I 이차곡선

① 이차곡선
② 이차곡선과 직선

아폴로니오스
(Apollonios, B.C. 262?~B.C. 190?)
원뿔곡선을 연구하여 원뿔곡선의 이론을 크게 발전시켰다.

월리스
(Wallis, J., 1616~1703)
평면좌표를 이용하여 이차곡선의 방정식의 표준형을 이끌어 냈다.

학습목표

- **포물선의 뜻**을 알고, **포물선의 방정식**을 구할 수 있다.
- **타원의 뜻**을 알고, **타원의 방정식**을 구할 수 있다.
- **쌍곡선의 뜻**을 알고, **쌍곡선의 방정식**을 구할 수 있다.
- **이차곡선과 직선의 위치 관계**를 이해하고, **접선의 방정식**을 구할 수 있다.

다양하게 활용되는 이차곡선

비스듬히 던진 공이 날아가며 그리는 경로는 포물선 모양이고, 태양계 행성의 공전 궤도는 타원 모양이다. 이와 같이 이차곡선은 물체의 운동이나 천체의 운행을 비롯한 여러 가지 자연 현상을 설명하는 데 중요하게 사용된다. 또 자동차의 전조등, 체외 충격파 쇄석기, 장거리 무선 항법 장치 등의 실용적인 분야와 조형미를 강조한 건축물 등의 예술적인 분야에도 다양하게 활용된다.

혜성은 태양 주위를 도는 긴 꼬리가 달린 별로 태양계 내의 중력 등으로 인해 태양계 내로 진입하게 된다. 이때 핼리 혜성과 같이 일정한 주기로 태양의 주위를 도는 주기성 혜성의 궤도는 타원 모양이고, 모어하우스 혜성과 같이 다시 돌아오지 않는 비주기성 혜성의 궤도는 포물선이나 쌍곡선 모양이다.

이와 같은 천체의 움직임을 이해하고 예측하기 위해서는 이차곡선의 성질을 이해하는 것이 중요하다.

이 단원에서는 포물선, 타원, 쌍곡선의 뜻과 방정식을 알아본다.

(출처: 이광식, 『천문학 콘서트』)

1 이차곡선

준비학습

1 다음 두 점 A, B 사이의 거리를 구하시오.

(1) $A(5,\ -2)$, $B(-3,\ 4)$　　(2) $A(-2,\ 3)$, $B(-1,\ -1)$

2 다음 도형을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

(1) $y=2x^2$　　(2) $x^2+y^2=4$

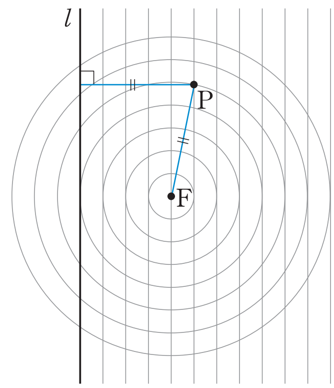
1 포물선

- 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.

포물선이란 무엇일까

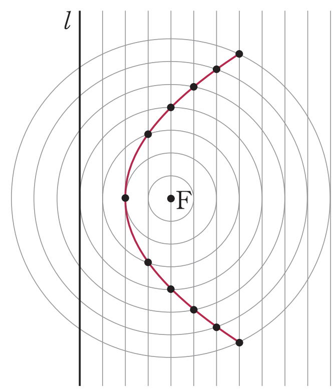
생각 톡

오른쪽 그림과 같이 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 1, 2, 3, ⋯, 7인 원, 반지름의 길이가 4인 원에 접하는 직선 l, 직선 l과 평행하고 간격이 1인 직선이 있다. 이때 점 P에서 점 F에 이르는 거리와 직선 l에 이르는 거리는 각각 5로 서로 같다.



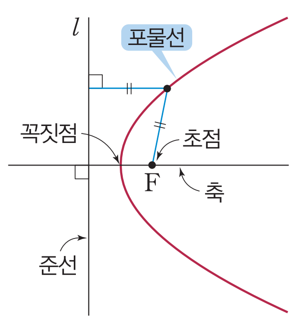
탐구 원과 직선의 교점 중에서 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 각각 2, 3, ⋯, 7로 같은 점들을 모두 찾아 표시해 보자.

위의 생각 톡에서 원과 직선의 교점 중 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 각각 같은 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하면 다음 그림과 같은 모양이 된다.



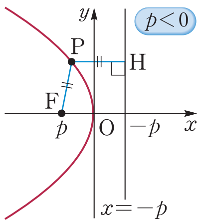
이와 같이 평면 위의 한 점 F와 이 점을 지나지 않는 한 직선 l이 주어질 때, 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 각각 같은 점들의 집합을 **포물선**이라 하고, 점 F를 포물선의 **초점**, 직선 l을 포물선의 **준선**이라고 한다.

이때 포물선의 초점 F를 지나고 준선 l에 수직인 직선을 포물선의 **축**, 포물선과 축의 교점을 포물선의 **꼭짓점**이라고 한다.

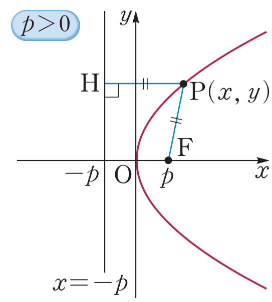


포물선의 방정식은 어떻게 구할까

좌표평면에서 점 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ $(p\neq0)$을 초점으로 하고 직선 $x=-p$를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 구해 보자.



포물선 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에서 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\mathrm{H}(-p,\ y)$이다.



포물선의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$$

이므로

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p|$$

이다. 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 다음과 같다.

$$y^2=4px \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

역으로 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 방정식 ①을 만족시키면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PF}}&=\sqrt{(x-p)^2+y^2}=\sqrt{(x-p)^2+4px}\\&=\sqrt{(x+p)^2}=|x+p|\\&=\overline{\mathrm{PH}}\end{aligned}$$

이므로 점 P는 초점이 점 $\mathrm{F}(p,\ 0)$이고 준선의 방정식이 $x=-p$인 포물선 위에 있다.

따라서 방정식 ①은 구하는 포물선의 방정식이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

포물선의 방정식 (1)

초점이 점 $\mathrm{F}(p,\ 0)$이고 준선의 방정식이 $x=-p$인 포물선의 방정식은

$$y^2=4px \ (\text{단, } p\neq0)$$

포물선 $y^2=4px$의 꼭짓점은 원점이고, 축의 방정식은 $y=0$이다.

보기 초점이 점 $\mathrm{F}(-1,\ 0)$이고 준선의 방정식이 $x=1$인 포물선의 방정식은

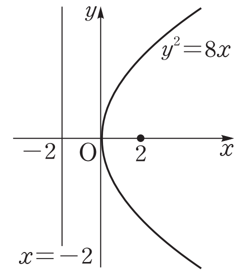
$$y^2=-4x$$

문제 1 **다음 포물선의 방정식을 구하시오.**

(1) 초점이 점 $\mathrm{F}(3,\ 0)$이고 준선의 방정식이 $x=-3$인 포물선

(2) 초점이 점 $\mathrm{F}\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$이고 준선의 방정식이 $x=\frac{1}{2}$인 포물선

예제 1 **포물선 $y^2=8x$의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고 그래프를 그리시오.**



풀이 초점의 좌표를 $(p,\ 0)$이라고 하면

$$y^2=8x=4\times 2x$$

이므로 $p=2$

따라서

초점의 좌표는 $(2,\ 0)$

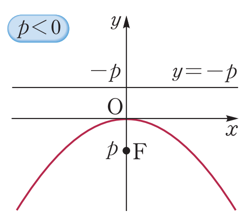
준선의 방정식은 $x=-2$

또 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조

문제 2 **다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고 그래프를 그리시오.**

(1) $y^2=x$ (2) $y^2=-12x$



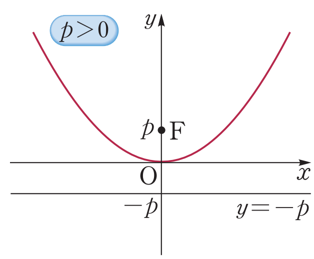
포물선 $x^2=4py$의 꼭짓점은 원점이고, 축의 방정식은 $x=0$이다.

$x^2=4py$에서 $y=\frac{1}{4p}x^2$이므로 포물선 $x^2=4py$는 이차함수 $y=\frac{1}{4p}x^2$의 그래프와 같다.

좌표평면에서 점 $\mathrm{F}(0,\ p)$ $(p\neq 0)$를 초점으로 하고 직선 $y=-p$를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 앞에서와 같은 방법으로 구하면

$$x^2=4py$$

이다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

포물선의 방정식 (2)

초점이 점 $\mathrm{F}(0,\ p)$이고 준선의 방정식이 $y=-p$인 포물선의 방정식은

$$x^2=4py\ (\text{단},\ p\neq 0)$$

문제 3 **다음 포물선의 방정식을 구하시오.**

(1) 초점이 점 $\mathrm{F}(0,\ 5)$이고 준선의 방정식이 $y=-5$인 포물선

(2) 초점이 점 $\mathrm{F}(0,\ -1)$이고 준선의 방정식이 $y=1$인 포물선

예제 2 **포물선 $x^2=2y$의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고 그래프를 그리시오.**

풀이 초점의 좌표를 $(0,\ p)$라고 하면

$$x^2=2y=4\times\frac{1}{2}y$$

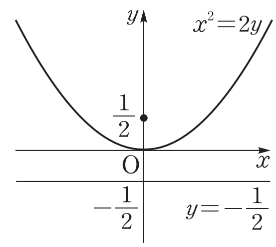
이므로 $\quad p=\dfrac{1}{2}$

따라서

초점의 좌표는 $\quad \left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$

준선의 방정식은 $\quad y=-\dfrac{1}{2}$

또 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

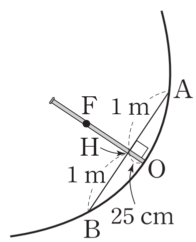


답 풀이 참조

문제 4 **다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고 그래프를 그리시오.**

(1) $x^2=8y$ (2) $x^2=-y$

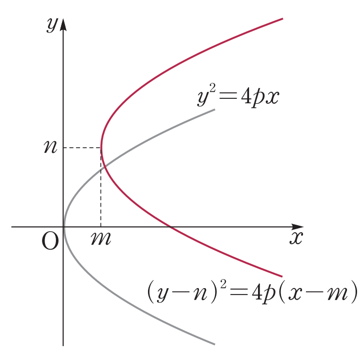
문제 5 **태양에너지를 모으는 장치의 단면은 다음 그림과 같이 초점이 F이고 꼭짓점이 O인 포물선 모양이다. 포물선 위의 두 점 A, B는 직선 OF에 대하여 대칭이고 직선 AB와 직선 OF의 교점을 H라고 할 때, $\overline{AH}=\overline{BH}=1\text{ m}$, $\overline{OH}=25\text{ cm}$이다. 이 포물선의 꼭짓점 O와 초점 F 사이의 거리를 구하시오.**



포물선 $y^2=4px$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은 다음과 같다.

$$(y-n)^2=4p(x-m)$$

이때 이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(m,\ n)$, 초점의 좌표는 $(p+m,\ n)$, 준선의 방정식은 $x=-p+m$, 축의 방정식은 $y=n$이다.



방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 도형의 방정식은
$f(x-m,\ y-n)=0$

예제 3 **포물선 $y^2-4y+4x+16=0$의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고 그래프를 그리시오.**

풀이 주어진 방정식을 변형하면

$$(y-2)^2=-4(x+3)$$

이 포물선은 포물선 $y^2=-4x$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

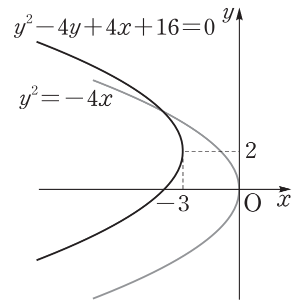
포물선 $y^2=-4x$의
초점의 좌표는 $(-1, 0)$
준선의 방정식은 $x=1$

따라서

초점의 좌표는 $(-4, 2)$

준선의 방정식은 $x=-2$

또 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

문제 6 **다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고 그래프를 그리시오.**

(1) $(y+1)^2=2(x+3)$ (2) $x^2-8x-12y+4=0$

문제 7 **다음 포물선의 방정식을 구하시오.**

(1) 초점이 점 $\mathrm{F}(3, 2)$이고 준선의 방정식이 $x=1$인 포물선

(2) 초점이 점 $\mathrm{F}(1, -1)$이고 준선의 방정식이 $y=-5$인 포물선

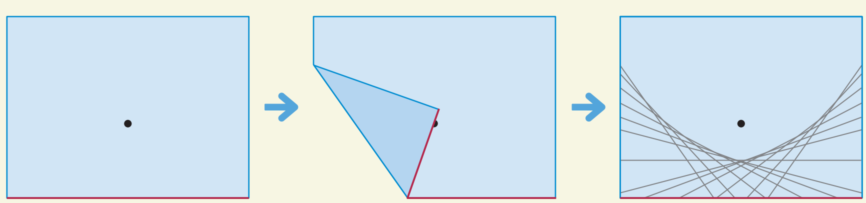
설명하기

다음과 같은 순서로 직사각형 모양의 종이를 접어 보고, 종이가 접힌 자국에서 포물선 모양이 나타나는 이유를 설명해 보자.

❶ 종이의 내부에 한 점을 표시한다.

❷ 종이의 한 변이 점을 지나도록 종이를 접었다 편다.

❸ 종이의 한 변이 점과 만나는 위치를 바꾸면서 ❷의 과정을 반복한다.



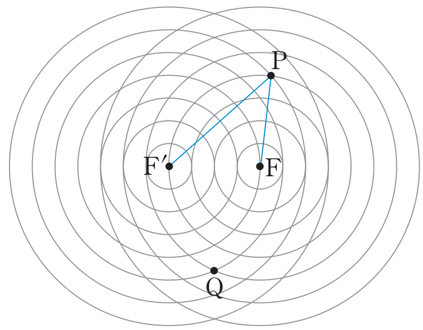
2 타원

● 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.

타원이란 무엇일까

생각 톡

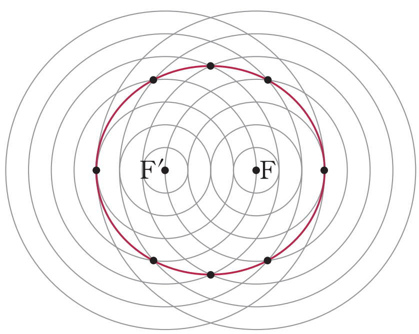
오른쪽 그림과 같이 두 점 F, F′을 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 1, 2, 3, ⋯, 7인 원이 있다. 이때 점 P에서 두 점 F, F′에 이르는 거리의 합은 10이다.



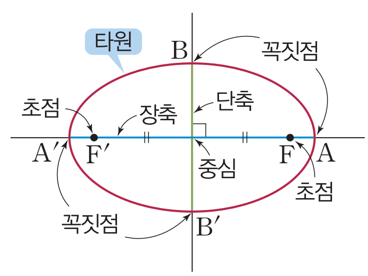
탐구 ① 점 Q에서 두 점 F, F′에 이르는 거리의 합을 구해 보자.

탐구 ② 원들의 교점 중에서 두 점 F, F′에 이르는 거리의 합이 10인 점들을 모두 찾아 표시해 보자.

위의 생각 톡에서 원들의 교점 중 두 점 F, F′에 이르는 거리의 합이 10인 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하면 다음 그림과 같은 모양이 된다.



이와 같이 평면 위의 서로 다른 두 점 F, F′에서의 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 **타원**이라 하고, 두 점 F, F′을 타원의 **초점**이라고 한다.

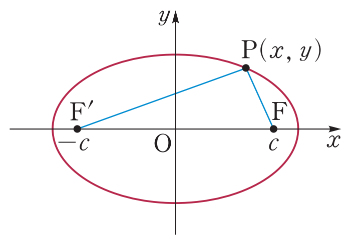


타원의 두 초점 F, F′을 잇는 직선이 타원과 만나는 두 점을 각각 A, A′, 선분 FF′의 수직이등분선이 타원과 만나는 두 점을 각각 B, B′이라고 할 때, 네 점 A, A′, B, B′을 타원의 **꼭짓점**이라고 한다. 또 선분 AA′을 타원의 **장축**, 선분 BB′을 타원의 **단축**이라 하고 장축과 단축의 교점을 타원의 **중심**이라고 한다.

타원의 두 초점은 장축 위에 있고, 타원의 중심은 선분 AA′, 선분 BB′의 중점이다. 또 타원은 장축, 단축 및 중심에 대하여 각각 대칭이다.

타원의 방정식은 어떻게 구할까

좌표평면에서 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$을 초점으로 하고 두 초점 F, F′에서의 거리의 합이 $2a\ (a>c>0)$인 타원의 방정식을 구해 보자.



타원 위의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 타원의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a$$

이므로

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

이다. 즉

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

이므로 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

이고, 다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

이다.

이때 $a>c>0$이므로 $a^2-c^2=b^2$으로 놓으면

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

이고, 양변을 a^2b^2으로 나누면 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

역으로 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 방정식 ①을 만족시키면

$$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a$$

이므로 점 P는 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$에서의 거리의 합이 $2a$인 타원 위에 있다.

따라서 방정식 ①은 구하는 타원의 방정식이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

타원의 방정식 (1)

두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$에서의 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (\text{단, } a>c>0,\ b^2=a^2-c^2)$$

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$의 초점과 장축은 x축 위에 있다.

보기 두 초점 $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-3,\ 0)$에서의 거리의 합이 10인 타원의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b^2=a^2-c^2)$$

이라고 하면 $c=3$이고 $2a=10$에서 $a=5$이므로

$$b^2=a^2-c^2=16$$

따라서 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

문제 1 **다음 타원의 방정식을 구하시오.**

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-2,\ 0)$에서의 거리의 합이 8인 타원

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(1,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-1,\ 0)$에서의 거리의 합이 6인 타원

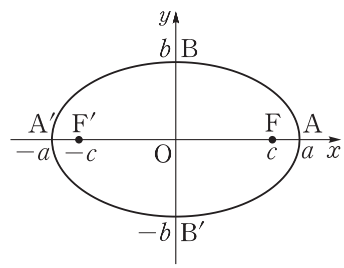
오른쪽 그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\ (c>0)$이라고 하면 $b^2=a^2-c^2$에서 $c=\sqrt{a^2-b^2}$이므로

$$\mathrm{F}(\sqrt{a^2-b^2},\ 0),\ \mathrm{F}'(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$$

이다. 또 타원의 꼭짓점은

$$\mathrm{A}(a,\ 0),\ \mathrm{A}'(-a,\ 0),$$
$$\mathrm{B}(0,\ b),\ \mathrm{B}'(0,\ -b)$$

이고, 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{AA}'}=2a$, 단축의 길이는 $\overline{\mathrm{BB}'}=2b$이다.



장축의 길이는 타원 위의 점에서 두 초점에 이르는 거리의 합과 같다.

예제 1 **타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 구하고 그래프를 그리시오.**

풀이 타원의 한 초점의 좌표를 $(c,\ 0)$이라고 하면

$$c=\sqrt{16-7}=3$$

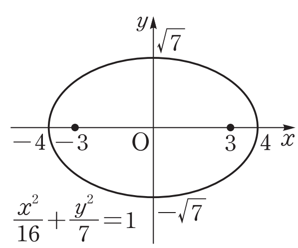
따라서

초점의 좌표는 $(3,\ 0),\ (-3,\ 0)$

장축의 길이는 $2\times4=8$

단축의 길이는 $2\times\sqrt{7}=2\sqrt{7}$

또 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

문제 2 **다음 타원의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 구하고 그래프를 그리시오.**

(1) $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{36}=1$

(2) $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{6}=1$

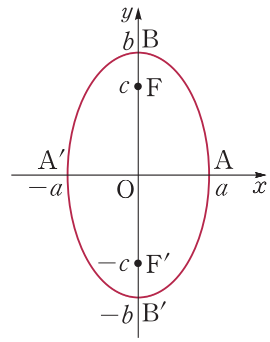
좌표평면에서 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$에서의 거리의 합이 $2b$ $(b>c>0)$인 타원의 방정식을 앞에서와 같은 방법으로 구하면

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a=\sqrt{b^2-c^2})$$

이다. 이때 $c=\sqrt{b^2-a^2}$이므로

$$\mathrm{F}(0,\ \sqrt{b^2-a^2}),\ \mathrm{F}'(0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$$

이고, 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{BB}'}=2b$, 단축의 길이는 $\overline{\mathrm{AA}'}=2a$이다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>a>0)$의 초점과 장축은 y축 위에 있다.

타원의 방정식 (2)

두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$에서의 거리의 합이 $2b$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (\text{단, } b>c>0,\ a^2=b^2-c^2)$$

문제 3 **다음 타원의 방정식을 구하시오.**

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 3)$, $\mathrm{F}'(0,\ -3)$에서의 거리의 합이 12인 타원

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 4)$, $\mathrm{F}'(0,\ -4)$에서의 거리의 합이 10인 타원

예제 2 **타원 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 구하고 그래프를 그리시오.**

풀이 타원의 한 초점의 좌표를 $(0,\ c)$라고 하면

$$c=\sqrt{9-5}=2$$

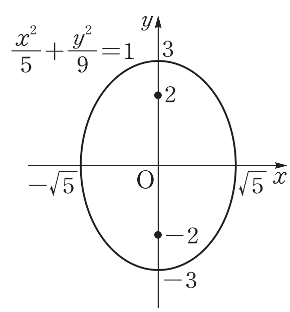
따라서

초점의 좌표는 $(0,\ 2)$, $(0,\ -2)$

장축의 길이는 $2\times3=6$

단축의 길이는 $2\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

또 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

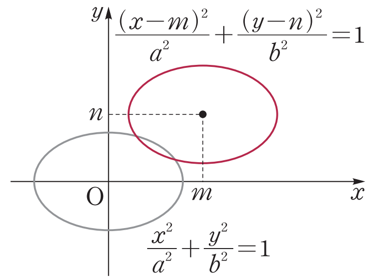
문제 4 **다음 타원의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 구하고 그래프를 그리시오.**

(1) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$

(2) $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{40}=1$

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 타원의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$



타원을 평행이동해도 장축과 단축의 길이는 변하지 않는다.

이때 이 타원의 중심의 좌표는 $(m,\ n)$, 초점의 좌표는 $(\sqrt{a^2-b^2}+m,\ n)$, $(-\sqrt{a^2-b^2}+m,\ n)$이다.

예제 3 **타원 $x^2+3y^2-2x-12y+10=0$의 중심과 초점의 좌표를 구하고 그래프를 그리시오.**

풀이 주어진 방정식을 변형하면 $\dfrac{(x-1)^2}{3}+(y-2)^2=1$

타원 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$의
중심의 좌표는 $(0,\ 0)$
초점의 좌표는
$(\sqrt{2},\ 0)$, $(-\sqrt{2},\ 0)$

이 타원은 타원 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

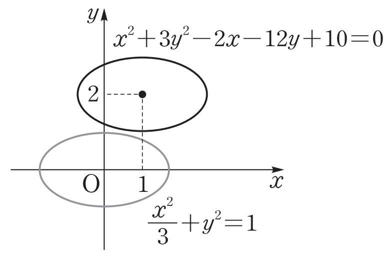
따라서

중심의 좌표는 $(1,\ 2)$

초점의 좌표는

$(\sqrt{2}+1,\ 2)$, $(-\sqrt{2}+1,\ 2)$

또 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

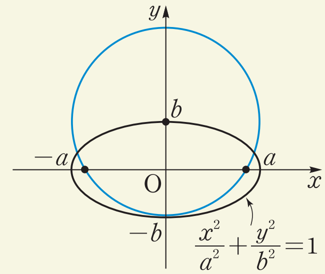
문제 5 **다음 타원의 중심과 초점의 좌표를 구하고 그래프를 그리시오.**

(1) $\dfrac{(x+2)^2}{4}+(y-1)^2=1$

(2) $25x^2+16y^2+100x-96y-156=0$

설명하기

오른쪽 그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$의 한 꼭짓점 $(0,\ b)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 a인 원은 타원의 초점을 지난다. 그 이유를 설명해 보자.



수학 역량 플러스

추론 의사소통

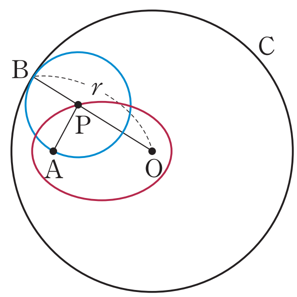
타원 만들기

타원(楕圓)에서 타(楕)는 ‘길고 둥글다’는 뜻으로 타원은 ‘길고 둥근 원’이라는 뜻이다. 실제로 원을 적당한 눈높이에서 내려다보면 가로 방향으로 긴 타원처럼 보이는데, 원기둥의 겨냥도를 그릴 때 밑면의 모양을 타원으로 그리는 이유가 이 때문이다.

두 원이 각각 다른 원의 바깥쪽에 있으면서 두 원이 한 점에서 만날 때 두 원은 외접한다고 하고, 한 원이 다른 원의 안쪽에 있으면서 두 원이 한 점에서 만날 때 두 원은 내접한다고 한다.

한 원에 내접하는 원의 중심이 그리는 도형이 타원인 경우를 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 r인 원 C와 원 C의 내부에 있는 O가 아닌 점 A에 대하여 원 C에 내접하면서 점 A를 지나는 원의 중심을 P라고 하자.



두 원의 접점을 B라고 하면

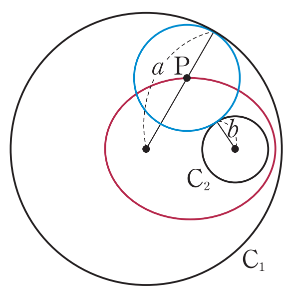
$$\overline{PO}=\overline{OB}-\overline{PB}=r-\overline{PB}$$

이다. 이때 $\overline{PA}=\overline{PB}$이므로 다음이 성립한다.

$$\overline{PA}+\overline{PO}=\overline{PA}+(r-\overline{PB})=r$$

즉 점 P에서 두 점 A, O에 이르는 거리의 합이 r로 일정하므로 점 P가 그리는 도형은 타원이다.

활동 1 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 a인 원 C_1과 원 C_1의 내부에 있는 반지름의 길이가 b인 원 C_2에 대하여 원 C_1에 내접하면서 원 C_2에 외접하는 원의 중심을 P라고 하자. 이때 점 P가 그리는 도형이 타원임을 설명해 보자. (단, 두 원 C_1, C_2의 중심은 일치하지 않는다.)



활동 2 원 $(x-1)^2+y^2=36$에 내접하면서 원 $(x+1)^2+y^2=4$에 외접하는 원의 중심 P가 그리는 도형의 방정식을 구해 보자.

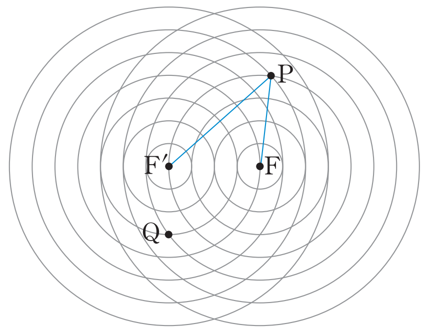
3 쌍곡선

● 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.

쌍곡선이란 무엇일까

생각 톡

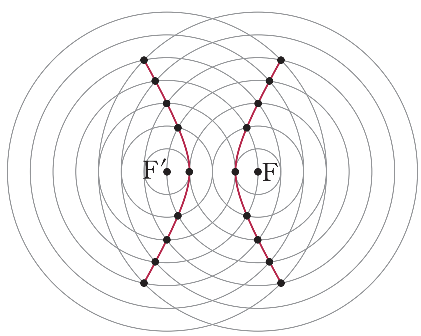
오른쪽 그림과 같이 두 점 F, F′을 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 1, 2, 3, ⋯, 7인 원이 있다. 이때 점 P에서 두 점 F, F′에 이르는 거리의 차는 2이다.



탐구 ① 점 Q에서 두 점 F, F′에 이르는 거리의 차를 구해 보자.

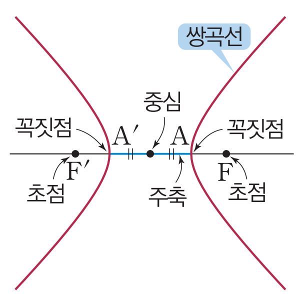
탐구 ② 원들의 교점 중에서 두 점 F, F′에 이르는 거리의 차가 2인 점들을 모두 찾아 표시해 보자.

위의 생각 톡에서 원들의 교점 중 두 점 F, F′에 이르는 거리의 차가 2인 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하면 다음 그림과 같은 모양이 된다.



이와 같이 평면 위의 서로 다른 두 점 F, F′에서의 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 **쌍곡선**이라 하고, 두 점 F, F′을 쌍곡선의 **초점**이라고 한다.

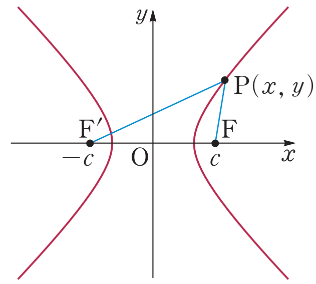
쌍곡선의 두 초점 F, F′을 잇는 직선이 쌍곡선과 만나는 두 점을 각각 A, A′이라고 할 때, 두 점 A, A′을 쌍곡선의 **꼭짓점**이라 하고, 선분 AA′을 쌍곡선의 **주축**, 선분 AA′의 중점을 쌍곡선의 **중심**이라고 한다.



쌍곡선은 주축의 연장선과 주축의 수직이등분선 및 중심에 대하여 각각 대칭이다.

쌍곡선의 방정식은 어떻게 구할까

좌표평면에서 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$을 초점으로 하고 두 초점 F, F′에서의 거리의 차가 $2a$ $(c>a>0)$인 쌍곡선의 방정식을 구해 보자.



쌍곡선 위의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$$|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=2a$$

이므로

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$$

이다. 즉

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a$$

이므로 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$cx+a^2=\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

이고, 다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

이다.

이때 $c>a>0$이므로 $c^2-a^2=b^2$으로 놓으면

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

이고, 양변을 a^2b^2으로 나누면 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

역으로 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 방정식 ①을 만족시키면

$$|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=2a$$

이므로 점 P는 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$에서의 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선 위에 있다.

따라서 방정식 ①은 구하는 쌍곡선의 방정식이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 초점과 주축은 x축 위에 있다.

쌍곡선의 방정식 (1)

두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$에서의 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\text{단, } c>a>0,\ b^2=c^2-a^2)$$

보기 두 초점 $\mathrm{F}(4,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-4,\ 0)$에서의 거리의 차가 6인 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (b^2=c^2-a^2)$$

이라고 하면 $c=4$이고 $2a=6$에서 $a=3$이므로

$$b^2=c^2-a^2=7$$

따라서 쌍곡선의 방정식은 $\quad \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$

문제 1 **다음 쌍곡선의 방정식을 구하시오.**

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-3,\ 0)$에서의 거리의 차가 2인 쌍곡선

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(6,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-6,\ 0)$에서의 거리의 차가 10인 쌍곡선

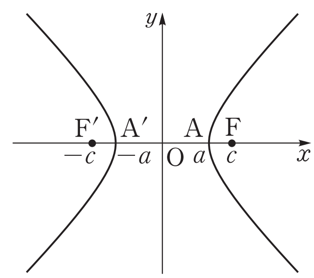
오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0)$의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$이라고 하면 $b^2=c^2-a^2$에서 $c=\sqrt{a^2+b^2}$이므로

$$\mathrm{F}(\sqrt{a^2+b^2},\ 0),\ \mathrm{F}'(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$$

이다. 또 쌍곡선의 꼭짓점은

$$\mathrm{A}(a,\ 0),\ \mathrm{A}'(-a,\ 0)$$

이고, 주축의 길이는 $\overline{\mathrm{AA}'}=2a$이다.



주축의 길이는 쌍곡선 위의 점에서 두 초점에 이르는 거리의 차와 같다.

예제 1 **쌍곡선 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{20}=1$의 초점의 좌표와 주축의 길이를 구하고 그래프를 그리시오.**

풀이 쌍곡선의 한 초점의 좌표를 $(c,\ 0)$이라고 하면

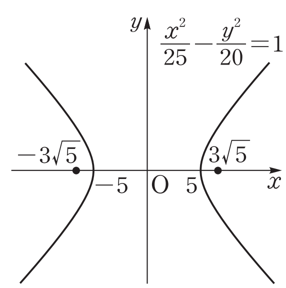
$$c=\sqrt{25+20}=3\sqrt{5}$$

따라서

초점의 좌표는 $\quad (3\sqrt{5},\ 0),\ (-3\sqrt{5},\ 0)$

주축의 길이는 $\quad 2\times5=10$

또 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

문제 2 **다음 쌍곡선의 초점의 좌표와 주축의 길이를 구하고 그래프를 그리시오.**

(1) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ (2) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$

좌표평면에서 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$에서의 거리의 차가 $2b\ (c>b>0)$인 쌍곡선의 방정식을 앞에서와 같은 방법으로 구하면

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\ (a^2=c^2-b^2)$$

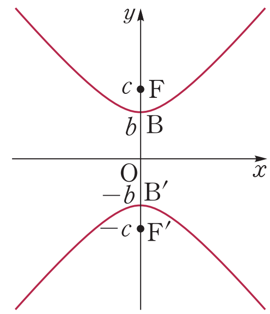
이다. 이때 $c=\sqrt{a^2+b^2}$이므로

$$\mathrm{F}(0,\ \sqrt{a^2+b^2}),\ \mathrm{F}'(0,\ -\sqrt{a^2+b^2})$$

이다. 또 쌍곡선의 꼭짓점은

$$\mathrm{B}(0,\ b),\ \mathrm{B}'(0,\ -b)$$

이고, 주축의 길이는 $\overline{\mathrm{BB}'}=2b$이다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 초점과 주축은 y축 위에 있다.

쌍곡선의 방정식 (2)

두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$에서의 거리의 차가 $2b$인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\ (\text{단, } c>b>0,\ a^2=c^2-b^2)$$

문제 3 다음 쌍곡선의 방정식을 구하시오.

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 5)$, $\mathrm{F}'(0,\ -5)$에서의 거리의 차가 6인 쌍곡선

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 4)$, $\mathrm{F}'(0,\ -4)$에서의 거리의 차가 4인 쌍곡선

예제 2 **쌍곡선 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=-1$의 초점의 좌표와 주축의 길이를 구하고 그래프를 그리시오.**

풀이 쌍곡선의 한 초점의 좌표를 $(0,\ c)$라고 하면

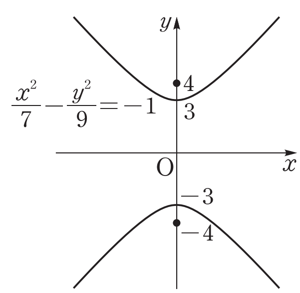
$$c=\sqrt{7+9}=4$$

따라서

초점의 좌표는 $(0,\ 4)$, $(0,\ -4)$

주축의 길이는 $2\times3=6$

또 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

문제 4 다음 쌍곡선의 초점의 좌표와 주축의 길이를 구하고 그래프를 그리시오.

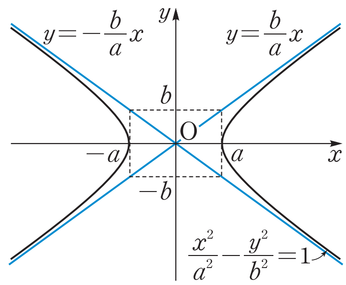
(1) $\frac{x^2}{21}-\frac{y^2}{4}=-1$

(2) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=-1$

쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에서 y를 x에 대한 식으로 나타내면

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

이다. 이 식에서 $|x|$의 값이 한없이 커지면 $\frac{a^2}{x^2}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 쌍곡선은 두 직선 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$에 한없이 가까워진다.



이 두 직선을 쌍곡선의 **점근선**이라고 한다.

또 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 점근선도 두 직선 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

쌍곡선의 점근선

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 점근선의 방정식은

$$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$$

문제 5 다음 쌍곡선의 점근선의 방정식을 구하시오.

(1) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

(2) $\frac{x^2}{4}-y^2=-1$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 쌍곡선의 방정식은 다음과 같다.

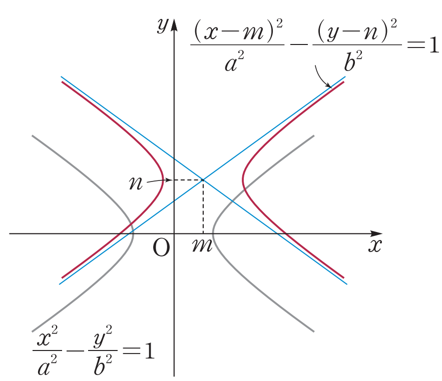
$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

이때 이 쌍곡선의 중심의 좌표는 $(m,\ n)$, 초점의 좌표는

$(\sqrt{a^2+b^2}+m,\ n)$, $(-\sqrt{a^2+b^2}+m,\ n)$

이다.

쌍곡선을 평행이동해도 주축의 길이는 변하지 않는다.



예제 3 **쌍곡선 $4x^2-y^2+8x-2y-1=0$의 초점, 꼭짓점의 좌표와 점근선의 방정식을 구하고 그래프를 그리시오.**

풀이 주어진 방정식을 변형하면

$$(x+1)^2-\frac{(y+1)^2}{4}=1$$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서

초점의 좌표는

$$(\sqrt{5}-1,\ -1),\ (-\sqrt{5}-1,\ -1)$$

꼭짓점의 좌표는

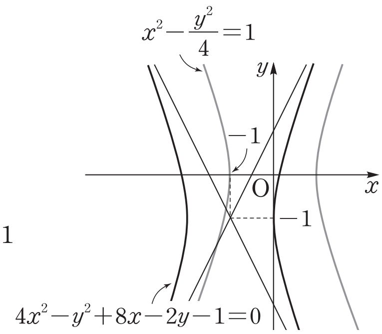
$$(0,\ -1),\ (-2,\ -1)$$

점근선의 방정식은

$$y=2(x+1)-1,\ y=-2(x+1)-1$$

즉 $y=2x+1$, $y=-2x-3$

또 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$의 초점의 좌표는

$(\sqrt{5},\ 0),\ (-\sqrt{5},\ 0)$

꼭짓점의 좌표는

$(1,\ 0),\ (-1,\ 0)$

점근선의 방정식은

$y=2x,\ y=-2x$

문제 6 **다음 쌍곡선의 초점, 꼭짓점의 좌표와 점근선의 방정식을 구하고 그래프를 그리시오.**

(1) $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{3}=1$ (2) $x^2-y^2+6x+4y+6=0$

찾아보기

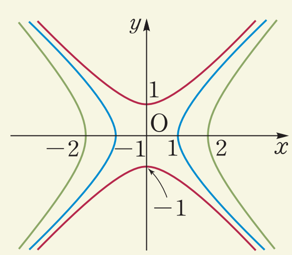
오른쪽 그림은 세 쌍곡선

$$x^2-y^2=1,\ x^2-y^2=-1,\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$$

이다.

1 세 쌍곡선의 점근선을 비교해 보자.

2 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$, $y=-\frac{1}{2}x$를 점근선으로 갖는 쌍곡선을 세 개 이상 찾아보자.



이차곡선이란 무엇일까

지금까지 배운 포물선, 타원, 쌍곡선의 방정식은 모두 x, y에 대한 이차방정식이다.

예를 들어 포물선의 방정식 $y^2=4px$, 타원의 방정식 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 쌍곡선의 방정식 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$은 각각

$$y^2-4px=0,\ b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0,\ b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2=0$$

으로 나타낼 수 있다.

x, y에 대한 이차방정식 $x^2-3y^2-2xy=0$은 $(x+y)(x-3y)=0$ 으로 인수분해되므로 두 직선 $x+y=0$, $x-3y=0$을 나타낸다.

일반적으로 계수가 실수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되지 않는 x, y에 대한 이차방정식

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0\ (A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F\text{는 상수})$$

이 나타내는 곡선을 **이차곡선**이라고 한다.

참고 $x^2+y^2=0$처럼 실근이 한 쌍이거나 $x^2+4y^2+4=0$처럼 실근이 존재하지 않는 경우에는 이차곡선을 나타내지 않는다.

문제 7 **다음 방정식이 나타내는 도형을 말하시오.**

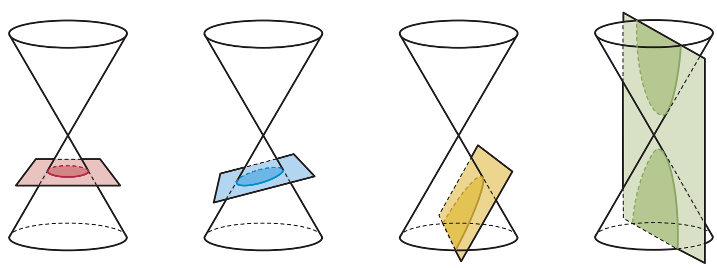
(1) $x^2+y^2-4=0$ (2) $x^2-3y^2+6x=0$

(3) $9x^2+16y^2-144=0$ (4) $2y^2+2x-4y+1=0$

이야기 수학

원뿔곡선

원뿔을 꼭짓점을 지나지 않는 평면으로 자를 때 평면이 기울어진 정도에 따라 다음 그림과 같이 단면에 원, 타원, 포물선, 쌍곡선이 나타난다. 따라서 지금까지 배운 이차곡선을 원뿔곡선이라고도 부른다.



고대 그리스 수학자 아폴로니오스(Apollonios, B.C. 262?~B.C. 190?)는 타원(ellipse), 포물선(parabola), 쌍곡선(hyperbola)이라는 용어를 사용했는데, 이는 각각 '부족하다(ellipsis)', '일치하다(parabole)', '초과하다(hyperbole)'는 뜻의 그리스어에서 비롯된 것이다.

(출처: 박세희, 『수학의 세계』)

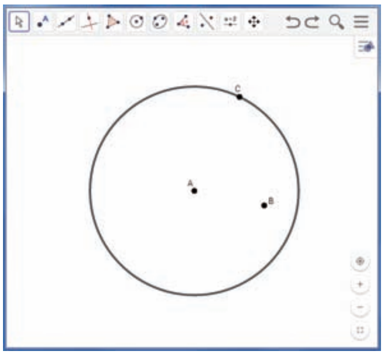
공학 도구 활용

정보 처리 추론

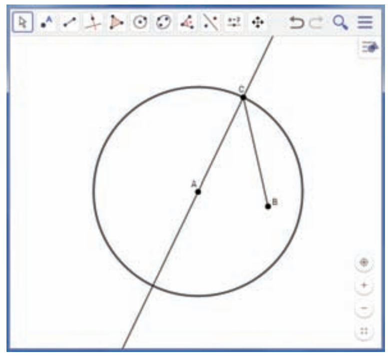
이차곡선 그리기

컴퓨터 기하 프로그램을 이용하여 타원을 그려 보자.

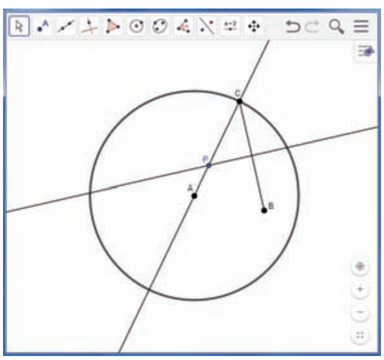
❶ 점 A를 중심으로 하는 원과 원의 내부에 A가 아닌 점 B를 그리고 원 위에 점 C를 그린다.



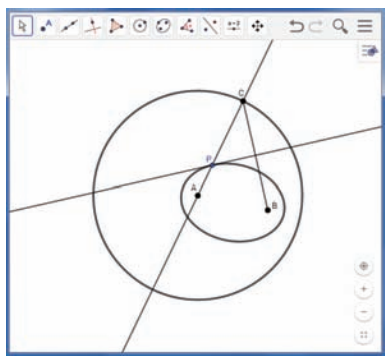
❷ 직선 AC와 선분 BC를 그린다.



❸ **수직이등분선**을 선택하여 선분 BC의 수직이등분선을 그리고, **교점**을 선택하여 수직이등분선과 직선 AC의 교점 P를 그린다.



❹ **자취 그리기**를 선택하고 점 P와 점 C를 차례대로 선택하면 점 P의 자취인 타원이 그려진다.



활동 1 위에서 점 P가 그리는 도형이 타원인 이유를 설명해 보자.

활동 2 위에서 점 B를 원의 외부에 그리면 점 P가 그리는 도형이 쌍곡선임을 컴퓨터 기하 프로그램을 이용하여 확인하고, 그 이유를 설명해 보자.

중단원 마무리

1 포물선

(1) 평면 위의 한 점과 이 점을 지나지 않는 한 직선에 대하여 점과 직선에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 $\boxed{}$이라고 한다.

(2) 초점이 점 F($\boxed{}$, $\boxed{}$)이고 준선의 방정식이 $\boxed{}$인 포물선의 방정식은

$y^2=4px$ (단, $p\neq0$)

2 타원

(1) 평면 위의 서로 다른 두 점에서의 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 $\boxed{}$이라고 한다.

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$에서의 거리의 합이 $\boxed{}$인 타원의 방정식은

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>c>0$, $b^2=\boxed{}$)

3 쌍곡선

(1) 평면 위의 서로 다른 두 점에서의 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 $\boxed{}$이라고 한다.

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$에서의 거리의 차가 $\boxed{}$인 쌍곡선의 방정식은

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $c>a>0$, $b^2=\boxed{}$)

4 이차곡선

일반적으로 계수가 실수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되지 않는 x, y에 대한 이차방정식

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

(A, B, C, D, E, F는 상수)

이 나타내는 곡선을 $\boxed{}$이라고 한다.

기본 문제

1 다음 포물선의 방정식을 구하시오.

(1) 초점이 점 $\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$이고 준선의 방정식이 $x=-\dfrac{1}{3}$인 포물선

(2) 초점이 점 $(0,\ -2)$이고 준선의 방정식이 $y=2$인 포물선

2 포물선 $x^2=-12y$의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하시오.

3 다음 타원의 방정식을 구하시오.

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-3,\ 0)$에서의 거리의 합이 14인 타원

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 2)$, $\mathrm{F}'(0,\ -2)$에서의 거리의 합이 6인 타원

4 타원 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{6}=1$의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 구하시오.

5 다음 쌍곡선의 방정식을 구하시오.

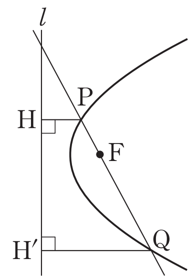
(1) 두 초점 $\mathrm{F}(6,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-6,\ 0)$에서의 거리의 차가 8인 쌍곡선

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 4)$, $\mathrm{F}'(0,\ -4)$에서의 거리의 차가 2인 쌍곡선

6 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=-1$의 초점의 좌표와 주축의 길이, 점근선의 방정식을 구하시오.

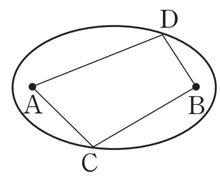
표준 문제

7 오른쪽 그림과 같이 포물선의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고, 두 점 P, Q에서 포물선의 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라고 하자. $\overline{PH}=1$, $\overline{QH'}=3$일 때, 선분 PQ의 길이를 구하시오.

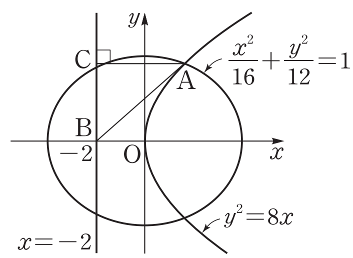


서술형 **8** 두 포물선 $y^2=-12(x-p)$와 $y^2=4(x+q)$의 초점이 일치할 때, $p+q$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. (단, p, q는 상수이다.)

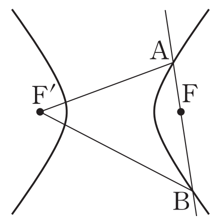
9 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B를 초점으로 하고 장축의 길이가 10, 단축의 길이가 6인 타원이 있다. 타원 위의 두 점 C, D가 타원의 장축에 대하여 서로 반대쪽에 있을 때, 사각형 ACBD의 둘레의 길이를 구하시오. (단, 네 점 A, B, C, D 중 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않다.)



문제 해결 **10** 오른쪽 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$과 포물선 $y^2=8x$의 한 교점 A에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 C라고 할 때, 점 B$(-2, 0)$에 대하여 $\overline{AB}+\overline{AC}$의 값을 구하시오.

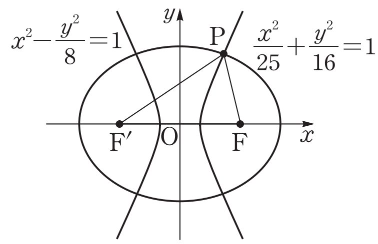


11 오른쪽 그림과 같이 두 점 F, F′을 초점으로 하고 주축의 길이가 4인 쌍곡선에 대하여 점 F를 지나는 직선이 쌍곡선과 만나는 두 점을 각각 A, B라고 하자. $\overline{AF'}+\overline{BF'}=15$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.



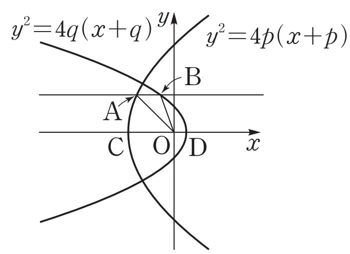
12 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{10}=1$의 두 꼭짓점과 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 일치할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

13 오른쪽 그림과 같이 두 점 F, F′을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$과 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{8}=1$의 한 교점을 P라고 할 때, $|\overline{\mathrm{PF'}}^2-\overline{\mathrm{PF}}^2|$의 값을 구하시오.



발전 문제

14 오른쪽 그림과 같이 원점 O를 초점으로 하는 두 포물선 $y^2=4p(x+p)$, $y^2=4q(x+q)$와 x축에 평행한 직선이 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 포물선의 꼭짓점을 각각 C, D라고 하자. $\overline{\mathrm{CD}}=5$일 때, 삼각형 AOB의 둘레의 길이를 구하시오. (단, p, q는 상수이고, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.)



서술형 **15** x축 위의 점 A, y축 위의 점 B에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=6$일 때, 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점 P가 그리는 도형의 방정식을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

추론 **16** 쌍곡선 $x^2-4y^2=4$ 위의 한 점 P에서 이 쌍곡선의 두 점근선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라고 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{PR}}$의 값이 일정함을 보이시오.