Ⅱ 벡터

해밀턴
(Hamilton, W. R., 1805~1865)
위치벡터의 개념을 창안하고 벡터를 좌표와 대응시켜 벡터공간의 기초를 다졌다.

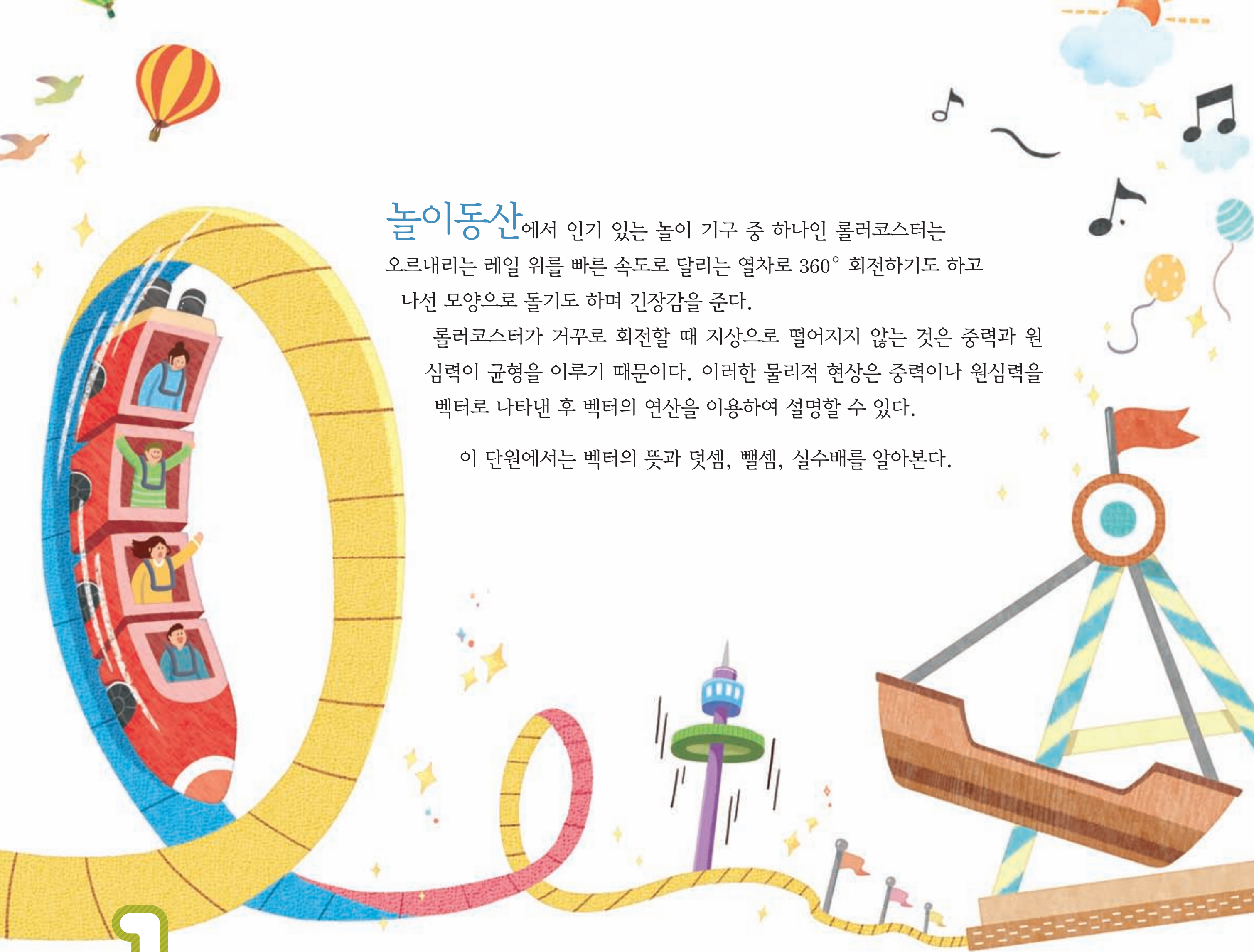
그라스만
(Grassmann, H. G., 1809~1877)
모든 차원의 벡터에 대한 연산을 체계적으로 확립하였다.

학습목표

- **벡터**의 뜻을 안다.
- 벡터의 **덧셈**, **뺄셈**, **실수배**를 할 수 있다.
- **위치벡터**의 뜻을 알고, **평면벡터와 좌표의 대응**을 이해한다.
- 두 평면벡터의 **내적**의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
- 좌표평면에서 벡터를 이용하여 **직선과 원의 방정식**을 구할 수 있다.

크기와 방향을 동시에 나타내는 도구, 벡터

천체의 운동, 자동차나 비행기의 운행, 태풍의 이동과 같이 운동하는 물체에 작용하는 힘은 그 크기와 방향을 함께 고려해야 하는데, 이러한 현상을 기술하거나 해석할 때 벡터가 중요한 도구로 사용된다. 벡터는 현대 수학의 발전에 큰 역할을 했을 뿐만 아니라 물리학, 공학, 의학, 경제학 등 여러 분야에서도 중요한 도구로 사용된다.



놀이동산에서 인기 있는 놀이 기구 중 하나인 롤러코스터는 오르내리는 레일 위를 빠른 속도로 달리는 열차로 360° 회전하기도 하고 나선 모양으로 돌기도 하며 긴장감을 준다.

롤러코스터가 거꾸로 회전할 때 지상으로 떨어지지 않는 것은 중력과 원심력이 균형을 이루기 때문이다. 이러한 물리적 현상은 중력이나 원심력을 벡터로 나타낸 후 벡터의 연산을 이용하여 설명할 수 있다.

이 단원에서는 벡터의 뜻과 덧셈, 뺄셈, 실수배를 알아본다.

(출처: 헤이즐 뮤어, 『한 장의 지식 과학』)

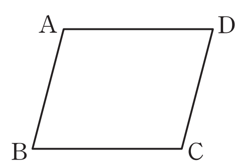
1 벡터의 연산

준비학습

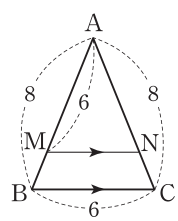
1 오른쪽 평행사변형 ABCD에서 다음을 구하시오.

(1) 선분 AB와 평행한 선분

(2) 선분 AB와 길이가 같은 선분



2 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=8$이고 $\overline{BC}=6$인 이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AM}=6$, $\overline{MN} /\!/ \overline{BC}$일 때, $\overline{MN}$의 길이를 구하시오.



1 벡터

● 벡터의 뜻을 안다.

벡터란 무엇일까

생각 톡

우리 주변에서 양을 나타낼 때, 크기만으로 나타낼 수 있는 것도 있지만 그렇지 않은 것도 있다. 예를 들어 넓이는 크기만으로 충분히 나타낼 수 있지만 바람은 세기와 방향을 모두 표시해야 정확히 나타낼 수 있다.

탐구 다음에서 크기만으로 나타낼 수 있는 양과 크기와 방향을 모두 나타내어야 하는 양을 구별해 보자.


튀김 기름의 온도


혜성의 속도


풍선의 부피

크기만을 갖는 양을 스칼라라고 한다.

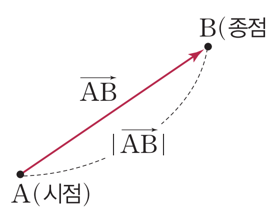
길이, 넓이, 부피, 속력 등은 그 양을 하나의 실수로 나타낼 수 있다. 그러나 속도나 가속도, 물체에 작용하는 힘 등은 그 양을 크기뿐만 아니라 방향도 함께 나타내어야 한다. 이와 같이 크기와 방향을 함께 갖는 양을 **벡터**라고 한다.

벡터를 그림으로 나타낼 때에는 선분에 화살표로 방향을 표시하여 나타낸다. 이때 선분의 길이는 **벡터의 크기**를 나타내고, 화살표의 방향은 벡터의 방향을 나타낸다.

방향이 점 A에서 점 B로 향하고 크기가 선분 AB의 길이와 같은 벡터를 벡터 AB라 하고, 이것을 기호로

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

와 같이 나타낸다. 이때 점 A를 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 **시점**, 점 B를 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 **종점**이라 하고, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 크기는 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$와 같이 나타낸다.

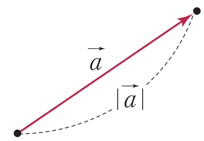


한편 크기가 1인 벡터를 **단위벡터**라고 한다. 또 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BB}}$ 등과 같이 시점과 종점이 일치하는 벡터를 **영벡터**라 하고, 이것을 기호로 $\vec{0}$와 같이 나타낸다. 영벡터의 크기는 0이고 방향은 생각하지 않는다.

벡터를 한 문자로 나타낼 때에는

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \cdots$$

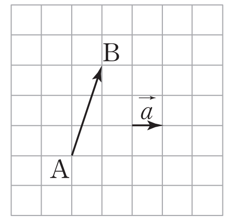
와 같이 나타내고, 벡터 $\vec{a}$의 크기는 $|\vec{a}|$와 같이 나타낸다.



보기 오른쪽 그림과 같이 한 눈금의 크기가 1인 모눈종이 위의 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$에 대하여

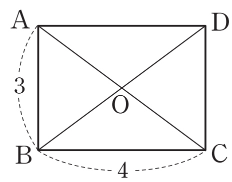
❶ $|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

❷ $|\vec{a}|=1$이므로 벡터 $\vec{a}$는 단위벡터이다.

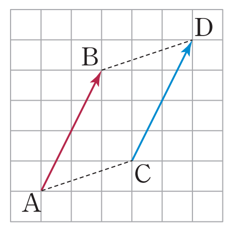


문제 1 **오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 O라고 하자. $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$일 때, 다음을 구하시오.**

(1) $|\overrightarrow{AC}|$　　　(2) $|\overrightarrow{BO}|$



오른쪽 그림에서 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 평행이동하면 벡터 $\overrightarrow{CD}$와 포개지므로 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{CD}$는 시점의 위치는 다르지만 그 크기와 방향이 각각 같다.



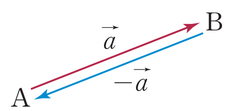
이와 같이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 크기와 방향이 각각 같을 때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 같다고 하고, 이것을 기호로

$$\vec{a}=\vec{b}$$

와 같이 나타낸다.

한편 벡터 $\vec{a}$와 크기는 같지만 방향이 반대인 벡터를 기호로 $-\vec{a}$와 같이 나타낸다.

즉 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$이면 $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$이다.



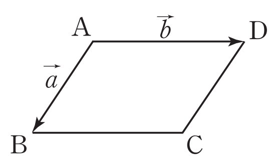
보기 오른쪽 평행사변형 ABCD에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$라고 하면

❶ 벡터 $\overrightarrow{BC}$는 벡터 $\overrightarrow{AD}$와 크기와 방향이 각각 같으므로

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\vec{b}$$

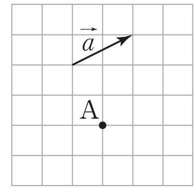
❷ 벡터 $\overrightarrow{CD}$는 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 크기는 같지만 방향이 반대이므로

$$\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}$$



문제 2 오른쪽 그림의 벡터 $\vec{a}$와 한 점 A에 대하여 다음을 만족시키는 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$를 그리시오.

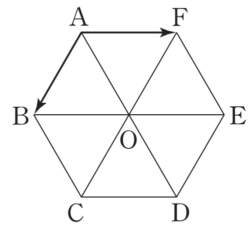
(1) $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$　　　　　(2) $\overrightarrow{AC}=-\vec{a}$



문제 3 오른쪽 그림과 같이 정육각형 ABCDEF의 세 대각선의 교점을 O라고 할 때, 정육각형의 각 꼭짓점 또는 점 O를 시점과 종점으로 하는 벡터 중에서 다음 벡터를 모두 구하시오.

(1) 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 같은 벡터

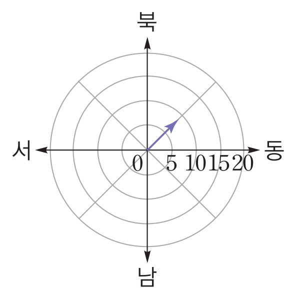
(2) 벡터 $\overrightarrow{AF}$와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터



문제 4 남서풍 10 m/s는 남서쪽에서 초속 10 m의 세기로 불어오는 바람을 말하는데, 이것을 오른쪽 그림의 화살표와 같이 나타내기로 하자. 북서풍 15 m/s를 벡터 $\vec{a}$라고 할 때, 다음에 답하시오.

(1) 오른쪽 그림에 벡터 $\vec{a}$를 그리시오.

(2) 오른쪽 그림에 벡터 $-\vec{a}$를 그리고 $-\vec{a}$가 나타내는 바람의 방향과 세기를 말하시오.



이야기 **수학**

벡터의 역사

뉴턴(Newton, I., 1642~1727)

벡터 개념의 기원은 물리학에서 찾을 수 있다. 고대 그리스 시대의 역학책에서는 속도를 크기와 방향을 함께 갖는 양으로 생각하고 평행사변형을 이용하여 두 속도의 합을 다뤘고, 이후 뉴턴이 물체에 작용하는 두 힘을 평행사변형의 대각선을 이용하여 설명했다.

속도나 힘을 평행사변형을 이용하여 설명한 것은 벡터 개념의 발달에 중요한 역할을 했지만 직접적인 것은 아니었으며, 오히려 복소수의 발견이 벡터 개념의 확립에 결정적인 영향을 미쳤다. 1545년 카르다노(Cardano, G., 1501~1576)는 『Ars Magna』에서 복소수를 처음 출판한 것으로 알려져 있는데, 이후 수학자들이 복소수를 기하학적으로 해석하려고 시도하는 과정에서 벡터를 수와 같은 연산의 대상으로 생각하게 되었다. 1797년 베셀(Wessel, C., 1745~1818)이 벡터의 물리적 아이디어와 수학의 좌표 체계를 최초로 결합했으나 널리 알려지지 않았고 이후 아르강(Argand, J. R., 1768~1822)과 가우스(Gauss, K. F., 1777~1855)가 베셀과 같은 연구 결과를 독립적으로 발견하여 발표하면서 벡터에 대한 연구가 더욱 확대되었다.

(출처: Michael J. Crowe, 『A History of Vector Analysis』, Frank Swetz 외, 『Learn from the Masters!』)

2 벡터의 덧셈과 뺄셈

- 벡터의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.

벡터의 덧셈은 어떻게 할까

생각 톡

정호는 북쪽 방향으로 글라이더를 날렸다.

탐구 서풍이 불면 글라이더가 어느 방향으로 날아가는지 말해 보자.

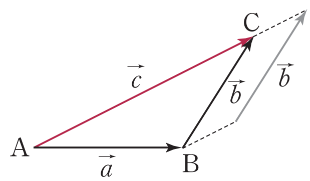
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 덧셈을 알아보자.

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이 벡터 $\vec{a}$의 시점과 종점을 각각 A, B라 하고, 벡터 $\vec{b}$를 평행이동하여 $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$가 되도록 점 C를 잡는다. $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$라고 할 때 벡터 $\vec{c}$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합이라 하고, 이것을 기호로

$$\vec{a}+\vec{b}$$

와 같이 나타낸다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$



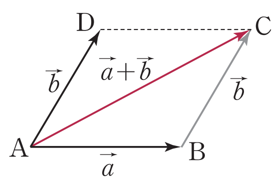
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

한편 평행사변형을 이용하여 두 벡터의 합을 나타낼 수도 있다.

두 백터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$가 되도록 세 점 A, B, D를 잡고 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 점 C를 잡으면 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$이므로

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

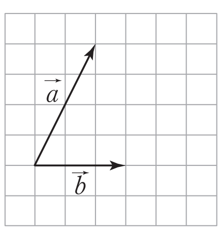
이다.



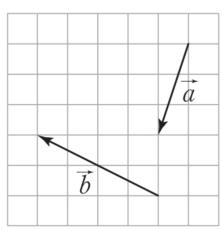
평행사변형을 이용하여 두 벡터의 합을 구할 때에는 두 벡터의 시점을 일치시킨다.

문제 1 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 다음 그림과 같을 때, $\vec{a}+\vec{b}$를 그리시오.

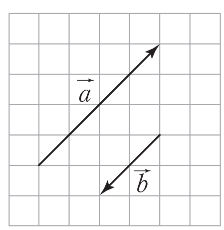
(1)



(2)



(3)

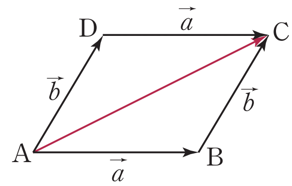


벡터의 덧셈에 대한 연산 법칙을 알아보자.

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=\overrightarrow{BC}$$

가 되도록 세 점 A, B, C를 잡고 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 점 D를 잡으면



$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$
$$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$$

이므로 다음이 성립한다.

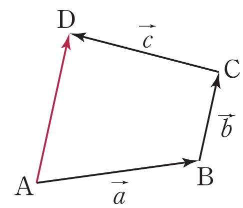
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

즉 벡터의 덧셈에 대한 교환법칙이 성립한다.

스스로 개념탐구

오른쪽 그림을 이용하여 다음이 성립함을 설명해 보자.

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$



이상을 정리하면 다음과 같다.

벡터의 덧셈에 대한 연산 법칙

세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여

❶ 교환법칙 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

❷ 결합법칙 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

벡터 $\vec{a}$에 대하여

① $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

② $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

세 벡터의 덧셈에서 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$와 $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$의 결과가 같으므로 이를 보통 괄호 없이 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$로 나타낸다.

예제 1 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$를 간단히 하시오.

풀이
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}) && \text{결합법칙}\\&=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}) && \text{교환법칙}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\\&=\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

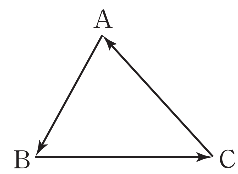
답 $\overrightarrow{AD}$

문제 2 **다음을 간단히 하시오.**

(1) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CB}$ (2) $\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{ST}$

문제 3 **삼각형 ABC에서 다음이 성립함을 설명하시오.**

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$$



벡터의 뺄셈은 어떻게 할까

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 뺄셈을 알아보자.

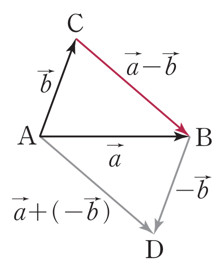
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}$와 $-\vec{b}$의 합 $\vec{a}+(-\vec{b})$를 $\vec{a}$에서 $\vec{b}$를 뺀 차라 하고, 이것을 기호로

$$\vec{a}-\vec{b}$$

와 같이 나타낸다. 즉 다음과 같다.

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$가 되도록 세 점 A, B, C를 잡고 사각형 ACBD가 평행사변형이 되도록 점 D를 잡으면



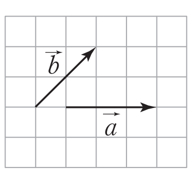
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}&=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\\&=\overrightarrow{AD}\\&=\overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

이다.

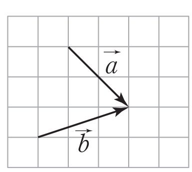
$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$

문제 4 **두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 다음 그림과 같을 때, $\vec{a}-\vec{b}$를 그리시오.**

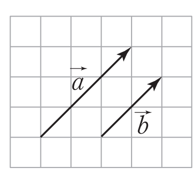
(1)



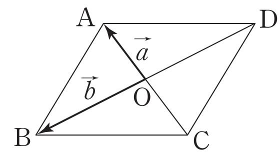
(2)



(3)



예제 2 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점을 O라고 하자. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.



(1) $\overrightarrow{AB}$　　　　(2) $\overrightarrow{AD}$

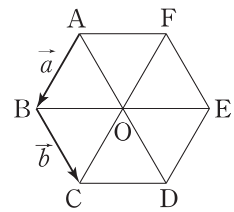
풀이 (1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$

(2) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=-\vec{a}-\vec{b}$

답 (1) $\vec{b}-\vec{a}$　(2) $-\vec{a}-\vec{b}$

문제 5 오른쪽 그림과 같이 정육각형 ABCDEF의 세 대각선의 교점을 O라고 하자. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.

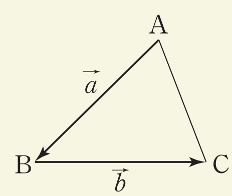


(1) $\overrightarrow{AF}$　　　　(2) $\overrightarrow{DF}$

문제 6 오른쪽 그림과 같이 배를 타고 북쪽 방향으로 시속 4 km의 속력으로 강을 가로질러 건너가려고 했는데 강물의 영향으로 인해 실제로는 배가 북동쪽 방향으로 시속 5 km의 속력으로 움직였다. 이때 강물이 흐르는 방향과 속력을 구하시오.

설명하기

오른쪽 삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$라고 하자.



1 오른쪽 그림에 $\vec{a}+\vec{b}$를 그려 보자.

2 1의 결과를 이용하여

$$|\vec{a}|-|\vec{b}|<|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

가 성립함을 설명해 보자.

3 벡터의 실수배

- 벡터의 실수배를 할 수 있다.

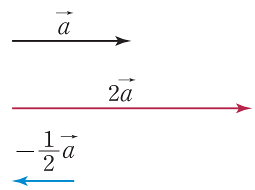
벡터의 실수배란 무엇일까

생각 톡

북극해 연안에 거주하는 이누이트족은 얼음 위를 이동할 때 개가 끄는 썰매를 이용한다고 한다. 오른쪽 그림과 같은 방향으로 개 한 마리가 썰매를 끄는 힘을 벡터 $\vec{a}$라고 하자.

탐구 오른쪽 그림과 같은 방향으로 개 두 마리가 썰매를 끄는 힘을 벡터 $\vec{a}$와 비교하여 설명해 보자.
(단, 각각의 개가 썰매를 끄는 힘의 크기는 같다.)

벡터 $\vec{a}$의 실수배를 알아보자.



영벡터가 아닌 벡터 $\vec{a}$에 대하여 벡터 $\vec{a}$와 방향이 같고 크기가 $|\vec{a}|$의 2배인 벡터는 $2\vec{a}$로 나타낸다.

또 벡터 $\vec{a}$와 방향이 반대이고 크기가 $|\vec{a}|$의 $\frac{1}{2}$배인 벡터는 $-\frac{1}{2}\vec{a}$로 나타낸다.

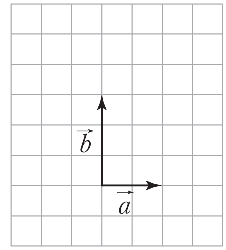
일반적으로 실수 k와 벡터 $\vec{a}$의 곱 $k\vec{a}$를 다음과 같이 정의하고, 이것을 벡터 $\vec{a}$의 **실수배**라고 한다.

> **벡터의 실수배**
>
> 실수 k와 벡터 $\vec{a}$에 대하여
>
> ❶ $\vec{a} \neq \vec{0}$일 때,
>
> (i) $k>0$이면 $k\vec{a}$는 $\vec{a}$와 방향이 같고 크기가 $k|\vec{a}|$인 벡터이다.
>
> (ii) $k=0$이면 $k\vec{a}=\vec{0}$이다.
>
> (iii) $k<0$이면 $k\vec{a}$는 $\vec{a}$와 방향이 반대이고 크기가 $|k||\vec{a}|$인 벡터이다.
>
> ❷ $\vec{a}=\vec{0}$일 때, $k\vec{a}=\vec{0}$이다.

참고 $1\vec{a}=\vec{a}$, $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$

문제 1 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 벡터를 그리시오.

(1) $\vec{a}+2\vec{b}$　　　　(2) $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$



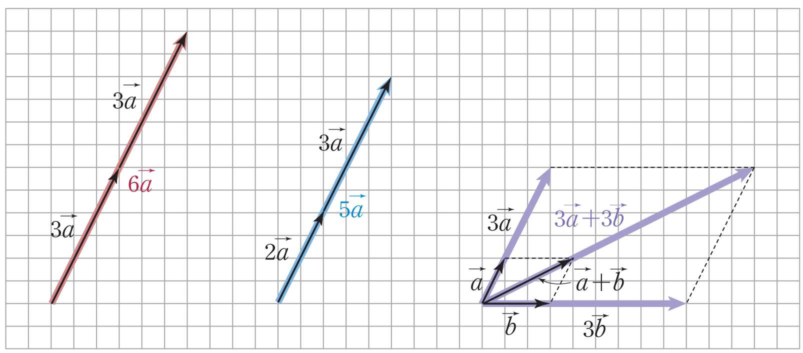
문제 2 $\vec{a}\neq\vec{0}$일 때, 벡터 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$는 벡터 $\vec{a}$와 방향이 같은 단위벡터임을 설명하시오.

벡터의 실수배에 대한 연산 법칙을 알아보자.

다음 그림에서 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$2(3\vec{a})=6\vec{a},\ 2\vec{a}+3\vec{a}=5\vec{a},\ 3(\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}+3\vec{b}$$

임을 알 수 있다.



일반적으로 벡터의 실수배에 대하여 다음과 같은 연산 법칙이 성립한다.

벡터의 실수배에 대한 연산 법칙

두 실수 k, l과 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

❶ 결합법칙　$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

❷ 분배법칙　$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

　　　　　　$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

보기

$$\begin{aligned}2(3\vec{a}-\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})&=6\vec{a}-2\vec{b}-\vec{a}+2\vec{b}\\&=(6-1)\vec{a}+(-2+2)\vec{b}\\&=5\vec{a}\end{aligned}$$

문제 3 다음을 간단히 하시오.

(1) $3(\vec{a}+4\vec{b})+2(\vec{a}-7\vec{b})$

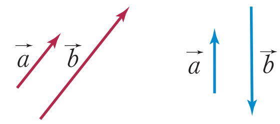
(2) $\frac{1}{3}(9\vec{a}-6\vec{b})-\left(-\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}\right)$

벡터의 평행이란 무엇일까

오른쪽 그림과 같이 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 방향이 같거나 반대일 때 $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 평행하다고 하고, 이것을 기호로

$$\vec{a} /\!/ \vec{b}$$

와 같이 나타낸다.



일반적으로 다음이 성립한다.

벡터의 평행

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$와 0이 아닌 실수 k에 대하여

$$\vec{a} /\!/ \vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a}$$

보기 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$에 대하여 $\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=-2\vec{a}+2\vec{b}$이면 $\vec{q}=-2\vec{p}$이므로

$$\vec{p} /\!/ \vec{q}$$

문제 4 세 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$에 대하여

$$\vec{p}=3\vec{a}-4\vec{b},\ \vec{q}=4\vec{a}-2\vec{b},\ \vec{r}=7\vec{a}+4\vec{b}$$

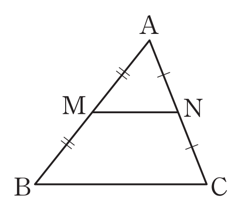
일 때, 두 벡터 $\vec{p}-\vec{q}$와 $\vec{r}-\vec{q}$는 서로 평행함을 보이시오.

(단, 두 벡터 $\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{r}-\vec{q}$는 영벡터가 아니다.)

문제 5 오른쪽 삼각형 ABC에서 두 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라고 할 때, 벡터를 이용하여

$$\overline{\mathrm{MN}} /\!/ \overline{\mathrm{BC}},\ \overline{\mathrm{MN}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}$$

임을 보이시오.



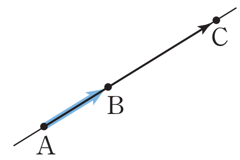
일반적으로 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여

$$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재하면

$$\overrightarrow{AB} /\!/ \overrightarrow{AC}$$

이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.



역으로 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재한다.

예제 1 **평면 위의 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여**

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=4\vec{a}-3\vec{b}$$

일 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있음을 보이시오.

풀이 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AC}$를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내면

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(4\vec{a}-3\vec{b})-\vec{a}\\&=3\vec{a}-3\vec{b}\end{aligned}$$

이므로 $\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{AB}$

따라서 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다. 답 풀이 참조

문제 6 **평면 위의 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여**

$$\overrightarrow{OA}=2\vec{a}-\vec{b},\ \overrightarrow{OB}=-\vec{a}+3\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=5\vec{a}+k\vec{b}$$

일 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 하는 실수 k의 값을 구하시오.

(단, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않다.)

적용하기

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합이 영벡터가 되는 경우를 알아보자.

1 $\vec{a}+k\vec{b}=\vec{0}$를 만족시키는 실수 k가 존재할 때, $\vec{a}$, $\vec{b}$의 관계를 말해 보자.

2 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않을 때, 두 실수 k, l에 대하여

$$k\vec{a}+l\vec{b}=\vec{0} \Longleftrightarrow k=0,\ l=0$$

이 성립함을 증명해 보자.

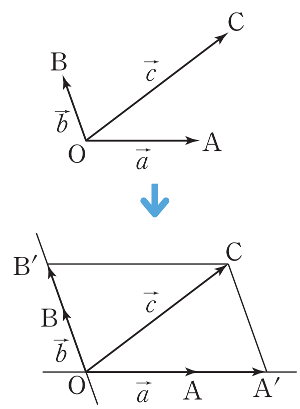
수학 역량 플러스

두 벡터로 평면의 벡터 나타내기

추론 문제 해결

벡터의 덧셈과 실수배를 이용하면 평행하지 않은 두 벡터로 평면 위의 모든 벡터를 나타낼 수 있다.

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않을 때, 임의의 벡터 $\vec{c}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$가 되도록 네 점 O, A, B, C를 잡는다.



또 직선 OA 위에 $\overline{OB} /\!/ \overline{A'C}$를 만족시키는 점 A′을 잡고, 직선 OB 위에 $\overline{OA} /\!/ \overline{B'C}$를 만족시키는 점 B′을 잡으면 다음이 성립한다.

$$\vec{c}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}$$

이때 세 점 O, A, A′이 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}=k\vec{a}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재하고, 세 점 O, B, B′도 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{OB'}=l\,\overrightarrow{OB}=l\vec{b}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 l이 존재한다.

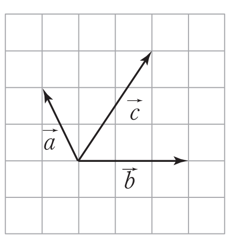
따라서 다음이 성립한다.

$$\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$$

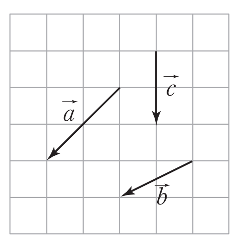
이와 같은 방법으로 평면 위의 모든 벡터를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타낼 수 있다.

활동 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 다음 그림과 같을 때, 벡터 $\vec{c}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어 보자.

(1)



(2)



중단원 마무리

• 정답 및 풀이 158쪽

1 벡터

(1) 방향이 점 A에서 점 B로 향하고 크기가 선분 AB의 길이와 같은 벡터를 $\square$와 같이 나타낸다.

(2) 벡터 $\vec{a}$의 크기는 $\square$와 같이 나타낸다.

(3) 크기가 1인 벡터를 $\square$라고 한다.

(4) 영벡터는 크기가 $\square$인 벡터이다.

2 벡터의 덧셈과 뺄셈

(1) **벡터의 덧셈과 뺄셈**

① $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\square$

② $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\square$

(2) **벡터의 덧셈에 대한 연산 법칙**

세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여

① $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

② $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

3 벡터의 실수배

(1) **벡터의 실수배**

실수 k와 벡터 $\vec{a}$에 대하여

① $\vec{a}\neq\vec{0}$일 때,

(i) $\square$이면 $k\vec{a}$는 $\vec{a}$와 방향이 같고 크기가 $k|\vec{a}|$인 벡터이다.

(ii) $k=0$이면 $k\vec{a}=\vec{0}$이다.

(iii) $\square$이면 $k\vec{a}$는 $\vec{a}$와 방향이 반대이고 크기가 $|k||\vec{a}|$인 벡터이다.

② $\vec{a}=\vec{0}$일 때, $k\vec{a}=\vec{0}$이다.

(2) **벡터의 실수배에 대한 연산 법칙**

두 실수 k, l과 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

① $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

② $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

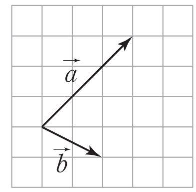
(3) **벡터의 평행**

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$와 0이 아닌 실수 k에 대하여

$\square \iff \vec{b}=k\vec{a}$

기본 문제

1 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 벡터를 그리시오.



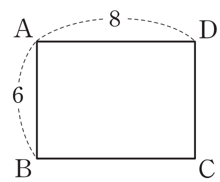
(1) $\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\vec{a}-\vec{b}$

2 오른쪽 직사각형 ABCD에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=8$일 때,

$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$

의 크기를 구하시오.



3 다음을 간단히 하시오.

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}$ (2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$

4 다음을 간단히 하시오.

(1) $-3\vec{a}+6\vec{b}+4(\vec{a}-\vec{b})$

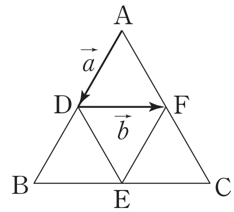
(2) $5(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})-(\vec{a}-5\vec{b}+7\vec{c})$

5 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않을 때, 두 벡터 $\vec{a}+k\vec{b}$, $-2\vec{a}+6\vec{b}$가 서로 평행하도록 하는 실수 k의 값을 구하시오.

표준 문제

6 오른쪽 삼각형 ABC에서 세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 D, E, F라고 하자. $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DF}=\vec{b}$라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.

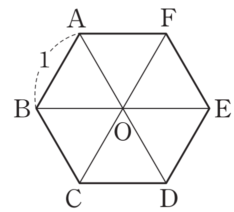
(1) $\overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{EA}$



7 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF의 세 대각선의 교점을 O라고 할 때, 다음 벡터의 크기를 구하시오.

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

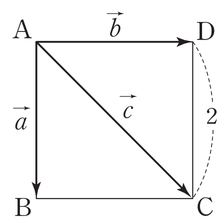
(2) $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{AE}$



8 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$라고 할 때, 다음을 구하시오.

(1) $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$

(2) $|\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}|$



9 다음에서 벡터 $\vec{x}$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.

(1) $\vec{x}-3\vec{a}=-2\vec{a}+\vec{b}$

(2) $3(2\vec{a}-5\vec{x})-(2\vec{a}-7\vec{b})=-4\vec{x}$

의사소통 **10** 평면 위의 서로 다른 두 점 A, B에 대하여

$$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=\vec{0}$$

일 때, 점 P의 위치를 설명하시오.

• 정답 및 풀이 158쪽

11 평면 위의 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{a}-\vec{b}$$

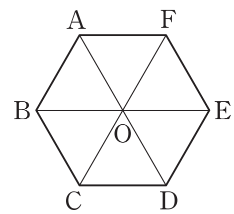
일 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있음을 보이시오.

발전 문제

서술형 **12** 오른쪽 그림과 같이 정육각형 ABCDEF의 세 대각선의 교점을 O라고 할 때,

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AO}$$

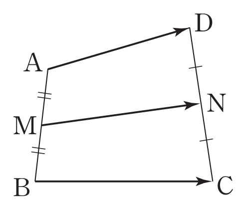
를 만족시키는 실수 k의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



추론 **13** 오른쪽 사각형 ABCD에서 두 변 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라고 할 때,

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{MN}$$

임을 보이시오.



서술형 **14** 오른쪽 그림과 같이 강가의 두 지점 A, B에 대하여 직선 AB는 강둑과 수직이다. 강물이 분속 30 m의 속력으로 흐를 때, 배가 A지점에서 직선 AB와 θ의 각을 이루면서 출발했더니 강물의 영향으로 배가 분속 150 m의 속력으로 움직여 B지점에 도착했다고 한다. 이때 $\tan\theta$의 값과 흐르지 않는 물에서의 배의 속력을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.