

2

명제

01

명제와 조건

02

명제의 역과 대우

03

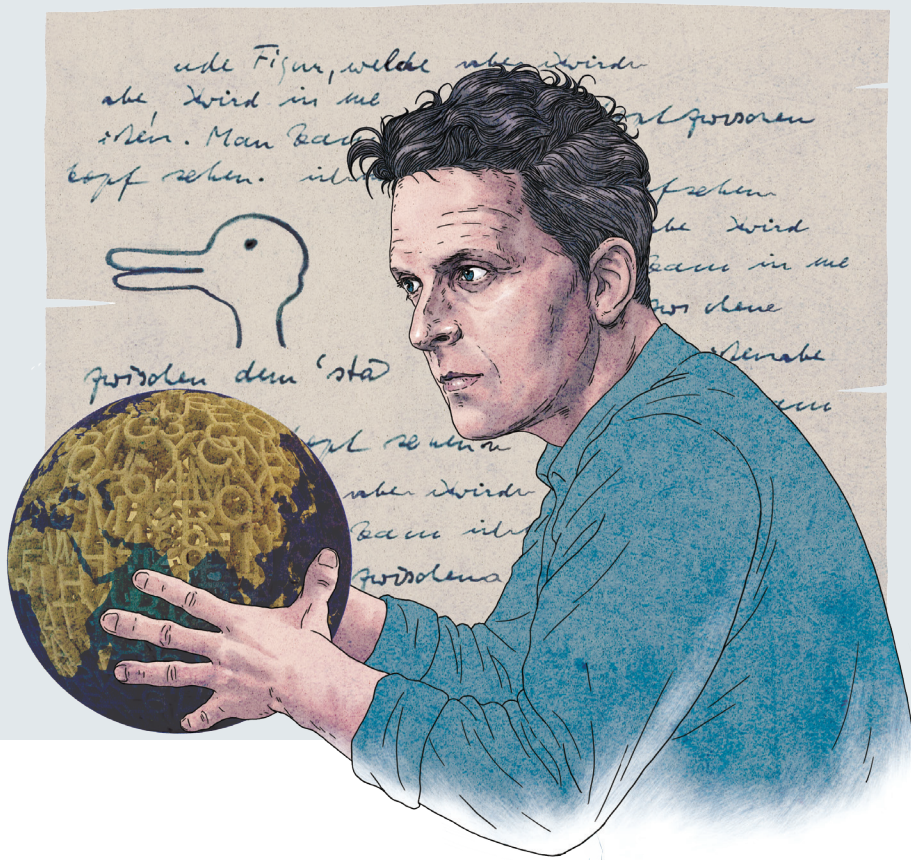
충분조건과 필요조건

04

절대부등식

“ 수학의 증명은
반드시 명료해야 한다. ”

(출처: Wittgenstein, L., 『Remarks on the Foundations of Mathematics』)



비트겐슈타인(Wittgenstein, L., 1889~1951)

오스트리아 태생인 영국의 논리학자, 수리 철학 및 언어 철학자

- 이 글은 비트겐슈타인의 사후인 1956년에 출간된 『수학의 기초에 관한 고찰』이라는 책에서 수학적 증명이 논리적으로 엄밀해야 함을 강조한 표현으로, 그의 사상은 후에 인문학과 사회 과학의 여러 분야에 큰 영향을 끼쳤다.

01 명제와 조건

학습 목표

명제와 조건의 뜻을 알고, '모든', '어떤'을 포함한 명제를 이해한다.

준비하기

전체집합 $U = \{x \mid x < 4 \text{인 자연수}\}$ 의 부분집합 $A = \{x \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}$ 을 원소나열법으로 나타내시오.

다가서기

사람의 주장 중에는 '내 말이 옳다.'와 같이 참인지 거짓인지 판별하기 어려운 것이 있고, 때로는 참인 것처럼 보이는 것이 나중에는 거짓으로 드러나는 경우도 있다.

수학에서는 참 또는 거짓을 분명히 판별할 수 있는 문장이나 식을 다룬다.



명제와 그 부정

생각 열기

마그마나 용암이 식은 후 굳어서 만들어진 암석인 화성암에는 현무암, 화강암 등이 있고, 바다 또는 호수 밑바닥에 퇴적물이 쌓인 후 굳어서 만들어진 암석인 퇴적암에는 사암, 이암 등이 있다.

다음 문장 중에서 참, 거짓을 판별할 수 있는 것을 말해 보자.

- ① 현무암은 화성암이다.
- ② 화성암은 퇴적암이다.
- ③ 사암은 단단한 암석이다.



위의 생각 열기에서 ①은 참이고 ②는 거짓이다. 이와 같이 참 또는 거짓을 명확하게 판별할 수 있는 문장이나 식을 **명제**라고 한다.

한편, ③은 단단하다는 기준이 명확하지 않아서 참인지 거짓인지 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

보기

- ① '유리수는 실수이다.'는 참인 명제이다.
- ② ' $2^2 > 5$ '는 거짓인 명제이다.
- ③ '인생은 아름답다.'는 아름답다는 기준이 명확하지 않아서 참인지 거짓인지 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

문제 1 다음 중에서 명제를 모두 찾고, 명제인 것은 참, 거짓을 판별하시오.

- (1) π 는 유리수이다.
- (2) 한강은 긴 강이다.
- (3) $2 + 3 = 5$
- (4) 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset (A \cup B)$ 이다.

명제는 보통 알파벳 소문자 p, q, r, \dots 로 나타낸다.

명제 p 에 대하여 ‘ p 가 아니다.’를 명제 p 의 **부정**이라 하며, 이것을 기호로

$$\sim p$$

와 같이 나타낸다.

명제 p 가 참이면 $\sim p$ 는 거짓이고, p 가 거짓이면 $\sim p$ 는 참이다.

또, $\sim p$ 의 부정 $\sim(\sim p)$ 는 p 이다.

- 보기** ① 명제 ‘3은 홀수이다.’는 참이고, 그 부정 ‘3은 홀수가 아니다.’는 거짓이다.
 ② 명제 ‘ $1 > 4$ ’는 거짓이고, 그 부정 ‘ $1 \leq 4$ ’는 참이다.

문제 2 다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) 7은 소수이다.

(2) $2 \leq \sqrt{2}$

조건과 진리집합

변수 x 를 포함하는 문장 ‘ x 는 10의 약수이다.’는 그 자체로는 참, 거짓을 판별할 수 없지만, x 의 값이 정해지면 참, 거짓을 판별할 수 있다. 예를 들어 $x=2$ 이면 참이고 $x=3$ 이면 거짓이다.

이와 같이 변수를 포함하는 문장이나 식 중에서 변수의 값에 따라 참, 거짓을 판별할 수 있는 것을 **조건**이라고 한다.

명제의 부정과 마찬가지로, 조건 p 에 대하여 ‘ p 가 아니다.’를 조건 p 의 **부정**이라 하며, 이것을 기호로

$$\sim p$$

와 같이 나타낸다.

전체집합 U 의 원소 중에서 조건 p 를 참이 되게 하는 모든 원소의 집합을 조건 p 의 **진리집합**이라고 한다. 조건 p 의 진리집합을 P 라 할 때, $\sim p$ 의 진리집합은 P^C 이다.

보기 전체집합 U 가 자연수 전체의 집합일 때, 조건 ‘ p : x 는 홀수이다.’에 대하여

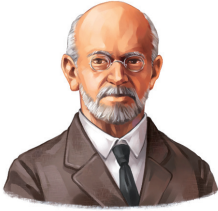
① p 의 진리집합은 $P = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$

② $\sim p$ 의 진리집합은 $P^C = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

문제 3 전체집합 U 가 자연수 전체의 집합일 때, 조건 ‘ p : $x \leq 8$ ’에 대하여 p 의 진리집합과 $\sim p$ 의 진리집합을 구하시오.

변수 x 를 포함하는 조건을 $p(x), q(x), r(x), \dots$ 로 나타내는데, 이를 간단히 p, q, r, \dots 로 나타내기도 한다.

조건 p 에 대하여 $\sim(\sim p)$ 는 p 이다.



힐베르트(Hilbert, D., 1862~1943)

독일의 수학자로 명제에서 기호 \rightarrow 를 1922년에 처음 사용했다고 한다.

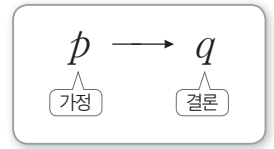
명제 $p \rightarrow q$ 의 참, 거짓

두 조건 p, q 로 이루어진 명제 ‘ p 이면 q 이다.’를 기호로

$$p \rightarrow q$$

와 같이 나타낸다. 이때 p 를 **가정**, q 를 **결론**이라고 한다.

예를 들어 명제 ‘ $x=3$ 이면 $x^2=9$ 이다.’에서, 가정은 ‘ $x=3$ ’이고 결론은 ‘ $x^2=9$ ’이다.



명제 $p \rightarrow q$ 에서 조건 p 가 참이 되는 모든 경우에 조건 q 도 참이 되면 그 명제는 참이고, 조건 p 는 참이 되지만 조건 q 가 거짓이 되면 그 명제는 거짓이다.

즉 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P \subset Q$ 이면 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이고, $P \not\subset Q$ 이면 명제 $p \rightarrow q$ 는 거짓이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

명제 $p \rightarrow q$ 의 참, 거짓

명제 $p \rightarrow q$ 에 대하여 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때,

- ① $P \subset Q$ 이면 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이고, 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 $P \subset Q$ 이다.
- ② $P \not\subset Q$ 이면 명제 $p \rightarrow q$ 는 거짓이고, 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓이면 $P \not\subset Q$ 이다.

예제 1 다음 명제의 참, 거짓을 판별하시오.

- (1) $x=2$ 이면 $x^2=2x$ 이다.
- (2) 소수는 홀수이다.

풀이 주어진 명제의 가정을 p , 결론을 q 라 하고, 각각의 진리집합을 P, Q 라 하자.

(1) ‘ $p: x=2$ ’, ‘ $q: x^2=2x$ ’에서 $P=\{2\}$, $Q=\{0, 2\}$

따라서 $P \subset Q$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

(2) ‘ $p: x$ 는 소수이다.’, ‘ $q: x$ 는 홀수이다.’에서 $P=\{2, 3, \dots\}$, $Q=\{1, 3, \dots\}$

따라서 $P \not\subset Q$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

답 (1) 참 (2) 거짓

② 명제가 거짓임을 보이는 예를 반례라고 한다.

(2) [반례] 2는 소수이지만 홀수가 아니다.

문제 4 다음 명제의 참, 거짓을 판별하시오.

- (1) $x \leq 9$ 이면 $x \leq 3$ 이다.
- (2) 4의 배수는 짝수이다.

● ‘모든’이나 ‘어떤’을 포함한 명제

생각 열기 다음은 ‘모든’이나 ‘어떤’을 포함한 문장이다.

- | | | | |
|---------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| ①
모든 동물은
다리가 4개 있다. | ②
어떤 새는
날지 못한다. | ③
모든 자연수는
양수이다. | ④
어떤 자연수는
음수이다. |
|---------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|

▶ 위의 문장의 참, 거짓을 판별해 보자.

일반적으로 조건 p 는 참, 거짓을 판별할 수 없지만, 조건 p 앞에 ‘모든’이나 ‘어떤’이 있으면 참, 거짓을 판별할 수 있으므로 명제이다.

‘모든’이나 ‘어떤’을 포함한 명제의 참, 거짓을 알아보자.

전체집합 U 에 대하여 조건 p 의 진리집합을 P 라 할 때, 전체집합 U 에서 명제
‘모든 x 에 대하여 p 이다.’ ……①

가 참이라는 것은, U 에 속하는 모든 원소 x 에 대하여 p 가 참임을 뜻한다.

따라서 ①은 $P=U$ 이면 참이고, $P \neq U$ 이면 거짓이다.

또, 전체집합 U 에서 명제

‘어떤 x 에 대하여 p 이다.’ ……②

가 참이라는 것은, U 의 원소 중에서 p 가 참이 되게 하는 x 가 존재함을 뜻한다.

따라서 ②는 $P \neq \emptyset$ 이면 참이고, $P = \emptyset$ 이면 거짓이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

■ ‘모든’이나 ‘어떤’을 포함한 명제의 참, 거짓

전체집합 U 에 대하여 조건 p 의 진리집합을 P 라 할 때,

- ① $P=U$ 이면 ‘모든 x 에 대하여 p 이다.’는 참이고,
 $P \neq U$ 이면 ‘모든 x 에 대하여 p 이다.’는 거짓이다.
- ② $P \neq \emptyset$ 이면 ‘어떤 x 에 대하여 p 이다.’는 참이고,
 $P = \emptyset$ 이면 ‘어떤 x 에 대하여 p 이다.’는 거짓이다.

▶ ‘어떤 x 에 대하여 p 이다.’
를 ‘ p 인 x 가 있다.’로 표현할
수도 있다.

① [반례] $x=2$ 이면 x 는 실수이지만 $x^2-x \neq 0$ 이다.

$P=U$ 의 부정은 $P \neq U$, 즉 $P^c \neq \emptyset$ 이고, $P \neq \emptyset$ 의 부정은 $P = \emptyset$, 즉 $P^c = U$ 이다.

보기 전체집합 U 가 실수 전체의 집합일 때,

- ① 명제 '모든 x 에 대하여 $x^2-x=0$ 이다.'에서 조건 ' $p: x^2-x=0$ '의 진리집합을 P 라 하면 $P = \{0, 1\}$ 이고 $P \neq U$ 이므로 이 명제는 거짓이다.
- ② 명제 '어떤 x 에 대하여 $x^2-x=0$ 이다.'에서 조건 ' $p: x^2-x=0$ '의 진리집합을 P 라 하면 $P = \{0, 1\}$ 이고 $P \neq \emptyset$ 이므로 이 명제는 참이다.

문제 5 다음 명제의 참, 거짓을 판별하시오.

- (1) 모든 실수 x 에 대하여 $x^2+1 > 0$ 이다.
- (2) 어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 = -4$ 이다.

이제 '모든'이나 '어떤'을 포함한 명제의 부정을 알아보자.

명제 '모든 x 에 대하여 p 이다.'의 부정은 ' p 가 아닌 x 가 있다.', 즉 '어떤 x 에 대하여 $\sim p$ 이다.'

이다. 또, '어떤 x 에 대하여 p 이다.'의 부정은 ' p 인 x 가 없다.', 즉 '모든 x 에 대하여 $\sim p$ 이다.'

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

'모든'이나 '어떤'을 포함한 명제의 부정

- ① '모든 x 에 대하여 p 이다.'의 부정은 '어떤 x 에 대하여 $\sim p$ 이다.'이다.
- ② '어떤 x 에 대하여 p 이다.'의 부정은 '모든 x 에 대하여 $\sim p$ 이다.'이다.

- 보기**
- ① 명제 '모든 실수 x 에 대하여 $|x| < 0$ 이다.'의 부정은 '어떤 실수 x 에 대하여 $|x| \geq 0$ 이다.'이다.
 - ② 명제 '어떤 실수 x 에 대하여 $x^2+2x=0$ 이다.'의 부정은 '모든 실수 x 에 대하여 $x^2+2x \neq 0$ 이다.'이다.

문제 6 다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하시오.

- (1) 모든 실수 x 에 대하여 $x^2+x+1 < 0$ 이다.
- (2) 어떤 사다리꼴은 평행사변형이다.

정의, 증명, 정리

우리가 사용하는 용어의 뜻은 여러 가지로 나타낼 수 있으나, 제각기 다른 방법으로 나타내면 의사소통이 정확하게 이루어지지 않는다. 따라서 용어의 뜻을 한 가지로 정하여 사용해야 한다.

‘두 변의 길이가 같은 삼각형을 이등변삼각형이라고 한다.’와 같이 용어의 뜻을 명확하게 정한 것을 그 용어의 **정의**라고 한다.

한편, 정의나 명제의 가정 또는 이미 옳다고 밝혀진 성질을 이용하여 어떤 명제가 참임을 설명하는 것을 **증명**이라고 한다.

또, ‘이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다.’와 같이 참임이 증명된 명제 중에서 기본이 되는 것이나 다른 명제를 증명할 때 이용할 수 있는 것을 **정리**라고 한다.

예제 2 다음 명제가 참임을 증명하시오.

‘자연수 n 에 대하여 n^2+n 은 짝수이다.’

이해 $n=1$ 일 때, $1^2+1=1 \times (1+1)=1 \times 2=2$ 이므로 1^2+1 은 짝수

$n=2$ 일 때, $2^2+2=2 \times (2+1)=2 \times 3=6$ 이므로 2^2+2 는 짝수

증명 일반적으로 $n^2+n=n(n+1)$ 이 성립한다. 이때 n 이 홀수이면 $n+1$ 은 짝수이고, n 이 짝수이면 $n+1$ 은 홀수이다. 그런데 짝수와 홀수의 곱은 짝수이므로, 어느 경우이든 $n(n+1)$ 은 짝수이다.

따라서 자연수 n 에 대하여 n^2+n 은 짝수이다.

문제 7 다음 명제가 참임을 증명하시오.

‘자연수 n 에 대하여 n^2+3n 은 짝수이다.’

문제 해결 | 추론 | 창의융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

다음은 어느 이발사의 주장인데, 이것을 ‘이발사의 역설’이라고 한다.

“나는 스스로 면도를 하는 사람들 외에는 모두 면도해 줍니다.”

활동 ① 이 이발사는 자신의 면도를 할 수 있는지 판단해 보자.

활동 ② 명제와 관련된 다른 역설도 조사해 보자.



생각
넓히기



02 명제의 역과 대우

학습 목표

명제의 역과 대우를 이해하고, 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.

준비하기

다음 명제의 참, 거짓을 판별하시오.

- (1) 정삼각형은 이등변삼각형이다.
- (2) 이등변삼각형은 정삼각형이다.

다가서기

‘가는 말이 고와야 오는 말도 곱다.’라는 속담에서 ‘가는 말’과 ‘오는 말’을 서로 바꾸면 ‘오는 말이 고와야 가는 말도 곱다.’이다.

이와 같이 명제에서도 가정과 결론을 서로 바꾼 명제를 생각할 수 있다.



명제의 역과 대우

생각 열기

다음은 마름모와 평행사변형 사이의 관계에 대한 명제이다.

‘□ABCD가 마름모이면 □ABCD는 평행사변형이다.’

- ① 위의 명제에서 가정과 결론을 찾아보자.
- ② 가정과 결론을 서로 바꾼 명제를 문장으로 나타내어 보자.

위의 **생각 열기**에서와 같이 명제 $p \rightarrow q$ 에서 가정과 결론을 서로 바꾼 명제

$$q \rightarrow p$$

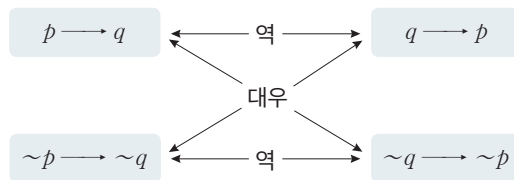
를 명제 $p \rightarrow q$ 의 **역**이라고 한다.

또한, 명제 $p \rightarrow q$ 에서 가정과 결론을 각각 부정하여 서로 바꾼 명제

$$\sim q \rightarrow \sim p$$

를 명제 $p \rightarrow q$ 의 **대우**라고 한다.

명제와 그 역, 대우 사이의 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



보기 명제 ‘ $x=1$ 이면 $x^2=1$ 이다.’의 역과 대우는 다음과 같다.

- ① 역: $x^2=1$ 이면 $x=1$ 이다.
- ② 대우: $x^2 \neq 1$ 이면 $x \neq 1$ 이다.

문제 1 다음 명제의 역과 대우를 말하시오.

- (1) $x > 4$ 이면 $\sqrt{x} > 2$ 이다.
- (2) 직사각형은 정사각형이다.

● 대우를 이용한 증명법

전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, $\sim p, \sim q$ 의 진리집합은 각각 P^c, Q^c 이다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 $P \subset Q$ 이므로

$$Q^c \subset P^c$$

이다. 따라서 명제 $p \rightarrow q$ 의 대우인 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

일반적으로 다음이 성립한다.

■ 명제와 그 대우의 참, 거짓

- ① 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.
- ② 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓이면 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 거짓이다.

▶ $P \subset Q$ 이더라도 $Q \subset P$ 가 아닐 수 있으므로, 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이더라도 그 역 $q \rightarrow p$ 는 참이 아닌 경우가 있다.

명제가 참이면 그 대우도 참이고 대우가 참이면 처음의 명제도 참이므로, 어떤 명제가 참임을 증명할 때는 그 대우가 참임을 증명해도 된다.

● 예제 1 대우를 이용하여 다음 명제가 참임을 증명하시오.

‘자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 도 짝수이다.’

증명 주어진 명제의 대우는 ‘자연수 n 에 대하여 n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.’이다.
 n 이 홀수이면 $n=2k+1$ (k 는 0 또는 자연수)로 나타낼 수 있다. 이때

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$$
 이므로 n^2 도 홀수이다.
 따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

● 문제 2 대우를 이용하여 다음 명제가 참임을 증명하시오.

‘자연수에 n 에 대하여 n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.’

● 문제 3 대우를 이용하여 다음 명제가 참임을 증명하시오.

‘ $ab \neq 0$ 이면 $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$ 이다.’

▶ ‘ p 이고 q ’의 부정은 ‘ $\sim p$ 또는 $\sim q$ ’이다.

귀류법

어떤 명제가 참임을 증명할 때, 그 명제 또는 명제의 결론을 부정하면 모순이 생긴다는 것을 보여도 된다. 이와 같이 증명하는 방법을 **귀류법**이라고 한다.

예제 2 귀류법을 이용하여 $\sqrt{2}$ 가 무리수임을 증명하시오.

증명 $\sqrt{2}$ 가 무리수가 아니라고 가정하면 $\sqrt{2}$ 는 유리수이므로

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m} \quad (m, n \text{은 서로소인 자연수})$$

으로 나타낼 수 있다. 즉 $n = \sqrt{2}m$ 이고, 양변을 제곱하면

$$n^2 = 2m^2$$

이때 n^2 이 짝수이므로 n 도 짝수이다.

따라서 $n = 2k$ (k 는 자연수)로 나타낼 수 있으므로

$$4k^2 = 2m^2, \text{ 즉 } 2k^2 = m^2$$

이때 m^2 이 짝수이므로 m 도 짝수이다.

그런데 m, n 이 모두 짝수이므로 m, n 이 서로소라는 가정에 모순이다.

따라서 $\sqrt{2}$ 는 무리수이다.

문제 4 귀류법을 이용하여 $1 + \sqrt{2}$ 가 무리수임을 증명하시오.

수학 이야기



귀류법으로 증명한 소수의 무한성

가장 큰 소수를 찾을 수 있을까?

2016년까지 알려진 가장 큰 소수는 $2^{74207281} - 1$ 로, 무려 22338618 자리 수라고 한다. 그런데 소수는 무수히 많으므로 이 소수도 가장 큰 소수는 아니고, 다만 우리가 더 큰 소수를 아직 발견하지 못했을 뿐이다.

오른쪽은 귀류법을 이용하여 소수가 무수히 많음을 증명한 것이다.

소수가 유한개만 있다고 가정하고, 그 유한개의 소수를 p_1, p_2, \dots, p_n 이라 하자. 새로운 수 $N = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$ 을 만들면, N 은 1보다 크고 모든 소수 p_1, p_2, \dots, p_n 중의 어느 것보다도 같지 않으므로 합성수이다. 그러므로 N 은 어느 하나의 소수 p_m ($1 \leq m \leq n$)으로 나누어떨어져야 한다. 그런데 $N = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$ 을 p_m 으로 나누면 1이 남으므로 모순이다. 따라서 소수는 무수히 많다.

03 충분조건과 필요조건

학습 목표

충분조건과 필요조건을 이해하고 구별할 수 있다.

준비하기

다음 명제 중에서 참인 것을 찾으시오.

- (1) a 가 정수이면 a^2 은 자연수이다.
- (2) a 가 실수이면 $a^2 \geq 0$ 이다.

다가서기

사람이 생존하는 데 물을 섭취하는 것이 반드시 필요하다. 하지만, 사람이 생존하는 데 물을 섭취하는 것만으로는 충분하다고 할 수는 없다. 명제에서도 이와 같이 필요한 조건과 충분한 조건을 생각할 수 있다.



충분조건과 필요조건

생각 열기

우리나라 성인의 비타민 C 하루 필요량은 75 mg, 권장 섭취량은 100 mg이라고 한다. 다음 표는 식품 100 g당 비타민 C 함유량을 나타낸 것이다.

식품	시금치	양배추	키위	딸기	피망	브로콜리
비타민 C 함유량 (mg/100 g)	35	160	69	62	76	120

(출처: 최연배, 『식품학총론』/ 한국 영양 학회, 『2015 한국인 영양소 섭취기준』)

- ▶ 위의 표에서 100 g당 비타민 C 함유량이 성인의 하루 권장 섭취량을 채우는 데 충분한 식품을 말해 보자.

명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, 이것을 기호로

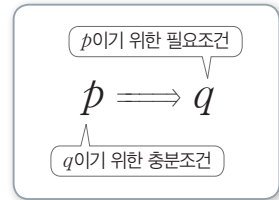
$$p \implies q$$

와 같이 나타낸다. 이때

p 는 q 이기 위한 **충분조건**,

q 는 p 이기 위한 **필요조건**

이라고 한다.



또, 명제 $p \rightarrow q$ 에 대하여 $p \implies q$ 이고 $q \implies p$ 일 때, 이것을 기호로

$$p \iff q$$

와 같이 나타낸다.

이때 p 는 q 이기 위한 **필요충분조건**이라고 한다. 이 경우에 q 도 p 이기 위한 필요충분조건이다.

예를 들어 ‘ a 는 4의 배수 $\implies a$ 는 2의 배수’에서

‘ a 는 4의 배수’는 ‘ a 는 2의 배수’이기 위한 **충분조건**,

‘ a 는 2의 배수’는 ‘ a 는 4의 배수’이기 위한 **필요조건**

이다. 또, ‘ a 는 짝수 $\iff a$ 는 2의 배수’에서

‘ a 는 짝수’는 ‘ a 는 2의 배수’이기 위한 **필요충분조건**

이다.

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P \subset Q$ 이면 $p \implies q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이고, q 는 p 이기 위한 필요조건이다.

특히, $P=Q$ 이면 $p \iff q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

예제 1 두 조건 p, q 가 다음과 같을 때, p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지 말하시오.

- (1) $p: x$ 는 10의 약수이다. $q: x$ 는 5의 약수이다.
 (2) $p: x^2 \leq 4$ $q: |x| \leq 2$

풀이 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

(1) $P = \{1, 2, 5, 10\}, Q = \{1, 5\}$ 이므로 $Q \subset P$ 이고 $P \not\subset Q$ 이다.

따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

(2) $P = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}, Q = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$ 이므로 $P=Q$ 이다.

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

답 (1) 필요조건 (2) 필요충분조건

문제 1 두 조건 p, q 가 다음과 같을 때, p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지 말하시오.

- (1) $p: x=4$ $q: x^2=4x$
 (2) $p: x-2 < 3$ $q: -2(x-3) > -4$

생각
넓히기



문제 해결 | 추론 | 창의융합 | 의사소통 | 정보처리 | 태도 및 실천

다음은 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 는 $A - B = \emptyset$ 이기 위한 필요충분조건임을 증명한 것이다.

(i) ' $A \subset B \implies A - B = \emptyset$ '의 증명

$A \subset B$ 이면 A 의 원소 중에서 B 에 속하지 않는 원소가 없으므로 $A - B = \emptyset$ 이다.

(ii) ' $A - B = \emptyset \implies A \subset B$ '의 증명

$A - B = \emptyset$ 이면 A 의 모든 원소가 B 에 속하므로 $A \subset B$ 이다.

(i)과 (ii)에서 $A \subset B$ 는 $A - B = \emptyset$ 이기 위한 필요충분조건이다.

활동 ▶ 위와 같은 방법으로 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cap B = A$ 는 $A \subset B$ 이기 위한 필요충분조건임을 증명해 보자.

04 절대부등식

학습 목표

절대부등식의 뜻을 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.

준비하기

다음 부등식을 푸시오.

(1) $2x - 3 \geq 5$

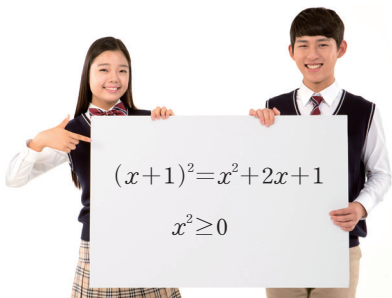
(2) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$

다가서기

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ 은 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하는 등식이다.

또, $x^2 \geq 0$ 은 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하는 부등식이다.

이와 같이 등식뿐만 아니라 부등식 중에도 모든 실수에 대하여 항상 성립하는 부등식이 있다.

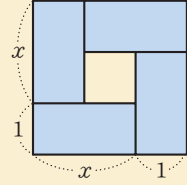


절대부등식

생각 열기

오른쪽 그림을 이용하여, $x > 0$ 일 때 부등식

$(x+1)^2 \geq 4x$ 가 항상 성립함을 설명해 보자.



전체집합이 실수 전체의 집합일 때, 부등식 $x^2 + 1 \geq 0$ 은 전체집합에 속하는 모든 x 에 대하여 성립한다. 이와 같이 전체집합에 속한 모든 값에 대하여 성립하는 부등식을 **절대부등식**이라고 한다.

절대부등식을 증명할 때는 다음과 같은 성질이 자주 이용된다.

a, b 가 실수일 때,

① $a > b \iff a - b > 0$

② $a^2 \geq 0, a^2 + b^2 \geq 0$

③ $a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0$

④ $|a|^2 = a^2, |ab| = |a||b|$

⑤ $a \geq b \iff a^2 \geq b^2$ (단, $a \geq 0, b \geq 0$)

예제 1 a, b 가 실수일 때, 부등식 $a^2 + b^2 \geq ab$ 가 성립함을 증명하시오.

증명 $a^2 - ab + b^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$

그런데 $\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0$ 이고 $\frac{3}{4}b^2 \geq 0$ 이므로 $a^2 - ab + b^2 \geq 0$

따라서 $a^2 + b^2 \geq ab$

여기서 등호는 $a - \frac{b}{2} = 0$ 이고 $b = 0$, 즉 $a = b = 0$ 일 때 성립한다.

참고

등호가 포함된 부등식이 성립함을 증명할 때는 특별한 말이 없더라도 등호가 성립하는 조건을 찾도록 한다.

◆ $a > 0, b > 0$ 일 때,
 $\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}$ 를 각각 a 와 b
 의 산술평균, 기하평균이라
 고 한다.

문제 1 a, b 가 실수일 때, 다음 부등식이 성립함을 증명하시오.

(1) $(a+b)^2 \geq 4ab$

(2) $a^2 + 2ab + 2b^2 \geq 0$

예제 2 $a > 0, b > 0$ 일 때, 부등식 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 가 성립함을 증명하시오.

증명 $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2}{2}$
 $= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$

따라서 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

여기서 등호는 $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, 즉 $a = b$ 일 때 성립한다.

문제 2 $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 부등식이 성립함을 증명하시오.

(1) $a + \frac{1}{a} \geq 2$

(2) $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

◆ $|a+b| \geq 0$,
 $|a| + |b| \geq 0$ 이므로 주어
 진 부등식의 양변을 제곱하
 여 증명하면 된다.

예제 3 a, b 가 실수일 때, 부등식 $|a+b| \leq |a| + |b|$ 가 성립함을 증명하시오.

증명 $(|a| + |b|)^2 - |a+b|^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
 $= a^2 + 2|ab| + b^2 - a^2 - 2ab - b^2$
 $= 2(|ab| - ab)$

그런데 $|ab| \geq ab$ 이므로 $2(|ab| - ab) \geq 0$

따라서 $|a+b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$ 이므로 $|a+b| \leq |a| + |b|$

여기서 등호는 $|ab| = ab$, 즉 $ab \geq 0$ 일 때 성립한다.

문제 3 a, b 가 실수일 때, 다음 부등식이 성립함을 증명하시오.

(1) $|a-b| \leq |a| + |b|$

(2) $|a| - |b| \leq |a-b|$

절대부등식의 기하학적 증명

양수 $a, b (a \geq b)$ 에 대하여 다음과 같은 세 가지 평균을 ‘피타고라스의 평균’이라고 한다.

산술평균: $\frac{a+b}{2}$, 기하평균: \sqrt{ab} , 조화평균: $\frac{2ab}{a+b}$

고대 그리스 사람들은 피타고라스의 평균에서 다음과 같은 절대부등식

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

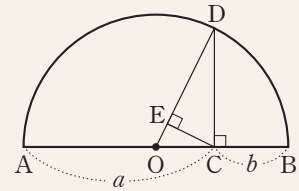
가 성립함을 알고 있었는데, 특히 파포스(Pappos, 290?~350?)는 8권으로 된 『수학집성』이라는 책에서 위의 부등식을 기하학적으로 다음과 같이 증명했다.

오른쪽 그림과 같이 중심이 O이고 \overline{AB} 를 지름으로 하는 반원에서 다음이 성립한다.

[1] $\overline{DE} \leq \overline{DC} \leq \overline{DO}$

[2] $\overline{AC} = a, \overline{BC} = b$ 라 할 때,

$$\overline{DO} = \frac{a+b}{2}, \overline{DC} = \sqrt{ab}, \overline{DE} = \frac{2ab}{a+b}$$



(i) $\overline{DO} = \frac{a+b}{2}$ 의 증명: \overline{DO} 는 원 O의 반지름이므로, $\overline{DO} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{a+b}{2}$ 이다.

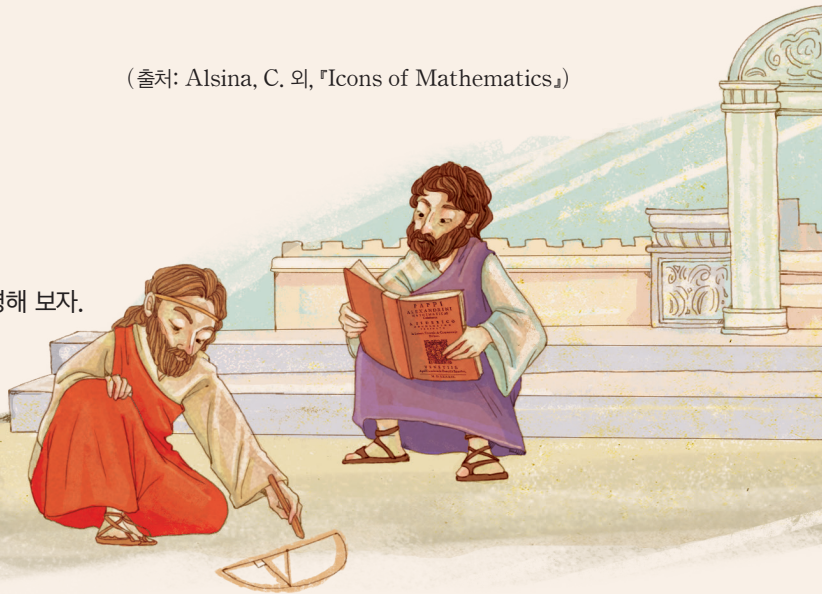
(ii) $\overline{DC} = \sqrt{ab}$ 의 증명: $\triangle DCO$ 는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{DC}^2 &= \overline{DO}^2 - \overline{CO}^2 \\ &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= ab \end{aligned}$$

따라서 $\overline{DC} = \sqrt{ab}$ 이다.

(출처: Alsina, C. 외, 『Icons of Mathematics』)

탐 구 위의 그림을 이용하여 $\overline{DE} = \frac{2ab}{a+b}$ 임을 증명해 보자.



05 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고르시오.

• 보기 •

$$\neg. P \subset Q$$

$$\neg. P \cap Q = Q$$

$$\neg. P^c \cap Q = \emptyset$$

$$\text{ㄹ. } P^c \subset Q^c$$

$$\text{ㄴ. } P^c \cup Q = U$$

06 다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + x > 2$ 이다.

(2) 어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 이다.

07 다음 명제의 역과 대우를 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) $a=2, b=3$ 이면 $a+b=5$ 이다.

(2) $x^2 - x = 0$ 이면 $x=0$ 또는 $x=1$ 이다.

(3) 넓이가 같은 두 삼각형은 서로 합동이다.

08 전체집합 $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 에 대하여 두 조건

$p: x$ 는 8의 약수, $q: x$ 는 4의 배수

일 때, 참인 명제만을 보기에서 있는 대로 고르시오.

• 보기 •

$$\neg. p \rightarrow q$$

$$\neg. q \rightarrow p$$

$$\neg. \sim p \rightarrow q$$

$$\text{ㄹ. } \sim q \rightarrow p$$

$$\text{ㄴ. } \sim p \rightarrow \sim q$$

09 다음 □ 안에 필요, 충분, 필요충분 중에서 가장 알맞은 말을 써넣으시오.

- (1) 실수 a, b 에 대하여 $a=0, b=0$ 은 $a+b\sqrt{2}=0$ 이기 위한 □ 조건이다.
 (2) $A \cap B = \emptyset$ 은 $A - B = A$ 이기 위한 □ 조건이다.
 (3) □ABCD가 평행사변형인 것은 □ABCD가 직사각형이기 위한 □ 조건이다.

10 두 조건 p, q 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고르시오.

• 보기 •

- ㄱ. q 는 p 이기 위한 충분조건이다. ㄴ. q 는 p 이기 위한 필요조건이다.
 ㄷ. $\sim p$ 는 $\sim q$ 이기 위한 필요조건이다. ㄹ. $\sim p$ 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.
 ㅁ. $\sim q$ 는 $\sim p$ 이기 위한 충분조건이다. ㅂ. $\sim q$ 는 $\sim p$ 이기 위한 필요조건이다.

11 $a > 1$ 일 때, $8a + \frac{2}{a-1}$ 의 최솟값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

|서·술·형|

발 전

12 귀류법을 이용하여 다음 명제가 참임을 증명하시오.

‘자연수 n 에 대하여 n^2 이 3의 배수이면 n 도 3의 배수이다.’

사고력 ⊕

13 a, b, x, y 가 실수일 때, 다음에 답하시오.

|서·술·형|

- (1) 부등식 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ 이 성립함을 증명하시오.
 (2) (1)의 결과를 이용하여 $x^2 + y^2 = 9$ 일 때, $3x + 4y$ 의 최댓값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

08 ...

두 집합 A, B 에 대하여

$$n(A)=28, \quad n(B)=37,$$

$$n((A-B) \cup (B-A))=35$$

일 때, $n(A \cup B)$ 를 구하시오.

09 ...

전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 중에서

$A \cap (A-B)^c$ 와 같은 집합은?

- ① A ② $A \cap B$ ③ $A \cup B$
 ④ $A-B$ ⑤ $B-A$

10 ...

전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여

$$(A \cap B) \cup (B-C) = \emptyset$$

일 때, 다음 중에서 옳지 않은 것은?

- ① $A \cap B = \emptyset$ ② $A \subset B^c$
 ③ $B \subset A^c$ ④ $C-B = \emptyset$
 ⑤ $C^c \subset B^c$

11 ...

전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여

$$n(U)=25, \quad n(A \cap B)=10, \quad n(A^c \cap B^c)=7$$

일 때, $n(A) + n(B)$ 를 구하시오.

12 ...

전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, 다음 중에서 옳지 않은 것은?

- ① $\sim p$ 의 진리집합은 P^c 이다.
 ② 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 $Q^c \subset P^c$ 이다.
 ③ $P \neq \emptyset$ 이면 ‘어떤 x 에 대하여 p 이다.’는 참이다.
 ④ $Q \subset P$ 이면 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이다.
 ⑤ $P \neq U$ 이면 ‘모든 x 에 대하여 p 이다.’는 거짓이다.

13 ...

실수 x, y 에 대한 다음 명제 중에서 역이 참인 것은?

- ① $x = -y$ 이면 $x^2 - y^2 = 0$ 이다.
 ② $x > 0$ 이면 $|x| = x$ 이다.
 ③ $x > y$ 이면 $x^2 > y^2$ 이다.
 ④ $x > 0$ 이고 $y > 0$ 이면 $x + y > 0$ 이다.
 ⑤ $xy = 0$ 이면 $x^2 + y^2 = 0$ 이다.

14 ...

명제 $p \rightarrow \sim q$ 의 역이 참일 때, 다음 중에서 반드시 참인 것은?

- ① $p \rightarrow q$ ② $p \rightarrow \sim q$
 ③ $\sim p \rightarrow q$ ④ $\sim p \rightarrow \sim q$
 ⑤ $q \rightarrow \sim p$

15 ...

세 집합 A, B, C 에 대하여 명제

‘ $A \subset B$ 이면 $(A \cap C) \subset (B \cap C)$ 이다.’

의 역과 대우를 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하시오.

16 ...

실수 a, b 에 대하여 두 조건

p : 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 은 실근을 갖는다.

q : $a^2 - 4b > 0$

일 때, 참인 명제만을 보기에서 있는 대로 고르시오.

• 보기 •

ㄱ. $p \rightarrow q$

ㄴ. $q \rightarrow p$

ㄷ. $\sim p \rightarrow \sim q$

ㄹ. $\sim q \rightarrow \sim p$

17 ...

두 조건 p, q 에 대한 다음 설명 중에서 옳은 것은?

p : $a^2 + a \geq 0$

q : $a \geq 2$

- ① $p \rightarrow q$ 의 역은 거짓이다.
- ② $p \rightarrow q$ 의 대우는 거짓이다.
- ③ $q \rightarrow p$ 의 역은 참이다.
- ④ $q \rightarrow p$ 의 대우는 거짓이다.
- ⑤ $\sim q \rightarrow p$ 의 대우는 참이다.

18 ...

전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자. q 가 p 이기 위한 충분조건일 때, 다음 중에서 옳은 것은?

① $P \cap Q = P$

② $P \cup Q = Q$

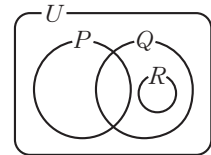
③ $Q - P = \emptyset$

④ $P - Q = \emptyset$

⑤ $Q^c \cap P^c = \emptyset$

19 ...

전체집합 U 에 대하여 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 할 때, 세 집합 사이의 포함 관계는 오른쪽 그림과 같다. 다음 중에서 옳은 것은?



- ① p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
- ② q 는 p 이기 위한 충분조건이다.
- ③ p 는 $\sim r$ 이기 위한 필요조건이다.
- ④ r 는 $\sim p$ 이기 위한 필요충분조건이다.
- ⑤ $\sim r$ 는 $\sim q$ 이기 위한 필요조건이다.

20 ...

실수 x, y 에 대한 다음 조건 중에서

$|x + y| = |x| + |y|$

이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은?

① $|x| = |y|$

② $xy \leq 0$

③ $xy \geq 0$

④ $x > y$

⑤ $xy = 0$

21번부터 24번까지 서술형입니다.

21 ...

진호네 학교 학생을 대상으로 가입한 동아리를 조사하였더니 만화 창작, 실용 음악, 댄스 동아리 중에서 적어도 한 동아리에 가입한 학생은 48명이었다. 만화 창작, 실용 음악 동아리에 가입한 학생은 각각 24명, 30명이고, 두 동아리에 모두 가입한 학생은 11명일 때, 댄스 동아리에만 가입한 학생 수를 구하시오.

22 ...

다음 명제가 참이 되도록 하는 실수 a 의 최솟값을 구하시오.

‘모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 8x + a \geq 0$ 이다.’

23 ...

양수 a, b 에 대하여 세 조건

$$p: x^2 < a, \quad q: x^2 - 2x < 3, \quad r: x < b$$

일 때 p 는 q 이기 위한 충분조건이고, r 는 q 이기 위한 필요조건이다. 다음에 답하시오.

(1) a 와 b 의 값의 범위를 구하시오.

(2) a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하시오.

24 ...

$a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 부등식이 성립함을 증명하시오.

$$a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$$



정답을 맞힌 문항에 ○표 하여 학습 성취도를 표시하고, 부족한 부분은 교과서의 해당 쪽을 확인하여 복습하자.

문항 번호	성취 기준	성취도	복습
01	집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.	○ △ ×	175 ~ 177쪽
02 03 04	두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다.	○ △ ×	178 ~ 179쪽
05 06	합집합과 교집합의 뜻을 알고, 그 연산을 할 수 있다.	○ △ ×	180 ~ 183쪽
07 08 09 10 11 21	여집합과 차집합의 뜻을 알고, 그 연산을 할 수 있다.	○ △ ×	184 ~ 187쪽
12 22	명제와 조건의 뜻을 알고, ‘모든’, ‘어떤’을 포함한 명제를 이해한다.	○ △ ×	193 ~ 198쪽
13 14 15 16 17	명제의 역과 대우, 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.	○ △ ×	199 ~ 201쪽
18 19 20 23	충분조건과 필요조건을 이해하고 구별할 수 있다.	○ △ ×	202 ~ 203쪽
24	절대부등식의 뜻을 이해하고, 절대부등식을 증명할 수 있다.	○ △ ×	204 ~ 205쪽

성취도 ○만족, △보통, ×미흡

인공 지능, 빅데이터와 퍼지 집합

앞에서는 집합을 ‘어떤 기준에 따라 대상을 분명하게 정할 수 있을 때, 그 대상들의 모임’이라 정하고 어떤 대상이 그 집합에 ‘속하는지’와 ‘속하지 않는지’만을 판단했는데, 이러한 이분법적인 기준만으로는 인간의 다양하고 유연한 생각을 표현하기에는 한계가 있다.

예를 들어 ‘파란색의 모임’은 파란색의 기준이 명확하지 않아 집합이라 할 수 없지만 우리는 ‘새파랗다’ 또는 ‘푸르스름하다’ 등의 다양한 단어로 파란색을 표현하고 있다.

이처럼 명확하지 않은 여러 가지 상황을 수학적으로 표현하기 위해서 원소가 ‘반만큼 속한다’ 또는 ‘ $\frac{1}{3}$ 만큼 속한다’와 같이 어떤 대상이 집합에 속하는 정도를 실수로 나타내는 집합을 사용하는데, 이를 ‘퍼지(fuzzy) 집합’이라고 한다. 퍼지 집합 이론은 이와 같이 인간의 인식, 사고, 판단 및 언어 등에서 볼 수 있는 불확실성을 정량적이고 합리적으로 추론하는 이론으로, 1965년 미국의 수학자 자데(Zadeh, L. A., 1921~)가 처음 이와 관련된 이론을 소개했다.

퍼지 집합 이론을 응용하여 개발한 전자 제품으로는 세탁물의 양에 따라 물과 세제의 양이 정해지는 퍼지 세탁기, 온도뿐만 아니라 바람의 세기도 고려하여 시원함을 조절하는 퍼지 에어컨, 쌀과 잡곡의 불린 상태와 가열 시간에 따라 여러 가지 밥맛이 가능한 퍼지 전기밥솥 등이 있다.

또한, 퍼지 집합 이론은 ‘제4차 산업혁명’으로 불리는 인공 지능과 빅데이터(big data)의 처리 문제를 해결할 수학적 이론으로 자리 잡고 있다. 인간의 학습 능력과 추론 능력, 지각 능력 등을 갖춘 인공 지능의 목표가 결국 인간처럼 다양하고 유연한 사고 능력이라는 점이 퍼지 집합 이론과 맞아 떨어지기 때문이다.

수많은 사람이 매일 찍어 인터넷에 올리는 사진들과 같이 기존의 관리 방법이나 분석 체계로는 처리하기 어려운 엄청난 양의 빅데이터를 관리하고 여기에서 필요한 정보를 얻을 때도 퍼지 집합 이론이 이용된다. 예를 들어 ‘인물 사진’이나 ‘풍경 사진’ 등의 기준만으로는 분류하기 어려운 사진들을 분류하는 데 퍼지 집합 이론을 활용할 수 있다.

(출처: 권순학, 『퍼지 집합, 퍼지 척도 및 퍼지 적분』/

Vas, P., 『Artificial-Intelligence-based Electrical Machines and Drives』)





세상의 모든 지식의 분류와 집합

사서는 이용자의 정보 요구를 충족시키기 위해 자료를 수집하고 정리하여 제공한다. 한 권의 책이 도서관 서가에 꽂히기까지 보이지 않는 일련의 과정은 생각보다 체계적이고 때로는 복잡하다. 자료를 조직하는 기본적인 업무 외에도 사서는 프로그램을 기획하거나 교육자로서의 역할을 수행하기도 한다. 이러한 측면에서 사서란 정보와 사람을 연결해 주는 징검다리라고 할 수 있다.

우리나라에서는 한국 십진 분류법(KDC: Korean Decimal Classification)을 사용하여, 세상의 모든 지식 분야를 총류(000), 철학(100), 종교(200), 사회 과학(300), 자연 과학(400), 기술 과학(500), 예술(600), 언어(700), 문학(800), 역사(900)라는 10가지 '주류'로 구분한 후 각 주류별로 다시 9가지로 세분화하여 분류한다.

예를 들어 분류 번호가 413인 책에서 4는 자연 과학을, 1은 수학을, 3은 수학의 세부 분류인 통계학을 뜻한다.

분류법이라는 기준에 따라 책을 분류하는 도서의 분류 원리는 수학에서 어떤 기준에 따라 대상을 분명하게 정하는 집합의 개념을 적용한 것이다.

다양한 책을 정해진 기준에 따라 주제별로 분류하여 배열할 때, 총류, 철학, 종교 등은 각각 공통된 주제를 모은 집합이라 할 수 있고, 각 주제에 해당하는 한 권의 책은 그 집합의 원소라고 할 수 있다.

이와 같은 분류 번호와 함께 저자의 정보를 담은 도서 기호를 이용하여 책의 주소라 할 수 있는 청구 기호를 부여한다. 청구 기호를 이용하면 원하는 책을 쉽게 찾을 수 있고 책에 대한 정보를 얻을 수도 있으므로 수학은 수많은 소통을 가능하게 하는 명쾌한 또 하나의 언어라고 할 수 있다.

(출처: 오동근 외, 『한국 십진 분류법 제6판의 이해와 적용』)

000 총류 010 도서관, 사지학 020 문헌정보학 030 백과사전 040 간행진, 수집진, 연세문집 050 일반연속간행물 060 일반학위, 단체, 협회, 기관 070 신문, 연보, 계보자료 080 일반전집, 총서 090 원초자료	100 철학 110 형이상학 120 윤리학 130 철학의 세계 140 경학 150 아시아(아동학) 철학, 사상 160 서양철학 170 논리학 180 심리학 190 윤리학, 도덕철학	200 종교 210 비교종교 220 불교, 원불교 230 기독교 240 도교 250 천도교 260 신도 270 바리문교, 인도교 280 회교(이슬람교) 290 기타 계종교	300 사회 과학 310 통계학 320 경제학 330 사회학, 사회문제 340 정치학 350 행정학 360 법학 370 교육학 380 통속, 민속학 390 국방, 군사학	400 자연 과학 410 수학 420 물리학 430 화학 440 천문학 450 기하학 460 광물학 470 생명과학 480 식물학 490 동물학	500 기술 과학 510 의학 520 농업, 농학 530 공학, 종합 일반 540 건축학 550 기계공학 560 전기공학, 전자공학 570 항공학 580 계측공 590 가정학 및 가정생활	600 예술 610 건축술 620 조각 630 공예, 장식미술 640 서예 650 회화, 도화 660 사진술 670 음악 680 연극 690 무악, 운동	700 언어 710 한국어 720 중국어 730 일어 740 영어 750 독일어 760 프랑스어 770 스페인어 780 이탈리아어 790 기타 언어	800 문학 810 한국문학 820 중국문학 830 일본문학 840 영문학 850 독일문학 860 프랑스문학 870 스페인문학 880 이탈리아어문학 890 기타 계문학	900 역사 910 아시아 920 유럽 930 아프리카 940 북아메리카 950 남아메리카 960 오세아니아 970 양극지방 980 지리 990 전기
---	--	---	--	--	--	---	--	---	---