3 원의 방정식

> 원은 가운데에 구멍이 뚫려 있는 둥근 직선이다.
>
> (출처: Twain, M., 『English as She is Taught』)

마크 트웨인(Twain, M., 1835~1910)
미국의 소설가

이 글은 동화 『톰 소여의 모험』으로 유명한 마크 트웨인이 수필집인 『그녀가 배운 영어(English as She is Taught)』에서 어린아이들이 직선을 '두 지점 사이의 거리'로, 원을 이렇게 설명한다고 예를 들면서 한 말이다.

01 원의 방정식

학습 목표

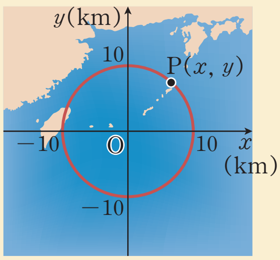
원의 방정식을 구할 수 있다.

준비 하기

중심의 좌표가 $(1,\ 1)$이고 점 $(4,\ 5)$를 지나는 원의 반지름의 길이를 구하시오.

원의 방정식

생각 열기 오른쪽 그림에서 원점 O는 태풍의 중심이고, 이로부터 반지름의 길이가 10 km 이내의 지역에 형성된 태풍의 눈 가장자리의 한 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하자.



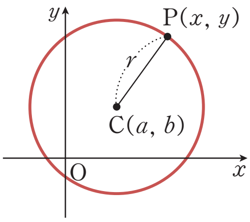
▶ $\overline{\mathrm{OP}}=10$을 이용하여 다음 식을 완성해 보자.

$$x^2+y^2=\boxed{}$$

좌표평면에서 점 $\mathrm{C}(a,\ b)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식을 구해 보자.

원 위의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 $\overline{\mathrm{CP}}=r$이므로

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$



이다. 이 식의 양변을 제곱하면 다음과 같다.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

한편, 방정식 ①을 만족시키는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 $\overline{\mathrm{CP}}=r$이므로, 점 P는 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 위에 있다.

따라서 ①이 구하는 원의 방정식이다.

특히, 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$x^2+y^2=r^2$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

다가 서기

지진이 발생하면 지진파를 이용하여 관측 지점에서 지진이 일어난 곳까지의 거리를 계산할 수 있다.

이때 세 곳의 관측 지점을 중심으로 하고, 각 지점에서 계산된 거리를 반지름으로 하는 세 원을 그려 그 교점에서 진원지를 찾을 수 있다.

원의 방정식

중심의 좌표가 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

특히, 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$x^2+y^2=r^2$$

보기 ① 중심의 좌표가 $(1,\ -2)$이고 반지름의 길이가 4인 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y+2)^2=16$$

② 중심이 원점이고 반지름의 길이가 3인 원의 방정식은

$$x^2+y^2=9$$

문제 1 다음 원의 방정식을 구하시오.

(1) 중심의 좌표가 $(0,\ 2)$이고 반지름의 길이가 2인 원

(2) 중심이 원점이고 점 $(-4,\ 3)$을 지나는 원

예제 1 두 점 $A(2,\ -1)$, $B(4,\ 5)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구하시오.

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 이은 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ 이다.

풀이 구하는 원의 중심을 $C(a,\ b)$라 하면 점 C는 $\overline{AB}$의 중점이므로

$$a=\frac{2+4}{2}=3, \quad b=\frac{-1+5}{2}=2$$

에서 $C(3,\ 2)$

또, 원의 반지름의 길이는 $\overline{AC}=\sqrt{(3-2)^2+\{2-(-1)\}^2}=\sqrt{10}$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y-2)^2=10$

답 $(x-3)^2+(y-2)^2=10$

문제 2 두 점 $A(3,\ -7)$, $B(-7,\ 1)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구하시오.

수학 이야기

태양계 행성과 원

태양계 행성은 모두 공처럼 둥근 입체이지만 우리가 볼 때는 평면도형인 원으로 보인다. 또, 이들의 궤도는 서로 겹치지 않기 때문에 행성들 사이의 관계를 연구할 때 원으로 생각해도 문제가 없다. 태양계 행성의 공전 궤도가 완전한 원은 아니지만 거의 원에 가까워서 16세기까지만 해도 행성의 공전 궤도를 원으로 생각했었다. 이러한 이유로 천문학자들은 원의 여러 가지 성질에 대한 연구를 많이 했다.

위의 그림은 지동설을 처음 주장한 코페르니쿠스(Copernicus, N., 1473～1543)와 그가 쓴 천문학책 『천계의 회전에 대하여』의 일부분이다.

(출처: Mankiewicz, R., 『The story of Mathematics』)

이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 나타내는 도형

원의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$을 전개하여 정리하면

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

이므로 원의 방정식은 x, y에 대한 이차방정식

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

또, 방정식 ①은

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4} \qquad \cdots\cdots ②$$

로 변형된다. 이때 $A^2+B^2-4C>0$이면 ①이 나타내는 도형은

중심의 좌표가 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$,

반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$

인 원이다.

원의 방정식은 x^2과 y^2의 계수가 같고 xy항이 없는 x, y에 대한 이차방정식이다.

$A^2+B^2-4C=0$이면 ②는 점 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$를 나타낸다.
또, $A^2+B^2-4C<0$이면 ②를 만족시키는 실수 x, y가 존재하지 않는다.

예제 2 방정식 $x^2+y^2-4x+8y+11=0$은 어떤 도형을 나타내는지 말하시오.

풀이 주어진 방정식을 변형하면

$$x^2-4x+4+y^2+8y+16=9$$
$$(x-2)^2+(y+4)^2=3^2$$

따라서 주어진 방정식은 중심의 좌표가 $(2,\ -4)$, 반지름의 길이가 3인 원을 나타낸다.

답 중심의 좌표가 $(2,\ -4)$이고 반지름의 길이가 3인 원

문제 3 다음 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하시오.

(1) $x^2+y^2-4x=0$ (2) $x^2+y^2-2x-8y-10=0$

탐구 **문제 4** 원의 방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$에 대하여 다음에 답하시오.

(1) $A=0$일 때, 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하시오.

(2) 중심이 x축 위에 있을 조건을 말하시오.

예제 3 세 점 O$(0, 0)$, P$(2, 2)$, Q$(-4, 2)$를 지나는 원의 방정식을 구하시오.

세 점 A, B, C를 지나는 원은 삼각형 ABC의 외접원이다.

풀이 구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하자.

이 원이 세 점 O$(0, 0)$, P$(2, 2)$, Q$(-4, 2)$를 지나므로

$$C=0,\quad 8+2A+2B+C=0,\quad 20-4A+2B+C=0$$

$C=0$을 대입한 후 연립하여 풀면

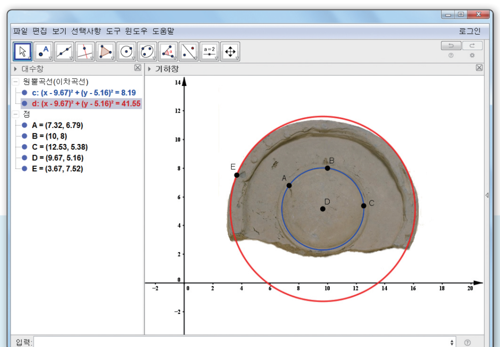
$$A=2,\ B=-6$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2+y^2+2x-6y=0$$

답 $x^2+y^2+2x-6y=0$

문제 5 세 점 O$(0, 0)$, P$(3, 0)$, Q$(2, 1)$을 지나는 원의 방정식을 구하시오.



공학적 도구

수막새 복원하기

정보 처리 | 태도 및 실천

컴퓨터 프로그램을 이용하여 지붕의 기왓골 끝에 사용되었던 수막새의 가장자리 동심원을 복원해 보자.

1. 편집 메뉴의 '이미지 불러오기'를 이용하여 수막새 그림 파일을 불러온다.
2. 수막새의 안쪽 원 위에 세 점 A, B, C를 잡고, 메뉴에서 '세 점을 지나는 원'을 클릭한 다음 세 점 A, B, C를 차례대로 선택한다.
3. 대수창에 나타난 ②에서 그린 원의 방정식에서 중심의 좌표를 구한 다음 이를 입력창에 입력하고, Enter 를 눌러 점 D를 잡는다.
4. 수막새의 바깥쪽 원에 한 점 E를 잡고, 메뉴에서 '중심이 있고 한 점을 지나는 원'을 클릭한 다음 ③에서 구한 원의 중심인 점 D와 점 E를 차례대로 선택한다.

탐구 & 융합

아폴로니오스의 원

추론 | 창의·융합

고대 그리스의 수학자이자 천문학자인 아폴로니오스(Apollonios, B.C. 262?~B.C. 190?)는 다음과 같은 사실을 발견했다.

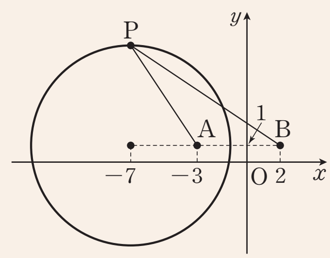
두 점 A, B에 대하여

$$\overline{PA}:\overline{PB}=m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$$

인 점 P가 그리는 도형은, 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점과 $m:n$으로 외분하는 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이 된다.

(출처: James, H. 외, 『Introduction to the theory of analytic functions』)

위의 원을 '아폴로니오스의 원'이라 하는데, 두 점 $A(-3,\ 1)$과 $B(2,\ 1)$에서 거리의 비가 $2:3$으로 일정한 점 P가 그리는 도형을 구하는 과정을 통하여 위의 사실을 확인해 보자.



$\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$에서 $\quad 3\overline{PA}=2\overline{PB}$

양변을 제곱하면 $\quad 9\overline{PA}^2=4\overline{PB}^2$

이때 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$\overline{PA}^2=(x+3)^2+(y-1)^2,$$
$$\overline{PB}^2=(x-2)^2+(y-1)^2$$

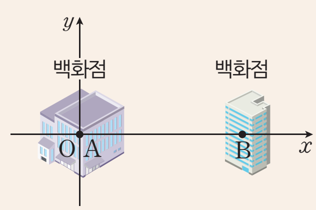
이므로 $\quad 9\{(x+3)^2+(y-1)^2\}=4\{(x-2)^2+(y-1)^2\}$

이 식을 정리하면 $\quad (x+7)^2+(y-1)^2=36 \quad \cdots\cdots ①$

따라서 점 P가 그리는 도형은 중심의 좌표가 $(-7,\ 1)$이고 반지름의 길이가 6인 원이다.

이때 원 ①은 $\overline{AB}$를 $2:3$으로 내분하는 점 $(-1,\ 1)$과 $2:3$으로 외분하는 점 $(-13,\ 1)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원임을 알 수 있다.

탐구 거리가 10 km 떨어진 두 백화점 A, B에서 물건을 구매하고 배송 서비스를 받는데, 1 km당 배송 비용은 A 백화점이 B 백화점보다 1.5배 비싸다고 한다. 두 백화점으로부터 배송 비용이 동일한 지점은 어느 지역인지 구해 보자.



02 원과 직선의 위치 관계

학습 목표

좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.

준비하기

이차방정식 $x^2-2ax+4=0$이 다음과 같은 근을 갖도록 실수 a의 값 또는 범위를 정하시오.

(1) 서로 다른 두 실근

(2) 중근

(3) 서로 다른 두 허근

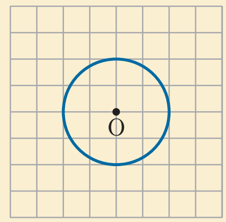
다가서기

현대 추상 미술의 아버지로 불리는 칸딘스키(Kandinsky, W., 1866~1944)는 점, 선, 면을 소재로 하는 기하학적 추상화를 많이 그렸다. 칸딘스키의 작품 중 하나인 「원 속의 원(Circles in a Circle)」에는 강렬한 색채의 원과 직선이 아름다운 조화를 이룬다.

「원 속의 원」

원과 직선의 위치 관계

생각 열기 오른쪽 그림은 모눈종이 위에 반지름의 길이가 2인 원을 그린 것이다.



❶ 원의 중심 O에서의 거리가 1, 2, 3인 직선을 각각 하나씩 그려 보자.

❷ 주어진 원과 ❶에서 그린 세 직선의 교점의 개수를 각각 말해 보자.

위의 **생각 열기**에서 알 수 있듯이 원과 직선의 위치 관계는 서로 다른 두 점에서 만나거나, 접하거나, 만나지 않는 세 가지 경우가 있다.

이제 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 알아보자.

원과 직선의 방정식을 각각

$$x^2+y^2=r^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$y=mx+n \qquad \cdots\cdots ②$$

이라 할 때, ②를 ①에 대입하면

$$x^2+(mx+n)^2=r^2$$

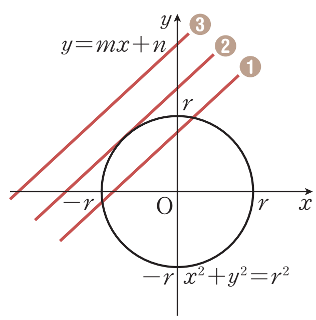
이고, 이 식을 정리하면

$$(m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

이다.

이때 원과 직선의 교점의 개수는 이차방정식 ③의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

따라서 이차방정식 ③의 판별식을 D라 하면, D의 값의 부호에 따라 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.



❶ $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.

❷ $D=0$이면 한 점에서 만난다.(접한다.)

❸ $D<0$이면 만나지 않는다.

예제 1 원 $x^2+y^2+4x=13$과 직선 $y=x+3$의 위치 관계를 말하시오.

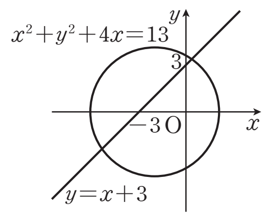
풀이 $y=x+3$을 $x^2+y^2+4x=13$에 대입하여 정리하면

$$x^2+5x-2=0$$

이 이차방정식의 판별식 D가

$$D=5^2-4\times1\times(-2)=33>0$$

이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.



답 서로 다른 두 점에서 만난다.

문제 1 다음 원과 직선의 위치 관계를 말하시오.

(1) $x^2+y^2=8,\ x+y=4$ (2) $x^2+y^2-6y=0,\ y=2x-6$

예제 2 원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 실수 k의 값의 범위를 정하시오.

풀이 1 $y=x+k$를 $x^2+y^2=4$에 대입하여 정리하면

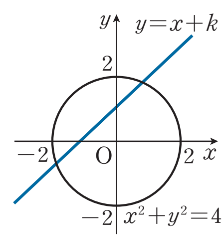
$$2x^2+2kx+k^2-4=0$$

이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식 D가 $D>0$이어야 하므로

$$D=(2k)^2-4\times2\times(k^2-4)=-4k^2+32>0$$

에서 $k^2<8$

따라서 $-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$



풀이 2 원의 중심인 원점과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2보다 작아야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<2,\qquad |k|<2\sqrt{2},\qquad -2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$$

답 $-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이를 r, 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d라 할 때,
1. $d<r$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
2. $d=r$이면 한 점에서 만난다. (접한다.)
3. $d>r$이면 만나지 않는다.

문제 2 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=-2x+k$의 위치 관계가 다음과 같도록 실수 k의 값 또는 범위를 정하시오.

(1) 접한다. (2) 만나지 않는다.

원의 접선의 방정식

다음을 통해 중심이 원점인 원에 접하고 기울기가 주어진 직선의 방정식을 알아보자.

함께하기 다음은 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

구하는 직선의 방정식을

$$y=mx+n$$

이라 하고, 이 식을 $x^2+y^2=r^2$에 대입하여 정리하면

$$\boxed{}x^2+2mnx+n^2-r^2=0$$

이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(2mn)^2-4\times\boxed{}\times(n^2-r^2)$$
$$=4\{r^2(m^2+1)-n^2\}$$

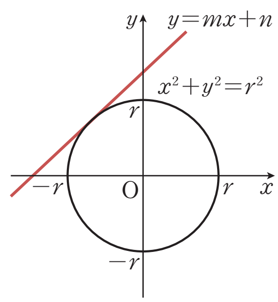
이다.

원과 직선이 접하면 $D=0$, 즉 $4\{r^2(m^2+1)-n^2\}=0$이므로

$$n^2=r^2(m^2+1),\quad n=\pm\boxed{}$$

이다. 따라서 구하는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=mx\pm\boxed{}$$



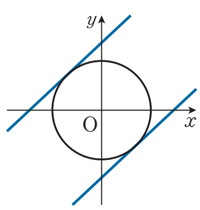
위의 활동으로부터 다음을 알 수 있다.

기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

한 원에서 기울기가 같은 접선은 두 개이다.



보기 원 $x^2+y^2=9$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y=2x\pm3\sqrt{2^2+1},\ 즉\ y=2x\pm3\sqrt{5}$$

문제 3 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 원 $x^2+y^2-6=0$에 접하고 기울기가 1인 직선

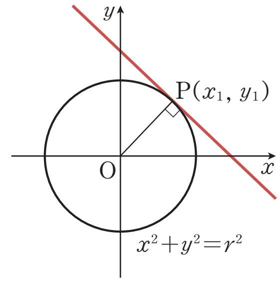
(2) 원 $x^2+y^2=4$에 접하고 직선 $x-3y+2=0$에 수직인 직선

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

> $x_1 \neq 0$, $y_1 \neq 0$이면 점 P는 좌표축 위에 있지 않은 점이다.

(i) $x_1 \neq 0$, $y_1 \neq 0$일 때,

점 P에서의 접선은 직선 OP와 수직이고 직선 OP의 기울기는 $\dfrac{y_1}{x_1}$이므로, 접선의 기울기는 $-\dfrac{x_1}{y_1}$이다.



따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

이고, 이 식을 정리하면

$$x_1x+y_1y={x_1}^2+{y_1}^2$$

이다. 여기서 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$은 원 위의 점이므로 ${x_1}^2+{y_1}^2=r^2$이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$x_1x+y_1y=r^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

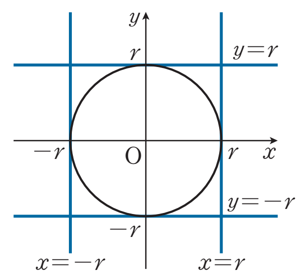
> $x_1=0$이면 점 P는 y축 위의 점이고, $y_1=0$이면 점 P는 x축 위의 점이다.
> 즉, 점 P의 좌표는 $x_1=0$일 때 $(0, \pm r)$이고, $y_1=0$일 때 $(\pm r, 0)$이다.

(ii) $x_1=0$ 또는 $y_1=0$일 때,

점 P는 좌표축 위의 점이므로 접선의 방정식은

$$y=\pm r \text{ 또는 } x=\pm r$$

이다. 이 경우에도 ①이 성립한다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

원 위의 점에서의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=r^2$$

보기 원 $x^2+y^2=10$에 대하여

① 점 $(1, 3)$에서의 접선의 방정식은 $1\times x+3\times y=10$, 즉 $x+3y=10$

② 점 $(\sqrt{10}, 0)$에서의 접선의 방정식은 $\sqrt{10}\times x+0\times y=10$, 즉 $x=\sqrt{10}$

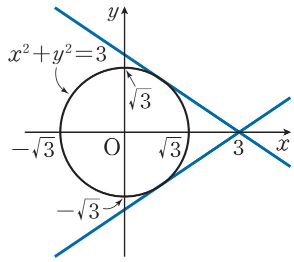
문제 4 다음 접선의 방정식을 구하시오.

(1) 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점 $(2, -2\sqrt{3})$에서의 접선

(2) 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 $(0, 3)$에서의 접선

원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선의 방정식을 구해 보자.

예제 3 점 $(3,\ 0)$에서 원 $x^2+y^2=3$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.



풀이 접점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=3$$

이 직선이 점 $(3,\ 0)$을 지나므로

$$3x_1=3, \qquad x_1=1$$

또, 점 P는 원 위의 점이므로

$$x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}=3 \qquad \cdots\cdots ①$$

$x_1=1$을 ①에 대입하면

$$1^2+y_1^{\ 2}=3, \qquad y_1=\pm\sqrt{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$x+\sqrt{2}y=3, \quad x-\sqrt{2}y=3$$

답 $x+\sqrt{2}y=3,\ x-\sqrt{2}y=3$

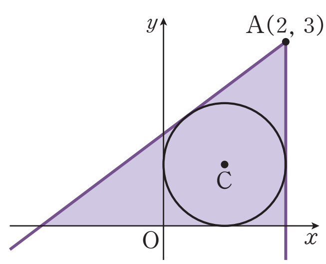
생각 톡톡
원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선은 몇 개일까?

문제 5 점 $(2,\ -4)$에서 원 $x^2+y^2=2$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 x축과 y축에 동시에 접하고 중심이 제1사분면에 속하며 반지름의 길이가 1인 원 C가 놓여 있다. 이때 원 밖의 한 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$에서 원 C에 그은 두 접선과 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하려고 한다.



활동 ① 원 C의 방정식을 구해 보자.

활동 ② 점 A에서 원 C에 그은 두 접선의 방정식을 구해 보자.

활동 ③ 활동 ②에서 구한 두 접선의 x절편을 구해 보자.

활동 ④ 점 A에서 원 C에 그은 두 접선과 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구해 보자.

III-3. 원의 방정식

중단원 마무리하기

원의 방정식

(1) 중심의 좌표가 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

특히, 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$x^2+y^2=r^2$$

(2) $x,\ y$에 대한 이차방정식

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0\ (A^2+B^2-4C>0)$$

이 나타내는 도형은

중심의 좌표가 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$,

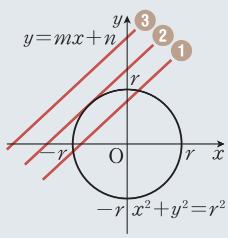
반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$

인 원이다.

원과 직선의 위치 관계

원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$에 직선의 방정식 $y=mx+n$을 대입하여 얻은 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면, D의 값의 부호에 따라 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

❶ $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
❷ $D=0$이면 한 점에서 만난다. (접한다.)
❸ $D<0$이면 만나지 않는다.



원의 접선의 방정식

(1) 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

(2) 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=r^2$$

기 본

01 다음 원의 방정식을 구하시오.

(1) 중심의 좌표가 $(2,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원

(2) 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$, $\mathrm{B}(4,\ 2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원

(3) 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{P}(0,\ 4)$, $\mathrm{Q}(3,\ 3)$을 지나는 원

02 원 $x^2+y^2+8x-6y=0$의 중심의 좌표는 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이는 r이다. 이때 $a+b+r$의 값을 구하시오.

03 원 $x^2+y^2=8$과 직선 $y=2x+k$의 위치 관계가 다음과 같도록 실수 k의 값 또는 범위를 정하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 접한다.

(3) 만나지 않는다.

04 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(-1,\ 3)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

표 준

05 x, y에 대한 이차방정식 $x^2+y^2-6x+4y+2k=0$이 나타내는 도형이 반지름의 길이가 2 이상인 원이 되도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오.

06 두 점 $\mathrm{A}(2, 1)$, $\mathrm{B}(-4, -2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}}=2 : 1$을 만족시키는 점 P가 그리는 도형의 방정식을 구하시오.

07 중심이 직선 $y=x-2$ 위에 있는 원이 y축에 접하고 점 $(3, -2)$를 지날 때, 이 원의 반지름의 길이를 구하시오.

08 원 $x^2+y^2+2ax-4ay+8a^2+6a-9=0$의 넓이가 최대가 되도록 이 원의 중심의 좌표를 정하시오. (단, a는 실수이다.)

09 x축과 y축에 동시에 접하고 점 $(-2, -1)$을 지나는 원의 방정식을 모두 구하시오.

10 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선이 원 $x^2+y^2+6x-4y+a=0$과 접할 때, 실수 a의 값을 구하시오.

|서·술·형|

11 점 $(4, 3)$에서 원 $x^2+y^2=9$에 그은 두 접선 중에서 기울기가 양수인 접선의 기울기를 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

발 전

12 원 $x^2+y^2-4x+2y+k=0$이 y축과 만나는 두 점을 A, B라 할 때, $\overline{AB}=6$을 만족시키는 상수 k의 값을 구하시오.

사고력+

13 원 $x^2+y^2=4$ 위를 움직이는 점 A와 직선 $y=x-4\sqrt{2}$ 위를 움직이는 서로 다른 두 점 B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC를 만들 때, 정삼각형이 되는 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

|서·술·형|

14 직선 $y=mx+n$이 두 원 $x^2+y^2=9$, $(x+3)^2+y^2=4$에 동시에 접할 때, 두 실수 m, n에 대하여 $32mn$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.