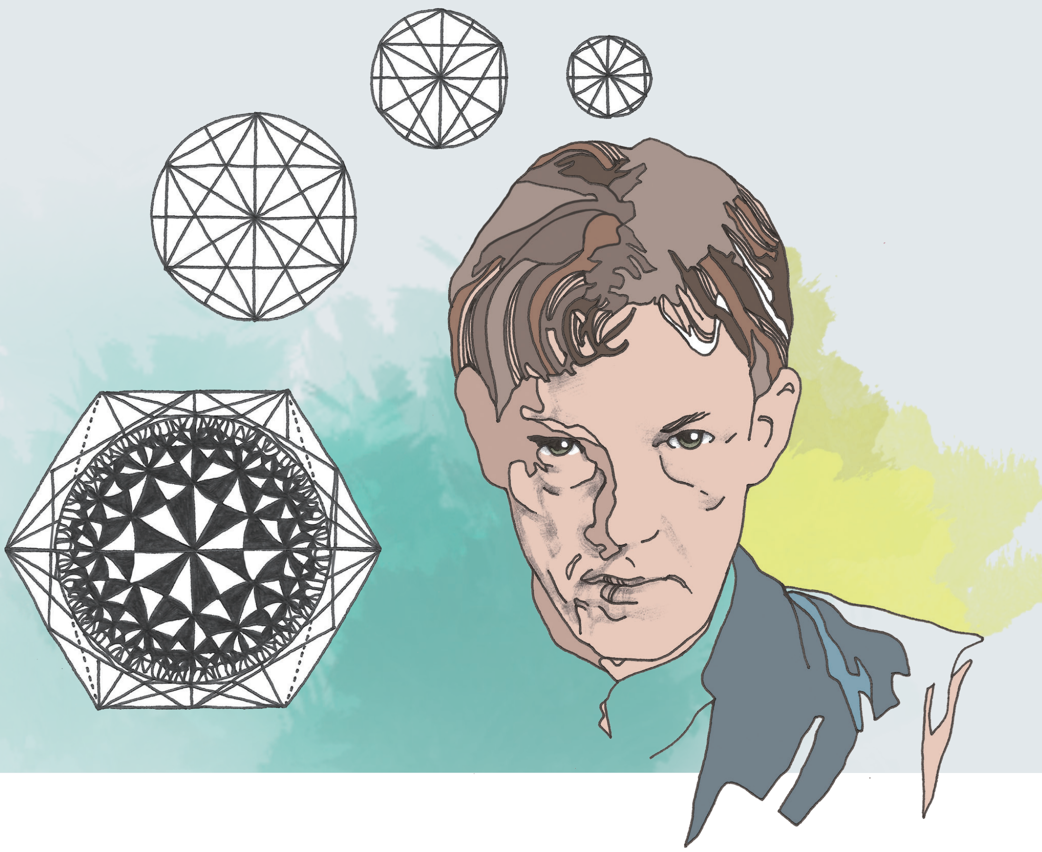
4 도형의 이동

01 평행이동

02 대칭이동

" 화가나 시인처럼 수학자도 패턴을 만들어 낸다.
수학자의 패턴이 그들의 것보다
더 영원하다고 할 수 있는 이유는 그것이 생각으로
만들어지기 때문일 것이다. "

(출처: Hardy, G. H., 『A Mathematician's Apology』)



하디(Hardy, G. H., 1877~1947)
영국의 수학자

이 글은 화가는 형상이나 색깔로, 시인은 언어로 패턴을 만들지만, 수학자는 오로지 생각만으로 패턴을 만들기 때문에 시간에 구애받지 않고 오래 지속된다는 표현이다.

01 평행이동

학습 목표

평행이동의 뜻을 이해한다.

준비하기

이차함수 $y=(x+2)^2+1$의 그래프는 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 어떻게 평행이동한 것인지 말하시오.

다가서기

같은 모양의 조각들을 서로 겹치거나 틈이 생기지 않게 늘어놓아 평면을 덮는 것을 '평면 채우기'라고 한다. 타일이나 보도블록 등은 같은 모양을 반복적으로 평행이동하여 만든 평면 채우기의 예이다.

평행이동

생각 열기 다음 그림은 도마뱀 모양의 도형을 이용하여 평면 채우기를 한 것이다.

▶ 도마뱀 ②, ③, ④, ⑤ 중 ①을 평행이동하여 겹칠 수 있는 것을 말해 보자.

좌표평면에서 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표를 구해 보자.

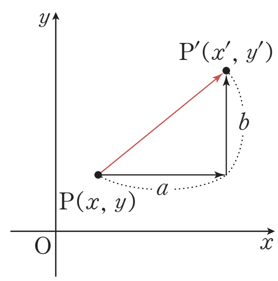
점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 평행이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면

$$x'=x+a,\quad y'=y+b$$

이다. 따라서 점 P'의 좌표는

$$(x+a,\ y+b)$$

이다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

점의 평행이동

점 $(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(x+a,\ y+b)$$

보기 점 $(1,\ -2)$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(1+2,\ -2+3)$, 즉 $(3,\ 1)$이다.

문제 1 다음 점을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표를 구하시오.

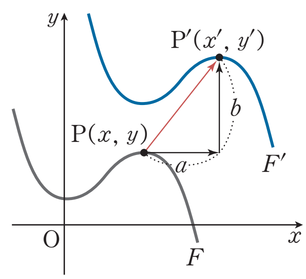
(1) $\mathrm{A}(-2,\ 5)$ (2) $\mathrm{B}(3,\ -4)$

방정식 $ax+by+c=0$은 직선을 나타내고 방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$은 원을 나타낸다. 이처럼 방정식

$$f(x,\ y)=0$$

은 일반적으로 좌표평면 위의 도형을 나타낸다.

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형 F를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형 F'의 방정식을 구해 보자.



오른쪽 그림과 같이 도형 F 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면

$$x'=x+a,\quad y'=y+b$$

이므로

$$x=x'-a,\quad y=y'-b$$

이다. 이것을 $f(x,\ y)=0$에 대입하면

$$f(x'-a,\ y'-b)=0$$

이다.

따라서 점 $\mathrm{P}'(x',\ y')$은 방정식

$$f(x-a,\ y-b)=0$$

이 나타내는 도형 위의 점이므로 이 방정식이 도형 F'의 방정식이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

도형의 평행이동

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x-a,\ y-b)=0$$

$f(x-a,\ y-b)=0$은 $f(x,\ y)=0$에서 x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$를 대입한 것과 같다.

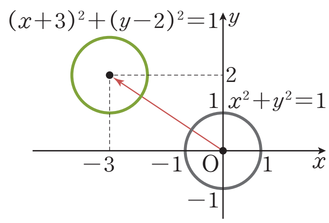
예제 1 원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 방정식을 구하시오.

풀이 $x^2+y^2=1$에서 x 대신 $x-(-3)$, y 대신 $y-2$를 대입하면

$$\{x-(-3)\}^2+(y-2)^2=1$$

즉, $(x+3)^2+(y-2)^2=1$

답 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$



문제 2 다음 방정식이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

(1) $2x-y-3=0$

(2) $(x-2)^2+(y+1)^2=6$

문제 3 원 $x^2+y^2+8x-2y-2=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 중심이 원점인 원이 되었다. 이때 상수 a, b의 값을 구하시오.

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | **창의·융합** | 의사소통 | **정보 처리** | 태도 및 실천

세 점 A$(1, 1)$, B$(-1, 1)$, C$(2, -2)$를 지나는 원의 방정식을 다음 [방법 1]과 [방법 2]와 같이 구하고, 그 결과를 비교해 보자.

[방법 1] 평행이동을 이용하여 구하는 방법

❶ 세 점 A, B, C를 각각 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 세 점 A′, B′, C′의 좌표를 구한다.
❷ 세 점 A′, B′, C′을 지나는 원의 방정식을 구한다.
❸ ❷에서 구한 원의 방정식을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 원의 방정식을 구한다.

[방법 2] 컴퓨터 프로그램을 이용하여 구하는 방법

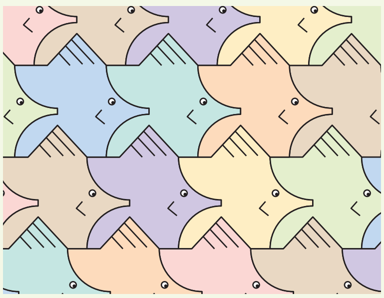
❶ 입력창에 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 입력하고, Enter를 누른다.
❷ 메뉴에서 ‘세 점을 지나는 원’을 클릭한 다음 세 점 A, B, C를 차례대로 선택한다.
❸ 대수창에 나타난 원의 방정식을 확인한다.

수학 이야기

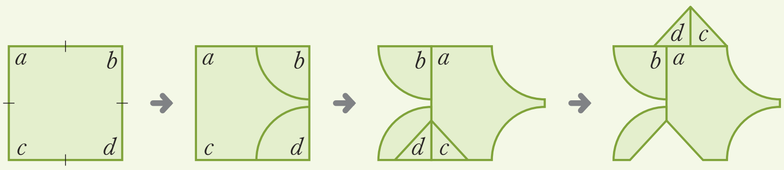
평행이동으로 만든 쪽매 맞춤

같은 모양의 조각(쪽매)을 서로 겹치거나 틈이 생기지 않게 늘어놓아 평면을 덮는 것을 '평면 채우기' 또는 '쪽매 맞춤'이라 하는데, 이는 평행이동과 같은 여러 가지 도형의 이동으로 아름다운 기하학적 패턴을 연출하는 미술의 한 분야이다.

153쪽의 **생각 열기**에서의 그림은 네덜란드의 판화가인 에스허르(Escher, M. C., 1898～1972)의 「도마뱀」이라는 작품의 일부로 동일한 도마뱀 모양의 도형을 교묘하게 맞물려서 만든 쪽매 맞춤의 한 예이다.



쪽매 맞춤을 만드는 가장 쉬운 방법은 정사각형을 이용하여 쪽매를 만드는 것이다. 예를 들어 아래 그림과 같이 정사각형 종이에서 오려낸 부분을 평행이동하여 물고기 모양의 쪽매를 만들 수 있다. 이때 만들어진 쪽매를 상하좌우로 연결하면 왼쪽 그림과 같은 쪽매 맞춤을 만들 수 있다.

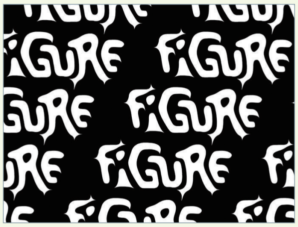


컴퓨터 프로그램을 이용하여 움직이거나 입체적인 모양의 쪽매 맞춤을 만들 수도 있다.

다음 [그림 1]은 한국계 미국인으로 비디오 게임 디자이너인 스콧 김(Kim, S., 1955～)이 만든 「Figure」라는 작품으로 움직이는 쪽매 맞춤이다. 흰색 바탕에 검은색으로 쓴 글자 [그림 2]와 검은색 바탕에 흰색으로 쓴 글자 [그림 3]을 평행이동하여 디자인한 형상이 연속적으로 움직이는 모습에서 환상적인 느낌을 받기도 한다.

[그림 1]

[그림 2]



[그림 3]

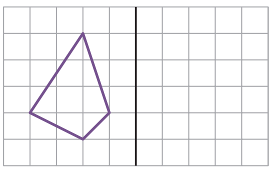
02 대칭이동

학습 목표

원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 뜻을 이해한다.

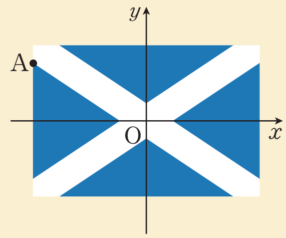
준비하기

직선 l에 대하여 다음 도형과 대칭인 도형을 그리시오.



x축, y축, 원점에 대한 대칭이동

생각 열기 오른쪽 그림은 스코틀랜드의 국기를 대칭축이 각각 x축과 y축이 되도록 좌표평면 위에 그린 것이다.



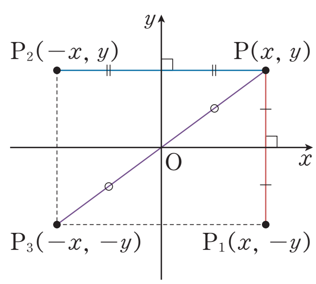
1. 점 A와 x축에 대하여 대칭인 점을 B, y축에 대하여 대칭인 점을 C, 원점에 대하여 대칭인 점을 D라 할 때, 이들을 오른쪽 그림에 나타내어 보자.
2. 점 A의 좌표가 $(-6, 3)$일 때, 세 점 B, C, D의 좌표를 각각 말해 보자.

어떤 도형을 주어진 직선 또는 점에 대하여 대칭인 도형으로 옮기는 것을 **대칭이동**이라고 한다.

오른쪽 그림에서 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 점을 P_1, P_2, P_3이라 하면 각 점은

$$\mathrm{P}_1(x, -y),$$
$$\mathrm{P}_2(-x, y),$$
$$\mathrm{P}_3(-x, -y)$$

이다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

x축, y축, 원점에 대한 점의 대칭이동

점 (x, y)를
1. x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(x, -y)$
2. y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-x, y)$
3. 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-x, -y)$

다가서기

읽는 방향이나 보는 관점에 따라 글자의 모양이 변하거나 그대로 유지되는 글자 디자인을 '앰비그램(ambigram)'이라고 한다.
다음은 'fantasy'의 앰비그램으로 대칭이동을 이용하여 디자인한 것이다.

보기　점 $(1, 2)$를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 각각

$$(1, -2),\quad (-1, 2),\quad (-1, -2)$$

문제 1　점 $(4, -6)$을 다음에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.

(1) x축　　　　(2) y축　　　　(3) 원점

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형 F를 x축에 대하여 대칭이동한 도형 F'의 방정식을 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 도형 F 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x', y')$이라 하면

$$x'=x,\quad y'=-y$$

이므로

$$x=x',\quad y=-y'$$

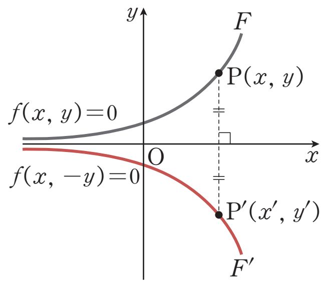
이다. 이것을 $f(x, y)=0$에 대입하면

$$f(x', -y')=0$$

이다. 따라서 점 $\mathrm{P}'(x', y')$은 방정식

$$f(x, -y)=0$$

이 나타내는 도형 위의 점이므로 이 방정식이 도형 F'의 방정식이다.

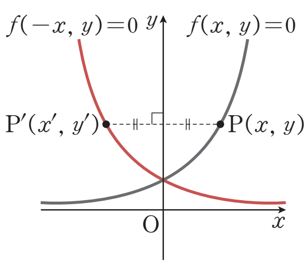


x축에 대한 대칭이동

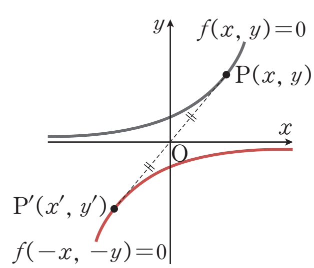
같은 방법으로 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 y축과 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 각각

$$f(-x, y)=0,\quad f(-x, -y)=0$$

임을 알 수 있다.



y축에 대한 대칭이동



원점에 대한 대칭이동

이상을 정리하면 다음과 같다.

생각 톡톡

도형을 x축에 대하여 대칭이동한 다음 y축에 대하여 대칭이동한 것은 원점에 대하여 대칭이동한 것과 같을까?

x축, y축, 원점에 대한 도형의 대칭이동

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을

❶ x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x,\ -y)=0$

❷ y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x,\ y)=0$

❸ 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x,\ -y)=0$

예제 1 원 $(x-3)^2+(y+4)^2=9$를 다음에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하시오.

(1) x축　　(2) y축　　(3) 원점

풀이 $(x-3)^2+(y+4)^2=9$에서

(1) y 대신 $-y$를 대입하면

$(x-3)^2+(-y+4)^2=9$

즉, $(x-3)^2+(y-4)^2=9$

(2) x 대신 $-x$를 대입하면

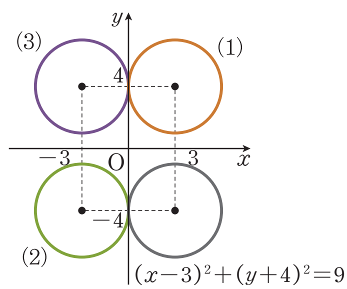
$(-x-3)^2+(y+4)^2=9$

즉, $(x+3)^2+(y+4)^2=9$

(3) x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

$(-x-3)^2+(-y+4)^2=9$

즉, $(x+3)^2+(y-4)^2=9$



답 풀이 참조

문제 2 다음 방정식이 나타내는 도형을 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 각각 구하시오.

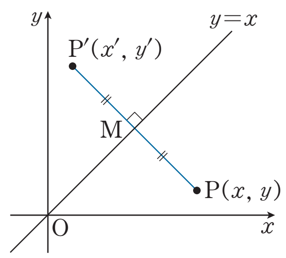
(1) $2x-y+1=0$　　(2) $x^2+y^2-4x+6y=0$

문제 3 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=4$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 다음 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하시오.

직선 $y=x$에 대한 대칭이동

다음을 통해 좌표평면에서 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 알아보자.

함께하기 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하자.



활동 1 선분 PP'의 중점 M의 좌표를 구해 보자.

활동 2 다음은 점 P'의 좌표를 구하는 과정이다. $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

활동 1에서 구한 점 M은 직선 $y=x$ 위의 점이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{\square}{2}=\frac{\square}{2}$$

$$x'-y'=-x+y \qquad \cdots\cdots ①$$

또, 직선 PP'은 직선 $y=x$에 수직이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{y'-y}{x'-x}=\square$$

$$x'+y'=x+y \qquad \cdots\cdots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $x'=\square$, $y'=\square$이다.

따라서 점 P'의 좌표는 다음과 같다.

$$(y,\ x)$$

> 두 직선 $y=mx+n$과 $y=m'x+n'$이 서로 수직이면
> $mm'=-1$
> 이다.

위의 활동으로부터 다음을 알 수 있다.

직선 $y=x$에 대한 점의 대칭이동

점 $(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(y,\ x)$$

보기 점 $(5,\ -7)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-7,\ 5)$이다.

문제 4 다음 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.

(1) $\mathrm{A}(-10,\ 7)$ (2) $\mathrm{B}(0,\ -6)$

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형 F를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형 F'의 방정식을 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 도형 F 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면

$$x'=y,\quad y'=x$$

이므로

$$x=y',\quad y=x'$$

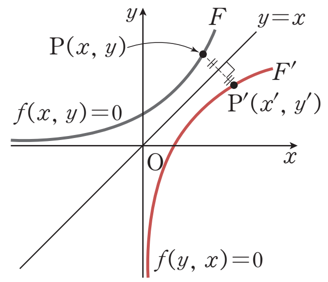
이다. 이것을 $f(x,\ y)=0$에 대입하면

$$f(y',\ x')=0$$

이다. 따라서 점 $\mathrm{P}'(x',\ y')$은 방정식

$$f(y,\ x)=0$$

이 나타내는 도형 위의 점이므로 이 방정식이 도형 F'의 방정식이다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

생각 톡톡

직선 $y=-x$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 무엇일까?

직선 $y=x$에 대한 도형의 대칭이동

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

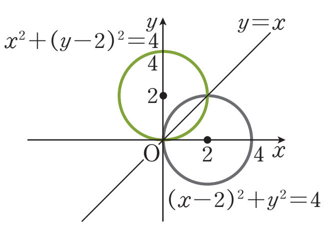
$$f(y,\ x)=0$$

예제 2 원 $(x-2)^2+y^2=4$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하시오.

풀이 $(x-2)^2+y^2=4$에서 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$$(y-2)^2+x^2=4$$

즉, $x^2+(y-2)^2=4$



답 $x^2+(y-2)^2=4$

문제 5 다음 방정식이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하시오.

(1) $3x+y+2=0$

(2) $x^2+y^2-2x+4y=0$

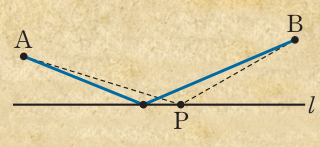
탐구 & 융합

대칭이동을 이용한 최단 거리

창의·융합 | 추론

고대 그리스의 수학자 헤론(Heron, 10?∼75?)은 『거울에 대하여』라는 책에서 다음 문제를 다루고 있다.

직선 l에 대하여 같은 방향에 두 점 A, B가 있을 때, 점 A에서 직선 l 위의 한 점 P를 거쳐 점 B까지 가는 거리, 즉 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$가 최소가 되도록 하는 점 P의 위치를 정하시오.

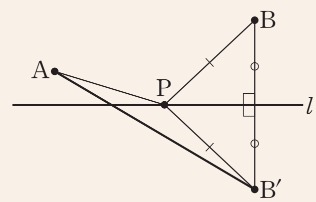


헤론은 직선 l을 거울이라 생각할 때 입사각과 반사각의 크기가 같은 원리를 이용하여, 점 A에서 비춘 빛이 거울에 반사되어 점 B를 통과하게 되는 점 P의 위치를 찾으면 된다고 설명했다.

대칭이동을 이용하여 이 원리를 설명하면, 오른쪽 그림과 같이 점 B를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 B′, 직선 l 위의 점을 P라 할 때,

$$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB'}}\geq\overline{\mathrm{AB'}}$$

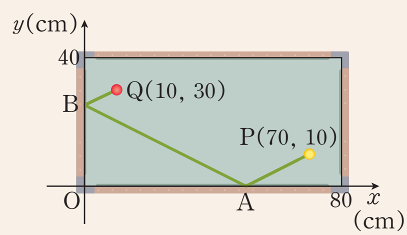
이 성립한다.



따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 선분 AB′의 길이이고, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$가 최소가 되도록 하는 점 P는 직선 l과 선분 AB′의 교점이 됨을 알 수 있다.

(출처: Römer, H., 『Theoretical of Optics: An Introduction』)

탐구 오른쪽 그림은 가로의 길이가 80 cm, 세로의 길이가 40 cm인 직사각형 모양의 미니 당구대를 두 변이 좌표축에 놓이도록 그린 것이다. 점 P(70, 10)의 위치에 놓여 있는 노란 공을 쳐서 x축과 y축에 차례대로 부딪히게 한 다음 점 Q(10, 30)의 위치에 놓인 빨간 공을 맞히려고 할 때, 다음을 구해 보자. (단, 공의 크기는 무시하며, 공이 당구대의 변에 부딪칠 때의 입사각과 반사각의 크기는 같다.)



(1) 노란 공의 이동 거리

(2) 두 점 A와 B의 좌표

III-4. 도형의 이동

중단원 마무리하기

평행이동

(1) **점의 평행이동**

점 (x, y)를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(x+a, y+b)$$

(2) **도형의 평행이동**

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x-a, y-b)=0$$

대칭이동

(1) 어떤 도형을 주어진 직선 또는 점에 대하여 대칭인 도형으로 옮기는 것을 **대칭이동**이라고 한다.

(2) **점의 대칭이동**

점 (x, y)를

❶ x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(x, -y)$$

❷ y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(-x, y)$$

❸ 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(-x, -y)$$

❹ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(y, x)$$

(3) **도형의 대칭이동**

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을

❶ x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(x, -y)=0$$

❷ y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(-x, y)=0$$

❸ 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(-x, -y)=0$$

❹ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(y, x)=0$$

기본

01 점 $(3, -4)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-2, 0)$일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

02 다음 방정식이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

(1) $x-3y+8=0$

(2) $(x-1)^2+y^2=16$

03 점 $(5, -2)$를 다음에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.

(1) x축　　(2) y축

(3) 원점　　(4) 직선 $y=x$

04 원 $(x-11)^2+(y+7)^2=9$를 다음에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하시오.

(1) x축　　(2) y축

(3) 원점　　(4) 직선 $y=x$

표준

05 두 점 A$(-3, a)$, B$(b, 2)$를 각각 A$'(3, 4)$, B$'(1, 6)$으로 옮기는 평행이동에 의하여 점 (a, b)가 옮겨지는 점의 좌표를 구하시오.

06 직선 $y=2x-3$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 원래의 직선과 일치하였다. 이때 $\frac{b}{a}$의 값을 구하시오. (단, $a\neq0$)

07 점 $(1, 5)$를 점 $(-1, a)$로 옮기는 평행이동에 의하여 원 $x^2+y^2=21$은 원

$$x^2+y^2+bx-8y+c=0$$

으로 옮겨진다. 이때 실수 a, b, c에 대하여 $a+b-c$의 값을 구하시오.

08 직선 $3x-4y-5=0$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동하였더니 원

$$(x+3)^2+(y-2)^2=1$$

에 접하였다. 이때 실수 a의 값을 구하시오.

09 점 A$(2, 1)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점을 B, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 C라 할 때, 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

10 직선 $x+3y-4=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선을 l이라 할 때, 직선 l과 원 $(x-1)^2+y^2=4$의 교점의 개수를 구하시오.

11 원 C_1: $x^2+y^2-2x+4y+4=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원을 C_2라 하자. 원 C_1 위의 임의의 점 P와 원 C_2 위의 임의의 점 Q에 대하여 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값을 구하시오.

발 전

|서·술·형|

12 포물선 $y=x^2-2x$를 포물선 $y=x^2+8x+10$으로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 l : $x-2y+1=0$은 직선 l'으로 옮겨진다. 두 직선 l과 l' 사이의 거리를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

13 원 $x^2+y^2+6x=4$를 원점에 대하여 대칭이동한 다음 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원은 x축과 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 이때 선분 AB의 길이를 구하시오.

사고력+

|서·술·형|

14 두 점 A$(8, 4)$, B$(7, 5)$와 직선 $y=x$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\text{PA}}+\overline{\text{PB}}$가 최소가 되도록 하는 점 P의 x좌표를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

하 중 상

01

두 점 $A(2, 1)$, $B(4, 5)$에서 같은 거리에 있는 직선 $y=x$ 위의 점의 좌표를 구하시오.

02

두 점 $A(a, 1)$, $B(5, a)$에 대하여 선분 AB의 길이가 최소가 되도록 하는 실수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

03

세 점 $A(-3, 5)$, $B(2, 0)$, $C(-1, k)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 $\angle C=90°$인 직각삼각형이 되도록 하는 실수 k의 값을 모두 구하시오.

04

두 점 $A(2, 4)$, $B(5, -1)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점 C와 원점 사이의 거리를 구하시오.

05

두 점 $A(-5, 5)$, $B(3, 9)$에 대하여 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점과 외분하는 점을 각각 P, Q라 할 때, 선분 PQ의 중점의 좌표는 (a, b)이다. 이때 실수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① $\frac{19}{2}$ ② 19 ③ $\frac{57}{2}$
④ 38 ⑤ $\frac{95}{2}$

06

세 점 $A(1, 3)$, $B(-3, 7)$, $C(8, 11)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 P, Q, R라 하자. 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표를 구하시오.

07

직선 $x+3y-2=0$은 직선 $-x+ay=0$에 평행하고, 직선 $ax-by+3=0$에 수직이다. 실수 a, b에 대하여 $b-a$의 값은?

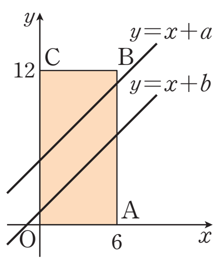
① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

08

두 점 $A(3, 7)$, $B(4, 9)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점을 지나고, 직선 AB에 수직인 직선의 방정식을 $ax+2y+b=0$이라 하자. 이때 실수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오.

09

오른쪽 그림과 같이 네 점 $O(0, 0)$, $A(6, 0)$, $B(6, 12)$, $C(0, 12)$를 꼭짓점으로 하는 직사각형 OABC가 있다. 두 직선 $y=x+a$, $y=x+b$가 직사각형 OABC의 넓이를 삼등분할 때, ab의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.)



10

점 $(2, 3)$에서 두 직선

$$x+y-1=0,\quad x-2y+a=0$$

에 이르는 거리가 같도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

11

원점에서 직선 $3x-y+2-k(x+y)=0$까지의 거리의 최댓값을 구하시오. (단, k는 실수이다.)

12

x, y에 대한 이차방정식

$$x^2+y^2+4x-6y+k+1=0$$

이 나타내는 도형이 원이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

13

원 $x^2+y^2=r^2$과 직선 $x-2y+5=0$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 현 AB의 길이가 4일 때, 원의 반지름의 길이 r의 값을 구하시오.

14

원 $x^2+y^2+7x-8y-3=0$과 직선 $-2x+y-1=0$의 두 교점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ ② $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ③ $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$
④ $(2, 1)$ ⑤ $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$

15

두 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=1$, $(x+5)^2+(y-3)^2=1$이 직선 l에 대하여 서로 대칭일 때, 직선 l의 방정식을 구하시오.

16

직선 $y=ax+b$가 이차함수 $y=2x^2$의 그래프와 원 $x^2+(y+1)^2=1$에 동시에 접할 때, 실수 a, b에 대하여 a^2+b의 값을 구하시오. (단, $a\neq0$)

17

점 $\mathrm{A}(-8, 0)$과 원 $x^2+y^2=18$ 위의 점 P를 지나는 직선 AP의 기울기의 최댓값을 구하시오.

18

직선 $2x+y-4=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 직선 $2x+y-3=0$과 일치한다. 이때 실수 n의 값은?

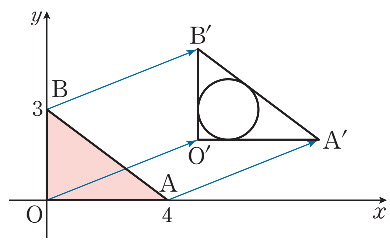
① -5　② -3　③ -1
④ 1　⑤ 3

19

다음 그림과 같이 세 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(4, 0)$, $\mathrm{B}(0, 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB를 평행이동한 삼각형 O′A′B′에 대하여 점 A′의 좌표가 $(9, 2)$일 때, 삼각형 O′A′B′의 내접원의 방정식은

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

이다. 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.



20

두 직선

$$nx+(m-2)y+5=0,$$
$$(m+1)x-(n-1)y+5=0$$

이 원점에 대하여 서로 대칭일 때, $m-5n$의 값은?

(단, m, n은 실수이다.)

① -3　② -1　③ 1
④ 3　⑤ 5

21

점 $\mathrm{A}(5, -1)$을 지나는 직선 l을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 다음 y축에 대하여 대칭이동하였더니 점 A를 지나는 직선이 되었다. 이때 직선 l의 기울기를 구하시오.

22번부터 24번까지 서술형입니다.

22

세 점 $A(4, 2)$, $B(a, 0)$, $C(b, b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에 대하여 다음에 답하시오.

(단, $a>0$, $b>0$)

(1) 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오.

(2) 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 최소일 때, 실수 a, b의 값을 구하시오.

23

세 직선 $x-y=0$, $x+y-2=0$, $5x-ky-15=0$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오.

24

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$이 x축과 두 점 $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$에서 만나고, y축과 두 점 $C(0, 2+2\sqrt{3})$, $D(0, 2-2\sqrt{3})$에서 만나도록 실수 a, b, r의 값을 정할 때, $a+b+r^2$의 값을 구하시오.

자기 평가

정답을 맞힌 문항에 ○표 하여 학습 성취도를 표시하고, 부족한 부분은 교과서의 해당 쪽을 확인하여 복습하자.

문항 번호	성취 기준	성취도	복습
01 02 03	두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	○ △ ×	111 ~ 113쪽
04 05 06	선분의 내분과 외분을 이해하고, 문제를 해결할 수 있다.	○ △ ×	114 ~ 119쪽
07 08 09 23	직선의 방정식과 두 직선의 위치 관계를 이해하고, 문제를 해결할 수 있다.	○ △ ×	125 ~ 130쪽
10 11	점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	○ △ ×	132 ~ 134쪽
12 13 14 15 16 17 24	원의 방정식과 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.	○ △ ×	139 ~ 148쪽
18 19 20 21 22	평행이동과 대칭이동의 뜻을 이해하고, 문제를 해결할 수 있다.	○ △ ×	153 ~ 161쪽

성취도 ○ 만족, △ 보통, × 미흡

수학 이야기

도형의 이동으로 만드는 띠 문양

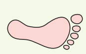
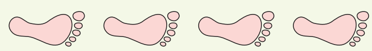
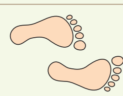
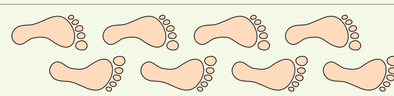
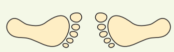
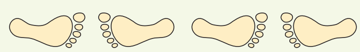
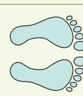
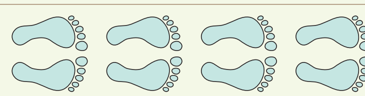
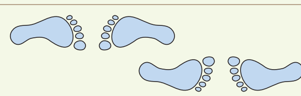
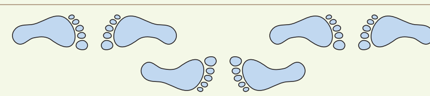
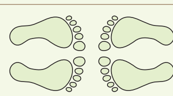
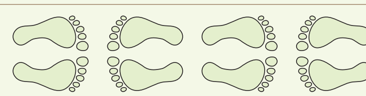
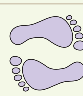
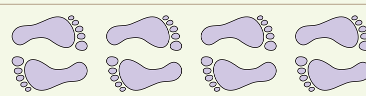
다음 [그림 1]은 우리나라 전통 공예와 건축물에서 많이 사용하는 띠 문양이고, [그림 2]는 고대 그리스에서 만든 토기의 장식으로 많이 사용했던 띠 문양이다. 이 두 가지 띠 문양의 배열 구조에는 어떤 특징이 있을까?

[그림 1]

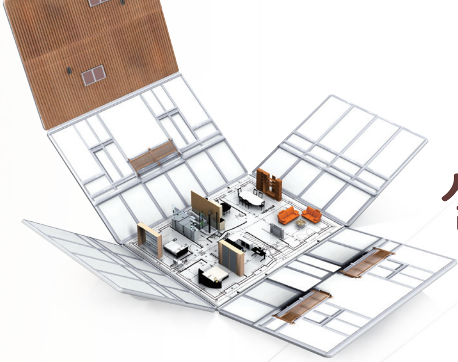
[그림 2]

띠 문양은 기준이 되는 기본 도형을 평행이동, 대칭이동, 회전이동을 결합하여 한쪽 방향으로 반복적으로 이어 가는 구조이다. 이와 같은 세 가지 도형의 이동의 특성을 이용하여 수학자들은 평면에서 그릴 수 있는 모든 띠 문양은 7가지로 분류할 수 있다는 사실을 알아냈다.

다음은 발자국 모양을 이용하여 만든 7가지 기본 도형과 띠 문양의 구조를 나타낸 것이다. 두 발로 걸어 보면서 여러 가지 띠 문양을 만든 다음 아래의 7가지 규칙과 기본 도형 중에서 어디에 해당하는지 알아보자.

규칙	기본 도형	띠 문양
평행이동		
미끄럼 대칭이동 ⇨ 평행이동		
좌우 대칭이동 ⇨ 평행이동		
상하 대칭이동 ⇨ 평행이동		
좌우 대칭이동 및 미끄럼 대칭이동 ⇨ 평행이동		
상하 대칭이동 및 좌우 대칭이동 ⇨ 평행이동		
회전이동 ⇨ 평행이동		

(출처: Conway, J. 외, 『The Symmetries of Things』)



실내 디자인과 도형의 방정식

실내 디자인은 산업 디자인의 한 분야로 주택, 사무실, 상가 건물의 내부 공간을 설계하고 장식하는 것이다. 사람의 생활 공간을 아름답고 쾌적하게 만드는 일뿐만 아니라 실내 환경과 건축에 대한 깊이 있는 이해를 통해 기능적, 구조적, 심미적인 공간을 창조할 수 있도록 하는 것이 중요하다.

실내 디자인은 실내를 하나의 양식으로 디자인하는 것부터 생활 방식, 개인의 능력과 이상에 부합하게 디자인하는 것까지 그 의미가 확장되어 오면서 요즘에는 주거뿐만 아니라 배, 항공기 등의 내부까지 폭넓게 활용되고 있다. 이와 같은 여러 분야에서 효율적인 작업을 하는 데 다양한 기하학적 원리를 활용하게 된다.

먼저 공간 배치나 설계를 위해 도면을 만드는 과정에서 평면좌표가 이용된다. 컴퓨터 설계 프로그램을 이용해 평면 위에 x축과 y축을 설정하고 거리와 크기를 나타내는데, 이렇게 설정된 좌표평면 위에 내부 공간의 위치를 좌표로 표시하여 실제 공간에서 이루어질 작업을 미리 모형화하게 된다. 이 과정에서 도면 위에 표시한 좌표를 통해 실제 작업 공간에서 가구의 크기나 위치, 주변 다른 요소들과의 거리의 차 등 여러 가지 요소를 고려한 시뮬레이션을 진행한다.

이를 통해 사람의 동선을 고려하여 설치할 가구들의 위치와 상대적인 거리, 간격 등을 설정하고 기둥, 난간 등의 실내 장식 요소가 차지할 공간을 미리 계산하여 실제 건축 시 필요한 공간을 예측할 수 있다.

다음으로 내부 시설의 효율적인 배치를 할 때 기하학적 원리를 활용할 수 있다.

예를 들어 2.4 m의 간격을 유지하면서 작동 범위가 서로 겹치지 않도록 천장에 설치할 수 있는 스프링클러의 개수를 구하는 과정에서 원의 성질을 이용할 수 있다. 또, 벽이나 기둥의 겉면을 타일로 무늬를 만들어 장식할 때는 여러 가지 도형의 이동의 성질을 이용할 수 있다.

이처럼 수학과 디자인은 쉽게 연결할 수 없는 분야처럼 보이지만 실내 디자인에서 수학의 기하학적 원리는 효율적으로 작업이 진행되도록 하는 바탕이 된다.

(출처: 커리어넷)