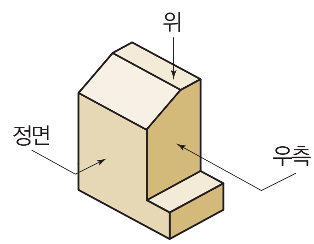
이를 보완하기 위해 투영법을 이용한다. 투영법은 정면과 위, 옆에서 보이는 물체의 모습을 평면 위에 그려 전체를 쉽게 파악할 수 있도록 한 것으로 투영법으로 그린 그림을 투영도라고 한다. 이때 물체를 정면, 위, 아래, 옆, 뒤에서 보고 그린 그림을 차례대로 정면도, 평면도, 저면도, 측면도, 배면도라고 한다.



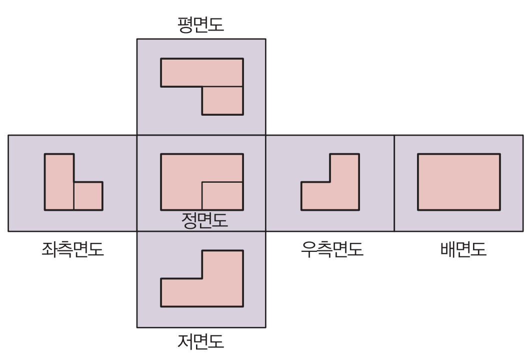
투영법의 기초인 화법기하학은 프랑스 수학자 몽주(Monge, G., 1746~1818)가 고안한 것으로 3차원 공간의 입체를 2차원 평면에 투사하는 방법을 연구하면서 탄생했다. 투영법을 이용하면 설계도를 간단하고 쉽게 그릴 수 있어 가구, 자동차, 선박, 건물의 설계에 널리 쓰인다.

(출처: 두산백과사전, 2017)

활동 1 오른쪽 도형의 정면도, 평면도, 우측면도를 각각 그려 보자.



활동 2 오른쪽은 어떤 입체도형의 정면도, 평면도, 저면도, 좌우측면도, 배면도이다. 이 입체도형의 겨냥도를 그려 보자.



2 삼수선의 정리

● 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

공간에서 두 직선이 이루는 각은 어떻게 정의할까

생각톡

오른쪽은 여러 개의 막대를 끈으로 연결하고 막대의 양쪽 끝에 물체를 매달아 만든 모빌이다.

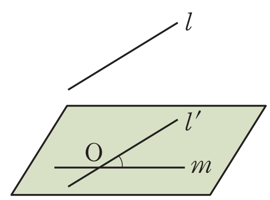
탐구 두 막대 l, m을 포함하는 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하는 방법을 말해 보자.

공간에서 두 직선이 이루는 각을 알아보자.

한 점에서 만나는 두 직선은 한 평면을 결정하므로 그 평면에서 두 직선이 이루는 각을 정할 수 있다.

한편 꼬인 위치에 있는 두 직선 l, m이 이루는 각은 다음과 같이 정한다.

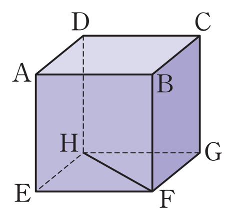
오른쪽 그림과 같이 직선 m 위의 한 점 O를 지나고 직선 l과 평행한 직선을 l'이라고 하면 두 직선 l', m은 한 평면을 결정한다. 이때 두 직선 l', m이 이루는 각을 두 직선 l, m이 이루는 각이라고 한다.



두 직선 l'과 m이 만나서 생기는 각의 크기는 점 O의 위치에 관계없이 일정하다. 또 직선 l 위의 한 점 O′을 지나고 직선 m과 평행한 직선을 이용해도 각의 크기는 같다.

일반적으로 두 직선이 이루는 각은 크기가 크지 않은 쪽을 생각한다.

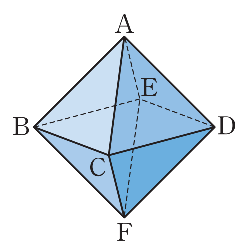
보기 오른쪽 정육면체에서 직선 AB와 직선 FH가 이루는 각의 크기는 ∠ABD 또는 ∠EFH의 크기와 같으므로 $45°$이다.



문제 1 **오른쪽 정팔면체에서 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하시오.**

(1) 직선 AB와 직선 CD

(2) 직선 AC와 직선 DF

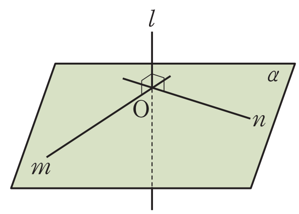


공간에서 어떤 경우에 직선과 평면이 수직일까

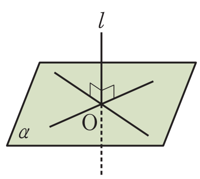
직선과 평면이 수직이 되는 경우를 살펴보자.

예제 1

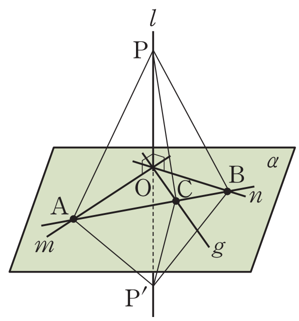
오른쪽 그림과 같이 직선 l이 평면 α와 한 점 O에서 만나고 점 O를 지나는 평면 α 위의 서로 다른 두 직선 m, n과 각각 수직이면 직선 l과 평면 α는 서로 수직임을 증명하시오.



직선 l이 평면 α와 한 점 O에서 만나고 점 O를 지나는 평면 α 위의 모든 직선과 수직일 때 직선 l과 평면 α는 서로 수직이라 하고, 이것을 기호로 $l\perp\alpha$와 같이 나타낸다. 이때 직선 l을 평면 α의 수선이라고 하며, 직선 l과 평면 α가 만나는 점 O를 수선의 발이라고 한다.



증명 오른쪽 그림과 같이 점 O를 지나는 평면 α 위의 임의의 한 직선을 g라 하고, 점 O를 지나지 않고 세 직선 m, n, g와 각각 한 점에서 만나는 직선을 그어 세 직선과의 교점을 각각 A, B, C라고 하자.



직선 l 위에 $\overline{OP}=\overline{OP'}$인 서로 다른 두 점 P, P′을 잡으면 두 직선 m, n은 모두 선분 PP′의 수직이등분선이므로

$$\overline{AP}=\overline{AP'},\ \overline{BP}=\overline{BP'}$$

따라서 $\triangle ABP\equiv\triangle ABP'$이므로

$$\angle PAC=\angle P'AC$$

또 $\triangle PAC\equiv\triangle P'AC$이므로

$$\overline{PC}=\overline{P'C}$$

이등변삼각형 CPP′에서 $\overline{PO}=\overline{P'O}$이므로

$$\overline{PP'}\perp\overline{OC}$$

즉 $l\perp g$이다.

따라서 직선 l은 점 O를 지나는 평면 α 위의 모든 직선과 수직이므로

$$l\perp\alpha$$

직선 l이 평면 α 위의 평행하지 않은 두 직선과 각각 수직이면

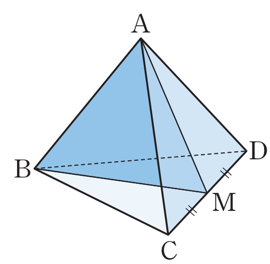
$l\perp\alpha$

문제 2

오른쪽 정사면체에서 모서리 CD의 중점을 M이라고 할 때, 다음을 증명하시오.

(1) $\overline{CD}\perp$(평면 ABM)

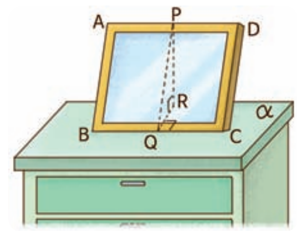
(2) $\overline{AB}\perp\overline{CD}$



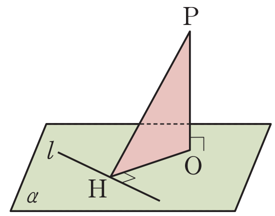
삼수선의 정리란 무엇일까

생각 톡

민서는 오른쪽 그림과 같이 직사각형 모양의 거울에 직각삼각형 모양의 지지대를 붙여 탁상용 거울을 만들었다. 이때 직선 PR는 평면 α에 수직이고, 직선 QR는 직선 BC와 수직이다.



탐구 직선 PQ와 직선 BC가 이루는 각의 크기를 추측해 보자.



오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O라 하고, 점 O를 지나지 않는 평면 α 위의 한 직선을 l이라고 하자.

점 O에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 직선 PH와 직선 l 사이의 관계를 알아보자.

$\overline{PO}\perp\alpha$이면 직선 PO는 평면 α 위의 모든 직선과 수직이다.

$\overline{PO}\perp\alpha$이고 직선 l은 평면 α 위의 직선이므로

$$\overline{PO}\perp l$$

이다. 또 $\overline{OH}\perp l$이므로 직선 l은 직선 PO와 직선 OH를 포함하는 평면 POH에 수직이다. 이때 직선 PH는 평면 POH에 포함되므로

$$\overline{PH}\perp l$$

이다.

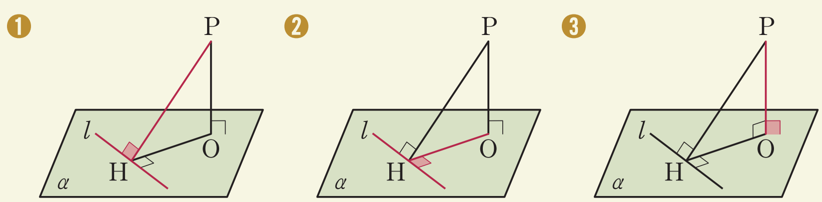
일반적으로 다음이 성립하고 이것을 **삼수선의 정리**라고 한다.

삼수선의 정리

❶ $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OH}\perp l$이면 $\quad\overline{PH}\perp l$

❷ $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{PH}\perp l$이면 $\quad\overline{OH}\perp l$

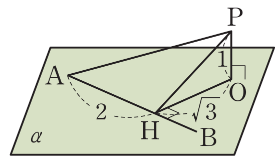
❸ $\overline{PH}\perp l$, $\overline{OH}\perp l$, $\overline{PO}\perp\overline{OH}$이면 $\quad\overline{PO}\perp\alpha$



스스로 개념탐구 삼수선의 정리 ❷, ❸을 증명해 보자.

예제 2

오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O, 점 O에서 평면 α 위의 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자. $\overline{OP}=1$, $\overline{OH}=\sqrt{3}$, $\overline{AH}=2$일 때, 다음에 답하시오.



(1) 삼각형 PAH가 직각삼각형임을 보이시오.
(2) 선분 PA의 길이를 구하시오.

풀이 (1) $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OH}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리 1에 의하여

$$\overline{PH}\perp\overline{AB}$$

따라서 삼각형 PAH는 직각삼각형이다.

(2) 직각삼각형 POH에서 $\overline{PH}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

따라서 직각삼각형 PAH에서 $\overline{PA}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

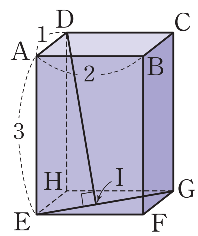
답 풀이 참조

문제 3

오른쪽 직육면체에서

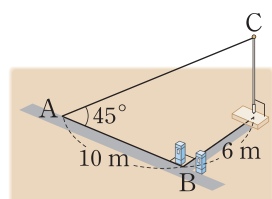
$$\overline{AB}=2,\ \overline{AD}=1,\ \overline{AE}=3$$

이다. 점 D에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 I라고 할 때, 선분 DI의 길이를 구하시오.



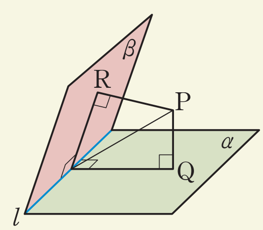
문제 4

오른쪽 그림과 같이 정문 B를 지나는 직선 도로와 정문 B에서 국기 게양대까지의 길은 수직이고, 직선 도로 위의 한 지점 A에서 정문 B까지의 거리는 10 m, 정문 B에서 국기 게양대까지의 거리는 6 m이다. 국기 게양대의 끝부분 C에 대하여 $\angle BAC=45°$일 때, C지점에서 지면까지의 거리를 구하시오.(단, 국기 게양대는 지면과 수직이고, 정문과 국기 게양대의 크기는 무시한다.)



설명하기

오른쪽 그림과 같이 직선 l에서 만나는 두 평면 α, β와 두 평면 α, β 위에 있지 않은 점 P가 있다. 두 점 Q, R는 각각 점 P에서 평면 α, 평면 β에 내린 수선의 발이다.



1 두 점 Q, R에서 직선 l에 각각 내린 수선의 발이 일치함을 설명해 보자.

2 두 점 Q, R에서 직선 l에 각각 내린 수선의 발을 S라고 할 때, 네 점 P, Q, R, S가 한 평면 위에 있음을 설명해 보자.

3 정사영

- 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

두 평면이 이루는 각은 어떻게 정의할까

생각톡

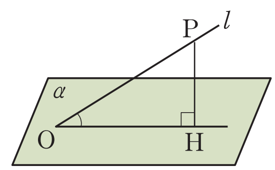
노트북을 오른쪽과 같이 펼쳤을 때, 선분 PO는 평면 AOPD와 평면 BOPC의 교선이고, 점 M은 선분 PO의 중점이다.

탐구 ① $\angle\mathrm{AOB}$, $\angle\mathrm{AMB}$, $\angle\mathrm{APB}$의 크기를 비교해 보자.

탐구 ② $\angle\mathrm{AOB}$와 $\angle\mathrm{DPC}$의 크기를 비교해 보자.

공간에서 직선과 평면이 이루는 각을 알아보자.

평면 α에 수직이 아닌 직선 l이 평면 α와 점 O에서 만날 때, 직선 l 위의 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 이때 $\angle\mathrm{POH}$를 직선 l과 평면 α가 이루는 각이라고 한다.

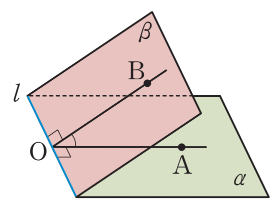


한편 직선 l이 평면 α와 평행할 때, 직선 l과 평면 α가 이루는 각의 크기는 $0°$이다.

공간에서 두 평면이 이루는 각을 알아보자.

평면 위의 한 직선은 그 평면을 두 부분으로 나누는데, 그 각각을 반평면이라고 한다.

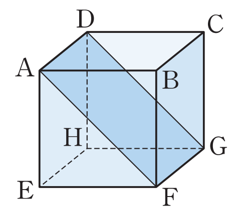
오른쪽 그림과 같이 직선 l을 공유하는 두 반평면 α, β로 이루어진 도형을 **이면각**이라고 한다. 이때 직선 l을 **이면각의 변**, 두 반평면 α, β를 각각 **이면각의 면**이라고 한다.



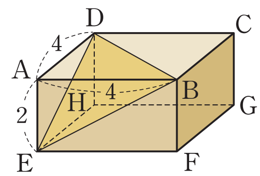
이면각의 변 l 위의 한 점 O를 지나고 직선 l에 수직인 두 반직선 OA, OB를 두 반평면 α, β 위에 각각 그을 때, $\angle\mathrm{AOB}$의 크기는 점 O의 위치에 관계없이 일정하고 이 각의 크기를 **이면각의 크기**라고 한다.

서로 다른 두 평면이 만나면 네 개의 이면각이 생기는데, 일반적으로 이 중에서 크기가 크지 않은 한 이면각의 크기를 두 평면이 이루는 각의 크기라고 한다. 특히 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 $90°$일 때 두 평면 α, β는 서로 수직이라 하고, 이것을 기호로 $\alpha\perp\beta$와 같이 나타낸다.

보기 오른쪽 정육면체에서 평면 ABCD와 평면 AFGD가 이루는 각의 크기는 $\angle BAF$ 또는 $\angle CDG$의 크기와 같으므로 $45°$이다.



문제 1 오른쪽 직육면체에서 $\overline{AB}=\overline{AD}=4$, $\overline{AE}=2$이다. 평면 ABCD와 평면 BDE가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.

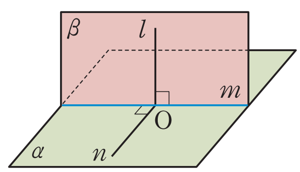


문제 2 밑면이 정사각형이고 옆면이 정삼각형인 사각뿔 모양의 피라미드가 있다. 이 피라미드의 밑면과 옆면이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.

예제 1 평면 α에 수직인 직선 l을 포함하는 평면 β는 평면 α에 수직임을 증명하시오.

증명 오른쪽 그림과 같이 두 평면 α, β의 교선을 m이라 하고, 직선 l과 평면 α의 교점을 O라고 하자. 평면 α 위에 점 O를 지나고 직선 m에 수직인 직선 n을 그으면

$$l\perp m,\ m\perp n$$

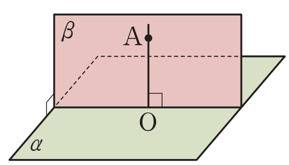


이므로 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기는 두 직선 l, n이 이루는 각의 크기와 같다. 이때 $l\perp\alpha$이고 직선 n은 평면 α에 포함되므로

$$l\perp n$$

따라서 $\alpha\perp\beta$이다.

문제 3 평면 α에 수직인 평면 β 위의 한 점 A에서 두 평면 α, β의 교선에 내린 수선의 발을 O라고 할 때, 직선 AO는 평면 α에 수직임을 증명하시오.



정사영이란 무엇일까

생각톡

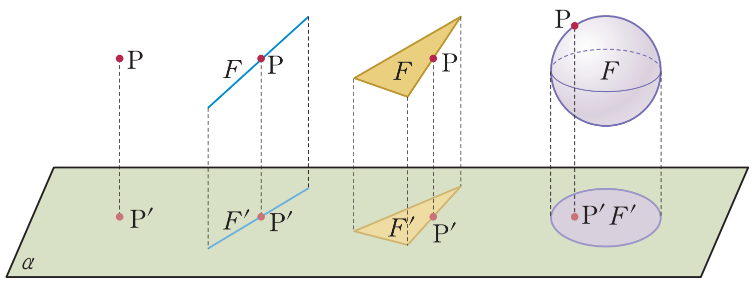
오른쪽과 같이 직사각형 모양의 학생증이 있다. 빛이 지면에 수직으로 비출 때, 지면에 생기는 학생증의 그림자의 모양을 살펴보려고 한다.

탐구 그림자의 모양이 될 수 있는 도형을 모두 말해 보자.

한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 P′이라고 할 때, 점 P′을 점 P의 평면 α 위로의 **정사영**이라고 한다.

또 도형 F에 속하는 각 점의 평면 α 위로의 정사영으로 이루어진 도형 F'을 도형 F의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다.

다음 그림은 여러 가지 도형의 평면 α 위로의 정사영이다.



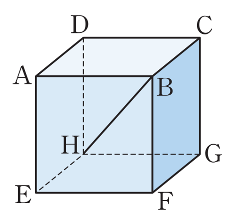
직선이 평면 α와 수직이면 직선의 평면 α 위로의 정사영은 한 점이다.
또 다각형을 포함하는 평면이 평면 α와 수직이면 다각형의 평면 α 위로의 정사영은 선분이다.

일반적으로 평면 위로의 정사영에서 점의 정사영은 점이고, 직선의 정사영은 직선이거나 한 점이다. 또 다각형의 정사영은 다각형이거나 선분이고, 구의 정사영은 원이다.

보기 오른쪽 정육면체에서

❶ 점 B의 평면 EFGH 위로의 정사영은 점 F이다.

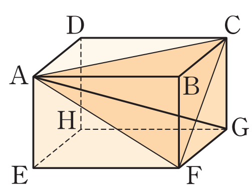
❷ 대각선 BH의 평면 EFGH 위로의 정사영은 선분 FH이다.



문제 4 **오른쪽 직육면체에서 다음을 구하시오.**

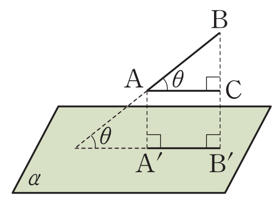
(1) 대각선 AG의 평면 EFGH 위로의 정사영

(2) 삼각형 AFC의 평면 DHGC 위로의 정사영



정사영의 길이와 넓이는 어떻게 구할까

선분의 길이와 그 선분의 정사영의 길이 사이의 관계를 알아보자.



오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 평면 α와 직선 AB가 이루는 각의 크기를 θ $(0° < \theta < 90°)$라고 하자.

이때 $\overline{AA'} \perp \alpha$, $\overline{BB'} \perp \alpha$이므로 $\overline{AA'} /\!/ \overline{BB'}$이다.

또 점 A에서 직선 BB′에 내린 수선의 발을 C라고 하면

$$\overline{A'B'} /\!/ \overline{AC}$$

이므로 $\angle BAC = \theta$이다.

또 $\overline{A'B'} = \overline{AC}$이고 삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = \overline{AB}\cos\theta$이므로

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}\cos\theta \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

이다.

한편 직선 AB와 평면 α가 평행하거나 수직인 경우에도 ①이 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

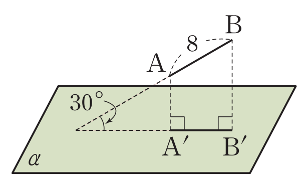
정사영의 길이

선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ $(0° \le \theta \le 90°)$라고 하면

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}\cos\theta$$

보기 선분 AB의 길이가 8이고 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기가 $30°$일 때, 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라고 하면

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}\cos 30° = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$



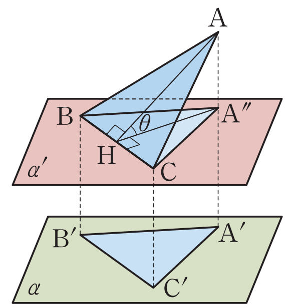
문제 5 **선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, 다음을 구하시오.**

(1) $\overline{AB} = 6$, $\theta = 60°$일 때, 선분 A′B′의 길이

(2) $\overline{AB} = 10$, $\overline{A'B'} = 5\sqrt{2}$일 때, θ의 값

도형의 넓이와 그 도형의 정사영의 넓이 사이의 관계를 알아보자.

삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영을 삼각형 $A'B'C'$이라 하고, 평면 α와 평면 ABC가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0^\circ<\theta<90^\circ)$라고 하자.



오른쪽 그림과 같이 직선 BC와 평면 α가 평행한 경우에 변 BC를 포함하고 평면 α에 평행한 평면을 α'이라 하고, 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

이때 평면 α'과 직선 AA'의 교점을 A''이라고 하면 삼수선의 정리 ❷에 의하여 $\overline{A''H}\perp\overline{BC}$이므로 $\angle AHA''=\theta$이다.

또 삼각형 ABC와 삼각형 $A'B'C'$의 넓이를 각각 S, S'이라고 하면 S'은 삼각형 $A''BC$의 넓이와 같으므로

$$S'=\frac{1}{2}\,\overline{BC}\times\overline{A''H}=\frac{1}{2}\,\overline{BC}\times\overline{AH}\cos\theta$$

이고 $S=\frac{1}{2}\,\overline{BC}\times\overline{AH}$이므로 다음이 성립한다.

$$S'=S\cos\theta \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

한편 직선 BC가 평면 α와 평행하지 않은 경우에도 ②가 성립하고, 평면 ABC와 평면 α가 평행하거나 수직인 경우에도 ②가 성립한다.

일반적으로 도형의 넓이와 그 도형의 정사영의 넓이 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

정사영의 넓이

평면 β 위에 있는 도형의 넓이를 S, 이 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S'이라고 할 때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0^\circ\le\theta\le90^\circ)$라고 하면

$$S'=S\cos\theta$$

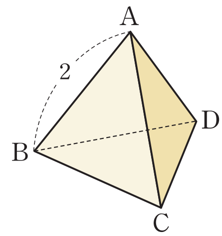
보기 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 45°이고 평면 β 위에 있는 도형의 넓이가 12일 때, 이 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는

$$12\cos45^\circ=12\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$$

문제 6 **두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 60°이고 평면 β 위에 한 변의 길이가 4인 정삼각형이 있다. 이 정삼각형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 구하시오.**

예제 2

오른쪽은 한 모서리의 길이가 2인 정사면체이다. 다음을 구하시오.



(1) 삼각형 ABC의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이

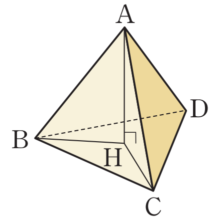
(2) 평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값

풀이 (1) 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라고 하면 삼각형 ABC의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형 HBC이다. 이때 점 H는 삼각형 BCD의 무게중심이고, 삼각형 BCD의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$$

이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{3}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$



$\triangle ABH \equiv \triangle ACH \equiv \triangle ADH$ 이므로 $\overline{BH}=\overline{CH}=\overline{DH}$ 즉 점 H는 삼각형 BCD의 외심이다. 이때 정삼각형의 외심과 무게중심은 일치하므로 점 H는 삼각형 BCD의 무게중심이다.

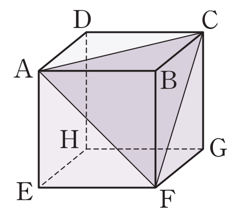
(2) 삼각형 ABC의 넓이는 $\sqrt{3}$이므로 $\sqrt{3}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서

$$\cos\theta=\frac{1}{3}$$

답 (1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (2) $\frac{1}{3}$

문제 7

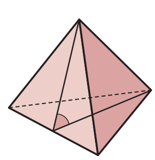
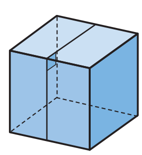
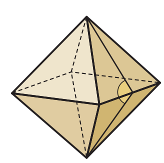
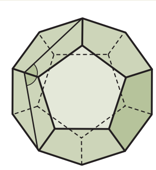
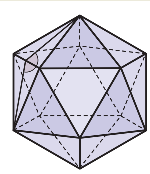
오른쪽 정육면체에서 평면 AFC와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.



이야기 수학

정다면체의 이면각의 크기

정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체의 5종류이고, 각 정다면체에서 두 면이 이루는 이면각의 크기는 다음과 같이 일정하다.

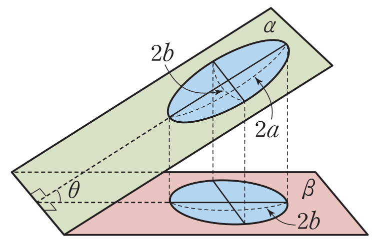
정사면체	정육면체	정팔면체	정십이면체	정이십면체
				
약 70.5°	90°	약 109.5°	약 116.6°	약 138.2°

수학 역량 플러스

문제 해결

정사영을 이용하여 타원의 넓이 구하기

지면에 비스듬히 빛을 비추고 동전을 빛에 수직으로 놓으면 지면에 생기는 동전의 그림자의 모양은 타원이다. 이를 통해 타원의 정사영이 원임을 알 수 있고, 이를 이용하여 타원의 넓이를 구할 수 있다.



오른쪽 그림과 같이 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 θ이고, 평면 α 위에 장축의 길이가 $2a$, 단축의 길이가 $2b$인 타원이 있다. 이 타원의 평면 β 위로의 정사영이 지름의 길이가 $2b$인 원일 때, 타원의 장축의 정사영이 원의 지름이므로

$$2a\cos\theta=2b, \qquad \cos\theta=\frac{b}{a}$$

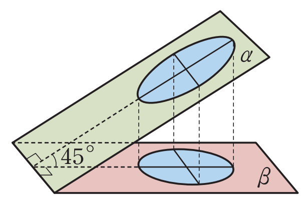
이다. 이때 타원의 넓이를 S라고 하면

$$S\cos\theta=b^2\pi$$

이므로 다음이 성립한다.

$$S=b^2\pi\times\frac{1}{\cos\theta}=b^2\pi\times\frac{a}{b}=ab\pi$$

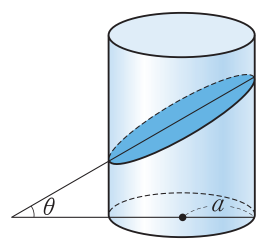
활동 1 오른쪽 그림과 같이 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 45°이고, 평면 α 위에 있는 타원의 평면 β 위로의 정사영이 반지름의 길이가 6인 원일 때, 다음을 구해 보자.



(1) 타원의 넓이

(2) 타원의 장축의 길이

활동 2 오른쪽 그림과 같이 원기둥을 밑면과 이루는 각의 크기가 $\theta\ (0^\circ<\theta<90^\circ)$인 평면으로 자른 단면은 타원이다. 원기둥의 밑면인 원의 반지름의 길이가 a일 때, 다음에 답해 보자.



(1) 타원의 장축, 단축의 길이를 a와 θ에 대한 식으로 나타내어 보자.

(2) 타원의 넓이를 a와 θ에 대한 식으로 나타내어 보자.

중단원 마무리

• 정답 및 풀이 166쪽

1 평면의 결정 조건

① 한 직선 위에 있지 않은 세 점

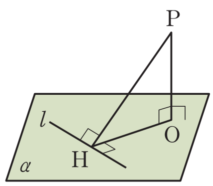
② 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점

③ 한 점에서 만나는 두 직선

④ $\boxed{\quad\quad}$한 두 직선

2 삼수선의 정리

평면 α 위에 있지 않은 점 P, 평면 α 위의 직선 l, 직선 l 위의 점 H, 직선 l 위에 있지 않은 평면 α 위의 점 O에 대하여



(1) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이면

$\boxed{\quad\quad\quad}$

(2) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$이면 $\boxed{\quad\quad\quad}$

(3) $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{PO}}\perp\overline{\mathrm{OH}}$이면 $\boxed{\quad\quad\quad}$

3 정사영

(1) 한 직선을 공유하는 두 반평면으로 이루어진 도형을 $\boxed{\quad\quad}$이라고 한다.

(2) 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 P′을 점 P의 평면 α 위로의 $\boxed{\quad\quad}$이라고 한다.

(3) **정사영의 길이**

선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0^\circ\le\theta\le 90^\circ)$라 고 하면

$\overline{\mathrm{A'B'}}=\boxed{\quad\quad\quad}$

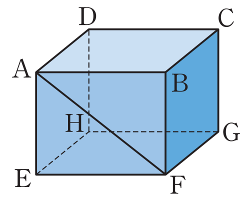
(4) **정사영의 넓이**

평면 β 위에 있는 도형의 넓이를 S, 이 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S'이라고 할 때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0^\circ\le\theta\le 90^\circ)$라고 하면

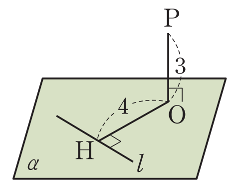
$S'=\boxed{\quad\quad\quad}$

기본 문제

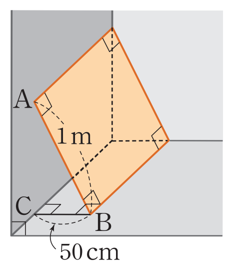
1 오른쪽 직육면체의 모서리를 연장한 직선 중에서 직선 AF와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수를 구하시오.



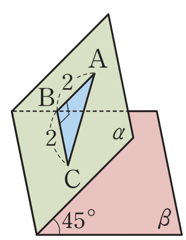
2 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이고 $\overline{\mathrm{PO}}=3$, $\overline{\mathrm{OH}}=4$일 때, 점 P와 직선 l 사이의 거리를 구하시오.



3 직사각형 모양의 판자가 바닥과 수직인 벽면에 오른쪽 그림과 같이 비스듬히 세워져 있다. $\overline{\mathrm{AB}}=1\,\mathrm{m}$, $\overline{\mathrm{BC}}=50\,\mathrm{cm}$일 때, 판자가 바닥과 이루는 각의 크기를 구하시오. (단, 판자의 두께는 무시한다.)



4 오른쪽 그림과 같이 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 45°이고 평면 α 위에 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=2$인 직각이등변삼각형 ABC가 있다. 직선 BC가 두 평면 α, β의 교선과 평행할 때, 다음을 구하시오.



(1) 선분 AB의 평면 β 위로의 정사영의 길이

(2) 삼각형 ABC의 평면 β 위로의 정사영의 넓이

표준 문제

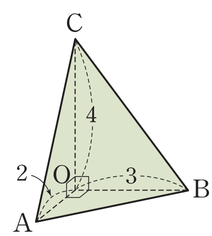
5 삼각기둥의 꼭짓점으로 결정되는 서로 다른 평면의 개수를 구하시오.

추론 **6** 서로 다른 두 직선 l, m과 서로 다른 두 평면 α, β에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고르시오.

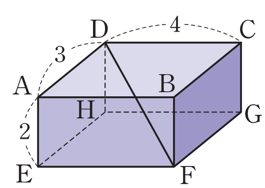
보기

ㄱ. $l\perp\alpha$, $l\perp\beta$이면 $\alpha /\!/ \beta$이다.
ㄴ. $l /\!/ \alpha$, $m\perp\alpha$이면 $l\perp m$이다.
ㄷ. $l\perp\alpha$, $l /\!/ \beta$이면 $\alpha\perp\beta$이다.

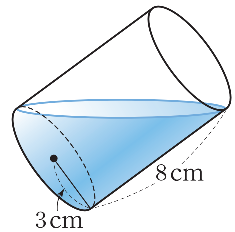
서술형 **7** 오른쪽 사면체에서 $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{OB}}$, $\overline{\mathrm{OB}}\perp\overline{\mathrm{OC}}$, $\overline{\mathrm{OC}}\perp\overline{\mathrm{OA}}$이고 $\overline{\mathrm{OA}}=2$, $\overline{\mathrm{OB}}=3$, $\overline{\mathrm{OC}}=4$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



8 오른쪽 직육면체에서 $\overline{\mathrm{AD}}=3$, $\overline{\mathrm{CD}}=4$, $\overline{\mathrm{AE}}=2$이다. 직선 DF가 세 평면 ABCD, AEHD, DHGC와 이루는 각의 크기를 각각 α, β, γ라고 할 때, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$의 값을 구하시오.



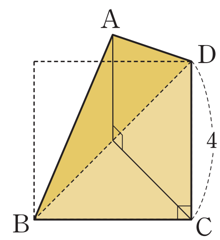
9 밑면인 원의 반지름의 길이가 3 cm이고 높이가 8 cm인 원기둥 모양의 물통에 물을 가득 채운 후 오른쪽 그림과 같이 기울여서 물의 양이 처음의 $\frac{1}{2}$만 남게 하였다. 이때 수면의 넓이를 구하시오. (단, 물통의 두께는 무시한다.)



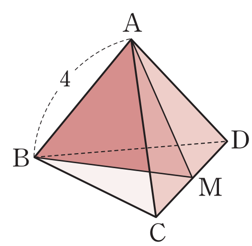
발전 문제

문제 해결

10 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD를 오른쪽 그림과 같이 대각선 BD를 접는 선으로 하여 면 ABD와 면 BCD가 수직이 되도록 접었을 때, 점 A와 직선 CD 사이의 거리를 구하시오.



11 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 모서리 CD의 중점을 M이라고 할 때, 삼각형 ABM의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이를 구하시오.



서술형

12 오른쪽 그림은 밑면이 정사각형이고 옆면이 정삼각형인 사각뿔에서 네 옆면의 내접원의 밑면 ABCD 위로의 정사영을 그린 것이다. $\overline{AB}=6$일 때, 네 정사영으로 둘러싸인 빗금 친 부분의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.