2 유리함수와 무리함수

01 유리함수

02 무리함수

> 우리가 만든 모든 수학 내용처럼
> **함수**도 우리가 만든 것임을
> 잊어서는 안 된다.

(출처: Kline, M., 『Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Vol. 3』)

가우스(Gauss, K. F., 1777~1855)
독일의 수학자

이 글은 가우스가 1811년에 수학자 베셀(Bessel, F. W., 1784~1846)에게 보낸 편지 내용의 일부로, 우리가 사용하는 수학적 개념은 모두 사람이 만든 것으로서 함수도 그중의 하나임을 뜻하는 것이다.

01 유리함수

학습 목표

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.

준비하기

1 $(2x^2-x)\div x$를 계산하시오.

2 곡선 $y=x^2$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

다가서기

파이프 오르간의 음의 높낮이는 진동수에 의해 달라지는데, 진동수는 파이프의 길이에 반비례한다. 또, 소리가 전달되는 데 걸리는 시간과 온도 사이의 관계는 분모에 문자가 포함된 분수 꼴의 식으로 나타난다.

이와 같이 우리 주변에서 분수 꼴의 식으로 표현된 함수를 이용하여 설명할 수 있는 현상을 찾아볼 수 있다.

유리식

생각 열기 야구에서 타율은 타수에 대한 안타 수의 비율, 즉

$$\frac{(\text{안타 수})}{(\text{타수})}$$

로 계산한다. 어느 프로야구 선수의 올해 목표는 120안타를 기록하는 것이다.

▶ 이 선수의 올해 전반기 타수는 200이었고 후반기에 들어 x타수 만에 목표를 달성하였다. 이 선수가 목표를 달성했을 때의 타율을 x에 대한 식으로 나타내어 보자.

위의 **생각 열기**에서 타수는 $x+200$이고 안타 수는 120이므로 타율을 x에 대한 식으로 나타내면 $\dfrac{120}{x+200}$이다.

이와 같이 두 다항식 A, B $(B\neq0)$에 대하여 $\dfrac{A}{B}$의 꼴로 나타낸 식을 **유리식**이라고 한다.

특히, 다항식 A는 $\dfrac{A}{1}$로 나타낼 수 있으므로 다항식도 유리식이다.

보기 $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{x^2-1}{2}$, $\dfrac{3x+1}{x-2}$, $2x-1$은 모두 유리식이고, 이 중에서 $\dfrac{x^2-1}{2}$과 $2x-1$은 다항식이다.

문제 1 다음 중에서 다항식이 아닌 유리식을 모두 찾으시오.

(1) $\dfrac{4(2x-1)}{x}$

(2) $3x^2+\dfrac{2}{5}x$

(3) $\dfrac{1}{x^2-x+1}$

(4) $\dfrac{x^3-x}{10}$

다항식 $A, B, C\,(C\neq0)$에 대하여

① $\dfrac{A}{C}+\dfrac{B}{C}=\dfrac{A+B}{C}$

② $\dfrac{A}{C}-\dfrac{B}{C}=\dfrac{A-B}{C}$

유리식의 덧셈과 뺄셈은 유리수의 덧셈과 뺄셈에서처럼 분모를 통분하여 계산한다.

예제 1 다음 식을 계산하시오.

(1) $\dfrac{2}{x-1}+3$ (2) $\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{2x}{x^2+2x}$

풀이 (1) $\dfrac{2}{x-1}+3=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3(x-1)}{x-1}=\dfrac{2+3(x-1)}{x-1}=\dfrac{3x-1}{x-1}$

(2) $\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{2x}{x^2+2x}=\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{2x}{x(x+2)}=\dfrac{x(x+1)-2x}{x(x+2)}=\dfrac{x(x-1)}{x(x+2)}=\dfrac{x-1}{x+2}$

답 (1) $\dfrac{3x-1}{x-1}$ (2) $\dfrac{x-1}{x+2}$

문제 2 다음 식을 계산하시오.

(1) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x+1}$ (2) $\dfrac{x+7}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^2+x}$

다항식 A, B, C, D $(B\neq0,\ D\neq0)$에 대하여

① $\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{A\times C}{B\times D}$

② $\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{D}{C}=\dfrac{A\times D}{B\times C}$ (단, $C\neq0$)

유리식의 곱셈은 유리수의 곱셈에서처럼 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 곱하여 계산한다. 또, 유리식의 나눗셈은 유리수의 나눗셈에서처럼 나누는 식의 분자와 분모를 바꾼 식을 곱하여 계산한다.

예제 2 다음 식을 계산하시오.

(1) $\dfrac{2x-6}{x^2-4}\times\dfrac{x+2}{x^2-6x+9}$ (2) $\dfrac{x-3}{x-4}\div\dfrac{x^2-9}{x^2-16}$

풀이 (1) $\dfrac{2x-6}{x^2-4}\times\dfrac{x+2}{x^2-6x+9}=\dfrac{2(x-3)}{(x+2)(x-2)}\times\dfrac{x+2}{(x-3)^2}=\dfrac{2}{(x-2)(x-3)}$

(2) $\dfrac{x-3}{x-4}\div\dfrac{x^2-9}{x^2-16}=\dfrac{x-3}{x-4}\times\dfrac{x^2-16}{x^2-9}=\dfrac{x-3}{x-4}\times\dfrac{(x+4)(x-4)}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{x+4}{x+3}$

답 (1) $\dfrac{2}{(x-2)(x-3)}$ (2) $\dfrac{x+4}{x+3}$

문제 3 다음 식을 계산하시오.

(1) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x-3}\times\dfrac{x+3}{x^2-1}$ (2) $\dfrac{2x+10}{x^2-4x+3}\div\dfrac{x+5}{x-3}$

유리함수

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 유리식일 때, 이 함수를 **유리함수**라고 한다. 특히, $f(x)$가 x에 대한 다항식일 때, 이 함수를 **다항함수**라고 한다.

다항식은 유리식이므로 다항함수도 유리함수이다.

예를 들어 함수

$$y=\frac{1}{2}x^2-1,\quad y=\frac{2}{x},\quad y=\frac{x+1}{2x-1}$$

은 모두 유리함수이고, 이 중에서 $y=\frac{1}{2}x^2-1$은 다항함수이다.

생각톡톡

다항함수의 정의역은 무엇일까?

유리함수에서 정의역이 주어져 있지 않은 경우에는 분모가 0이 되지 않도록 하는 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

보기 ① 유리함수 $y=\frac{2}{x}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 0인\ 실수\}$이다.

② 유리함수 $y=\frac{x+1}{2x-1}$의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{1}{2}인\ 실수\right\}$이다.

문제 4 다음 함수의 정의역을 구하시오.

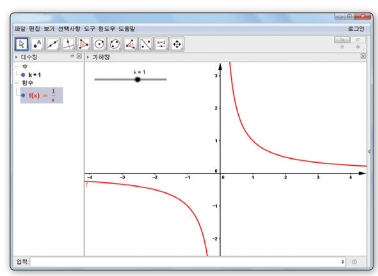
(1) $y=\frac{3}{x-1}$

(2) $y=\frac{-2x+1}{3x+2}$

유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프

다음을 통해 유리함수 $y=\frac{k}{x}\ (k\neq 0)$의 그래프에 대하여 알아보자.

함께하기 컴퓨터 프로그램을 이용하여 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 k의 값에 따라 확인해 보자.



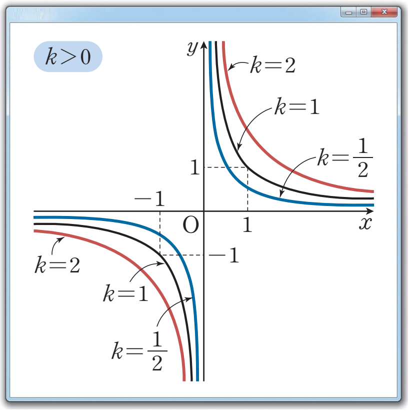
❶ 입력창에 ‘y=k/x’를 입력하고 Enter 를 누른다.

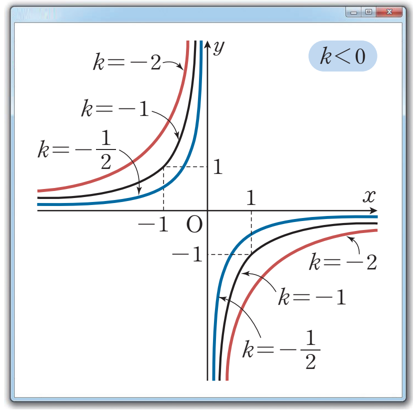
❷ 새 창의 [슬라이더 만들기]를 클릭한다.

활동 ▶ k에 대한 슬라이더를 좌우로 움직이면서 k의 값에 따른 함수의 그래프의 모양을 확인해 보자.

앞의 활동으로부터 유리함수 $y=\frac{k}{x}\ (k\neq0)$의 그래프는 k의 값에 따라 다음과 같은 모양의 곡선이 됨을 알 수 있다.

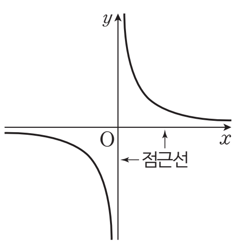
유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프는 k의 절댓값이 커질수록 원점으로부터 멀어진다.





이때 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프 위의 점은 x의 절댓값이 커질수록 x축에 한없이 가까워지고, x의 값이 0에 가까워질수록 y축에 한없이 가까워진다.

이와 같이 곡선이 어떤 직선에 한없이 가까워질 때, 이 직선을 그 곡선의 **점근선**이라고 한다.



함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프의 점근선은 x축과 y축이다.

이상에서 다음을 알 수 있다.

유리함수 $y=\frac{k}{x}\ (k\neq0)$의 그래프

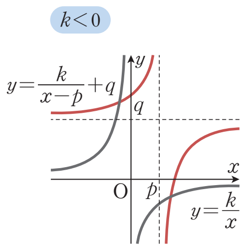
1. 정의역과 치역은 모두 0이 아닌 실수 전체의 집합이다.
2. $k>0$이면 그래프는 제1사분면과 제3사분면에 있고,
   $k<0$이면 그래프는 제2사분면과 제4사분면에 있다.
3. 원점에 대하여 대칭이다.
4. 점근선은 x축과 y축이다.

문제 5 다음 함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=\frac{6}{x}$ (2) $y=-\frac{6}{x}$

(3) $y=\frac{1}{3x}$ (4) $y=-\frac{1}{3x}$

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프



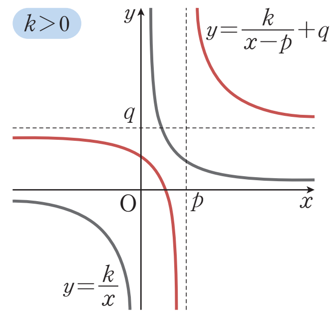
유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$의 그래프는

유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를

x축의 방향으로 p만큼,

y축의 방향으로 q만큼

평행이동한 것이다.



이때 이 함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq p$인 실수$\}$이고, 치역은 $\{y\,|\,y\neq q$인 실수$\}$이다.

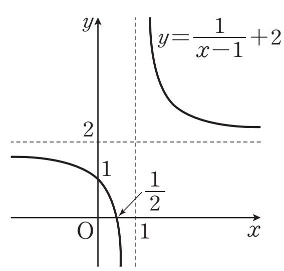
또, 이 그래프의 점근선은 두 직선 $x=p$와 $y=q$이다.

이상에서 다음을 알 수 있다.

유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$의 그래프

1. 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
2. 정의역은 $\{x\,|\,x\neq p$인 실수$\}$이고, 치역은 $\{y\,|\,y\neq q$인 실수$\}$이다.
3. 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다.
4. 점근선은 두 직선 $x=p$와 $y=q$이다.

보기 함수 $y=\dfrac{1}{x-1}+2$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 1$인 실수$\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\neq 2$인 실수$\}$이며, 점근선은 두 직선 $x=1$과 $y=2$이다.



문제 6 다음 함수의 그래프를 그리고, 점근선을 구하시오.

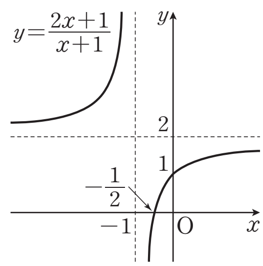
(1) $y=\dfrac{2}{x+1}$ (2) $y=-\dfrac{1}{x-2}+1$

> $ad-bc=0$, $c\neq0$이면
> $\dfrac{ax+b}{cx+d}=$(상수)
> 이고, $c=0$, $d\neq0$이면
> $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a}{d}x+\dfrac{b}{d}$
> 이다.

일반적으로 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (ad-bc\neq0,\ c\neq0)$의 그래프는 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 꼴로 변형하여 그린다.

예제 3 함수 $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$의 그래프를 그리고, 점근선을 구하시오.

풀이 $y=\dfrac{2x+1}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-1}{x+1}=-\dfrac{1}{x+1}+2$이므로 함수 $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선은 두 직선 $x=-1$과 $y=2$이다.



답 풀이 참조

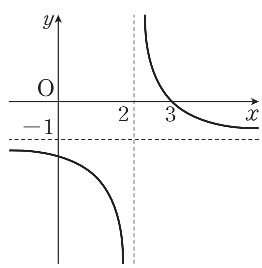
문제 7 다음 함수의 그래프를 그리고, 점근선을 구하시오.

(1) $y=\dfrac{4x}{x-1}$ (2) $y=\dfrac{-3x+4}{x-2}$

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

오른쪽 그림과 같은 유리함수의 그래프가 나타내는 함수의 식을 구하려고 한다.



활동 ① 점근선이 두 직선 $x=p$와 $y=q$인 유리함수의 식은 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 꼴임을 이용하여 구하려는 함수의 식을 세워 보자.

활동 ② 활동 ①에서 구한 함수의 식에 그래프가 지나는 점의 좌표 $(3,\ 0)$을 대입하여 k의 값을 구해 보자.

활동 ③ 활동 ①과 활동 ②의 결과를 이용하여 구하려는 함수의 식을 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 꼴로 나타내어 보자.

공학적 도구

유리함수의 그래프 그리기

창의·융합 | 의사소통

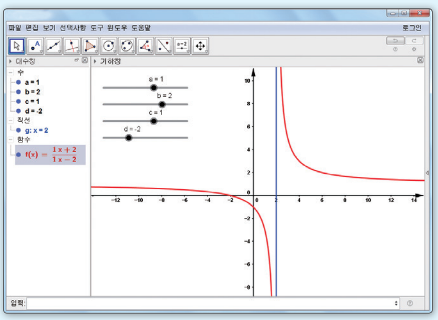
컴퓨터 프로그램을 이용하여 유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}\,(ad-bc\neq0,\ c\neq0)$의 그래프가 상수 a, b, c, d 중에서 어느 하나의 값이 변함에 따라 어떻게 변하는지 알아보자.

❶ 입력창에 'y=(ax+b)/(cx+d)'를 입력하고, Enter 를 누른다.

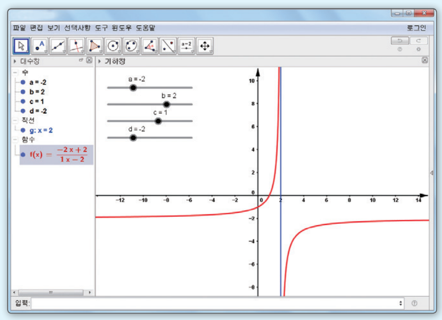
❷ 새 창의 [슬라이더 만들기]를 클릭하여 a, b, c, d에 대한 4개의 슬라이더를 만든다.

❸ 대수창에서 $a=1$, $b=2$, $c=1$, $d=-2$로 바꾸면, [그림 1]과 같이 함수 $y=\frac{x+2}{x-2}$의 그래프가 나타난다.

❹ a에 대한 슬라이더를 좌우로 움직이면서 [그림 2]와 같이 a의 값에 따른 함수 $y=\frac{ax+2}{x-2}$의 그래프의 모양의 변화를 확인한다.



[그림 1]



[그림 2]

위의 ❹의 결과에서 알 수 있듯이 함수 $y=\frac{ax+2}{x-2}=\frac{2a+2}{x-2}+a$에 대하여

$a>-1$이면 ( ) 꼴의 그래프, $a=-1$이면 직선 $y=-1$, $a<-1$이면 ( ) 꼴의 그래프가 그려진다. 또, a의 값이 변해도 y절편은 항상 -1이고, $a\neq-1$인 경우에 두 점근선 중에서 직선 $x=2$는 변하지 않는다.

확인 위와 같은 방법으로 b, c, d의 값이 변함에 따라 다음 함수의 그래프가 어떻게 변하는지 말해 보자. 또, 변하지 않는 성질에 대해서도 말해 보자.

(1) $y=\frac{x+b}{x-2}$ (2) $y=\frac{x+2}{cx-2}$ (3) $y=\frac{x+2}{x+d}$

02 무리함수

학습 목표

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.

준비하기

1 $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$을 계산하시오.

2 직선 $y=2x-3$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하시오.

다가서기

맑은 날 산의 정상에서 볼 수 있는 최대 거리와 산의 높이 사이의 관계, 바람 부는 날에 느끼는 체감 온도와 풍속 사이의 관계 등은 근호 안에 문자가 포함되어 있는 식으로 나타낸다. 이와 같이 우리 주변의 현상을 함수로 표현할 때, 근호 안에 문자가 포함되어 있는 식이 이용되는 경우가 있다.

무리식

생각 열기 자유 낙하하는 물체의 낙하 시간(s)은 낙하 거리(m)에 의하여

$$\sqrt{\frac{2\times(\text{낙하 거리})}{g}}\ (g\text{는 중력 가속도})$$

와 같은 식으로 나타낼 수 있다고 한다.

▶ 자유 낙하하는 물체의 낙하 거리가 x m이고 $g=9.8\ \text{m/s}^2$일 때, 낙하 시간을 x에 대한 식으로 나타내어 보자.

위의 **생각 열기**에서 낙하 시간을 x에 대한 식으로 나타내면 $\sqrt{\dfrac{x}{4.9}}$이고, 이 식은 근호 안에 문자가 포함되어 있는 식이다.

이와 같이 근호 안에 문자가 포함되어 있는 식 중에서 유리식으로 나타낼 수 없는 식을 **무리식**이라고 한다.

무리식의 값이 실수가 되려면 근호 안에 있는 식의 값이 0 이상이어야 하므로 무리식을 계산할 때는

$$(\text{근호 안에 있는 식의 값})\ge 0$$

이 되는 범위에서만 생각한다.

보기 ① 무리식 $\sqrt{x-2}+1$의 값이 실수가 되려면 $x-2\ge 0,\quad x\ge 2$

② 무리식 $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$의 값이 실수가 되려면 분모가 0이 아니어야 하므로

$x+1>0,\quad x>-1$

문제 1 다음 무리식의 값이 실수가 되도록 x의 값의 범위를 정하시오.

(1) $\sqrt{2x+1}-1$

(2) $\dfrac{x}{\sqrt{3-x}}$

무리식의 계산은 무리수의 계산과 같은 방법으로 한다.

예제 1 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$ (2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$

풀이 (1) $(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})=(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x})^2=x+2-x=2$

(2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}=\dfrac{(1-\sqrt{x})+(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}=\dfrac{2}{1^2-(\sqrt{x})^2}=\dfrac{2}{1-x}$

답 (1) 2 (2) $\dfrac{2}{1-x}$

문제 2 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)$ (2) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$

분모가 무리식인 경우에는 분모를 유리화하여 그 식을 간단히 할 수 있다.

예제 2 분모를 유리화하여 다음 식을 간단히 하시오.

$$\frac{2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$$

풀이 분모, 분자에 각각 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$을 곱하면

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}&=\frac{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}\\&=\frac{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{(x+1)-(x-1)}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\end{aligned}$$

답 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$

문제 3 분모를 유리화하여 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\dfrac{4}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}$ (2) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$

무리함수

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 무리식일 때, 이 함수를 **무리함수**라고 한다.

예를 들어 함수 $y=\sqrt{x+1}$과 $y=\sqrt{-2x+1}+3$은 모두 무리함수이다.

무리함수에서 정의역이 주어져 있지 않은 경우에는 근호 안에 있는 식의 값이 0 이상이 되도록 하는 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

보기 무리함수 $y=\sqrt{-2x+1}+3$의 정의역은 $\left\{x \middle| x\le\frac{1}{2}\right\}$이다.

문제 4 다음 함수의 정의역을 구하시오.

(1) $y=-\sqrt{x-2}$

(2) $y=\sqrt{3-2x}-1$

무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프

> $y=f(x)$의 역함수 구하기
>
> $y=f(x)$
>
> ↓ x에 대하여 푼다.
>
> $x=f^{-1}(y)$
>
> ↓ x와 y를 서로 바꾼다.
>
> $y=f^{-1}(x)$

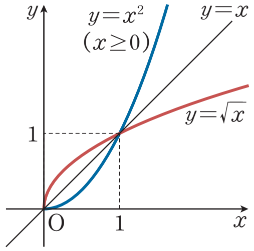
무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 그 역함수의 그래프를 이용하여 그려 보자.

함수 $y=\sqrt{x}$는 정의역이 $\{x|x\ge0\}$이고 치역이 $\{y|y\ge0\}$인 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. 그러므로 $y=\sqrt{x}\ (x\ge0)$를 x에 대하여 풀면 $x=y^2\ (y\ge0)$이고, 이 식에서 x와 y를 서로 바꾸면 역함수

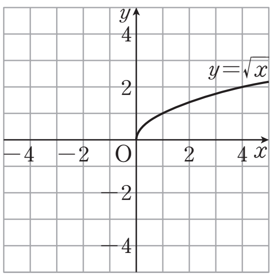
$$y=x^2\ (x\ge0)$$

을 얻는다.

따라서 무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 그 역함수 $y=x^2\ (x\ge0)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로, 오른쪽 그림과 같다.



문제 5 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 대칭이동하여 다음 함수의 그래프를 그리시오.

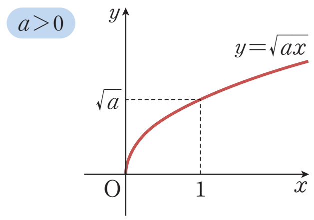


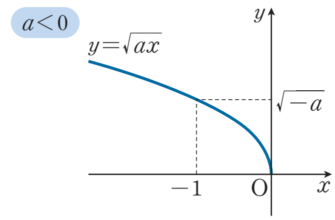
(1) $y=-\sqrt{x}$

(2) $y=\sqrt{-x}$

(3) $y=-\sqrt{-x}$

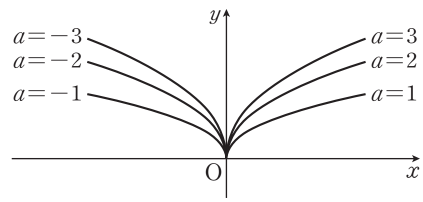
일반적으로 무리함수 $y=\sqrt{ax}\ (a\neq0)$의 그래프는 그 역함수 $y=\dfrac{x^2}{a}\ (x\geq0)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로, a의 값의 부호에 따라 다음 그림과 같다.





무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프는 a의 절댓값이 커질수록 x축으로부터 멀어진다.

무리함수 $y=\sqrt{ax}\ (a\neq0)$의 그래프는 a의 값에 따라 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $a>0$일 때 $\{x\,|\,x\geq0\}$, $a<0$일 때 $\{x\,|\,x\leq0\}$이며, 치역은 $\{y\,|\,y\geq0\}$이다.

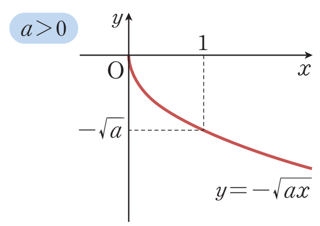


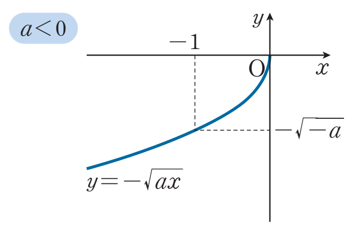
이상을 정리하면 다음과 같다.

무리함수 $y=\sqrt{ax}\ (a\neq0)$의 그래프

1. $a>0$일 때, 정의역은 $\{x\,|\,x\geq0\}$이고 치역은 $\{y\,|\,y\geq0\}$이다.
   $a<0$일 때, 정의역은 $\{x\,|\,x\leq0\}$이고 치역은 $\{y\,|\,y\geq0\}$이다.
2. 함수 $y=\dfrac{x^2}{a}\ (x\geq0)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

한편 무리함수 $y=-\sqrt{ax}\ (a\neq0)$의 그래프는 무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이므로, a의 값의 부호에 따라 다음 그림과 같다.





문제 6 다음 함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=\sqrt{2x}$　　(2) $y=\sqrt{-2x}$

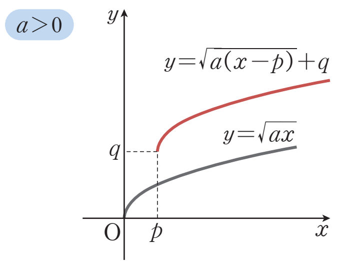
(3) $y=-\sqrt{2x}$　　(4) $y=-\sqrt{-2x}$

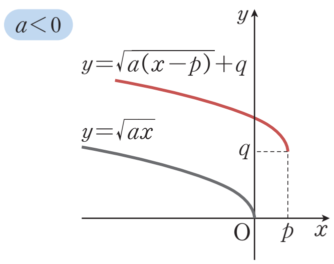
무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프

무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a\neq0)$의 그래프는 무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를

x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼

평행이동한 것이다.





이때 이 함수의 정의역은

$a>0$이면 $\{x\,|\,x\geq p\}$,　$a<0$이면 $\{x\,|\,x\leq p\}$

이고, 치역은 $\{y\,|\,y\geq q\}$이다.

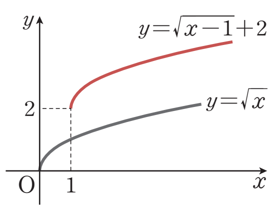
이상을 정리하면 다음과 같다.

무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a\neq0)$의 그래프

① 무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

② $a>0$일 때, 정의역은 $\{x\,|\,x\geq p\}$이고 치역은 $\{y\,|\,y\geq q\}$이다.
$a<0$일 때, 정의역은 $\{x\,|\,x\leq p\}$이고 치역은 $\{y\,|\,y\geq q\}$이다.

보기 함수 $y=\sqrt{x-1}+2$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x\,|\,x\geq1\}$이고, 치역은 $\{y\,|\,y\geq2\}$이다.



문제 7 다음 함수의 그래프를 그리시오.

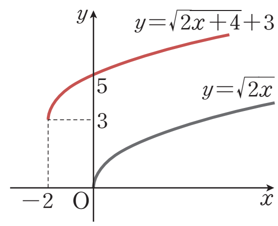
(1) $y=\sqrt{x+1}$　　(2) $y=\sqrt{-2(x-2)}-1$

$y=\sqrt{ax+b}+c$
$=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$

일반적으로 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a\neq0)$의 그래프는 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 꼴로 변형하여 그린다.

예제 3 함수 $y=\sqrt{2x+4}+3$의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구하시오.

풀이 $y=\sqrt{2x+4}+3=\sqrt{2(x+2)}+3$이므로 함수 $y=\sqrt{2x+4}+3$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x\,|\,x\geq-2\}$이고 치역은 $\{y\,|\,y\geq3\}$이다.



답 풀이 참조

문제 8 다음 함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구하시오.

(1) $y=\sqrt{4x+9}-3$ (2) $y=-\sqrt{6-3x}+1$

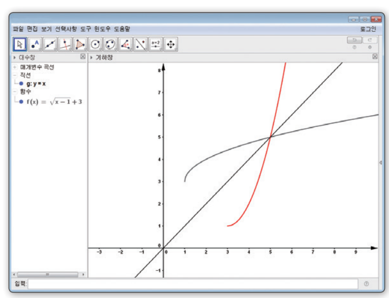
생각 넓히기

문제 해결 | **추론** | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | **태도 및 실천**

무리함수 $y=\sqrt{x-1}+3$과 그 역함수의 정의역과 치역 사이의 관계를 알아보려고 한다.

활동 ❶ 함수 $y=\sqrt{x-1}+3$의 정의역과 치역을 구해 보자.

활동 ❷ 컴퓨터 프로그램을 이용하여 주어진 함수의 역함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구해 보자.



❶ 입력창에 'y=sqrt(x−1)+3'과 'y=x'를 입력하고, Enter를 누른다.
❷ 메뉴에서 '직선에 대하여 대칭'을 클릭한 다음 함수 $y=\sqrt{x-1}+3$의 그래프와 직선 $y=x$를 차례대로 선택한다.

활동 ❸ 활동 ❶과 활동 ❷의 결과를 비교해 보고, 함수와 그 역함수의 정의역과 치역 사이의 관계를 설명해 보자.

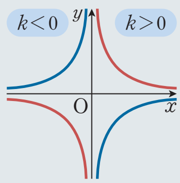
V-2. 유리함수와 무리함수

중단원 마무리하기

유리함수

(1) 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 유리식일 때, 이 함수를 **유리함수**라고 한다.

(2) **유리함수 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$의 그래프**



❶ 정의역과 치역은 모두 0이 아닌 실수 전체의 집합이다.

❷ $k>0$이면 그래프는 제1사분면과 제3사분면에 있고, $k<0$이면 그래프는 제2사분면과 제4사분면에 있다.

❸ 원점에 대하여 대칭이다.

❹ 점근선은 x축과 y축이다.

(3) **유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q(k\neq0)$의 그래프**

❶ 유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

❷ 정의역은 $\{x|x\neq p$인 실수$\}$이고, 치역은 $\{y|y\neq q$인 실수$\}$이다.

❸ 점 (p, q)에 대하여 대칭이다.

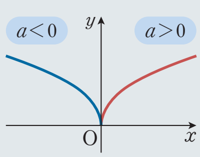
❹ 점근선은 두 직선 $x=p$와 $y=q$이다.

무리함수

(1) 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 무리식일 때, 이 함수를 **무리함수**라고 한다.

(2) **무리함수 $y=\sqrt{ax}(a\neq0)$의 그래프**

함수 $y=\frac{x^2}{a}(x\geq0)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



(3) **무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q(a\neq0)$의 그래프**

❶ 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

❷ $a>0$일 때, 정의역은 $\{x|x\geq p\}$, 치역은 $\{y|y\geq q\}$
$a<0$일 때, 정의역은 $\{x|x\leq p\}$, 치역은 $\{y|y\geq q\}$

기본

01 다음 식을 계산하시오.

(1) $\frac{x-1}{x^2-5x}-\frac{1}{x-5}$

(2) $\frac{x^2-4}{x^2-2x-3}\div\frac{x-2}{x^2-3x}$

02 다음 함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역, 점근선을 구하시오.

(1) $y=\frac{1}{x-4}-2$

(2) $y=\frac{3x-1}{x+1}$

03 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(\sqrt{2}-\sqrt{3x-5})(\sqrt{2}+\sqrt{3x-5})$

(2) $\frac{4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2}}$

04 다음 함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구하시오.

(1) $y=\sqrt{2x-4}$

(2) $y=\sqrt{3-x}-1$

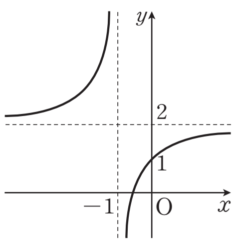
표 준

05 $x\neq1$인 모든 실수 x에 대하여 다음 등식이 항상 성립할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

$$\frac{a}{x-1}+\frac{x+b}{x^2+x+1}=\frac{2x-5}{x^3-1}$$

06 함수 $y=\frac{2x+3}{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 함수 $y=\frac{3x-2}{x-1}$의 그래프와 일치한다고 할 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

07 함수 $y=\frac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.



08 다음 식을 간단히 하시오.

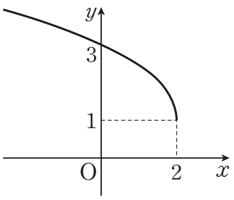
$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}$$

09 함수 $f(x)=\sqrt{-3x+a}+b$의 정의역은 $\{x\,|\,x\leq6\}$이고, 치역은 $\{y\,|\,y\geq-4\}$이다. 이때 $f(3)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

10 함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 2)$에서 만날 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

|서·술·형|

11 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

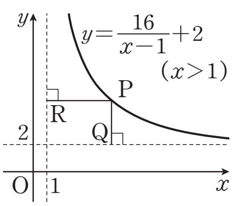


발 전

12 두 함수 $f(x)=\dfrac{3x+5}{2x-4}$, $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq0,\ c\neq0)$일 때, $x\neq2,\ x\neq\dfrac{3}{2}$인 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)=x$가 되도록 하는 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선을 구하시오. (단, $a,\ b,\ c,\ d$는 상수이다.)

사고력+

13 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{16}{x-1}+2\ (x>1)$의 그래프 위의 점 P에서 두 점근선에 내린 수선의 발을 각각 Q와 R라 하자. 이때 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$의 최솟값을 구하시오.



|서·술·형|

14 함수 $f(x)=\sqrt{x-3}+k$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

V 대단원 **평가하기**

하 중 상

01

두 집합 $X=\{-1, 0, 1\}$, $Y=\{0, 1, 2\}$에 대하여 X에서 Y로의 두 함수 f, g를

$$f(x)=x^3+a, \quad g(x)=ax+b$$

라 하자. $f=g$가 성립할 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

02

집합 $X=\{-1, 0, 1\}$일 때, 모든 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시키는 X에서 X로의 함수 f의 개수를 구하시오.

03

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

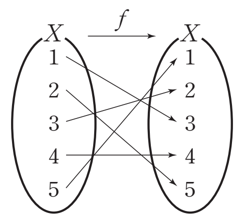
$$f(x)=|x-2|+kx+3$$

이 일대일대응일 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $-1<k<1$ ② $k<-1$ 또는 $k>1$
③ $0<k<2$ ④ $k<0$ 또는 $k>2$
⑤ $-2<k<0$

04

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 함수 $f : X \longrightarrow X$가 오른쪽 그림과 같을 때, $(f\circ f\circ f)(3)$의 값을 구하시오.



05

두 함수 $f(x)=5x+k$와 $g(x)=-x+1$에 대하여 $f\circ g=g\circ f$가 성립할 때, 상수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

06

세 함수 f, g, h에 대하여

$$f(x)=x-5, \quad (g\circ h)(x)=-2x+3$$

일 때, $((f\circ g)\circ h)(a)=8$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오.

07

두 함수 f, g가 일대일대응이고 $(g\circ f)(x)=2x-7$, $g(5)=-1$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

08

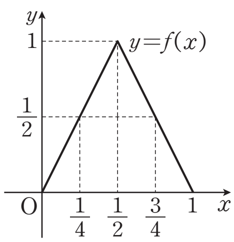
집합 $X=\{2, 4, 6, 8\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow X$가

$$f(x)=\begin{cases} 8 & (x=2) \\ x-2 & (x\neq 2) \end{cases}$$

이다. 함수 $g: X \longrightarrow X$가 $g(2)=6$, $f\circ g=g\circ f$를 만족시킬 때, $2g(4)-3g(6)$의 값을 구하시오.

09

집합 $X=\{x|0\leq x\leq 1\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다.



$f^2=f\circ f$, $f^3=f\circ f\circ f$, $\cdots$

로 정의할 때,

$f\left(\frac{1}{4}\right)+f^2\left(\frac{1}{4}\right)+f^3\left(\frac{1}{4}\right)+\cdots+f^{10}\left(\frac{1}{4}\right)$의 값을 구하시오.

10

일차함수 f에 대하여 $f^{-1}(3)=1$, $(f\circ f)(1)=-3$일 때, $f(-2)$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

11

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow X$의 역함수가 존재하고

$$f(1)=4,\ f(3)=5,\ f^{-1}(2)=5,\ (f\circ f)(4)=4$$

일 때, $(f\circ f)(2)+(f\circ f)(5)$의 값을 구하시오.

12

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수

$$f(x)=5x+20,\quad g(x)=\begin{cases} x+25 & (x\geq 25) \\ 2x & (x<25) \end{cases}$$

에 대하여 $(f\circ g^{-1})(30)+(f^{-1}\circ g)(30)$의 값을 구하시오.

13

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f에 대하여 $f(3x+1)=6x-5$가 성립할 때, 역함수는 $f^{-1}(x)=ax+b$이다. 이때 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

14

함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+2}$의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나고 $f=f^{-1}$일 때, $f(-1)$의 값을 구하시오.

(단, a, b는 상수이다.)

15

함수 $f(x)=\dfrac{bx+c}{x+a}$의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.

16

다음 **보기**의 함수 중에서 그 그래프를 평행이동하여 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프와 일치하는 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $y=\dfrac{2x-1}{x}$　　ㄴ. $y=\dfrac{2x+7}{x+3}$

ㄷ. $y=\dfrac{x-3}{x-1}$　　ㄹ. $y=\dfrac{-3x-7}{x+2}$

① ㄱ, ㄴ　② ㄱ, ㄹ　③ ㄷ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

17

함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나고, 점근선이 두 직선 $x=2$, $y=1$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a-b-c$의 값을 구하시오.

18

$-3\le x\le 2$에서 함수 $y=\sqrt{7-3x}+k$의 최솟값이 2일 때, 최댓값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

19

두 집합 A, B에 대하여

$A=\{(x,\ y)\,|\,y=\sqrt{x+1}+1\}$,
$B=\{(x,\ y)\,|\,y=-2x+k\}$

일 때, $n(A\cap B)=1$을 만족시키는 실수 k의 최솟값을 구하시오.

20

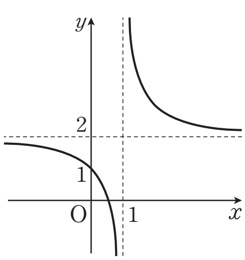
1보다 큰 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1},\quad g(x)=\sqrt{2x-1}$$

에 대하여 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)$의 값을 구하시오.

21

함수 $y=\dfrac{bx+c}{ax-1}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 지나는 사분면은? (단, a, b, c는 상수이다.)



① 제1사분면, 제2사분면
② 제3사분면, 제4사분면
③ 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면
④ 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면
⑤ 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면

22번부터 24번까지 서술형입니다.

22

함수 f에 대하여

$$f^2(x)=f(f(x)),\quad f^3(x)=f(f^2(x)),\ \cdots$$

로 정의하자. 집합 $X=\{1, 2, 3\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow X$가 두 조건

$$f(1)=3,\quad f^3=I\ (I\text{는 항등함수})$$

를 만족시킨다. 함수 f의 역함수를 g라 할 때, $g^{13}(2)+g^{14}(3)$의 값을 구하시오.

23

함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq0,\ c\neq0)$의 그래프가 점 $(1, 3)$을 지나면서 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이고, 직선 $y=-x+5$에 대해서도 대칭이다. 이때 $f(7)$의 값을 구하시오. (단, a, b, c, d는 상수이다.)

24

함수 $f(x)=\sqrt{x-1}+1$에 대하여 다음에 답하시오.

(1) 역함수 $y=f^{-1}(x)$를 구하시오.

(2) 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 만나는 두 점을 각각 P와 Q라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이를 구하시오.

자기평가

정답을 맞힌 문항에 ○표 하여 학습 성취도를 표시하고, 부족한 부분은 교과서의 해당 쪽을 확인하여 복습하자.

문항 번호	성취 기준	성취도	복습
01 02 03	함수의 개념과 그 그래프를 이해한다.	○ △ ×	219~223쪽
04 05 06 07 08 09	함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.	○ △ ×	224~225쪽
10 11 12 13 22	역함수의 뜻을 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다.	○ △ ×	227~230쪽
14 15 16 17 23	유리함수와 그 그래프의 성질을 이해하고, 그래프를 그릴 수 있다.	○ △ ×	236~241쪽
18 19 20 21 24	무리함수와 그 그래프의 성질을 이해하고, 그래프를 그릴 수 있다.	○ △ ×	243~248쪽

성취도 ○ 만족, △ 보통, × 미흡

수학 이야기

비둘기 집의 원리와 일대일대응

Q 효은이가 다니는 고등학교의 1학년 학생은 370명이다. 이 학생들 중에서 생일이 같은 학생이 있을까?

A 1년은 365일(윤년의 경우 366일)이므로 생일이 다른 학생은 최대 366명이 된다. 이때 1월 1일, 1월 2일, …, 12월 31일에 각각 그날이 생일인 학생을 대응시키면 4명이 남게 된다.

따라서 어느 날짜에는 적어도 2명 이상의 학생이 대응되므로 생일이 같은 학생은 반드시 있다.

Q 승강기 안에 5명이 타고 있는데, 내리는 층의 버튼이 4개 눌려 있다. 승강기 안에 있는 5명의 사람이 모두 다른 층에서 내린다고 할 수 있을까?

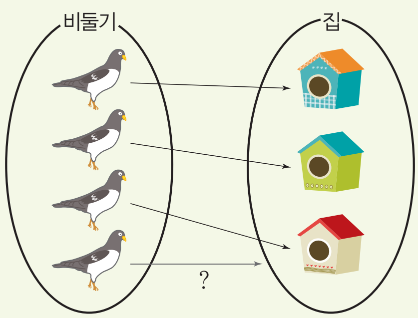
A 승강기의 문이 한 번 열릴 때마다 한 명씩 내린다고 하면, 문이 네 번 열리고 닫힌 후에는 승강기 안에 한 명이 남아 있게 된다.

따라서 버튼이 눌려 있는 4개의 층 중에서 어느 층에서는 반드시 2명이 함께 내려야 한다.

이와 같이 생각하는 논리를 ‘비둘기 집의 원리’라고 한다.

예를 들어 비둘기가 4마리 있는데, 비둘기 집이 3개밖에 없다면 적어도 두 마리는 같은 집에 들어가야만 한다는 것이다.

비둘기 집의 원리를 함수와 대응을 이용하여 표현하면 다음과 같다.



어떤 함수의 정의역의 원소의 개수가 공역의 원소의 개수보다 많으면 그 함수는 일대일대응이 될 수 없다.

암호 기술과 함수

해킹이나 개인 정보 유출 등의 사고가 자주 발생함에 따라 정보 보호의 중요성이 커지면서 하나의 학문으로 자리 잡게 된 암호학은 컴퓨터 과학의 발전과 함께 꾸준히 발전하고 있다. 현대 암호 체계는 컴퓨터를 통해서 0과 1을 사용하는 수 체계를 암호화에 사용하기 때문에 알파벳, 한글, 숫자는 물론이고 소리, 영상 등 다양한 매체의 암호화에 적용할 수 있다.

암호학에는 암호화 기법과 암호 해독 기법이 있는데, 암호화 과정에서 암호문을 생성하기 위해서는 암호화 알고리즘이 필요하고, 암호 해독 과정에서 암호를 해독하기 위해서는 복호화 알고리즘이 필요하다. 여기서 암호화 알고리즘의 입력값은 암호화하려고 하는 메시지이고 출력값은 암호문이다.
즉, 특정 조건을 만족시키는 함수를 이용하여 간단한 과정만으로 평문을 암호문으로 바꿀 수 있다.

거꾸로 복호화 알고리즘의 입력값은 암호문이고 출력값은 암호화하려고 했던 원래의 메시지이다. 이때 복호화 알고리즘에 이용되는 함수는 앞의 암호화 알고리즘에 이용되는 함수와 역함수 관계이다. 이와 같은 암호 기법을 설계하는 데 매우 중요한 요소가 바로 함수이다.

요즘에는 함수를 암호화 또는 복호화 알고리즘에 활용하는 것을 넘어선 연구들이 진행되고 있는데, 함수 암호(Functional Encryption)가 바로 그것이다. 이것은 암호문에서 연산이 가능한 암호로서, 이미 암호화된 데이터를 원본 데이터로 복구하기 전에 가공할 수 있다는 장점이 있다.
예를 들어 학생들의 성적에 대한 분석을 외부 기관에 제공하려고 할 때, 학교에서는 학생들의 정보를 암호화해서 보낸다. 외부 기관에서는 이를 원본 데이터로 복구하지 않고 총점과 평균 점수 등을 계산하게 되고, 학교에서는 이 결과를 다시 복호화하여 학생 개개인의 정보를 외부에 노출하지 않고도 필요한 분석을 할 수 있게 되는 것이다.

이처럼 함수의 성질에 의해서 놀랍게 발전하고 있는 암호 기술은 개인 정보 보호의 중요성이 커지는 미래 사회에서 핵심 기술로 자리매김할 것이다.

(출처: Boneh, D. 외, 「Functional Encryption: Definitions and Challenges」/「Functional Encryption: A New vision for Public-Key Cryptography」)