IV 집합과 명제

집합의 개념은 러시아 태생인 독일의 수학자 칸토어(Cantor, G., 1845~1918)가 고안한 것으로 현대 수학의 기초를 이루는 대단히 중요한 것이다. 그는 직관 또는 사고의 대상으로서 서로 명확하게 구별되는 것들을 하나하나 모은 것을 집합이라고 했다.

한편, 수학은 논리적으로 구성된 학문이기 때문에, 참과 거짓을 명확하게 판별할 수 있는 문장만 사용해야 한다.

1. 집합
2. 명제

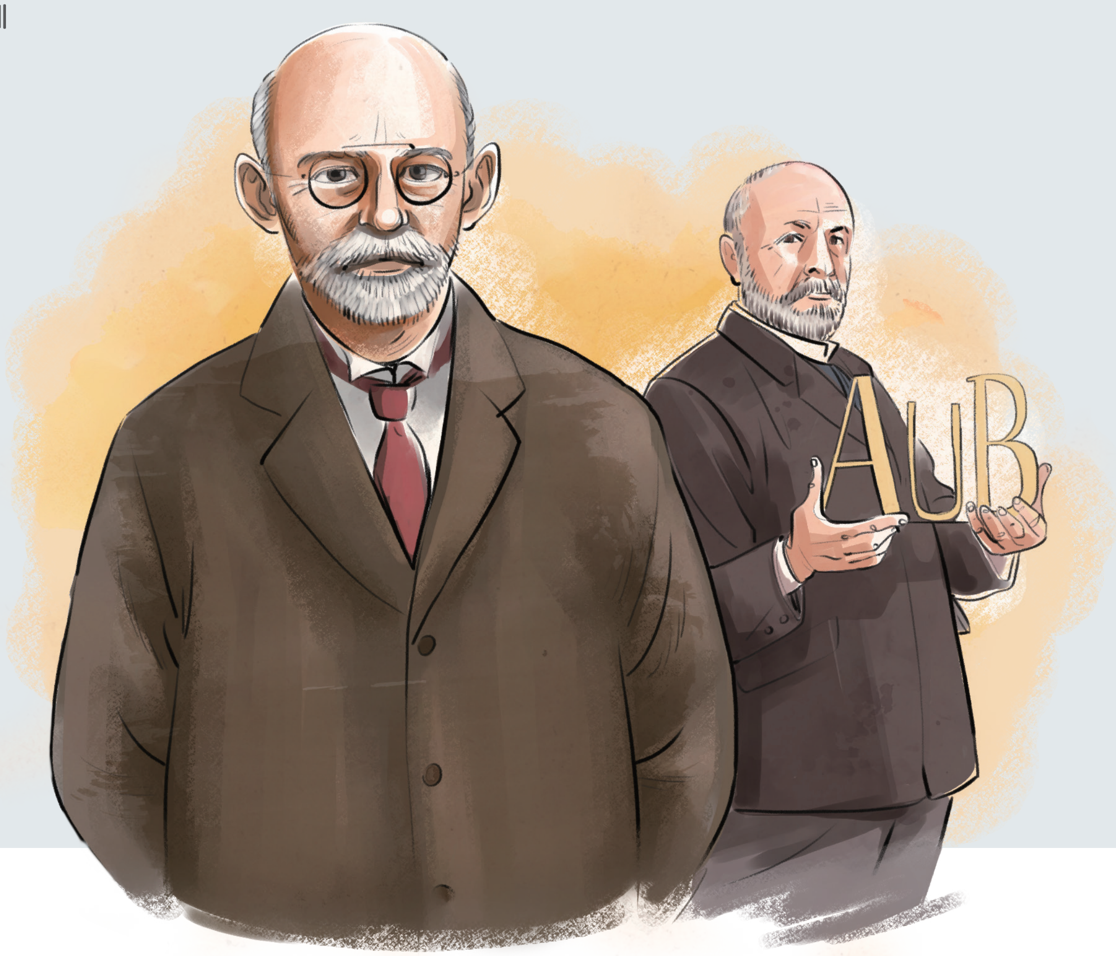
이 단원에서는

집합의 뜻과 연산 법칙을 이해하고,
명제와 조건의 참과 거짓, 명제의 역과 대우,
충분조건과 필요조건 및 절대부등식의 증명을 알아본다.

1 집합

" 누구도 **칸토어**가 우리를 위해 창조해 준 낙원에서
우리를 쫓아내지 못할 것이다. "

(출처: Hilbert, D., 『On the Infinite』)



힐베르트(Hilbert, D., 1862~1943)
독일의 수학자

이 글은 힐베르트가 집합의 개념을 발전시키는 데 이바지한 수학자 칸토어(Cantor, G., 1845~1918)의 이론에 부정적인 입장을 취하는 수학자들을 비판하기 위해 한 말이다.

01 집합

학습 목표
집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.

준비 하기
10 이하의 자연수 중에서 다음을 모두 구하시오.
(1) 홀수
(2) 4의 배수

집합의 뜻

생각 열기 배기량을 기준으로 할 때, 1000 cc 미만인 차량을 경차로 분류한다.

❶ 다음 표에서 배기량을 기준으로 할 때, 경차인 것을 모두 찾아보자.

차량	A	B	C	D	E
배기량 (cc)	999	1368	796	2359	1998

❷ ❶의 표에서 배기량이 큰 차량을 정확하게 가려낼 수 있는지 말해 보자.

위의 **생각 열기**에서 배기량이 1000 cc 미만인 차량은 그 대상이 분명하지만, 배기량이 큰 차량은 기준이 명확하지 않으므로 그 대상이 분명하지 않다.

이와 같이 어떤 기준에 따라 대상을 분명하게 정할 수 있을 때, 그 대상들의 모임을 **집합**이라고 한다. 이때 집합을 이루는 대상 하나하나를 그 집합의 **원소**라고 한다.

다가 서기
봉사 동아리 활동을 하는 학생들의 모임, 생일이 같은 달인 학생들의 모임과 같이 우리 주변에는 기준이 분명한 모임이 있다.
수학에서도 이와 같이 기준이 분명한 모임을 다룬다.

보기 ① '10의 약수의 모임'은 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이고, 이 집합의 원소는 1, 2, 5, 10이다.
② '큰 수의 모임'은 크다의 기준이 명확하지 않아서 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

특별한 말이 없으면 약수, 배수는 자연수의 범위에서만 다룬다.

문제 1 다음 중에서 집합인 것을 모두 찾고, 그 집합의 원소를 구하시오.

(1) 12의 약수의 모임
(2) $\sqrt{2}$에 가까운 유리수의 모임
(3) 이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 해의 모임

집합은 보통 알파벳 대문자 A, B, C, $\cdots$ 로 나타내고, 원소는 알파벳 소문자 a, b, c, $\cdots$ 로 나타낸다.

기호 $\in$은 원소를 뜻하는 element의 첫 글자 e를 기호화한 것으로, 이탈리아의 수학자 페아노(Peano, G., 1858~1932)가 처음 사용했다고 한다.

a가 집합 A의 원소일 때, 'a는 집합 A에 속한다'고 하며, 이것을 기호로

$$a \in A$$

와 같이 나타낸다.

$a \in A$

원소 집합

한편, b가 집합 A의 원소가 아닐 때, 'b는 집합 A에 속하지 않는다'고 하며, 이것을 기호로

$$b \notin A$$

와 같이 나타낸다.

보기 10의 약수의 집합을 A라 할 때, 2는 집합 A의 원소이고 9는 집합 A의 원소가 아니므로 $2 \in A$, $9 \notin A$이다.

문제 2 유리수 전체의 집합을 Q라 할 때, 다음 $\square$ 안에 기호 $\in$, $\notin$ 중에서 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $2 \ \square \ Q$ (2) $-\frac{1}{3} \ \square \ Q$ (3) $\sqrt{10} \ \square \ Q$

집합의 표현

집합을 나타내는 방법을 알아보자.

집합에 속하는 모든 원소를 { } 안에 나열하여 집합을 나타내는 방법을 원소나열법이라고 한다. 집합을 원소나열법으로 나타낼 때, 원소를 나열하는 순서는 생각하지 않으며 같은 원소는 중복하여 쓰지 않는다.

예를 들어 100 이하의 자연수 중에서 4의 배수의 집합을 원소나열법으로

$$\{4, 8, 12, \cdots, 100\}$$

과 같이 나타낼 수 있다.

원소의 개수가 많고, 원소 사이에 일정한 규칙이 있을 때는 '$\cdots$'을 사용하여 원소의 일부를 생략하기도 한다.

또, 집합의 원소들이 갖는 공통된 성질을 조건으로 제시하여 집합을 나타내는 방법을 조건제시법이라고 한다.

예를 들어 집합 $\{2, 3, 5, 7\}$을 조건제시법으로

$$\{x \mid x\text{는 10 이하의 소수}\}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

원소를 대표하는 문자

$\{x \mid x$는 10 이하의 소수$\}$

원소들이 갖는 공통된 성질

문제 3 다음 집합에서 원소나열법으로 나타낸 것은 조건제시법으로, 조건제시법으로 나타낸 것은 원소나열법으로 나타내시오.

(1) $\{1,\ 3,\ 9\}$ (2) $\{5,\ 10,\ 15,\ \cdots\}$

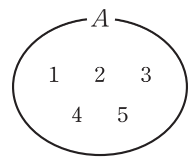
(3) $\{x \mid x^2-1=0\}$ (4) $\{x \mid x$는 1 이상 100 이하의 홀수$\}$

벤(Venn, J., 1834~1923)
영국의 논리학자로 벤다이어그램을 고안했다.

집합을 나타낼 때 그림을 이용하기도 한다.

예를 들어 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$를 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다.

이와 같은 방법으로 집합을 나타낸 그림을 **벤다이어그램**이라고 한다.



문제 4 다음 집합을 벤다이어그램으로 나타내시오.

(1) $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$ (2) $B=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$

집합의 원소의 개수

원소가 유한개인 집합을 유한집합이라 하고, 원소가 무수히 많은 집합을 무한집합이라고 한다. 예를 들어 집합 $\{2,\ 3,\ 5\}$는 원소가 3개인 유한집합이고, 자연수 전체의 집합은 무한집합이다.

집합 A가 유한집합일 때, 집합 A의 원소의 개수를 기호로

$$\boldsymbol{n(A)}$$

와 같이 나타낸다.

> $n(A)$의 n은 개수를 뜻하는 number의 첫 글자이다.

한편, 원소가 하나도 없는 집합을 **공집합**이라 하며, 이것을 기호로

$$\varnothing$$

과 같이 나타낸다. 공집합은 $n(\varnothing)=0$인 유한집합으로 생각한다.

> **생각 톡톡**
> $\varnothing$과 집합 $\{0\}$의 다른 점은 무엇일까?

문제 5 다음 집합 A에 대하여 $n(A)$를 구하시오.

(1) $A=\{1,\ 2,\ 4\}$ (2) $A=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 100\}$

(3) $A=\{x \mid x$는 $x^2=-1$인 실수$\}$ (4) $A=\{x \mid x^2-2x+1=0\}$

02 집합 사이의 포함 관계

학습 목표

두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다.

준비하기

다음을 원소나열법으로 나타내시오.

(1) 15의 약수의 집합

(2) 8의 배수의 집합

부분집합과 진부분집합

생각 열기 피아노 삼중주와 피아노 사중주에서 연주되는 악기의 집합을 각각 A, B라 하면

$A=\{$피아노, 바이올린, 첼로$\}$,

$B=\{$피아노, 바이올린, 비올라, 첼로$\}$

이다.

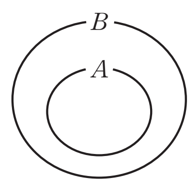
▶ 집합 A의 원소는 모두 집합 B에 속하는지 말해 보자.

위의 **생각 열기**에서 집합 A의 원소인 피아노, 바이올린, 첼로는 피아노 사중주에서도 연주되는 악기이므로, 모두 집합 B에 속함을 알 수 있다.

두 집합 A, B에 대하여 A의 모든 원소가 B에 속할 때, A를 B의 **부분집합**이라 하며, 이것을 기호로

$$A \subset B$$

와 같이 나타낸다. 이때 '집합 A는 집합 B에 포함된다'고 한다.



한편, 집합 A가 집합 B의 부분집합이 아닐 때, 이것을 기호로

$$A \not\subset B$$

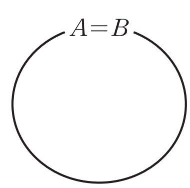
와 같이 나타낸다.

모든 집합은 자기 자신의 부분집합이다. 또, 공집합은 모든 집합의 부분집합으로 정한다. 즉, 집합 A에 대하여 $A \subset A$, $\varnothing \subset A$이다.

두 집합 A, B에 대하여 $A \subset B$이고 $B \subset A$일 때, 'A와 B는 서로 같다'고 하며, 이것을 기호로

$$A=B$$

와 같이 나타낸다.



서로 같은 두 집합의 원소는 같다.

다가서기

젖을 먹여 새끼를 기르는 동물을 포유류라 하는데, 그중에서 침팬지, 원숭이 등과 같은 영장류는 발가락이 5개이다.

동물이나 식물을 분류하고 이들 사이의 관계를 알아보는 데 집합의 포함 관계가 이용된다.

또, 두 집합 A와 B가 서로 같지 않을 때, 이것을 기호로

$$A \neq B$$

와 같이 나타낸다.

기호 ⊂는 독일의 수학자 슈뢰더(Schröder, E., 1841~1902)가 처음 사용했다고 한다.

보기 ① 두 집합 $A=\{2, 5\}$, $B=\{2, 3, 5\}$에 대하여 집합 A의 모든 원소 2, 5가 집합 B에 속하므로 $A \subset B$이다.

② 두 집합 $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{x \mid x$는 4의 약수$\}$에 대하여 $A \subset B$이고 $B \subset A$이므로 $A=B$이다.

문제 1 다음 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 $A \subset B$ 또는 $B \subset A$로 나타내시오. 또, $A=B$인 것을 모두 찾으시오.

(1) $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{x \mid x$는 5 이하의 자연수$\}$

(2) $A=\{0, 1\}$, $B=\{x \mid x^2-x=0\}$

(3) $A=\{x \mid x^2-4x+3=0\}$, $B=\{x \mid x$는 3의 약수$\}$

(4) $A=\{x \mid 2x-7 \leq 0\}$, $B=\{x \mid x^2-2x-3 \leq 0\}$

두 집합 A, B에 대하여 A가 B의 부분집합이지만 서로 같지 않을 때, 즉

$$A \subset B\text{이고 } A \neq B$$

일 때, A를 B의 **진부분집합**이라고 한다.

문제 2 집합 $A=\{a, b, c\}$의 부분집합을 구하려고 한다. 다음에 답하시오.

(1) 집합 A의 부분집합을 원소의 개수에 따라 모두 써넣어 오른쪽 표를 완성하시오.

(2) 집합 A의 부분집합의 개수와 진부분집합의 개수를 구하시오.

원소의 개수	부분집합
0	$\varnothing$
1	
2	
3	

문제 3 세 영어 단어 late, later, latter를 이루는 알파벳의 집합을 각각 A, B, C라 할 때, 세 집합 사이의 포함 관계를 조사하여 두 집합 A, B가 각각 집합 C의 진부분집합인지 말하시오.

03 합집합과 교집합

학습 목표
합집합과 교집합의 뜻을 알고, 그 연산을 할 수 있다.

준비하기
20 이하의 자연수 중에서 다음을 모두 구하시오.

(1) 짝수

(2) 3의 배수

(3) 6의 배수

다가서기
우리나라의 축구 국가 대표 팀 중에는 월드컵 팀과 올림픽 팀이 있는데, 이 두 팀에 공통으로 소속되어 있는 선수가 있을 수도 있다.
집합에서도 두 집합에 공통으로 속하는 원소의 집합을 생각할 수 있다.

합집합과 교집합

생각 열기 ABO식 혈액형에서 A 항원만 있으면 A형, B 항원만 있으면 B형이라 하고, A 항원과 B 항원이 모두 있으면 AB형, 두 항원이 모두 없으면 O형으로 분류한다.

❶ A 항원 또는 B 항원을 가진 사람의 혈액형을 모두 말해 보자.

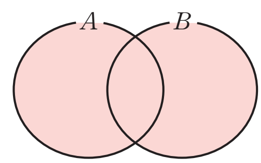
❷ A 항원과 B 항원을 모두 가진 사람의 혈액형을 말해 보자.

두 집합 A, B에 대하여 A에 속하거나 B에 속하는 모든 원소로 이루어진 집합을 A와 B의 **합집합**이라 하며, 이것을 기호로

$$A \cup B$$

와 같이 나타낸다. A와 B의 합집합을 조건제시법으로 나타내면 다음과 같다.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 또는 } x \in B\}$$



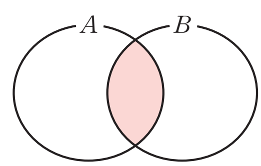
$A \cup B$

또, 두 집합 A, B에 대하여 A에도 속하고 B에도 속하는 모든 원소로 이루어진 집합을 A와 B의 **교집합**이라 하며, 이것을 기호로

$$A \cap B$$

와 같이 나타낸다. A와 B의 교집합을 조건제시법으로 나타내면 다음과 같다.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 그리고 } x \in B\}$$

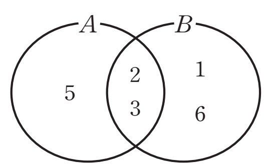


$A \cap B$

보기 두 집합 $A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$에 대하여

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$,

$A \cap B = \{2, 3\}$



문제 1 다음 두 집합 A, B에 대하여 $A \cup B$와 $A \cap B$를 구하시오.

(1) $A=\{1, 2, 4, 8\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

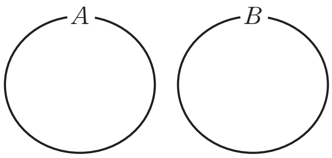
(2) $A=\{x \mid x^2+2x-15=0\}$, $B=\{x \mid x$는 정수$\}$

생각톡톡
모든 집합과 서로소인 집합은 무엇일까?

두 집합 A, B에서 공통인 원소가 하나도 없을 때, 즉

$$A \cap B=\varnothing$$

일 때, A와 B는 **서로소**라고 한다.



문제 2 다음 중에서 두 집합 A, B가 서로소인 것을 모두 찾으시오.

(1) $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b, c\}$

(2) $A=\{x \mid x$는 10 미만의 소수$\}$, $B=\{x \mid x$는 6의 약수$\}$

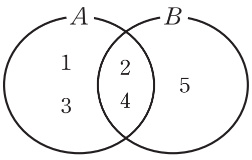
(3) $A=\{x \mid x$는 4의 배수$\}$, $B=\{x \mid (x-2)(x-7)=0\}$

다음을 통해 합집합과 교집합의 원소의 개수 사이의 관계를 알아보자.

함께하기 오른쪽 그림과 같은 두 집합

$$A=\{1, 2, 3, 4\}, \quad B=\{2, 4, 5\}$$

에 대하여 $A \cup B$의 원소의 개수를 구하는 방법을 생각해 보자.



활동 ① $n(A)$, $n(B)$, $n(A \cup B)$, $n(A \cap B)$를 각각 구해 보자.

활동 ② $n(A)+n(B)-n(A \cap B)$를 구하여 $n(A \cup B)$와 비교해 보자.

일반적으로 두 유한집합 A, B에 대하여 다음이 성립한다.

$$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$$

특히, A와 B가 서로소이면 $n(A \cap B)=0$이므로 다음이 성립한다.

$$n(A \cup B)=n(A)+n(B)$$

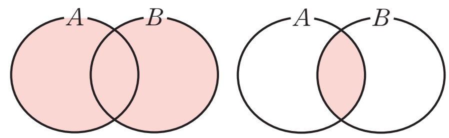
문제 3 두 집합 A, B에 대하여 $n(A)=6$, $n(B)=10$, $n(A \cup B)=12$일 때, $n(A \cap B)$를 구하시오.

집합의 연산 법칙

두 집합 A, B에 대하여

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

가 성립하고, 이것을 각각 합집합과 교집합에 대한 **교환법칙**이라고 한다.



$A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

또, 세 집합 A, B, C에 대하여

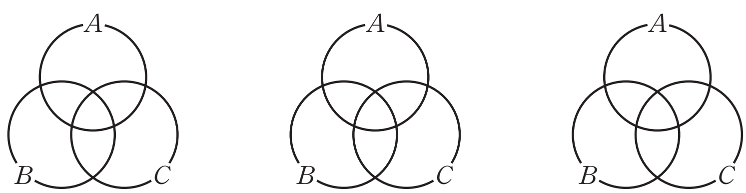
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

가 성립하고, 이것을 각각 합집합과 교집합에 대한 **결합법칙**이라고 한다.

다음을 통해 합집합에 대한 결합법칙을 알아보자.

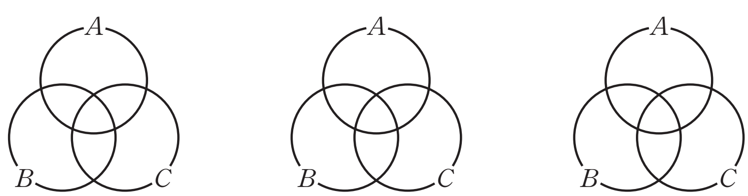
함께하기 세 집합 A, B, C에 대하여 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$가 성립함을 벤다이어그램을 이용하여 확인해 보자.

활동 ❶ 다음 벤다이어그램에 $A \cup B$와 C를 각각 색칠하고, 이를 이용하여 $(A \cup B) \cup C$를 색칠해 보자.



$A \cup B$ $\qquad \cup \qquad$ C $\qquad = \qquad$ $(A \cup B) \cup C$

활동 ❷ 다음 벤다이어그램에 A와 $B \cup C$를 각각 색칠하고, 이를 이용하여 $A \cup (B \cup C)$를 색칠한 다음 활동 ❶의 결과와 비교해 보자.



A $\qquad \cup \qquad$ $B \cup C$ $\qquad = \qquad$ $A \cup (B \cup C)$

문제 4 세 집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립함을 벤다이어그램을 이용하여 확인하시오.

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

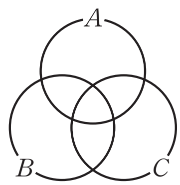
세 집합 A, B, C에 대하여

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

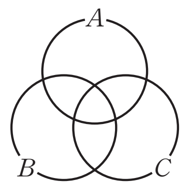
가 성립하고, 이것을 집합의 연산에 대한 **분배법칙**이라고 한다.

문제 5 세 집합 A, B, C에 대하여 집합의 연산에 대한 분배법칙이 성립함을 벤다이어그램을 이용하여 확인하려고 한다. 다음에 답하시오.

(1) 다음 벤다이어그램에 $A\cap(B\cup C)$와 $(A\cap B)\cup(A\cap C)$를 각각 색칠하고, 이를 이용하여 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$가 성립함을 확인하시오.

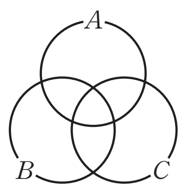


$A\cap(B\cup C)$

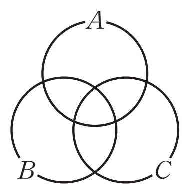


$(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(2) 다음 벤다이어그램에 $A\cup(B\cap C)$와 $(A\cup B)\cap(A\cup C)$를 각각 색칠하고, 이를 이용하여 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$가 성립함을 확인하시오.



$A\cup(B\cap C)$



$(A\cup B)\cap(A\cup C)$

이상에서 집합의 연산 법칙을 정리하면 다음과 같다.

집합의 연산 법칙

세 집합 A, B, C에 대하여

❶ 교환법칙 $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$

❷ 결합법칙 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

❸ 분배법칙 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

세 집합의 연산에서 결합법칙이 성립하므로 보통
$A\cup B\cup C$, $A\cap B\cap C$
로 나타낸다.

문제 6 세 집합 A, B, C에 대하여 $A\cap B=\{a, b\}$, $A\cap C=\{b, c, d\}$일 때, $A\cap(B\cup C)$를 구하시오.

04 여집합과 차집합

학습 목표
여집합과 차집합의 뜻을 알고, 그 연산을 할 수 있다.

준비하기
두 집합

$A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$

에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $A\cup B$

(2) $A\cap B$

다가서기
스팸 메일은 수신자의 동의 없이 일방적으로 전달되는 메일로서, 수신을 원하지 않을 경우 스팸 메일을 제외한 메일만 받도록 설정할 수 있다. 집합에서도 어떤 특정한 원소들을 제외한 원소의 집합을 생각할 수 있다.

여집합과 차집합

생각 열기 전체 스포츠 종목의 집합을 U, 그중에서 구기 종목의 집합을 A라 하자.

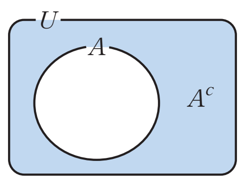
▶ U에 속하지만 A에 속하지 않는 원소를 3개 이상 말해 보자.

어떤 집합에 대하여 그 부분집합을 생각할 때, 처음의 집합을 **전체집합**이라 하며, 이것을 기호로

$$\boldsymbol{U}$$

와 같이 나타낸다.

전체집합 U의 부분집합 A에 대하여 U의 원소 중에서 A에 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합을 U에 대한 A의 **여집합**이라 하며, 이것을 기호로



$$\boldsymbol{A^C}$$

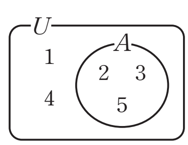
와 같이 나타낸다. A의 여집합을 조건제시법으로 나타내면 다음과 같다.

$$A^C=\{x\,|\,x\in U \text{ 그리고 } x\notin A\}$$

A^C의 C는 여집합을 뜻하는 complement의 첫 글자이다.

보기 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 $A=\{2, 3, 5\}$의 여집합은

$A^C=\{1, 4\}$



문제 1 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 다음 집합의 여집합을 구하시오.

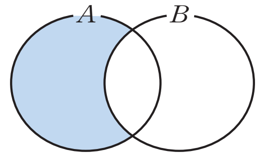
(1) $A=\{2, 4, 8\}$ (2) $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

두 집합 A, B에 대하여 A에 속하지만 B에는 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합을 A에 대한 B의 **차집합**이라 하며, 이것을 기호로

$$A-B$$

와 같이 나타낸다. A에 대한 B의 차집합을 조건제시법으로 나타내면 다음과 같다.

$$A-B=\{x\,|\,x\in A \text{ 그리고 } x\notin B\}$$



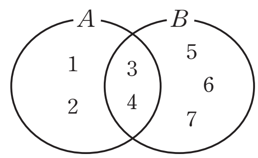
$A-B$

집합 A의 여집합 A^C는 전체집합 U에 대한 A의 차집합과 같다. 즉,
$A^C=U-A$
이다.

보기 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여

$A-B=\{1, 2\}$,

$B-A=\{5, 6, 7\}$



생각톡톡

두 집합 A, B에 대하여
$A-B=\varnothing$
일 때, A와 B 사이에는 어떤 포함 관계가 있을까?

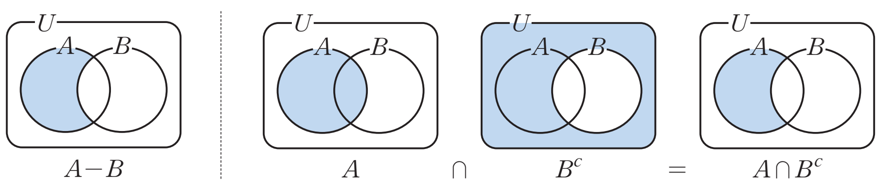
문제 2 다음 두 집합 A, B에 대하여 $A-B$와 $B-A$를 구하시오.

(1) $A=\{a, b, c, d, e\}$, $B=\{a, e\}$

(2) $A=\{x\,|\,x\text{는 12의 약수}\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

예제 1 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A-B=A\cap B^C$가 성립함을 벤다이어그램을 이용하여 확인하시오.

풀이 $A-B$와 $A\cap B^C$를 벤다이어그램으로 각각 나타내면 다음과 같다.



따라서 $A-B=A\cap B^C$가 성립한다.

답 풀이 참조

문제 3 전체집합 U의 부분집합 A에 대하여 다음이 성립함을 벤다이어그램을 이용하여 확인하시오.

(1) $(A^C)^C=A$ (2) $A\cup A^C=U$ (3) $A\cap A^C=\varnothing$

일반적으로 여집합과 차집합에는 다음과 같은 성질이 있다.

여집합과 차집합의 성질

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

❶ $U^C=\varnothing$, $\varnothing^C=U$　　❷ $(A^C)^C=A$

❸ $A\cup A^C=U$, $A\cap A^C=\varnothing$　　❹ $A-B=A\cap B^C$

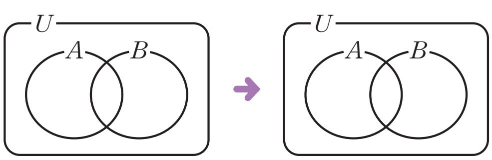
$A^C=U-A$이므로
$U^C=U-U=\varnothing$,
$\varnothing^C=U-\varnothing=U$
이다.

드모르간의 법칙

다음을 통해 합집합의 여집합을 알아보자.

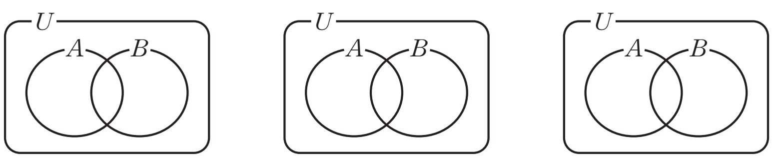
함께하기 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$가 성립함을 벤다이어그램을 이용하여 확인해 보자.

활동 ❶ 다음 벤다이어그램에 $A\cup B$를 색칠하고, 이를 이용하여 $(A\cup B)^C$를 색칠해 보자.



$A\cup B$　　$(A\cup B)^C$

활동 ❷ 다음 벤다이어그램에 A^C와 B^C를 각각 색칠하고, 이를 이용하여 $A^C\cap B^C$를 색칠한 다음 활동 ❶의 결과와 비교해 보자.



A^C　$\cap$　B^C　$=$　$A^C\cap B^C$

드모르간(De Morgan, A., 1806~1871)
영국의 수학자로 드모르간의 법칙을 만들었고, 현대 기호 논리학의 토대를 마련했다.

문제 4 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음이 성립함을 벤다이어그램을 이용하여 확인하시오.

$$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$$

일반적으로 다음이 성립하는데, 이것을 **드모르간의 법칙**이라고 한다.

드모르간의 법칙

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

❶ $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$ ❷ $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

탐구 **문제 5** 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$(A-B)\cup(A\cup B)^C=B^C$$

가 성립함을 다음 두 가지 방법으로 설명하시오.

(1) 벤다이어그램을 이용하는 방법 (2) 집합의 연산 법칙을 이용하는 방법

예제 2 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$n(U)=40,\quad n(A)=21,\quad n(B)=17,\quad n(A\cup B)=34$$

일 때, $n(A^C\cup B^C)$를 구하시오.

풀이 드모르간의 법칙에 의하여 $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이므로

$$n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$$

그런데 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$$34=21+17-n(A\cap B),\text{ 즉 } n(A\cap B)=4$$

따라서 $n(A^C\cup B^C)=n(U)-n(A\cap B)=40-4=36$

답 36

문제 6 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$n(U)=45,\quad n(A)=25,\quad n(B)=16,\quad n(A\cap B)=6$$

일 때, $n(A^C\cap B^C)$를 구하시오.

문제 7 어느 고등학교 1학년 학생 30명이 동굴 탐사를 하려고 하는데, 준비물을 점검해 보니 손전등을 가져오지 않은 학생이 12명, 머리 전등을 가져오지 않은 학생이 8명이었다. 손전등과 머리 전등을 모두 가져온 학생이 15명일 때, 손전등과 머리 전등 중에서 어느 것도 가져오지 않은 학생 수를 구하시오.

탐구 & 융합

문제 해결에 유용한 집합

창의·융합 | 정보 처리

집합은 수학적 문제를 해결하는 데 필요한 간결하고 논리적인 방법을 제공해 주기 때문에 유용하게 활용될 수 있다. 다음의 몇 가지 예를 통해 그 방법을 알아보자.

자연수의 공약수

두 자연수 a와 b의 공약수는 a의 약수인 동시에 b의 약수이다. 따라서 a, b의 약수의 집합을 각각 A, B라 하면 a와 b의 공약수의 집합은 $A\cap B$이므로, a와 b의 공약수의 개수는

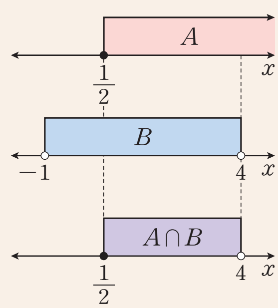
$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$

로 구할 수 있다. 또, a와 b의 최대공약수는 $A\cap B$에 속하는 가장 큰 원소임을 알 수 있다.

연립부등식의 해

연립부등식의 해를 구하는 것은, 연립부등식을 이루고 있는 각 부등식의 해의 집합을 구한 다음 이들의 교집합을 구하는 것과 같다. 예를 들어 연립부등식

$$\begin{cases} 2x-1\geq 0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-3x-4<0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$



에서 ①과 ②의 해의 집합을 각각 A와 B라 하면,

$$A=\left\{x \,\middle|\, x\geq\frac{1}{2}\right\},\quad B=\{x\mid -1<x<4\}$$

이므로 주어진 연립부등식의 해의 집합은 다음과 같다.

$$A\cap B=\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{2}\leq x<4\right\}$$

사각형 사이의 관계

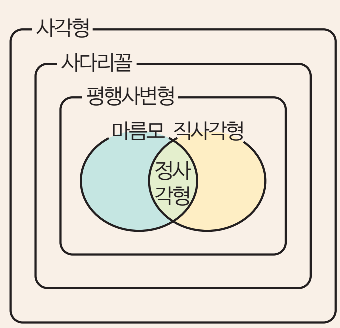
사다리꼴: 한 쌍의 대변이 평행한 사각형

평행사변형: 두 쌍의 대변이 평행한 사각형

직사각형: 네 각의 크기가 모두 같은 평행사변형

마름모: 네 변의 길이가 모두 같은 평행사변형

정사각형: 네 변의 길이가 모두 같은 직사각형



위의 여러 가지 사각형의 뜻으로부터 오른쪽 그림과 같이 벤다이어그램으로 나타내면 사각형 사이의 관계를 쉽게 확인할 수 있다.

Ⅳ-1. 집합

중단원 마무리하기

집합

(1) 어떤 기준에 따라 대상을 분명하게 정할 수 있을 때, 그 대상들의 모임을 **집합**이라고 한다.

(2) 집합을 이루는 대상 하나하나를 그 집합의 **원소**라고 한다.

집합 사이의 포함 관계

(1) 두 집합 A, B에 대하여 A의 모든 원소가 B에 속할 때, A를 B의 **부분집합**이라고 한다.

(2) 두 집합 A, B에 대하여 $A \subset B$이지만 $A \neq B$일 때, A를 B의 **진부분집합**이라고 한다.

합집합과 교집합

(1) **합집합과 교집합**

❶ **합집합**: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 또는 $x \in B\}$

❷ **교집합**: $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 그리고 $x \in B\}$

❸ $A \cap B = \varnothing$일 때, A와 B는 **서로소**라고 한다.

(2) **합집합과 교집합의 원소의 개수 사이의 관계**

두 유한집합 A, B에 대하여

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

(3) **집합의 연산 법칙**

❶ **교환법칙**: $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

❷ **결합법칙**: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

❸ **분배법칙**: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

여집합과 차집합

(1) **여집합과 차집합**

❶ **여집합**: $A^C = \{x \mid x \in U$ 그리고 $x \notin A\}$

❷ **차집합**: $A - B = \{x \mid x \in A$ 그리고 $x \notin B\}$

(2) **드모르간의 법칙**

❶ $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

❷ $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

기본

01 다음 중에서 집합인 것에는 ○표, 집합이 아닌 것에는 ×표를 하시오.

(1) 인구가 많은 도시의 모임 (　　)

(2) 우리 반에서 안경을 쓴 학생의 모임 (　　)

(3) 작은 짝수의 모임 (　　)

(4) 일의 자리 숫자가 5인 자연수의 모임 (　　)

02 다음 집합을 원소나열법으로 나타내시오.

(1) $\{x \mid x$는 14의 약수$\}$

(2) $\{x \mid x^2 - 3x - 4 = 0\}$

03 다음 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 기호 $\subset$를 사용하여 나타내시오.

(1) $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{x \mid x$는 홀수$\}$

(2) $A = \{x \mid x$는 4의 약수$\}$, $B = \{2, 4\}$

04 전체집합 $U = \{1, 2, 3, \cdots, 12\}$의 두 부분집합

$A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$,

$B = \{x \mid x$는 12의 약수$\}$

에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $A \cup B$　　(2) $A \cap B$

(3) A^C　　(4) $A - B$

표 준

05 전체집합 $U=\{a, b, c, d, e\}$의 부분집합 중에서 집합 $A=\{a, d, e\}$와 서로소인 집합을 모두 구하시오.

|서·술·형|

06 두 집합 $A=\{x|x는\ 5의\ 약수\}$, $B=\{x|x는\ 10의\ 약수\}$에 대하여

$$A\cap X=\varnothing, \quad B\cup X=B$$

를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

07 두 집합 A, B에 대하여 $n(A)=16$, $n(B)=13$, $n(A-B)=9$일 때, $n(A\cup B)$를 구하시오.

08 50 이하의 자연수 중에서 자연수 k의 배수의 집합을 A_k로 나타낼 때, 세 집합 A_2, A_3, A_5에 대하여 $n(A_5\cap(A_2\cup A_3))$을 구하시오.

09 전체집합 $U=\{x|x는\ 10\ 이하의\ 자연수\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$A\cap B^C=\{1, 5\}, \quad (A\cap B)^C=\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10\}$$

일 때, 집합 A를 구하시오.

10 전체집합 $U=\{x|x$는 24 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합

$$A=\{x|x\text{는 3의 배수}\},\quad B=\{x|x\text{는 18의 약수}\}$$

에 대하여 $n(A^C\cup B^C)$를 구하시오.

11 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여

$$(A-B)-C=A\cap(B\cup C)^C$$

가 성립함을 설명하시오.

발 전

12 어느 학교 학생 50명을 대상으로 학교 축제 홍보 포스터를 선정하기 위하여 두 가지 안 A, B에 대해 선호도 조사를 했더니 A 안을 택한 학생은 28명, B 안을 택한 학생은 35명이었다. A 안과 B 안을 모두 택한 학생 수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

|서·술·형|

13 전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$A-B=\{x|x\text{는 짝수}\},\quad (A\cup B)\cap A^C=\{x|x\text{는 홀수인 소수}\}$$

가 성립한다. 집합 A의 원소의 개수가 최대일 때, 집합 B를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

사고력+

14 100 미만의 자연수 중에서 7의 배수가 아니고, 5로 나누었을 때의 나머지가 3이 아닌 자연수의 개수를 구하시오.