VI 경우의 수

‘비가 올 가능성’처럼 어떤 일이 일어날 가능성을 예측하는 경우에 이를 수로 나타내면 편리하다. 이때 순열이나 조합을 이용하여 경우의 수를 계산하는 방법이 기본이 된다.

경우의 수는 게임에서 득점 가능성을 예측하는 문제를 해결하는 과정에서 본격적으로 연구되기 시작했는데, 프랑스의 수학자 파스칼(Pascal, B., 1623～1662)과 페르마(Fermat, P., 1601～1665) 등이 이것을 확률 이론으로 발전시켰다.

확률 이론은 자연 과학이나 사회 과학뿐만 아니라 일상생활의 문제에도 깊이 관련된 수학의 중요한 한 분야이다.

1. 경우의 수

이 단원에서는

합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구해 보고,
순열과 조합의 수를 구하는 방법을 알아본다.

1 경우의 수

"어떤 사건이든 정확한 추측을 위해서는,
가능한 모든 **경우의 수**를 정확하게 계산한 후에
한 경우가 다른 경우보다
얼마나 많이 일어나는지를 결정할 필요가 있다."

(출처: Newman, J. R., 『The World of Mathematics, Vol. 3』)

야곱 베르누이(Bernoulli, J., 1654~1705)
스위스의 수학자

이 글은 1713년에 출간된 확률론에 관한 저서 『추측술』에서, 어떤 일이 일어날 가능성을 정확하게 예측하기 위해서는 가능한 경우의 수를 아는 것이 중요함을 강조한 것이다.

01 경우의 수

학습 목표

합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.

준비하기

한 개의 주사위를 던질 때, 다음을 구하시오.

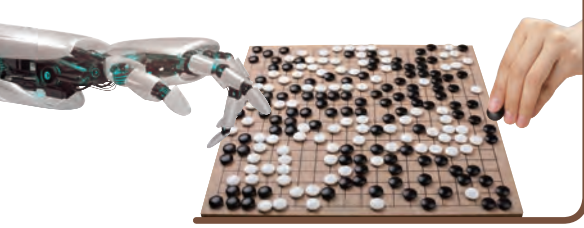
(1) 짝수의 눈이 나오는 경우의 수

(2) 3의 배수의 눈이 나오거나 5의 약수의 눈이 나오는 경우의 수

다가서기

2016년에 우리나라의 대표적인 프로 바둑 기사가 인공 지능 바둑 프로그램과 대국을 펼쳤다. 바둑 한 판을 둘 때 나올 수 있는 경우의 수는 약 10^{170} 정도인데, 프로 바둑 기사는 한 수당 보통 50～60가지의 수에서 2～3가지의 수로 압축해 가는 과정을 통해 최적의 수를 찾아 낸다고 한다.

이처럼 효율적인 의사결정을 하기 위해서, 가능한 경우의 수를 예상해 보는 과정이 필요할 때가 있다.



합의 법칙

생각 열기 어느 식당에는 후식으로 컵케이크 3가지와 아이스크림 2가지가 준비되어 있다.

▶ 컵케이크 또는 아이스크림 중에서 하나를 택하는 경우의 수를 구해 보자.

위의 **생각 열기**에서 컵케이크 하나를 택하는 경우의 수는 3이고, 아이스크림 하나를 택하는 경우의 수는 2이다. 이때 컵케이크와 아이스크림을 동시에 택할 수는 없으므로, 컵케이크 3가지 또는 아이스크림 2가지 중에서 하나를 택하는 경우의 수는

$$3+2=5$$

이다.

이와 같이 동시에 일어나지 않는 두 사건에 대하여 다음과 같은 **합의 법칙**이 성립한다.

합의 법칙

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A와 사건 B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

참고 합의 법칙은 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않는 셋 이상의 사건에 대해서도 성립한다.

문제 1 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 5의 배수인 경우의 수를 구하시오.

예제 1 자연수 x, y에 대하여 $x+y\leq 4$를 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하시오.

풀이 x, y가 자연수이므로 $x+y\leq 4$인 $x+y$의 값은 2, 3, 4이고, 각 경우의 순서쌍 (x, y)는

(i) $x+y=2$인 경우 $(1, 1)$의 1개

(ii) $x+y=3$인 경우 $(1, 2)$, $(2, 1)$의 2개

(iii) $x+y=4$인 경우 $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3개

따라서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는 합의 법칙에 의하여

$$1+2+3=6$$

답 6

문제 2 음이 아닌 정수 x, y에 대하여 $x+y\leq 3$을 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하시오.

곱의 법칙

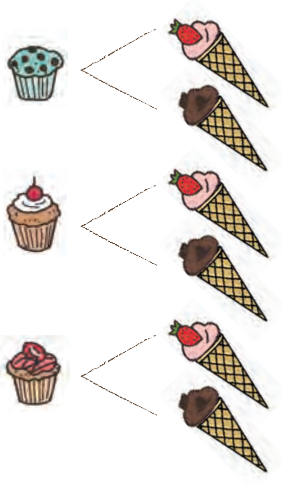
생각 열기 어느 식당에는 후식으로 컵케이크 3가지와 아이스크림 2가지가 준비되어 있다.

- 컵케이크 중에서 하나와 아이스크림 중에서 하나를 동시에 택하는 경우의 수를 구해 보자.

위의 **생각 열기**에서 컵케이크를 택하는 경우의 수는 3이고, 그 각각에 대하여 아이스크림을 택하는 경우의 수는 2이므로, 컵케이크 3가지 중에서 하나와 아이스크림 2가지 중에서 하나를 동시에 택하는 경우의 수는

$$3\times 2=6$$

이다.



이와 같은 사실은 오른쪽 그림과 같이 수형도를 그려서 확인할 수도 있다.

사건이 일어나는 모든 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타낸 것을 수형도(tree graph)라고 한다.

이와 같이 동시에 일어나는 두 사건에 대하여 다음과 같은 **곱의 법칙**이 성립한다.

곱의 법칙

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $m\times n$이다.

곱의 법칙은 두 사건이 잇달아 일어나는 경우에도 성립한다.

참고 곱의 법칙은 동시에 일어나는 셋 이상의 사건에 대해서도 성립한다.

문제 3 서로 다른 꽃병 2개와 장미 4송이가 있다. 꽃병에 장미를 꽂기 위해서 꽃병 한 개와 장미 한 송이를 동시에 택하는 경우의 수를 구하시오.

문제 4 민서는 서로 다른 종류의 티셔츠, 바지, 점퍼를 각각 4개, 3개, 2개 가지고 있다. 민서가 이 중에서 티셔츠, 바지, 점퍼를 각각 하나씩 택하여 입는 경우의 수를 구하시오.

예제 2 200의 약수의 개수를 구하시오.

$\times$	1	5	5^2
1	1	5	5^2
2	2	2×5	2×5^2
2^2	2^2	$2^2\times5$	$2^2\times5^2$
2^3	2^3	$2^3\times5$	$2^3\times5^2$

풀이 200을 소인수분해하면 $200=2^3\times5^2$

2^3의 약수는 $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3$의 4개

5^2의 약수는 $1,\ 5,\ 5^2$의 3개

이 중에서 각각 하나씩 택하여 곱한 수는 모두 200의 약수가 된다.

따라서 구하는 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times3=12$

답 12

문제 5 다음 수의 약수의 개수를 구하시오.

(1) 54 (2) 216

예제 3 어느 휴양림에는 오른쪽 그림과 같이 야영장에서 대피소로 가는 길이 3가지, 대피소에서 정상으로 가는 길이 4가지, 야영장에서 정상으로 바로 가는 길이 2가지가 있다. 세 지점 중에서 같은 지점을 두 번 이상 지나지 않는다고 할 때, 다음을 구하시오.

(1) 야영장에서 대피소를 거쳐 정상까지 가는 경우의 수

(2) 야영장에서 정상까지 가는 모든 경우의 수

풀이 (1) 야영장에서 대피소로 가는 길은 3가지, 대피소에서 정상으로 가는 길은 4가지이므로, 곱의 법칙에 의하여 야영장에서 대피소를 거쳐 정상까지 가는 경우의 수는

$3\times4=12$

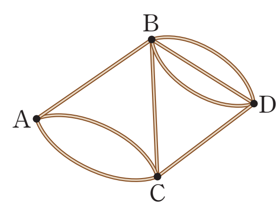
(2) 야영장에서 대피소를 거쳐 정상으로 가는 경우의 수는 12, 아영장에서 정상으로 바로 가는 경우의 수는 2이다. 이때 두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로, 합의 법칙에 의하여 야영장에서 정상까지 가는 모든 경우의 수는

$12+2=14$

답 (1) 12 (2) 14

문제 6 오른쪽 그림과 같이 네 지점 A, B, C, D를 연결하는 도로망이 있다. 주어진 도로를 이용하여 A 지점에서 D 지점까지 가는 경우의 수를 구하시오.

(단, 같은 지점을 두 번 이상 지나지 않는다.)



생각 넓히기

문제 해결 | **추론** | 창의·융합 | **의사소통** | 정보 처리 | 태도 및 실천

다음은 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 눈의 수의 합이 홀수인 경우의 수를 구하는 방법에 대하여 민지와 정우가 나눈 대화이다.

활동 ❶ 민지의 방법으로 경우의 수를 구해 보자.

활동 ❷ 정우의 방법으로 경우의 수를 구하고, 민지의 방법으로 구한 결과와 비교해 보자.

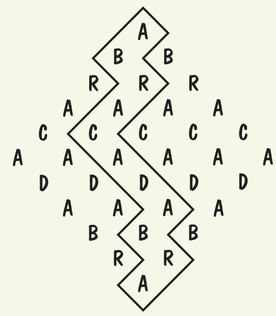
수학 이야기

아브라카다브라와 경우의 수

우리나라의 마술사들은 ‘수리수리 마하수리’라는 주문을 외우는데, 이 말은 불교 경전의 하나인『천수경』의 첫 구절에서 유래한 것으로 ‘잘 이루어진다’라는 뜻이라고 한다.

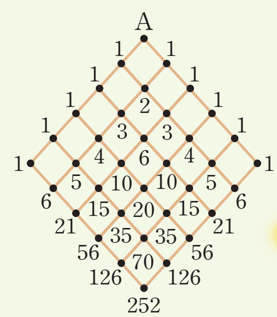
반면에 서양의 마술사들은 ‘Abracadabra’라는 주문을 외우는데, 이 말은 ‘말한 대로 이루어진다’라는 뜻을 가진 히브리어에서 유래된 것으로 병이나 재앙을 물리치는 데 효과가 있다고 하여 과거 주술사들이 열병을 다스릴 때 외웠다고 전해진다. 또, 왼쪽 그림과 같이 역삼각형 모양에 글자를 하나씩 배열하여 장식품이나 목걸이를 만들어 부적처럼 몸에 지니기도 했다.

헝가리 태생으로 미국의 스탠퍼드 대학교에서 수학 교수를 지낸 폴리아(Pólya, G., 1887～1985)는 아브라카다브라와 관련된 다음과 같은 문제를 제시했다.



> 오른쪽 그림에서 가장 위에 있는 글자 A에서 시작하여 아래로 내려가면서 바로 이웃한 글자를 하나씩 택하여 ABRACADABRA라는 단어를 만들 수 있는 서로 다른 방법은 모두 몇 가지일까?

이 문제의 그림에서 각 문자의 위치를 점으로 나타내고 가장 위쪽에 있는 점 A부터 시작하여 그 아래에 있는 각 점까지 도달하는 경우의 수를 차례대로 구하면, 단어를 만들 수 있는 방법은 오른쪽 그림과 같이 모두 252가지가 있음을 알 수 있다.



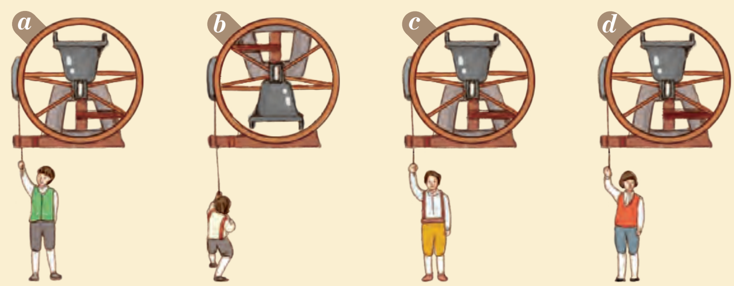
02 순열

학습 목표
순열의 뜻을 이해하고, 순열의 수를 구할 수 있다.

준비하기
두 자리 자연수 중에서 십의 자리 숫자와 일의 자리 숫자가 서로 다른 자연수의 개수를 구하시오.

순열

생각 열기 영국에는 일렬로 배치된 교회의 종들을 이용하여 음악을 연주하는 '전조명종술'이라는 기술이 전해지고 있다. 다음 그림은 음색이 서로 다른 네 개의 종 a, b, c, d 중에서 종 b를 친 것을 나타낸다.

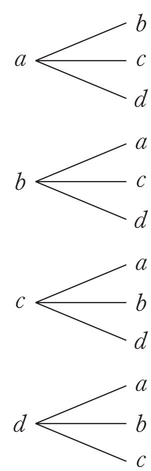


▶ 네 개의 종 중에서 서로 다른 두 개를 택하여 순서대로 치는 경우의 수를 구해 보자.

위의 **생각 열기**에서 첫 번째 종을 택하는 경우는 a, b, c, d의 4가지이고 그 각각에 대하여 두 번째 종을 택하는 경우는 첫 번째 종을 제외한 3가지이므로, 네 개의 종 중에서 서로 다른 두 개를 택하여 순서대로 치는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$$4\times3=12$$

이다. 오른쪽 수형도에서와 같이 서로 다른 두 개의 종을 순서대로 치는 경우를 모두 나열하면 12가지가 있음을 알 수 있다.



다가서기
바다를 항해하는 배는 깃발을 이용하여 신호를 보내기도 한다. 이때 서로 다른 깃발을 나열하는 순서에 따라 여러 가지 신호를 만들어 항해에 필요한 정보를 전달할 수 있다.
이처럼 서로 다른 것 중에서 일부를 택하여 나열할 때, 순서를 고려해야 하는 경우가 있다.

일반적으로 서로 다른 n개에서 $r\,(0<r\le n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **순열**이라 하며, 이 순열의 수를 기호로

$${}_n\mathrm{P}_r$$

와 같이 나타낸다.

${}_n\mathrm{P}_r$의 P는 순열을 뜻하는 permutation의 첫 글자이다.

순열의 수 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$를 구하는 방법을 알아보자.

서로 다른 n개에서 $r\,(0<r\le n)$개를 택하여 나열할 때, 첫 번째 자리에 올 수 있는 것은 n가지이고 그 각각에 대하여 두 번째 자리에 올 수 있는 것은 첫 번째 자리에 놓인 것을 제외한 $(n-1)$가지이다. 이와 같이 차례대로 생각하면 r번째 자리에 올 수 있는 것은 $n-(r-1)$, 즉 $(n-r+1)$가지이다.

첫 번째	두 번째	세 번째	⋯	r번째
↑	↑	↑		↑
n가지	$(n-1)$가지	$(n-2)$가지	⋯	$(n-r+1)$가지

따라서 곱의 법칙에 의하여 다음이 성립한다.

$${}_{n}\mathrm{P}_{r}=\underbrace{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)}_{r\text{개}}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

순열의 수 (1)

서로 다른 n개에서 $r\,(0<r\le n)$개를 택하는 순열의 수는

$${}_{n}\mathrm{P}_{r}=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$$

${}_{n}\mathrm{P}_{r}$

n: 서로 다른 것의 개수

r: 택하는 것의 개수

보기 ${}_{6}\mathrm{P}_{3}=6\times5\times4=120$

문제 1 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_{7}\mathrm{P}_{2}$ (2) ${}_{5}\mathrm{P}_{4}$ (3) ${}_{8}\mathrm{P}_{3}$

서로 다른 n개에서 n개를 모두 택하는 순열의 수는

$${}_{n}\mathrm{P}_{n}=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$$

이다. 여기서 1부터 n까지의 자연수를 차례대로 곱한 것을 n의 **계승**이라 하며, 이것을 기호로

$$n!$$

과 같이 나타낸다. 즉,

$$n!=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$$

이다. 따라서 ${}_{n}\mathrm{P}_{n}=n!$이다.

n!은 'n의 계승(階乘)' 또는 'n factorial'이라고 읽는다.

한편, $0<r<n$일 때 순열의 수 ${}_n\mathrm{P}_r$를 계승을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}{}_n\mathrm{P}_r&=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)\\&=\frac{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)(n-r)\times\cdots\times3\times2\times1}{(n-r)\times\cdots\times3\times2\times1}\\&=\frac{n!}{(n-r)!}\end{aligned}$$

여기서 $0!=1$, ${}_n\mathrm{P}_0=1$로 정의하면, 위의 등식은 $r=n$과 $r=0$일 때도 성립한다.

$0!=1$이면 ${}_n\mathrm{P}_n=n!=\frac{n!}{0!}$
${}_n\mathrm{P}_0=1$이면 ${}_n\mathrm{P}_0=1=\frac{n!}{n!}$

이상을 정리하면 다음과 같다.

순열의 수 (2)

❶ ${}_n\mathrm{P}_n=n!,\quad 0!=1,\quad {}_n\mathrm{P}_0=1$

❷ ${}_n\mathrm{P}_r=\frac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

보기 ${}_8\mathrm{P}_4=\frac{8!}{(8-4)!}=\frac{8!}{4!}=\frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1}=1680$

문제 2 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_5\mathrm{P}_5$ (2) $0!\times3!$ (3) ${}_4\mathrm{P}_0$ (4) $4!\times{}_6\mathrm{P}_2$

예제 1 $1\le r\le n$일 때, 등식 ${}_n\mathrm{P}_r=n\times{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$이 성립함을 증명하시오.

증명 1 $n\times{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}=n\times\frac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!}=\frac{n!}{(n-r)!}={}_n\mathrm{P}_r$

따라서 ${}_n\mathrm{P}_r=n\times{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$이 성립한다.

증명 2 ${}_n\mathrm{P}_r$는 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수이다.
n개에서 한 개를 택하는 경우는 n가지이고, 그 각각에 대하여 하나를 택하고 남은 $(n-1)$개에서 $(r-1)$개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$이다.
따라서 곱의 법칙에 의하여 ${}_n\mathrm{P}_r=n\times{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$이 성립한다.

문제 3 $1\le r<n$일 때, 등식 ${}_n\mathrm{P}_r={}_{n-1}\mathrm{P}_r+r\times{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$이 성립함을 증명하시오.

예제 2 네 명의 선수 A, B, C, D가 한 팀을 이루어 4인 조정 경기에 출전했다. 다음을 구하시오.

(1) A와 C가 서로 이웃하게 배에 앉는 경우의 수

(2) B와 D가 배의 양 끝에 앉는 경우의 수

풀이 (1) A와 C를 한 사람으로 생각하면 모두 3명이고, 3명이 한 줄로 앉는 경우의 수는 $3!$이다. 이때 각 경우에 대하여 A와 C의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $3! \times 2! = 12$

(2) B와 D가 배의 양 끝에 앉는 경우의 수는 $2!$이고 각 경우에 대하여 나머지 2명이 한 줄로 앉는 경우의 수는 $2!$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $2! \times 2! = 4$

답 (1) 12 (2) 4

문제 4 세 개의 문자 a, b, c와 두 개의 숫자 1, 2를 일렬로 나열할 때, 다음을 구하시오.

(1) 두 개의 숫자를 서로 이웃하게 나열하는 경우의 수

(2) 문자와 숫자를 교대로 나열하는 경우의 수

문제 5 다섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4를 모두 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리 자연수 중에서 짝수의 개수를 구하시오.

수학 이야기

퍼즐 속의 경우의 수

미국의 수학자 로이드(Loyd, S., 1841~1911)는 16개의 칸에 아무렇게나 나열된 1부터 15까지의 숫자를 빈 칸을 이용해서 옮기는 과정을 반복하여 오른쪽 그림과 같이 작은 수부터 차례대로 나열하는 숫자 퍼즐을 만들었다.

이 퍼즐은 주어진 숫자의 배열에 따라 풀리지 않는 경우도 있는데, 그림과 같이 풀리는 경우의 수는 $\frac{16!}{2} = 10461394944000$임이 알려져 있다.

(출처: Culberson, J. C. 외, 「Efficiently searching the 15-puzzle」)

03 조합

학습 목표

조합의 뜻을 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.

준비하기

다음 값을 구하시오.

(1) ${}_{7}\mathrm{P}_{3}$　　　(2) $3!$

● 조합

생각 열기 교내 합창 경연 대회에 참가한 지연, 수빈, 영은, 민지 네 명의 학생은 소프라노 파트에 지원했다.

▶ 위의 네 명 중 소프라노 파트를 맡을 세 명을 선발하는 경우의 수를 구해 보자.

순열에서 서로 다른 것을 순서를 생각하여 택하는 경우의 수를 배웠다. 이제 서로 다른 것을 순서를 생각하지 않고 택하는 경우의 수를 알아보자.

네 개의 문자 a, b, c, d 중에서 순서를 생각하지 않고 세 개를 택하는 경우는

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$$

의 4가지이다.

다가서기

다섯 명의 회원 중에서 회장과 부회장을 선출하는 경우의 수를 구할 때는 순서를 고려해야 하지만, 두 명의 임원을 선출하는 경우에는 순서를 고려하지 않아도 된다.
이처럼 서로 다른 것 중에서 순서에 관계없이 몇 개를 택하는 경우의 수를 구해야 할 때가 있다.

일반적으로 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 $r(0<r\leq n)$개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **조합**이라 하며, 이 조합의 수를 기호로

$${}_{n}\mathrm{C}_{r}$$

와 같이 나타낸다.

> ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$의 C는 조합을 뜻하는 combination의 첫 글자이다.

순열과 조합의 관계를 이용하여 조합의 수 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$를 구하는 방법을 알아보자.

네 개의 문자 a, b, c, d 중에서 세 개를 택하는 조합의 수는 ${}_{4}\mathrm{C}_{3}$이고 그 각각에 대하여 다음과 같이 $3!$가지의 순열을 만들 수 있다.

조합		순열
$\{a, b, c\}$	$\xrightarrow{\text{일렬로 나열}}$	abc, acb, bac, bca, cab, cba
$\{a, b, d\}$	$\xrightarrow{\text{일렬로 나열}}$	abd, adb, bad, bda, dab, dba
$\{a, c, d\}$	$\xrightarrow{\text{일렬로 나열}}$	acd, adc, cad, cda, dac, dca
$\{b, c, d\}$	$\xrightarrow{\text{일렬로 나열}}$	bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb

그런데 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 순열의 수는 ${}_4\mathrm{P}_3$이므로 곱의 법칙에 의하여 ${}_4\mathrm{C}_3 \times 3! = {}_4\mathrm{P}_3$이 성립함을 알 수 있다.

일반적으로 서로 다른 n개에서 $r\,(0<r\le n)$개를 택하는 조합의 수는 ${}_n\mathrm{C}_r$이고, 그 각각에 대하여 r개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $r!$이다. 그런데 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수는 ${}_n\mathrm{P}_r$이므로 곱의 법칙에 의하여

$$ {}_n\mathrm{C}_r \times r! = {}_n\mathrm{P}_r $$

이다. 즉, 다음이 성립한다.

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

또, $0!=1$, ${}_n\mathrm{P}_0=1$이므로 ${}_n\mathrm{C}_0=1$로 정의하면, 위의 등식은 $r=0$일 때도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

조합의 수

서로 다른 n개에서 $r\,(0\le r\le n)$개를 택하는 조합의 수는

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

보기 ${}_5\mathrm{C}_3 = \frac{{}_5\mathrm{P}_3}{3!} = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$

문제 1 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_8\mathrm{C}_2$ (2) ${}_7\mathrm{C}_7$ (3) ${}_6\mathrm{C}_0$

문제 2 다음을 구하시오.

(1) 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 6개의 점 중에서 택한 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수

(2) 20명의 학생 중에서 4명의 학생회 임원을 선출하는 경우의 수

예제 1 $0 \le r \le n$일 때, 등식 ${}_{n}C_{r} = {}_{n}C_{n-r}$가 성립함을 증명하시오.

증명 1 $${}_{n}C_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}_{n}C_{r}$$

따라서 ${}_{n}C_{r} = {}_{n}C_{n-r}$가 성립한다.

증명 2 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 n개의 원소 중에서 r개를 택할 경우 남아 있을 $(n-r)$개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_{n}C_{r} = {}_{n}C_{n-r}$가 성립한다.

문제 3 $1 \le r < n$일 때, 등식 ${}_{n}C_{r} = {}_{n-1}C_{r} + {}_{n-1}C_{r-1}$이 성립함을 증명하시오.

예제 2 '청소년 문화재 지킴이' 모집에 남학생 8명, 여학생 5명이 지원했다. 이 중에서 남학생 3명, 여학생 2명을 선발하는 경우의 수를 구하시오.

풀이 남학생 8명 중에서 3명을 선발하는 경우의 수는 ${}_{8}C_{3}$이고, 여학생 5명 중에서 2명을 선발하는 경우의 수는 ${}_{5}C_{2}$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$${}_{8}C_{3} \times {}_{5}C_{2} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 56 \times 10 = 560$$

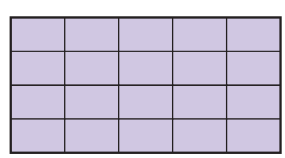
답 560

문제 4 1부터 9까지의 숫자가 각각 하나씩 적힌 9개의 공이 들어 있는 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 다음을 구하시오.

(1) 3이 적힌 공을 포함하는 경우의 수

(2) 짝수가 적힌 공 2개와 홀수가 적힌 공 1개를 꺼내는 경우의 수

문제 5 오른쪽 그림과 같이 직사각형의 가로와 세로에 평행한 선분을 각각 3개, 4개 그었을 때, 그림에서 찾을 수 있는 크고 작은 직사각형의 개수를 구하시오.



중단원 마무리하기

경우의 수

(1) **합의 법칙**

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A와 사건 B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

(2) **곱의 법칙**

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $m\times n$이다.

순열

(1) 서로 다른 n개에서 $r\,(0<r\le n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **순열**이라 하며, 이 순열의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{P}_r$와 같이 나타낸다.

(2) 1부터 n까지의 자연수를 차례대로 곱한 것을 n의 **계승**이라 하며, 이것을 기호로 $n!$과 같이 나타낸다. 즉,

$$n!=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$$

이다.

(3) **순열의 수**

❶ $${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$$
$$=\frac{n!}{(n-r)!}\ (\text{단, } 0\le r\le n)$$

❷ ${}_n\mathrm{P}_n=n!$, $0!=1$, ${}_n\mathrm{P}_0=1$

조합

(1) 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 $r\,(0<r\le n)$개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **조합**이라 하며, 이 조합의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{C}_r$와 같이 나타낸다.

(2) **조합의 수**

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}$$
$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}\ (\text{단, } 0\le r\le n)$$

기본

01 1부터 12까지의 숫자가 각각 하나씩 적힌 12개의 공이 들어 있는 상자에서 한 개의 공을 꺼낼 때, 4의 배수 또는 5의 배수가 적힌 공이 나오는 경우의 수를 구하시오.

02 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 첫 번째에는 6의 약수의 눈이 나오고, 두 번째에는 3의 배수의 눈이 나오는 경우의 수를 구하시오.

03 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_9\mathrm{P}_2$ (2) $\dfrac{8!}{6!}$

(3) ${}_{10}\mathrm{C}_3$ (4) ${}_6\mathrm{C}_6$

04 다음을 구하시오.

(1) 5개의 문자 a, b, c, d, e 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수

(2) 4명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수

(3) 색이 서로 다른 10장의 색종이 중에서 2장을 뽑는 경우의 수

표 준

05 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 10 이상인 경우의 수를 구하시오.

06 어느 샌드위치 가게에는 샌드위치를 주문할 때, 추가로 택할 수 있는 4가지의 야채, 5가지의 치즈, 2가지의 소스가 준비되어 있다. 이 가게에서 야채, 치즈, 소스를 각각 하나씩 추가로 택하여 샌드위치를 주문하는 경우의 수를 구하시오.

07 다음을 구하시오.

(1) 양의 정수 x, y에 대하여 $x+y\leq5$를 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수

(2) 다항식 $(a+b+c+d)(x+y)$를 전개할 때, 생기는 항의 개수

08 영어 단어 smile을 이루는 5개의 알파벳을 모두 사용하여 일렬로 나열할 때, 다음을 구하시오.

(1) 일렬로 나열하는 경우의 수

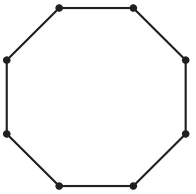
(2) 모음이 양 끝에 오도록 나열하는 경우의 수

09 이어달리기에 참가한 남학생 4명과 여학생 3명을 일렬로 세울 때, 다음을 구하시오.

(1) 남학생 4명을 서로 이웃하게 세우는 경우의 수

(2) 여학생을 양 끝에 세우는 경우의 수

10 오른쪽 그림과 같은 정팔각형에 대하여 다음을 구하시오.



(1) 두 꼭짓점을 이어서 만들 수 있는 직선의 개수

(2) 세 꼭짓점을 이어서 만들 수 있는 삼각형의 개수

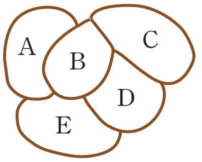
11 12명의 배구 선수 중에서 경기에 출전할 6명의 선수를 뽑으려고 할 때, 다음을 구하시오.

(1) 두 선수 A, B를 포함하여 뽑는 경우의 수

(2) 두 선수 A, B를 포함하지 않고 뽑는 경우의 수

발 전

12 오른쪽 그림과 같이 구분된 5개의 영역을 서로 다른 4가지 색 중 전부 또는 일부를 사용하여 칠하려고 한다. 한 가지 색을 여러 번 사용해도 좋으나 이웃한 영역은 서로 다른 색으로 칠하여 구분할 때, 칠하는 경우의 수를 구하시오.



|서·술·형|

13 서로 다른 3개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b, c라 할 때, $abc+a+b+c$의 값이 홀수가 되는 경우의 수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

사고력+

|서·술·형|

14 7개의 의자가 일렬로 놓여 있다. 두 명의 학생이 서로 다른 의자에 앉을 때, 두 명 사이에 적어도 하나의 빈 의자가 있도록 앉는 경우의 수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

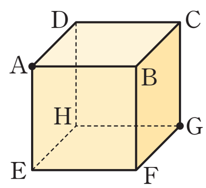
하 중 상

01

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b라 할 때, 이차방정식 $x^2+ax+3b=0$이 실근을 갖는 경우의 수를 구하시오.

02

오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 모서리를 따라 꼭짓점 A를 출발하여 꼭짓점 G까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하시오.



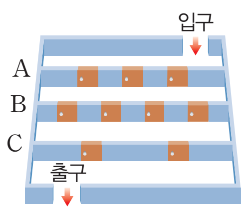
03

한 개의 동전과 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수를 구하시오.

04

오른쪽 그림과 같이 입구로 들어가서 세 개의 벽 A, B, C를 통과하여 출구로 나가게 되어 있는 건물이 있다. 세 개의 벽 A, B, C를 통과할 수 있는 문이 각각 3개, 4개, 2개 있을 때, 입구로 들어가서 출구로 나가는 경우의 수를 구하시오.

(단, 같은 벽을 두 번 이상 통과하지 않는다.)



05

인천 국제공항과 목포 사이를 운행하는 고속 철도에는 14개의 정차역이 있다. 고속 철도의 출발역과 도착역이 표기된 열차표를 발행하는 경우의 수를 구하시오.

(단, 출발역과 도착역은 서로 다르다.)

06

7개의 알파벳 N, I, C, E, D, A, Y를 자음과 모음이 교대로 나오도록 나열하는 경우의 수를 구하시오.

07

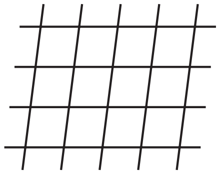
등식 ${}_{n+1}P_{n+1}-{}_{n}P_{n}=5\times n!$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오.

08

크기가 서로 다른 빨간 구슬 5개와 파란 구슬 4개가 들어 있는 주머니에서 빨간 구슬 1개와 파란 구슬 2개를 꺼내는 경우의 수를 구하시오.

09

오른쪽 그림과 같이 4개의 평행선과 5개의 평행선이 서로 만나고 있다. 이들 평행선을 이용하여 만들 수 있는 크고 작은 평행사변형의 개수를 구하시오.



10

x에 대한 이차방정식

$$5x^2-{}_nP_r\,x-6\,{}_nC_{n-r}=0$$

의 두 근이 -2, 6일 때, $n+r$의 값을 구하시오.

(단, n, r는 자연수이다.)

11번과 12번은 서술형입니다.

11

5개의 숫자 0, 2, 4, 6, 8 중에서 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 세 자리 자연수를 만들려고 한다. 다음에 답하시오.

(1) 백의 자리 숫자가 8 또는 6인 경우의 수를 구하시오.

(2) 큰 수부터 차례대로 나열했을 때, 30번째에 오는 수를 구하시오.

12

어느 은행의 본점이 있는 도시에 5개의 지점이 있는데, 본점에서 각 지점까지의 거리는 모두 다르다. 본점에 소속된 5명의 직원 A, B, C, D, E를 각 지점에 출장 보내려고 할 때, A를 B보다 가까운 지점으로 보내는 경우의 수를 구하시오.

자기 평가

정답을 맞힌 문항에 ○표 하여 학습 성취도를 표시하고, 부족한 부분은 교과서의 해당 쪽을 확인하여 복습하자.

문항 번호	성취 기준	성취도	복습
01 02	합의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.	○ △ ×	261 ~ 262쪽
03 04	곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.	○ △ ×	262 ~ 264쪽
05 06 07 11	순열의 뜻을 이해하고, 순열의 수를 구할 수 있다.	○ △ ×	266 ~ 269쪽
08 09 10 12	조합의 뜻을 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.	○ △ ×	270 ~ 272쪽

성취도 ○ 만족, △ 보통, × 미흡

수학 이야기

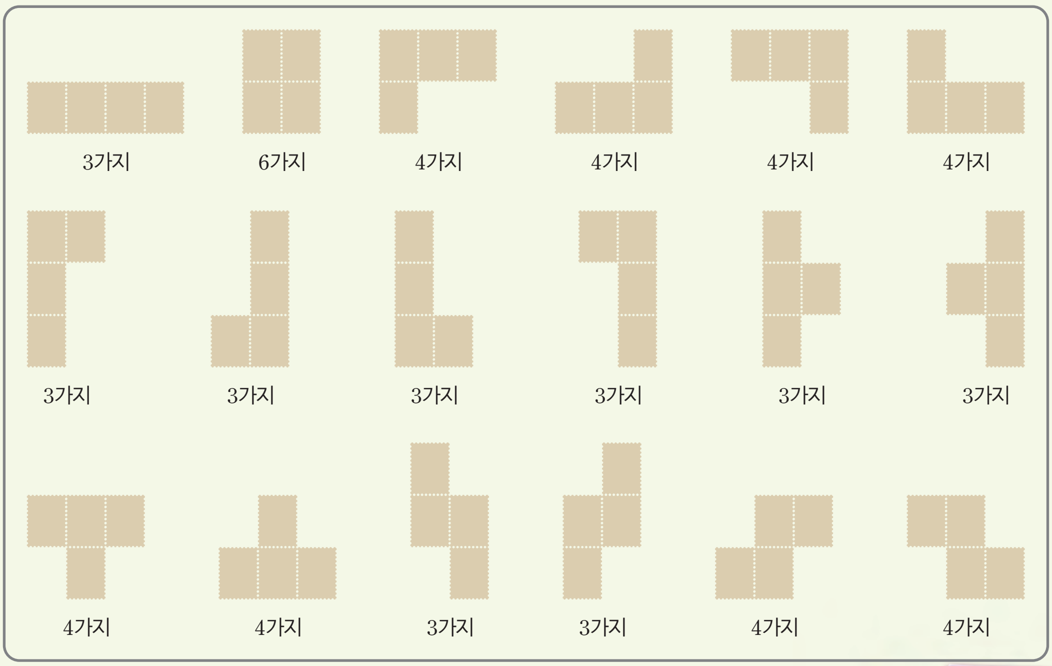
4장의 우표 문제와 경우의 수

두드니(Dudeney, H., 1857~1930)는 영국의 수학 저술가로, 많은 논리 퍼즐과 수학적 게임을 만들어 '레크리에이션 수학자'라고도 불린다. 그가 만든 퍼즐과 게임은 심오한 논리적 사고와 함께 기발한 수학적 상상력을 담고 있어 수학을 대중화하는 데 크게 이바지했다.

두드니의 퍼즐 중에는 경우의 수에 대한 것도 있는데, 다음 '4장의 우표 문제'를 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 가로로 4장, 세로로 3장이 배열된 12장짜리 우표 세트가 있다. 그림의 빨간색 선이나 파란색 선으로 둘러싸인 부분과 같이 이 세트에서 4장이 연결된 채로 떼어 내려고 한다.

우표를 떼어 내는 모든 경우의 수를 구하기 위해서 떼어 내는 우표의 모양별로 분류하면, 우표를 떼어 낼 수 있는 방법은 다음과 같이 모두 65가지가 있음을 알 수 있다.



아로마 요법과 경우의 수

최근 많은 사람들이 다양한 환경적 자극에 의하여 스트레스를 경험하게 되면서 피로와 스트레스 완화 방법으로 건강 요법에 관심을 갖게 되었다. 또한, 현대 의학에서도 다양한 스트레스 완화 방법으로 심리 혹은 정신 치료 요법, 운동 요법, 마사지 등과 같은 보완 대체 요법을 활용하기 시작했다. 이러한 대체 요법 중 하나가 아로마 요법이다.

아로마 요법은 약용 식물에서 추출한 방향유에서 나오는 향을 이용하는데, 상담을 받는 사람에게 적합한 방향유를 조합하기 위해 심리 상담 도구의 일종인 카드를 사용한다. 이 카드는 전체 42장의 인물 그림 카드로 구성되어 있으며 각각의 카드는 한 개의 방향유의 정서적, 신체적 효능을 상징적으로 표현하고 있다.

카드를 활용하는 방법 중의 하나는 상담사가 펼쳐 놓은 42장의 카드 중에서 상담을 받는 사람이 3장의 카드를 선택하는 것이다. 이때 지식과 정보에 의해 카드를 선택하기보다는 직관적으로 끌리는 카드를 선택하는 것이 중요하다.

42장의 카드 중에서 순서를 고려하지 않고 3장의 카드를 선택하는 방법은

$$
\begin{aligned}
{}_{42}\mathrm{C}_3 &= \frac{{}_{42}\mathrm{P}_3}{3!} \\
&= \frac{42\times41\times40}{3\times2\times1} \\
&= 11480(\text{가지})
\end{aligned}
$$

인데, 상담사는 이렇게 선택된 3장의 카드를 해석하여 상담을 받는 사람의 무의식과 의식 중의 어느 한 부분을 반영하고 있는 심미적, 심리적, 정서적 상태를 분석한다. 그리고 그에 맞는 3가지 방향유들을 조합하여 제공함으로써 그 사람이 심신의 균형을 찾을 수 있도록 도와준다고 한다.

(출처: 김창숙 외, 「아로마 테라피가 스트레스 완화에 미치는 영향」)