V 함수

함수는 변화하는 두 양 사이의 관계를 나타내는 개념으로, 독일의 수학자 라이프니츠(Leibniz, G. W., 1646～1716)가 이 용어를 처음 사용했다.

함수의 뜻을 지금과 같이 '수의 특수한 대응 관계'로 설명한 사람은 독일의 수학자 디리클레(Dirichlet, J. P. G. L., 1805～1859)이다. 그는 함수를 표현하는 식이나 규칙은 본질적인 것이 아니며 수식으로 나타내어지지 않는 관계도 함수가 될 수 있다고 했다.

함수는 현대 수학에서 변화를 설명하는 데 가장 중요한 방법을 제공한다.

1. 함수

2. 유리함수와 무리함수

이 단원에서는

함수의 뜻과 성질, 함수의 그래프, 합성함수와 역함수를 알아보며, 유리함수와 무리함수의 그래프를 그려 보고 그 그래프의 성질을 이해한다.

1 함수

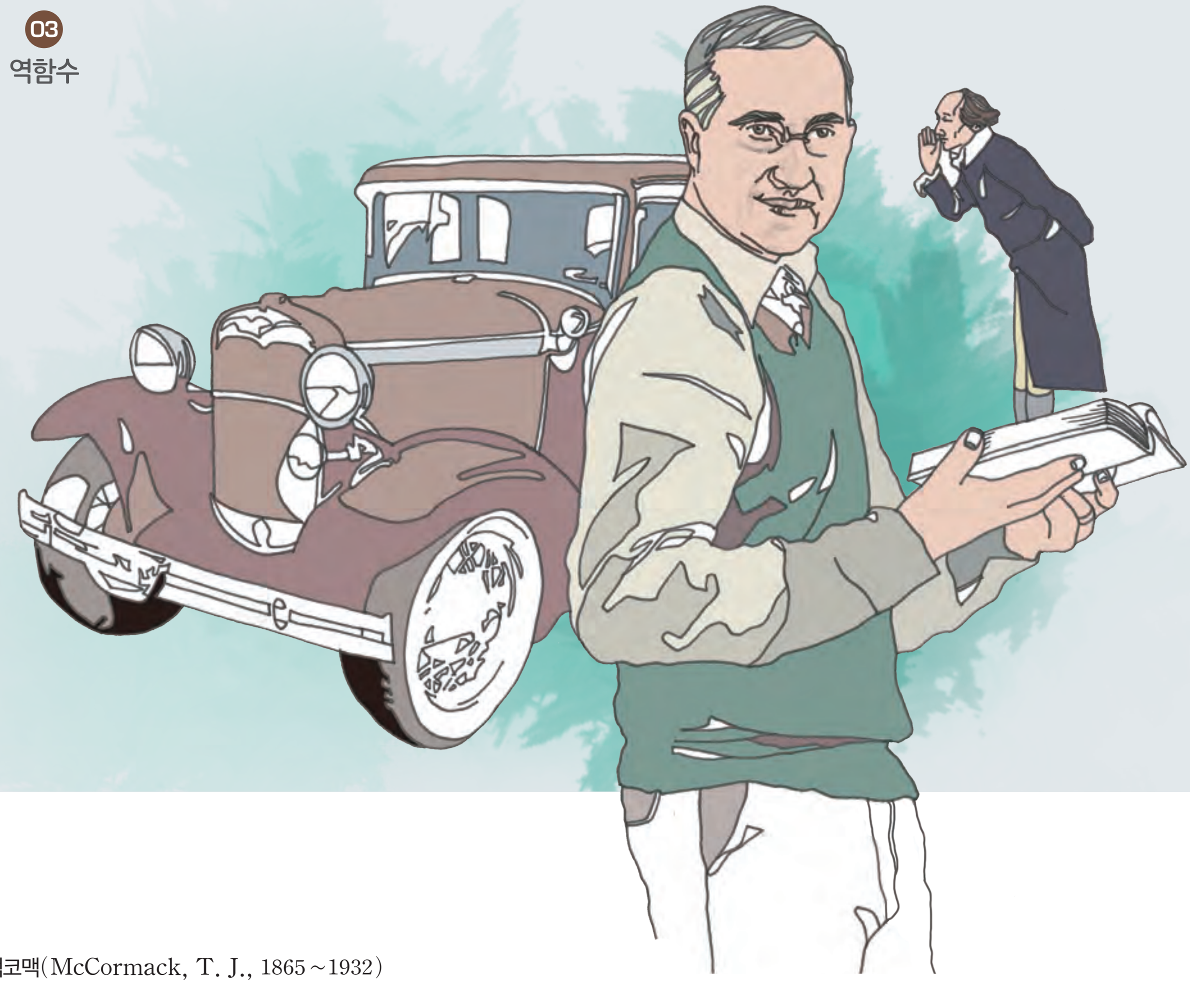
01 함수

02 합성함수

03 역함수

“ 마침내 전체 수학의 발전은 …
바로 근대 수학 사상의 꽃인
함수의 개념이라는 정점에
이르게 된다. ”

(출처: McCormack, T. J., 「On the Nature of Scientific Law and Scientific Explanation」)



토마스 맥코맥(McCormack, T. J., 1865～1932)
미국의 과학 관련 편집 저술가

이 글은 맥코맥이 1900년『The Monist』라는 철학 잡지에 과학 법칙의 특성에 대하여 기고한 내용으로서, 17～18세기에 함수가 수학뿐만 아니라 과학 기술의 발전에 얼마나 중요한 역할을 했는지 강조한 것이다.

01 함수

학습 목표

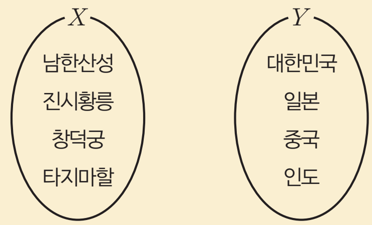
함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.

준비 하기

한 변의 길이가 x cm인 정사각형의 둘레의 길이를 y cm라 할 때, 두 변수 x, y 사이의 관계식을 구하시오.

함수

생각 열기 오른쪽 그림은 유네스코(UNESCO)가 지정한 세계 문화유산과 아시아의 여러 나라를 각각 두 집합 X, Y로 나타낸 것이다.



▶ 각각의 세계 문화유산을 그 유산이 있는 나라에 화살표로 연결해 보자.

공집합이 아닌 두 집합 X, Y에 대하여 X의 원소에 Y의 원소를 짝지어 주는 것을, 집합 X에서 집합 Y로의 **대응**이라고 한다. 이때 X의 원소 x에 Y의 원소 y가 대응하는 것을 기호로 $x \longrightarrow y$와 같이 나타낸다.

중학교에서는 두 변수 x와 y에 대하여 x의 값이 정해짐에 따라 y의 값이 오직 하나씩 정해지는 관계가 있을 때, y를 x의 함수라 정의하였다. 여기서는 두 집합 X와 Y에 대하여 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응할 때, 이 대응을 'X에서 Y로의 함수'라 하며, 이것을 기호로

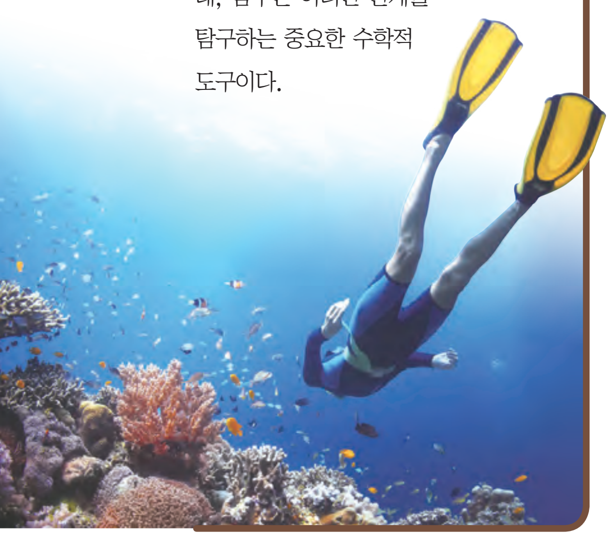
$$f : X \longrightarrow Y$$

와 같이 나타낸다.

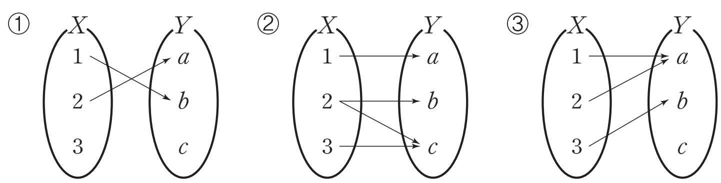
다가 서기

수심이 깊어질수록 압력은 높아지고, 상품의 가격이 오를수록 수요는 감소한다.

이와 같이 자연 현상이나 사회 현상에서는 어떤 값이 변함에 따라 다른 값이 변하는 경우를 흔히 볼 수 있는데, 함수는 이러한 관계를 탐구하는 중요한 수학적 도구이다.



보기 다음은 집합 $X=\{1, 2, 3\}$에서 집합 $Y=\{a, b, c\}$로의 대응이다.



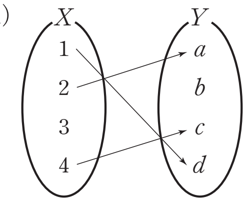
①은 X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

②는 X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 b, c의 2개이므로 함수가 아니다.

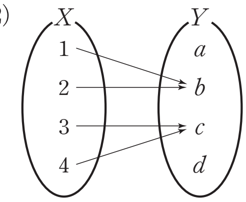
③은 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

문제 1 다음 대응 중에서 집합 X에서 집합 Y로의 함수인 것을 찾으시오.

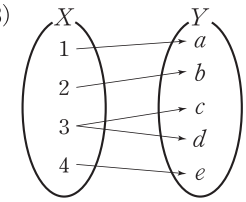
(1)



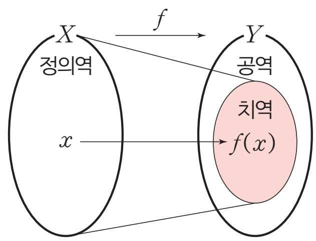
(2)



(3)



오일러(Euler, L., 1707~1783)
스위스의 수학자로 함수의 기호 $y=f(x)$를 처음 사용했다고 한다.



함수 $f:X \longrightarrow Y$에서 집합 X를 함수 f의 **정의역**, 집합 Y를 함수 f의 **공역**이라고 한다.

또, 함수 $f:X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 원소 x에 공역 Y의 원소 y가 대응할 때, 이것을 기호로

$$y=f(x)$$

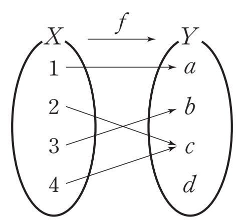
와 같이 나타낸다. 이때 $f(x)$를 x에서의 함숫값이라 하고, 함숫값 전체의 집합 $\{f(x)\,|\,x \in X\}$를 함수 f의 **치역**이라고 한다. 함수의 치역은 공역의 부분집합이다.

보기 오른쪽 그림과 같은 함수 $f:X \longrightarrow Y$에서

① 정의역은 $X=\{1, 2, 3, 4\}$

② 공역은 $Y=\{a, b, c, d\}$

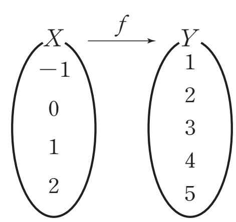
③ $f(1)=a$, $f(2)=c$, $f(3)=b$, $f(4)=c$이므로
치역은 $\{a, b, c\}$



문제 2 집합 $X=\{-1, 0, 1, 2\}$에서 집합 $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$로의 함수 $f(x)=x^2+1$에 대하여 다음에 답하시오.

(1) 함수 f의 대응 관계를 오른쪽 그림에 나타내시오.

(2) 함수 f의 정의역, 공역, 치역을 구하시오.



함수 $y=f(x)$의 정의역이나 공역이 주어져 있지 않은 경우, 정의역은 함수가 정의되는 실수 x의 값 전체의 집합으로, 공역은 실수 전체의 집합으로 생각한다.

보기 ① 함수 $y=3x+2$의 정의역은 $\{x\,|\,x$는 실수$\}$, 치역은 $\{y\,|\,y$는 실수$\}$이다.

② 함수 $y=x^2$의 정의역은 $\{x\,|\,x$는 실수$\}$, 치역은 $\{y\,|\,y \geq 0$인 실수$\}$이다.

문제 3 다음 함수의 정의역과 치역을 구하시오.

(1) $y=2x-1$　　　　　(2) $y=-x^2+2$

두 함수 $f : X \longrightarrow Y$, $g : X \longrightarrow Y$에서 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$일 때, 두 함수 'f와 g는 서로 같다'고 하며, 이것을 기호로

$$f=g$$

와 같이 나타낸다.

함수(function)를 나타낼 때, 보통 f, g, h와 같은 알파벳 소문자를 사용한다.

탐구

문제 4 정의역이 $\{-1, 0, 1\}$인 두 함수 $f(x)=|x|+1$과 $g(x)=x^2+1$에 대하여 다음에 답하시오.

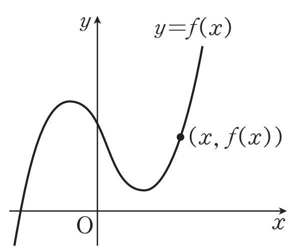
(1) 오른쪽 표를 완성하시오.

(2) (1)의 결과를 이용하여 두 함수가 서로 같은지 말하시오.

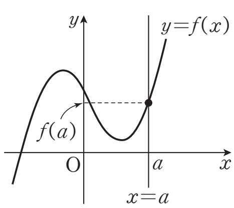
x	-1	0	1
$f(x)$	2		
$g(x)$		1	

함수 $f : X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 원소 x와 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$의 순서쌍 $(x, f(x))$ 전체의 집합 $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$를 함수 f의 그래프라고 한다.

함수 $y=f(x)$의 정의역과 공역이 실수 전체의 부분집합일 때, 함수의 그래프는 순서쌍 $(x, f(x))$를 좌표평면에 점으로 나타내어 그릴 수 있다.

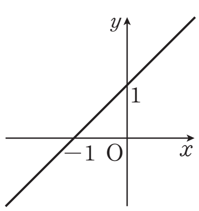


함수의 그래프는 정의역의 각 원소 a에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만난다.

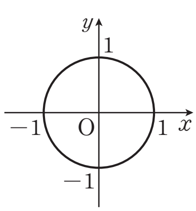


문제 5 다음 중에서 함수의 그래프를 찾고, 함수의 그래프가 아닌 것은 그 이유를 말하시오.

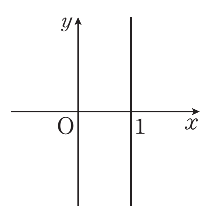
(1)



(2)

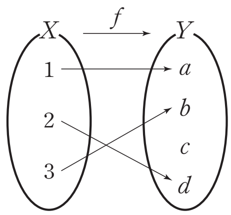


(3)

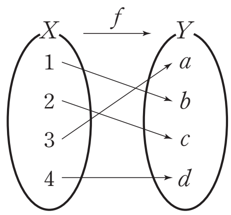


일대일함수와 일대일대응

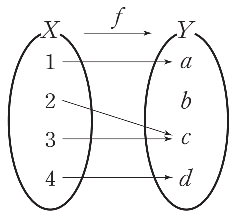
함수 중에는 [그림 1], [그림 2]와 같이 정의역의 서로 다른 두 원소에 대한 함숫값이 서로 다른 경우가 있고, [그림 3]과 같이 그렇지 않은 경우도 있다.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

생각톡톡

함수 f에 대하여

$f(x_1)=f(x_2)$이면

$x_1=x_2$

가 성립할 때, 이 함수는 일대일함수일까?

위의 [그림 1], [그림 2]와 같이 함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 원소 x_1, x_2에 대하여

$x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$

가 성립할 때, 이 함수 f를 **일대일함수**라고 한다.

특히, [그림 2]와 같이 함수 $f: X \longrightarrow Y$가

일대일함수이고

치역과 공역이 같을 때,

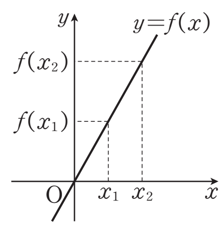
이 함수 f를 **일대일대응**이라고 한다.

보기 ① 함수 $f(x)=2x$는 정의역의 두 원소 x_1, x_2에 대하여

$x_1 \neq x_2$이면 $2x_1 \neq 2x_2$, 즉 $f(x_1) \neq f(x_2)$

이므로 일대일함수이다.

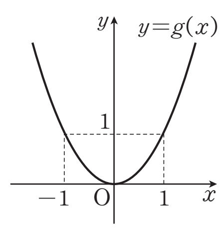
또, 함수 f는 치역과 공역이 모두 실수 전체의 집합으로 서로 같다. 따라서 이 함수는 일대일대응이다.



② 함수 $g(x)=x^2$은 두 원소 $x_1=-1$, $x_2=1$에 대하여

$x_1 \neq x_2$이지만 $x_1^{\,2}=x_2^{\,2}$, 즉 $g(x_1)=g(x_2)$

이다. 따라서 이 함수는 일대일함수가 아니다.



문제 6 다음 함수 중에서 일대일함수인 것을 모두 찾으시오.

(1) $y=3x-2$

(2) $y=-x^2+1$

(3) $y=|x|$

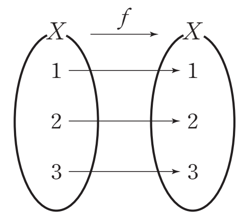
(4) $y=\begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ x & (x<0) \end{cases}$

항등함수와 상수함수

오른쪽 그림과 같이 함수 $f: X \longrightarrow X$에서 정의역 X의 각 원소 x에 그 자신인 x가 대응할 때, 즉

$$f(x)=x$$

일 때, 이 함수 f를 집합 X에서의 **항등함수**라고 한다.

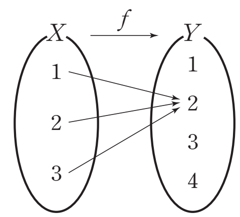


> 항등함수는 일대일대응이다.

또, 오른쪽 그림과 같이 함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 모든 원소 x에 공역 Y의 단 하나의 원소가 대응할 때, 즉

$$f(x)=c \ (c\text{는 상수})$$

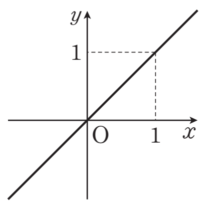
일 때, 이 함수 f를 **상수함수**라고 한다.



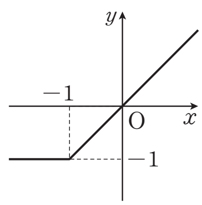
> 상수함수의 치역은 원소가 한 개인 집합이다.

문제 7 다음 중에서 항등함수, 상수함수의 그래프인 것을 각각 찾으시오.

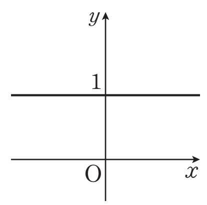
(1)



(2)



(3)



생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | **의사소통** | 정보 처리 | 태도 및 실천

다음과 같은 대응에서 찾아볼 수 있는 함수를 생각해 보자.

활동 ① 도서실에 학생 3명과 의자 3개가 있고, 하나의 의자에는 한 명씩만 앉을 수 있다. 각 학생에 그 학생이 앉는 의자를 대응시킬 때, 이 대응은 일대일대응임을 확인해 보자.
또, 이와 같은 대응이 일대일대응은 아니지만 일대일함수가 되려면 의자는 최소 몇 개가 있어야 하는지 말해 보자.

활동 ② 독서 동아리에서 대표 선출을 위한 투표를 하려고 한다. 독서 동아리 부원 전체의 집합을 X라 할 때, 투표용지에 각자 한 명씩만 써내는 대응에 대하여 X에서 X로의 대응이 항등함수가 되는 경우와 상수함수가 되는 경우를 각각 말해 보자.

02 합성함수

학습 목표

함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.

준비하기

함수 $f(x)=\frac{1}{2}x-4$에 대하여 다음을 구하시오.

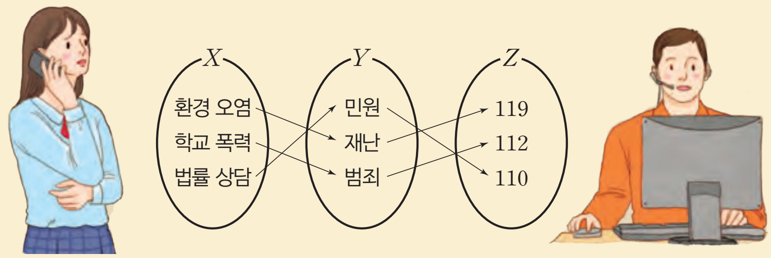
(1) $f(2)$ (2) $f(-3)$

다가서기

수학 교과서에서 '귀류법'이 수록된 쪽 번호를 찾기 위해서는 귀류법을 용어 찾아보기에서 찾은 다음 해당 쪽 번호를 찾아보면 된다.
이때 수학 용어에서 용어 찾아보기로의 대응, 용어 찾아보기에서 쪽 번호로의 대응을 결합하여 새로운 대응을 생각할 수 있다.

합성함수

생각 열기 다음 그림은 긴급 신고 전화 통합 체계에 따라, 관련 내용 및 그 특성에 따른 분류와 해당 신고 번호를 대응으로 나타낸 것이다.



(출처: 국민안전처, 2015년 1월)

▶ 환경 오염에 해당하는 신고 번호를 말해 보자.

세 집합 X, Y, Z에 대하여 두 함수

$$f: X \longrightarrow Y, \quad g: Y \longrightarrow Z$$

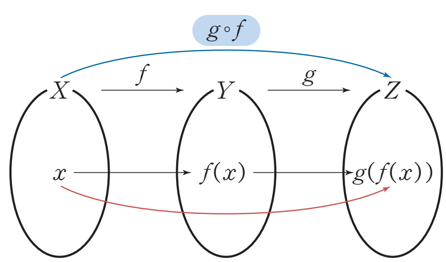
가 주어질 때, X의 각 원소 x에 대하여 $f(x)$는 Y의 원소이고, Y의 원소 $f(x)$에 대하여 $g(f(x))$는 Z의 원소이다.

따라서 집합 X의 각 원소 x에 집합 Z의 원소 $g(f(x))$를 대응시키면 X를 정의역, Z를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다.

이 새로운 함수를 f와 g의 **합성함수**라 하며, 이것을 기호로

$$g \circ f$$

와 같이 나타낸다.



또, 합성함수 $g \circ f: X \longrightarrow Z$에 대하여 x에서의 함숫값을 기호로

$$(g \circ f)(x)$$

와 같이 나타낸다.

합성함수 $g \circ f$가 정의되려면 f의 치역이 g의 정의역에 포함되어야 한다.

이때 X의 원소 x에 Z의 원소 $g(f(x))$가 대응하므로

$$(g \circ f)(x)=g(f(x))$$

이다. 따라서 f와 g의 합성함수를

$$\boldsymbol{y=g(f(x))}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

합성함수

두 함수 $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$의 합성함수는

$$g \circ f: X \longrightarrow Z, \quad (g \circ f)(x)=g(f(x))$$

예제 1 두 함수 $f(x)=2x-1$과 $g(x)=3x+2$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $(g \circ f)(x)$ (2) $(f \circ g)(x)$

일반적으로 두 함수 f, g에 대하여
$g \circ f \neq f \circ g$
이다. 즉, 함수의 합성에 대한 교환법칙은 성립하지 않는다.

풀이 정의역과 공역이 실수 전체의 집합이므로 합성함수 $g \circ f$와 $f \circ g$가 각각 정의된다.

(1) $(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-1)$
$=3(2x-1)+2=6x-1$

(2) $(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(3x+2)$
$=2(3x+2)-1=6x+3$

답 (1) $(g \circ f)(x)=6x-1$ (2) $(f \circ g)(x)=6x+3$

문제 1 두 함수 $f(x)=x+2$와 $g(x)=-x^2$에 대하여 다음을 구하시오.

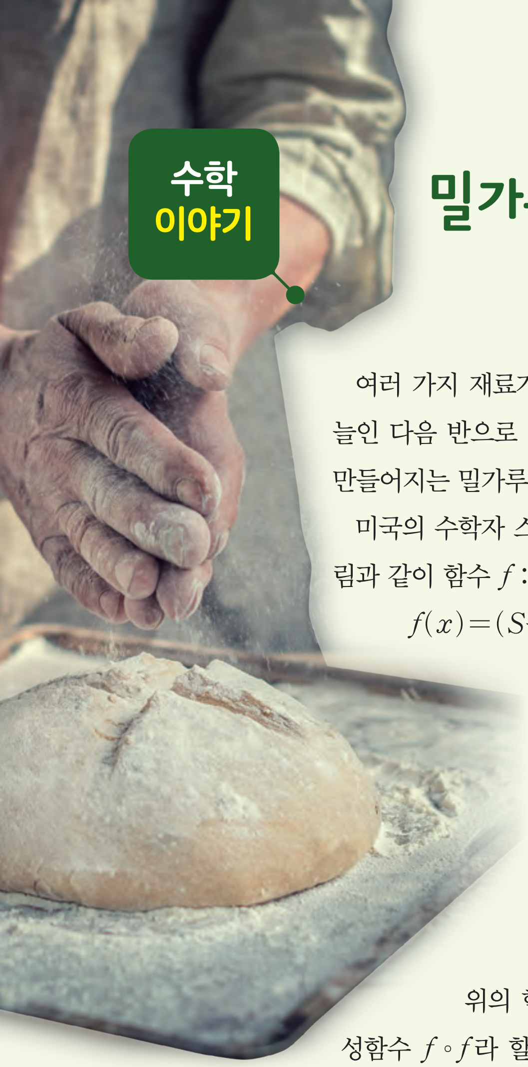
(1) $(g \circ f)(x)$ (2) $(f \circ g)(x)$

(3) $(f \circ f)(x)$ (4) $(g \circ g)(x)$

문제 2 세 함수 $f(x)=x+1$, $g(x)=3x-1$, $h(x)=x^2-2$에 대하여

$$((f \circ g) \circ h)(x)=(f \circ (g \circ h))(x)$$

가 성립함을 확인하시오.



수학 이야기

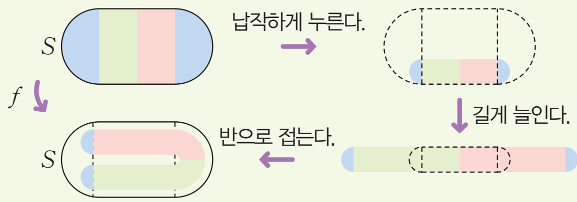
밀가루 반죽의 원리를 설명하는 합성함수

여러 가지 재료가 섞인 빵이나 면을 만들 때 원기둥 모양으로 만든 반죽을 납작하게 눌러서 길게 늘인 다음 반으로 접는 동작을 여러 번 반복하면 재료를 골고루 섞을 수 있다. 이와 같은 과정으로 만들어지는 밀가루 반죽의 원리를 합성함수를 이용하여 다음과 같이 설명할 수 있다.

미국의 수학자 스메일(Smale, S., 1930∼)은, 원기둥 모양의 밀가루 반죽을 S라 할 때 다음 그림과 같이 함수 $f: S \longrightarrow S$를

$f(x)=$(S를 납작하게 눌러서 길게 늘인 다음 반으로 접는 동작에 따라 정해지는 x의 위치)

로 정의하고, 이 함수를 '말편자함수(horseshoe function)'라 이름 붙였다.

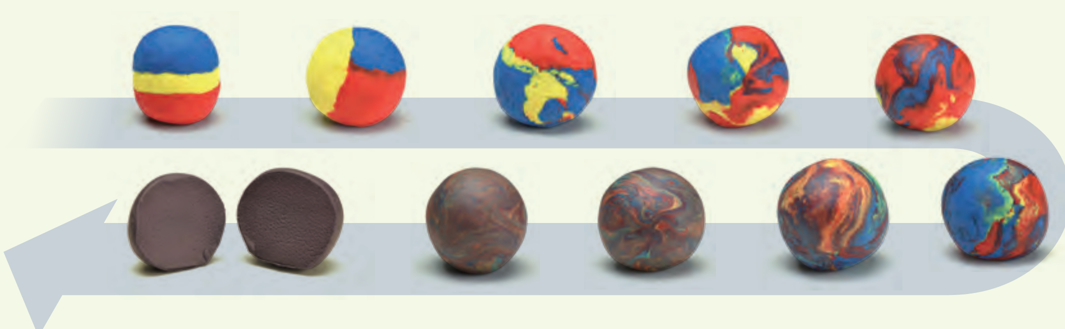


(단, 점선은 전 단계의 모양을 나타낸다.)

위의 함수에서 정의한 동작을 두 번 반복하는 것은 함수 f에 대하여 자기 자신과의 합성함수 $f \circ f$라 할 수 있는데, 이것을 간단히 f^2으로 나타내기로 한다. 그러면 함수 f가 정의하는 동작을 반복하여 반죽하는 것은 함수 f를 f^2, f^3, f^4, f^5, … 와 같이 계속 합성한다는 뜻이다.

따라서 이러한 함수의 합성을 여러 번 반복하면 재료가 골고루 섞인 밀가루 반죽이 만들어진다.

다음은 세 가지 색의 점토를 함께 반죽할 때 색깔이 섞이는 과정을 통해 말편자함수를 여러 번 합성하는 원리를 보여 주는 그림이다.



이와 같이 함수 f 자신을 반복적으로 합성한 함수 f^n의 성질은 우리의 생각과 달리 불규칙하게 변화하기 때문에, 이를 이용하면 일상생활에서 불규칙한 변화나 반복적으로 발생하는 현상의 원리를 설명할 수 있다.

(출처: Shub, M., 『What is a Horseshoe?』)

03 역함수

학습 목표

역함수의 뜻을 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다.

준비 하기

정의역이 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$인 함수

$f(x)=2x-1$

에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 함수 f의 치역

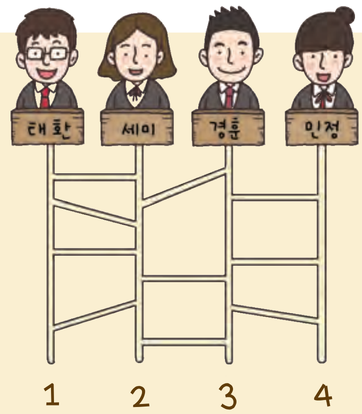
(2) $f(x)=5$일 때, x의 값

다가서기

주민 등록증을 처음 발급받을 때 지문을 등록한다. 그 이유는 사람마다 지문이 달라서 지문을 보고 거꾸로 그 사람을 찾을 수 있기 때문이다. 함수에서도 함숫값이 모두 다르면, 함숫값을 그 함숫값에 대응한 정의역의 원소로 거꾸로 대응시키는 함수를 생각할 수 있다.

역함수

생각 열기 태환, 세미, 경훈, 민정이가 발표 수업에서 순서를 정하기 위해 오른쪽 그림과 같은 사다리 타기를 하였다.

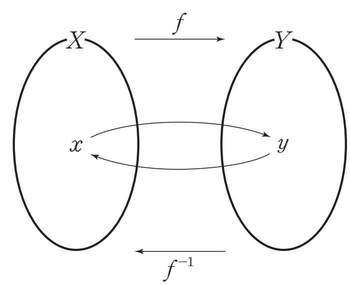


❶ 태환, 세미, 경훈, 민정이의 발표 순서를 말해 보자.

❷ 사다리 타기를 거꾸로 하여 $1,\ 2,\ 3,\ 4$에 대응하는 학생을 말해 보자.

함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일대응이면 Y의 각 원소 y에 대하여 $f(x)=y$인 X의 원소 x가 오직 하나씩 존재한다.

따라서 Y의 각 원소 y에 $f(x)=y$인 X의 원소 x를 대응시키면 Y를 정의역, X를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다.



이 새로운 함수를 f의 **역함수**라 하며, 이것을 기호로

$$f^{-1}$$

와 같이 나타낸다.

함수 $f: X \longrightarrow Y$와 그 역함수 $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ 사이에

$$y=f(x) \iff x=f^{-1}(y)$$

가 성립하고, 이로부터 다음을 알 수 있다.

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x\ (x\in X)$$

$$(f\circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))=f(x)=y\ (y\in Y)$$

즉, 합성함수 $f^{-1}\circ f$는 X에서의 항등함수이고, 합성함수 $f\circ f^{-1}$는 Y에서의 항등함수이다.

또, 역함수의 정의에서 $(f^{-1})^{-1}=f$임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

역함수와 그 성질

함수 $f : X \longrightarrow Y$가 일대일대응일 때,

❶ f의 역함수 $f^{-1} : Y \longrightarrow X$가 존재한다.

❷ $y=f(x) \iff x=f^{-1}(y)$

❸ $(f^{-1} \circ f)(x)=x \ (x \in X)$, $(f \circ f^{-1})(y)=y \ (y \in Y)$

❹ $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x) \ (x \in X)$

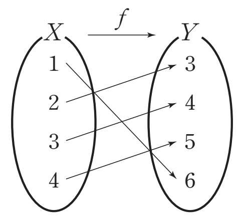
참고 일대일함수는 치역을 공역으로 생각하여 일대일대응으로 볼 수 있으므로 그 역함수를 생각할 수 있다.

보기 오른쪽 그림에서 함수 f는 일대일대응이므로 역함수 f^{-1}가 존재한다. 이때

① $f(3)=4$이므로 $f^{-1}(4)=3$

② $(f^{-1} \circ f)(2)=2$, $(f \circ f^{-1})(5)=5$

③ $(f^{-1})^{-1}(1)=f(1)=6$



문제 1 함수 $f(x)=3x-1$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $f^{-1}(-4)$

(2) $(f^{-1} \circ f)(-3)$

(3) $(f \circ f^{-1})(1)$

(4) $(f^{-1})^{-1}(2)$

함수를 나타낼 때는 보통 정의역의 원소를 x, 치역의 원소를 y로 나타내므로 함수 $y=f(x)$의 역함수 $x=f^{-1}(y)$에서도 x와 y를 서로 바꾸어

$$y=f^{-1}(x)$$

와 같이 나타낸다.

생각톡톡
함수 f의 정의역과 역함수 f^{-1}의 치역은 같을까?

일대일대응인 함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y=f(x) \xrightarrow[x\text{에 대하여 푼다.}]{} x=f^{-1}(y) \xrightarrow[x\text{와 } y\text{를 서로 바꾼다.}]{} y=f^{-1}(x)$$

예제 1 함수 $y=4x+3$의 역함수를 구하시오.

풀이 주어진 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=4x+3$을 x에 대하여 풀면 $x=\frac{1}{4}y-\frac{3}{4}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$

답 $y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$

문제 2 다음 함수의 역함수를 구하시오.

(1) $y=x+5$

(2) $y=-\frac{1}{3}x+4$

다음을 통해 합성함수의 역함수를 알아보자.

함께하기 두 함수 $f(x)=3x-2$와 $g(x)=-x+2$에 대하여 $(g\circ f)^{-1}$와 $f^{-1}\circ g^{-1}$를 비교해 보자.

활동 1 다음을 구해 보자.

$(g\circ f)(x)$	$(g\circ f)^{-1}(x)$
$f^{-1}(x)$ $g^{-1}(x)$	$(f^{-1}\circ g^{-1})(x)$

활동 2 활동 1의 결과를 이용하여 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$임을 확인해 보자.

일반적으로 두 함수 f, g의 역함수가 존재할 때,

$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$$

가 성립한다.

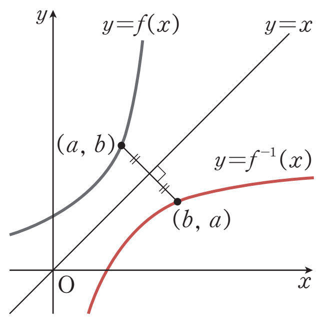
문제 3 $(g\circ f)(x)=3x-5$일 때, $(f^{-1}\circ g^{-1})(3)$의 값을 구하시오.

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점을 $(a,\ b)$라 하면

$$b=f(a) \Longleftrightarrow a=f^{-1}(b)$$

이므로 점 $(b,\ a)$는 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점이다. 이때 점 $(a,\ b)$와 점 $(b,\ a)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

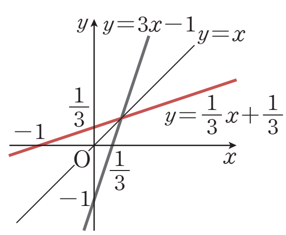
따라서 함수와 그 역함수의 그래프 사이에 다음과 같은 관계가 있음을 알 수 있다.



함수와 그 역함수의 그래프

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

보기 함수 $y=3x-1$의 역함수는 $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$이고, 이 두 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



문제 4 다음 함수와 그 역함수의 그래프를 그리시오.

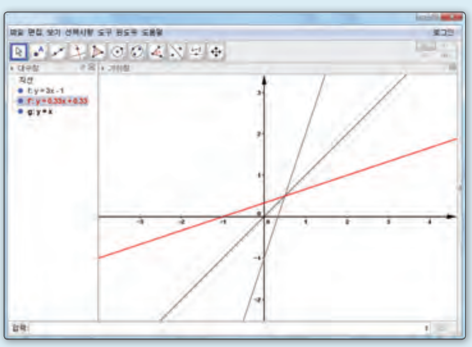
(1) $y=2x-3$ (2) $y=-\frac{1}{3}x+1$

공학적 도구

역함수의 그래프

문제 해결 | 정보 처리

컴퓨터 프로그램을 이용하여 보기의 함수 $y=3x-1$과 그 역함수의 그래프를 그려 보자.



❶ 입력창에 ‘y=3x−1’을 입력하고, Enter 를 누른다.

❷ 입력창에 ‘y=x’를 입력하고, Enter 를 누른다.

❸ 메뉴에서 ‘직선에 대하여 대칭’을 클릭한 다음 함수 $y=3x-1$의 그래프와 직선 $y=x$를 차례대로 선택한다.

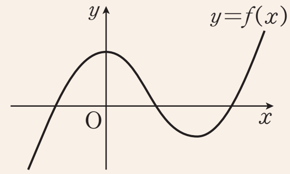
| 활동 | 위와 같은 방법으로 문제 4의 두 함수와 각각의 역함수의 그래프를 그려 보자.

탐구 & 융합

절댓값 기호를 포함한 함수의 그래프

문제 해결 | 창의·융합

함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 절댓값 기호를 포함한 두 함수 $y=|f(x)|$와 $y=f(|x|)$의 그래프를 알아보자.



[1] 함수 $y=|f(x)|$의 그래프

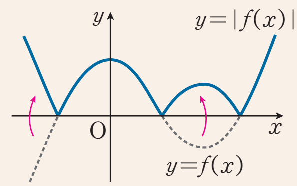
(i) $f(x)\ge 0$일 때 $|f(x)|=f(x)$이므로,

$y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 같다.

(ii) $f(x)<0$일 때 $|f(x)|=-f(x)$이므로,

$y=|f(x)|=-f(x)$의 그래프는, $f(x)\le 0$일 때 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



[2] 함수 $y=f(|x|)$의 그래프

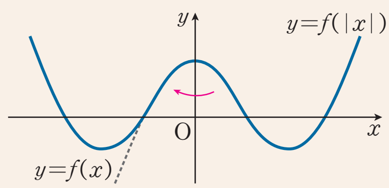
(i) $x\ge 0$일 때 $|x|=x$이므로,

$y=f(|x|)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 같다.

(ii) $x<0$일 때 $|x|=-x$이므로,

$y=f(|x|)=f(-x)$의 그래프는, $x\ge 0$일 때 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



탐구 **1** 일차함수 $y=x+1$의 그래프를 이용하여 다음 함수의 그래프를 그려 보자.

(1) $y=|x+1|$　　(2) $y=|x|+1$

2 이차함수 $y=x^2-2x$의 그래프를 이용하여 다음 함수의 그래프를 그려 보자.

(1) $y=|x^2-2x|$　　(2) $y=x^2-2|x|$

V -1. 함수

중단원 마무리하기

함수

(1) 두 집합 X, Y에 대하여 X의 원소에 Y의 원소를 짝지어 주는 것을, 집합 X에서 집합 Y로의 **대응**이라고 한다.

(2) 두 집합 X, Y에 대하여 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응할 때, 이 대응을 X에서 Y로의 함수라 하며, 이것을 기호로

$$f : X \longrightarrow Y$$

와 같이 나타낸다.

(3) 함수 $f : X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 원소 x_1, x_2에 대하여

$x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$

가 성립할 때, 함수 f를 **일대일함수**라고 한다.

(4) 일대일함수이고 치역과 공역이 같은 함수를 **일대일대응**이라고 한다.

(5) 함수 $f : X \longrightarrow X$에서 정의역 X의 각 원소 x에 그 자신인 x가 대응할 때, 즉 $f(x)=x$일 때, 함수 f를 집합 X에서의 **항등함수**라고 한다.

(6) 함수 $f : X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 모든 원소 x에 공역 Y의 단 하나의 원소가 대응할 때, 즉 $f(x)=c$ (c는 상수)일 때, 함수 f를 **상수함수**라고 한다.

합성함수

두 함수 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$의 합성함수는

$$g \circ f : X \longrightarrow Z, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

역함수

(1) 함수 $f : X \longrightarrow Y$가 일대일대응일 때,

❶ f의 역함수 $f^{-1} : Y \longrightarrow X$가 존재한다.

❷ $y=f(x) \Longleftrightarrow x=f^{-1}(y)$

❸ $(f^{-1} \circ f)(x) = x \ (x \in X)$

$(f \circ f^{-1})(y) = y \ (y \in Y)$

❹ $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x) \ (x \in X)$

(2) 두 함수 f, g의 역함수를 각각 f^{-1}, g^{-1}라 할 때,

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

기 본

01 두 집합 $X=\{-1, 0, 1\}$, $Y=\{0, 1, 2\}$에 대하여 다음 중 X에서 Y로의 함수인 것을 모두 찾으시오.

(1) $f(x)=x+1$

(2) $g(x)=x^2$

(3) $h(x)=|x+2|$

02 다음 **보기**에서 일대일대응, 항등함수, 상수함수를 각각 찾으시오.

보기

ㄱ. $y=-3$　　ㄴ. $y=x$

ㄷ. $y=-3x+2$　　ㄹ. $y=x^2-1$

03 두 함수 $f(x)=2x-3$, $g(x)=x^2+1$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $(g \circ f)(2)$　　(2) $(g \circ g)(-1)$

(3) $(f \circ g)(x)$　　(4) $(f \circ f)(x)$

04 함수 $f(x)=4x+7$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $f^{-1}(3)$　　(2) $f^{-1}(x)$

표준

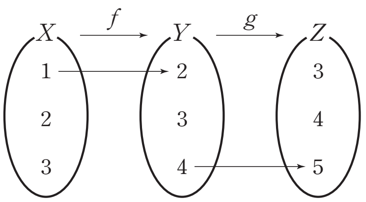
05 정의역이 $\{-2, 0, 2\}$인 두 함수 $f(x)=2x^2-1$과 $g(x)=a|x|+b$에 대하여 $f=g$가 성립할 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

06 두 함수 $f(x)=\begin{cases} -3x+11 & (x \geq 3) \\ 2 & (x<3) \end{cases}$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2$에 대하여 $(f \circ g)(4)+(g \circ f)(2)$의 값을 구하시오.

07 세 집합

$X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{2, 3, 4\}$, $Z=\{3, 4, 5\}$

에 대하여 두 함수 $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$가 일대일대응이고, $f(1)=2$, $g(4)=5$, $(g \circ f)(2)=3$일 때, 다음을 구하시오.



(1) $f(3)$ (2) $(g \circ f)(1)$

(3) $g^{-1}(3)$ (4) $(f^{-1} \circ g^{-1})(5)$

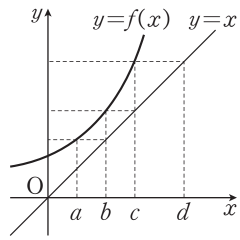
08 두 함수 $f(x)=2x+1$, $g(x)=-3x+2$에 대하여 $(f \circ h)(x)=g(x)$를 만족시킬 때, $h(x)$를 구하시오.

09 두 함수 $f(x)=3x+5$, $g(x)=-2x+3$에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1})(-2)$의 값을 구하시오.

|서·술·형|

10 함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 모두 점 $(1,\ -5)$를 지날 때, 상수 a, b에 대하여 $2a-3b$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

11 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음을 구하시오.



(1) $(f\circ f)(a)$

(2) $f^{-1}(b)$

(3) $(f\circ f)^{-1}(d)$

발 전

|서·술·형|

12 두 집합 $X=\{x\,|\,-1\le x\le 2\}$, $Y=\{y\,|\,1\le y\le 7\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)=ax+b$가 일대일대응일 때, 상수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$를 모두 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

13 일차함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 $(f\circ f)(x)=4x+6$을 만족시키는 $f(x)$를 모두 구하시오.

사고력+

14 함수 $f(x)=x|x|+a$와 그 역함수 f^{-1}에 대하여 $f^{-1}(1)=2$일 때, $(f\circ f)^{-1}(1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)