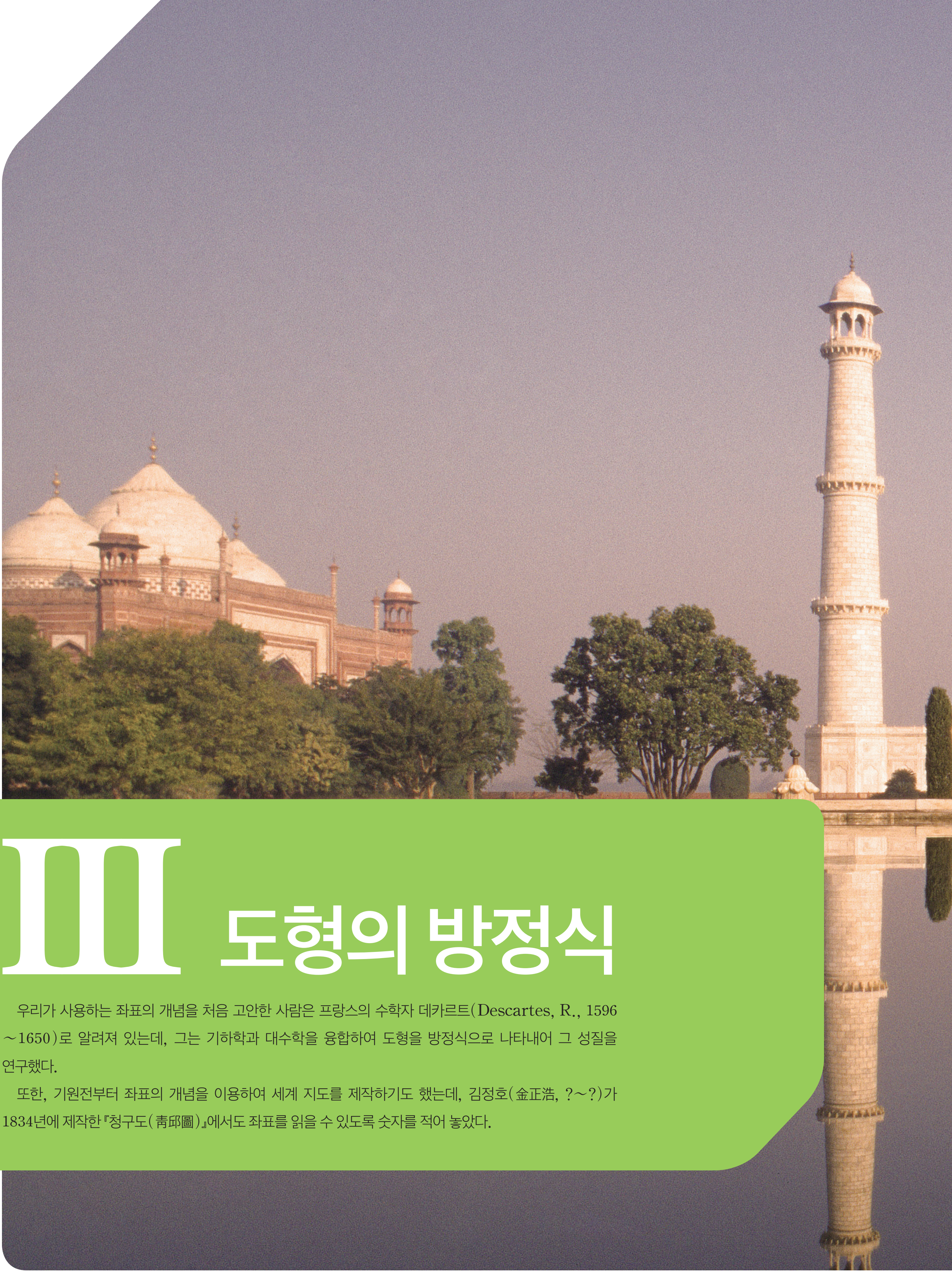


III 도형의 방정식

우리가 사용하는 좌표의 개념을 처음 고안한 사람은 프랑스의 수학자 데카르트(Descartes, R., 1596~1650)로 알려져 있는데, 그는 기하학과 대수학을 융합하여 도형을 방정식으로 나타내어 그 성질을 연구했다.

또한, 기원전부터 좌표의 개념을 이용하여 세계 지도를 제작하기도 했는데, 김정호(金正浩, ?~?)가 1834년에 제작한 『청구도(靑邱圖)』에서도 좌표를 읽을 수 있도록 숫자를 적어 놓았다.

아름다운 건축물에서 도형의 이동을 찾아볼 수 있다.

이 단원에서는

좌표평면에서 두 점 사이의 거리를 구해 보고,
선분의 내분과 외분을 이해하며, 직선과 원의 방정식,
평행이동과 대칭이동을 알아본다.

1 평면좌표

“자연 현상을 설명할 수 있는 다른 종류의
수학을 연구하기 위해 …
나는 추상 기하학만을 이용하려는
생각을 포기하기로 결심했다.”

(출처: 데이비드 애치슨, 『수학 세상 가볍게 읽기』)

데카르트(Descartes, R., 1596~1650)
프랑스의 수학자, 철학자

이 글은 데카르트가 기하학과 대수학 사이의 연관성을 발견하면서 한 말인데, 기하 문제를 대수 문제로, 대수 문제를 기하 문제로 바꿔서 쉽게 해결하기 위해 좌표계의 개념을 『방법서설』이라는 책의 부록에 처음 소개했다.

01 두 점 사이의 거리

학습 목표

두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

준비하기

삼각형 ABC에서 $\angle A=90°$이고, $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=12$일 때, $\overline{BC}$의 길이를 구하시오.

다가서기

오래전부터 탐험이나 장거리 항해를 목적으로 지도를 제작할 때 날줄과 씨줄을 서로 수직으로 그어서 좌표의 원리를 이용했다.
좌표를 이용하면 점의 위치를 쉽게 나타낼 수 있을 뿐만 아니라 두 점 사이의 거리를 직접 재지 않고도 계산할 수 있다.

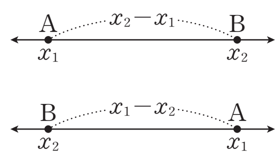
두 점 사이의 거리

생각 열기 오른쪽 그림은 어느 지역의 지도에 1 km 간격으로 모눈을 그려 넣은 것이다.

❶ 시청과 병원, 병원과 학교 사이의 직선거리를 각각 구해 보자.

❷ 피타고라스 정리를 이용하여 시청과 학교 사이의 직선거리를 구해 보자.

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$ 사이의 거리 $\overline{AB}$는



$$x_1\le x_2 \text{일 때,} \quad \overline{AB}=x_2-x_1$$
$$x_1>x_2 \text{일 때,} \quad \overline{AB}=x_1-x_2$$

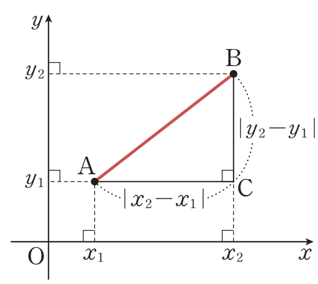
이므로 $\overline{AB}=|x_2-x_1|$이다.

문제 1 다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.

(1) $A(7)$, $B(-3)$ (2) $A(-1)$, $B(4)$

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리를 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선과 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선의 교점을 C라 하면



$$\overline{AC}=|x_2-x_1|,$$
$$\overline{BC}=|y_2-y_1|$$

이다. 이때 삼각형 ABC는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여 다음이 성립한다.

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

따라서 두 점 A, B 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

특히, 원점 O와 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

특히, 원점 O와 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}$$

보기 두 점 $\mathrm{A}(-1, 1)$, $\mathrm{B}(3, -2)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(-2-1)^2}=\sqrt{25}=5$$

문제 2 다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.

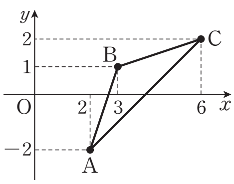
(1) $\mathrm{A}(2, 4)$, $\mathrm{B}(-2, 2)$

(2) $\mathrm{A}(-4, -1)$, $\mathrm{B}(2, -3)$

(3) $\mathrm{A}(-3, -4)$, $\mathrm{B}(0, -4)$

(4) $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(-3, 4)$

예제 1 세 점 $\mathrm{A}(2, -2)$, $\mathrm{B}(3, 1)$, $\mathrm{C}(6, 2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하시오.



풀이 △ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-2)^2+\{1-(-2)\}^2}=\sqrt{10}$$

$$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(6-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$$

$$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(2-6)^2+(-2-2)^2}=4\sqrt{2}$$

따라서 △ABC는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이다.

답 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형

문제 3 세 점 $\mathrm{A}(3, 8)$, $\mathrm{B}(1, 0)$, $\mathrm{C}(-1, 9)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하시오.

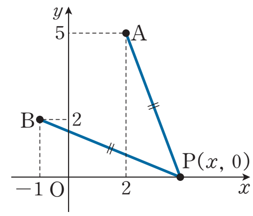
예제 2 두 점 $A(2, 5)$, $B(-1, 2)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점의 좌표를 구하시오.

풀이 구하는 점을 $P(x, 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서

$$(x-2)^2+(0-5)^2=\{x-(-1)\}^2+(0-2)^2$$
$$x^2-4x+29=x^2+2x+5$$
$$6x=24, \quad x=4$$

따라서 구하는 좌표는 $(4, 0)$



답 $(4, 0)$

생각 톡톡

y축 위에 있는 점의 x좌표는 무엇일까?

문제 4 두 점 $A(3, -4)$, $B(-2, 1)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점의 좌표를 구하시오.

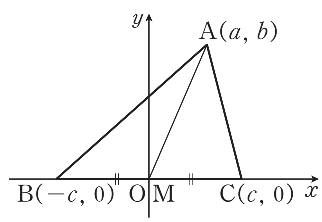
탐구

문제 5 다음은 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때,

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

이 성립함을 설명한 것이다.

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 M을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 M은 원점이 된다.



이때 삼각형 ABC의 세 꼭짓점을

$$A(a, b),\ B(-c, 0),\ C(c, 0)$$

이라 하면

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}$$
$$=2(\boxed{\text{(가)}}) \quad \cdots\cdots ①$$

또, $\overline{AM}^2=\boxed{\text{(나)}}$, $\overline{BM}^2=c^2$이므로

$$2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)=2(\boxed{\text{(가)}}) \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②에서 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이 성립한다.

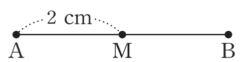
(1) 위의 (가), (나)에 알맞은 것을 구하시오.

(2) $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CA}=7$인 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, 위의 등식을 이용하여 $\overline{AM}$의 길이를 구하시오.

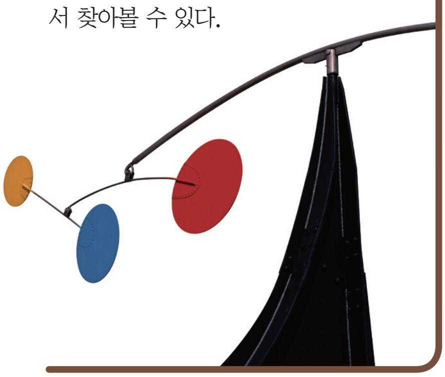
02 선분의 내분점과 외분점

학습 목표
선분의 내분과 외분을 이해하고, 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.

준비하기
다음 그림에서 $\overline{AB}$의 중점이 M일 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하시오.



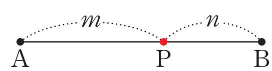
다가서기
모빌의 양 끝에 무게가 서로 같은 물체를 매달면 균형점이 한가운데이지만 무게가 서로 다른 물체를 매달면 무게에 따라 균형점의 위치가 달라진다.
이와 같이 선분 위의 양 끝 점과 그 선분 위의 또 다른 점 사이의 거리의 비를 이용하는 경우를 우리 주변에서 찾아볼 수 있다.



수직선 위의 선분의 내분점과 외분점

생각 열기 여자 허들 100 m 경기에 설치되는 허들은 10개인데, 출발점에서 첫 번째 허들까지의 거리는 13 m이고, 각 허들 사이의 거리는 8.5 m로 일정하다.

▶ 출발점을 A, 세 번째 허들이 놓인 지점을 P, 도착점을 B로 나타낼 때, $\overline{AP}:\overline{PB}$를 구해 보자.



선분 AB 위의 점 P에 대하여

$$\overline{AP}:\overline{PB}=m:n\ (m>0,\ n>0)$$

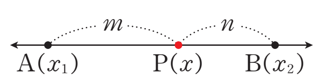
일 때, 점 P는 선분 AB를 $m:n$으로 **내분**한다고 하며, 점 P를 선분 AB의 내분점이라고 한다.

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표 x를 구해 보자.

(ⅰ) $x_1<x_2$일 때, $x_1<x<x_2$이므로

$$\overline{AP}=x-x_1,\quad \overline{PB}=x_2-x$$

이다. $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$에서



$$(x-x_1):(x_2-x)=m:n$$

이므로 다음이 성립한다.

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

(ⅱ) $x_1>x_2$일 때도 같은 방법으로 위의 결과를 얻는다.

따라서 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P의 좌표 x는 다음과 같다.

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

생각톡톡
선분의 중점은 그 선분을 어떻게 내분할까?

특히, $m=n$일 때 점 P는 선분 AB의 중점이 된다. 따라서 중점 M의 좌표 x는

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

수직선 위의 선분의 내분점

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

특히, 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $\dfrac{x_1+x_2}{2}$

보기 두 점 $A(-2)$, $B(5)$에 대하여 선분 AB를 $4:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\frac{4\times5+3\times(-2)}{4+3}=2$$

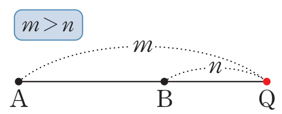
문제 1 두 점 $A(-8)$, $B(2)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

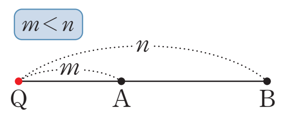
(1) 선분 AB를 $3:7$로 내분하는 점 (2) 선분 AB의 중점

선분 AB의 연장선 위의 점 Q에 대하여

$$\overline{AQ}:\overline{BQ}=m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$$

일 때, 점 Q는 선분 AB를 $m:n$으로 **외분**한다고 하며, 점 Q를 선분 AB의 외분점이라고 한다.





선분의 외분점은 그 선분의 연장선 위에 있다.

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표 x를 구해 보자.

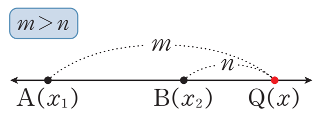
(i) $x_1<x_2$일 때,

① $m>n$이면 $x_1<x_2<x$이므로

$\overline{AQ}:\overline{BQ}=m:n$에서

$$(x-x_1):(x-x_2)=m:n$$

이다.



$m>n$이면
$\overline{AQ}=x-x_1$,
$\overline{BQ}=x-x_2$

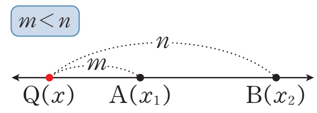
> $m<n$이면
> $\overline{\mathrm{AQ}}=x_1-x$,
> $\overline{\mathrm{BQ}}=x_2-x$

② $m<n$이면 $x<x_1<x_2$이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{BQ}}=m:n$에서

$$(x_1-x):(x_2-x)=m:n$$

이다.



①, ②에서 다음이 성립한다.

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

(ii) $x_1>x_2$일 때도 같은 방법으로 위의 결과를 얻는다.

따라서 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 Q의 좌표 x는 다음과 같다.

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

수직선 위의 선분의 외분점

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

> $m=n$일 때, 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점은 존재하지 않는다.

보기 두 점 $\mathrm{A}(-2)$, $\mathrm{B}(3)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표는

$$\frac{2\times3-1\times(-2)}{2-1}=8$$

문제 2 두 점 $\mathrm{A}(-4)$, $\mathrm{B}(6)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

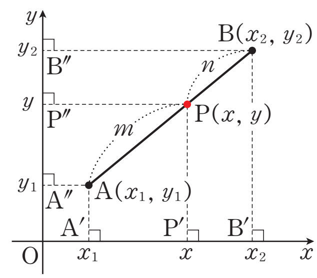
(1) 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점

(2) 선분 AB를 $1:3$으로 외분하는 점

탐구 **문제 3** 수직선 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점을 C라 하자. 이때 점 B는 선분 AC를 어떻게 내분하는지 설명하시오. (단, $m>n$)

좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점

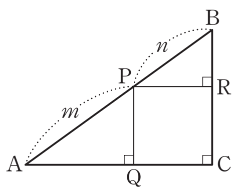
다음을 통해 좌표평면 위의 선분을 내분하는 점의 좌표를 알아보자.



함께하기 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$에 대하여 선분 AB를

$$m : n\ (m>0,\ n>0)$$

으로 내분하는 점을 $P(x,\ y)$라 하자.



$\overline{AQ} : \overline{QC} = m : n$
$\overline{CR} : \overline{RB} = m : n$

활동 ① 세 점 A, P, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A', P', B'이라 하면 다음이 성립한다.

$$\overline{A'P'} : \overline{P'B'} = \overline{AP} : \square = m : \square$$

위의 □ 안에 알맞은 것을 써넣고, 점 P의 x좌표를 구해 보자.

활동 ② 세 점 A, P, B에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 A'', P'', B''이라 하면 다음이 성립한다.

$$\overline{A''P''} : \overline{P''B''} = \overline{AP} : \square = m : \square$$

위의 □ 안에 알맞은 것을 써넣고, 점 P의 y좌표를 구해 보자.

활동 ③ 활동 ①과 활동 ②의 결과를 이용하여 점 P의 좌표를 구해 보자.

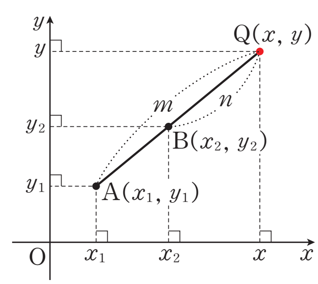
위의 활동으로부터 선분 AB를 $m : n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

특히, 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

이다.



마찬가지 방법으로 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$에 대하여 선분 AB를

$$m : n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$$

으로 외분하는 점 Q의 좌표를 구하면 다음과 같다.

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n(m>0,\ n>0)$으로

❶ 내분하는 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

❷ 외분하는 점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$ (단, $m\neq n$)

특히, 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

예제 1 두 점 $A(-2, 2)$, $B(4, 8)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점

(2) 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점

(3) 선분 AB의 중점

풀이 (1) 구하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\frac{2\times4+1\times(-2)}{2+1}=2,\quad y=\frac{2\times8+1\times2}{2+1}=6$$

따라서 구하는 좌표는 $(2, 6)$

(2) 구하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\frac{1\times4-2\times(-2)}{1-2}=-8,\quad y=\frac{1\times8-2\times2}{1-2}=-4$$

따라서 구하는 좌표는 $(-8, -4)$

(3) 구하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\frac{-2+4}{2}=1,\quad y=\frac{2+8}{2}=5$$

따라서 구하는 좌표는 $(1, 5)$

답 (1) $(2, 6)$ (2) $(-8, -4)$ (3) $(1, 5)$

문제 4 두 점 $A(1, 2)$, $B(5, -4)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점

(2) 선분 AB를 $4:3$으로 외분하는 점

(3) 선분 AB의 중점

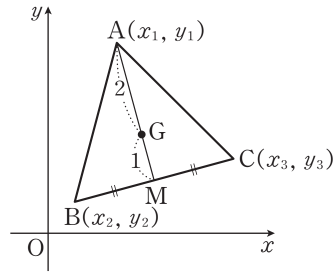
예제 2 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 다음과 같음을 설명하시오.

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

> 삼각형의 한 꼭짓점과 그 대변의 중점을 이은 선분을 중선이라 하고, 세 중선의 교점을 삼각형의 무게중심이라고 한다.
> 삼각형의 무게중심은 세 중선을 꼭짓점으로부터 각각 $2:1$로 내분한다.

풀이 $\overline{BC}$의 중점을 $M(x', y')$이라 하면

$$x'=\frac{x_2+x_3}{2}, \quad y'=\frac{y_2+y_3}{2}$$



무게중심 G의 좌표를 (x, y)라 하면 점 G가 $\overline{AM}$을 $2:1$로 내분하므로

$$x=\frac{2\times\frac{x_2+x_3}{2}+x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{2\times\frac{y_2+y_3}{2}+y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

따라서 무게중심 G의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

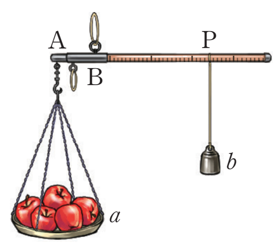
답 풀이 참조

문제 5 세 점 $A(2, -1)$, $B(-3, 2)$, $C(-5, 5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 구하시오.

생각 넓히기

문제 해결 | **추론** | **창의·융합** | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

오른쪽 그림은 저울이 평형을 이루도록 추의 위치를 옮겨가며 매달린 물건의 무게를 재는 대저울이다. 이 대저울에 물건을 매다는 지점을 A, 저울을 들어 올리는 지점을 B, 추를 매다는 지점을 P라 하자. 물건과 추의 무게를 각각 a와 b라 하면



$$a\times\overline{AB}=b\times\overline{BP}$$

가 성립한다.

활동 ① 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점 P에 1 kg짜리 추를 매달면 저울이 평형을 이룬다고 할 때, A 지점에 매달린 물건의 무게를 구해 보자.

활동 ② 선분 AB를 $m:n\ (m>n)$으로 외분하는 점 P에 1 kg짜리 추를 매달면 저울이 평형을 이룬다고 할 때, A 지점에 매달린 물건의 무게를 구해 보자.

탐구 & 융합

선분의 내분점과 피타고라스 음계

추론 | 창의·융합

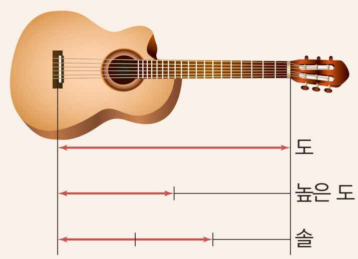
피타고라스(Pythagoras, B.C. 569?~B.C. 475?)는 대장간에서 나는 망치 소리를 듣다가 좋은 소리를 내는 망치들의 무게 사이에 6 : 8 : 9 : 12의 비가 성립한다는 것을 알았다.

피타고라스는 이 비례 관계를 적당한 탄성을 갖는 현의 길이로 바꾸어 실험한 결과, 현의 길이가 짧아질수록 진동수는 많아지고 음의 높이가 높아지는 것을 발견했다.

이러한 사실을 바탕으로 그는 서양 음악의 7음계라 불리는 '피타고라스 음계'를 확립했다.

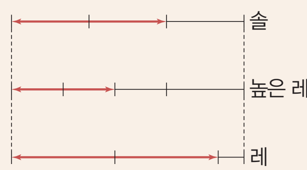
다음을 통해 '피타고라스 음계'의 원리를 알아보자.

- 어떤 음을 내는 현의 길이를 1 : 1로 내분하는 지점을 누르고 튕기면 처음 음보다 8도 높은 음, 즉 한 옥타브 올라간 음을 낸다.
- 어떤 음을 내는 현의 길이를 2 : 1로 내분하는 지점을 누르고 튕기면 처음 음보다 5도 높은 음을 낸다.



위의 원리에 따라 전체 현의 길이를 1로 보고 튕길 때의 음정을 '도'라 할 때, 길이가 $\frac{1}{2}$이 되는 지점을 누르고 튕기면 한 옥타브 올라간 '높은 도' 음이 나고, 길이가 $\frac{2}{3}$가 되는 지점을 누르고 튕기면 '솔' 음이 난다.

또, '레' 음을 내는 지점을 다음과 같이 찾을 수 있다.



❶ '솔'의 위치는 $\frac{2}{3}$의 지점이다.

❷ '솔'보다 5도 높은 '높은 레'의 위치는 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$의 지점이다.

❸ '높은 레'보다 한 옥타브 낮은 '레'의 위치는 '높은 레' 음을 내는 현의 길이의 2배이므로 $\frac{4}{9}\times 2=\frac{8}{9}$의 지점이다.

따라서 '레' 음을 내기 위해서는 전체 현의 길이 중에서 $\frac{8}{9}$의 지점을 누르고 튕기면 된다.

탐구 전체 현의 길이를 1로 보고 튕길 때의 음정을 '도'라 할 때, 한 옥타브 올라간 '높은 미' 음을 내려면 현의 어느 지점을 누르고 튕기면 되는지 구해 보자.

중단원 마무리하기

두 점 사이의 거리

(1) 수직선 위의 두 점 사이의 거리

두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=|x_2-x_1|$

(2) 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

특히, 원점 O와 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는

$\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

수직선 위의 선분의 내분점과 외분점

(1) 수직선 위의 선분의 내분점

두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$

특히, 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$\dfrac{x_1+x_2}{2}$

(2) 수직선 위의 선분의 외분점

두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$

좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로

❶ 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

❷ 외분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}, \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$ (단, $m\neq n$)

특히, 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

기본

01 다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.

(1) $A(0)$, $B(-4)$

(2) $A(-6)$, $B(1)$

(3) $A(-1, 3)$, $B(3, 8)$

(4) $A(1, -2)$, $B(2, -5)$

02 두 점 $A(-2)$, $B(8)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점

(2) 선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점

(3) 선분 AB의 중점

03 두 점 $A(2, -3)$, $B(-7, 3)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점

(2) 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점

(3) 선분 AB의 중점

04 세 점 $A(4, 5)$, $B(-1, 3)$, $C(3, -2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 구하시오.

표 준

05 세 점 $\mathrm{A}(x)$, $\mathrm{B}(3)$, $\mathrm{C}(4)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}=9$를 만족시키는 x의 값 중에서 양수를 a, 음수를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

06 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$, $\mathrm{B}(a,\ -3)$ 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

07 두 점 $\mathrm{A}(4,\ -1)$, $\mathrm{B}(3,\ 1)$과 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 최솟값을 구하시오.

08 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 6)$, $\mathrm{C}(3,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 구하시오.

09 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -2)$, $\mathrm{B}(4,\ 4)$에 대하여 선분 AB를 $2:m$으로 내분하는 점이 직선 $y=x-1$ 위에 있을 때, 양수 m의 값을 구하시오.

10 네 점 $A(2,\ 6)$, $B(a,\ 3)$, $C(4,\ b)$, $D(6,\ 5)$를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

|서·술·형|

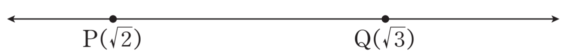
11 두 점 $A(-2,\ -1)$, $B(4,\ 7)$을 이은 선분 AB의 연장선 위의 점 C에 대하여 $2\overline{AB}=\overline{BC}$일 때, 점 C의 좌표를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

발 전

12 x, y에 대한 방정식 $xy+x+y-2=0$을 만족시키는 정수 x, y를 좌표평면 위의 점 $(x,\ y)$로 나타낼 때, 이 점들을 꼭짓점으로 하는 사각형의 두 대각선의 길이의 곱을 구하시오.

사고력+

13 다음 그림과 같이 수직선 위에 두 점 $P(\sqrt{2}\,)$, $Q(\sqrt{3}\,)$이 놓여 있다.



세 점 $A\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\dfrac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{1+3}\right)$, $C\left(\dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-1}\right)$를 위의 수직선 위에 나타내고, 이를 이용하여 세 점 A, B, C의 좌표의 크기를 비교하시오.

|서·술·형|

14 두 점 $P(2,\ \sqrt{5}\,)$, $Q(3,\ -4)$에 대하여 $\angle POQ$의 이등분선과 선분 PQ의 교점의 x좌표를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. (단, 점 O는 원점이다.)