3 여러 가지 방정식과 부등식

01 삼차방정식과 사차방정식

02 연립이차방정식

03 연립일차부등식

04 이차부등식과 연립이차부등식

❝ 수학 교과서를 접하자마자 **연립방정식**에 매혹되어, 수업하기도 전에 끝까지 재빨리 읽었다. ❞

(출처: Grenthe, I., 『Nobel Lectures in Chemistry(1996−2000)』)

존 포플(Pople, J. A., 1925~2004)
영국의 이론 화학자

이 글은 1998년 노벨상 수상 연설에서 수학에 흥미를 갖고 깊이 빠졌던 12살의 어린 시절을 회상하면서 한 말인데, 그는 쓰레기 더미에서 수학책을 주워서 혼자 공부할 정도였다고 한다.

01 삼차방정식과 사차방정식

학습 목표

간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.

준비 하기

다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^3-3x+2

(2) x^4-2x^2-3x-2

다가 서기

한지 공예는 한지를 사용하여 생활에 필요한 여러 가지 물건을 만드는 우리나라의 전통 공예이다.

한지로 부피가 일정한 상자를 만들 때, 상자의 각 모서리의 길이를 알면 필요한 한지의 양을 가늠할 수 있는데 삼차방정식을 이용하면 그 길이를 구할 수 있다.

삼차방정식과 사차방정식

생각 열기 부피가 64 cm^3이고 밑면의 가로, 세로의 길이와 높이의 비가 4 : 2 : 1인 직육면체 모양의 한지 상자를 만들려고 한다.

▶ 한지 상자의 높이를 x cm라 할 때, x에 대한 방정식을 만들어 보자.

x에 대한 다항식 $f(x)$가 삼차식일 때 방정식 $f(x)=0$을 삼차방정식이라 하고, $f(x)$가 사차식일 때 방정식 $f(x)=0$을 사차방정식이라고 한다.

예를 들어 $x^3+2x^2-4x=0$은 x에 대한 삼차방정식이고, $x^4+4x^2-5x+6=0$은 x에 대한 사차방정식이다.

삼차방정식과 사차방정식을 푸는 것은 쉽지 않지만 인수분해를 이용하면 해를 구할 수 있는 경우가 있다.

예제 1 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^3-8=0$ (2) $x^4-10x^2+9=0$

풀이 (1) $x^3-8=0$의 좌변을 인수분해하면

$$(x-2)(x^2+2x+4)=0$$

$$x-2=0 \text{ 또는 } x^2+2x+4=0$$

따라서 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

(2) $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$$X^2-10X+9=0, \quad (X-1)(X-9)=0$$

$$X=1 \text{ 또는 } X=9, \text{ 즉 } x^2=1 \text{ 또는 } x^2=9$$

따라서 $x=\pm1$ 또는 $x=\pm3$

답 (1) $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$ (2) $x=\pm1$ 또는 $x=\pm3$

문제 1 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^3+27=0$　　(2) $x^4-2x^2-8=0$

예제 2 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^3-2x^2-5x+6=0$　　(2) $x^4-x^3-2x^2+6x-4=0$

다항식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

풀이 (1) $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$이라 하면

$$f(1)=1-2-5+6=0$$

이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$f(x)=(x-1)(x^2-x-6)$$
$$=(x-1)(x-3)(x+2)$$

1	1	-2	-5	6
		1	-1	-6
	1	-1	-6	0

즉, 주어진 방정식은

$$(x-1)(x-3)(x+2)=0$$

따라서　$x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=-2$

(2) $f(x)=x^4-x^3-2x^2+6x-4$라 하면

$$f(1)=1-1-2+6-4=0$$
$$f(-2)=16+8-8-12-4=0$$

이므로 $x-1$과 $x+2$는 $f(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$f(x)=(x-1)(x+2)(x^2-2x+2)$$

1	1	-1	-2	6	-4
		1	0	-2	4
-2	1	0	-2	4	0
		-2	4	-4	
	1	-2	2	0	

즉, 주어진 방정식은

$$(x-1)(x+2)(x^2-2x+2)=0$$

따라서　$x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1\pm i$

답 (1) $x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=-2$
(2) $x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1\pm i$

문제 2 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^3-7x+6=0$　　(2) $2x^3+3x^2-5x-6=0$

(3) $x^4-3x^3-x^2+9x-6=0$　　(4) $x^4-3x^3+2x^2+2x-4=0$

예제 3 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+ax^2+x+b=0$의 한 근이 $2+i$일 때, 나머지 두 근을 구하시오.

풀이 $x=2+i$를 주어진 방정식에 대입하면

$$(2+i)^3+a(2+i)^2+(2+i)+b=0$$

이 식을 정리하면 $(4+3a+b)+(12+4a)i=0$

a, b가 실수이므로 $4+3a+b=0$, $12+4a=0$

위의 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=5$

주어진 방정식은 $x^3-3x^2+x+5=0$이므로 인수정리와 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

-1	1	-3	1	5
		-1	4	-5
	1	-4	5	0

$$(x+1)(x^2-4x+5)=0$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=2\pm i$$

따라서 나머지 두 근은 -1과 $2-i$이다.

답 -1, $2-i$

> α, β가 실수일 때, $\alpha+\beta i=0$이면 $\alpha=0$이고 $\beta=0$이다.

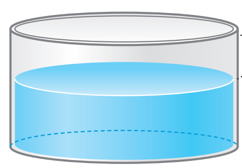
> 계수가 실수인 방정식에서 한 허근이 $a+bi$이면 그 켤레복소수 $a-bi$도 이 방정식의 근이다.

문제 3 계수가 실수인 사차방정식 $x^4+ax^3+4x^2-4x+b=0$의 한 근이 i일 때, 다음을 구하시오.

(1) a, b의 값

(2) 나머지 세 근

문제 4 오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이와 높이가 같은 원기둥 모양의 수족관에 $75\pi\ \mathrm{m}^3$의 물을 부었더니 수족관의 위에서부터 $2\ \mathrm{m}$를 남기고 물이 채워졌다. 이때 수족관의 높이를 구하시오. (단, 수족관의 두께는 생각하지 않는다.)



생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

삼차방정식 $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, 오른쪽 식의 값을 구하려고 한다.

$$1+\omega^2+\omega^4$$

$$\omega^{100}+\frac{1}{\omega^{100}}$$

활동 1 $\omega^3=1$과 $\omega^2+\omega+1=0$이 성립함을 설명해 보자.

활동 2 활동 1의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구해 보자.

수학 이야기

삼차방정식의 근의 공식에 얽힌 카르다노와 타르탈리아의 논쟁

르네상스 시대에 이탈리아의 수학자들은 고대 수학 지식의 재발견을 통해 삼차방정식의 해법에 대한 궁금증을 갖기 시작했다. 이차방정식의 근의 공식과는 달리 삼차방정식의 근의 공식은 상당히 복잡하다. 삼차방정식의 근의 공식은 카르다노(Cardano, G., 1501～1576)의 저서 『위대한 술법(Ars Magna)』에서 처음 발표되었는데, 그때 삼차방정식의 근의 공식을 가장 먼저 발견한 공로가 누구의 것인지에 대한 논쟁이 있었다.

볼로냐 대학의 교수였던 페로(Ferro, S., 1465～1526)는 1500년경 $x^3+mx=n$의 꼴의 이차항이 없는 삼차방정식의 해를 구했으나 비밀에 부치고 있었다. 페로는 이 비밀을 제자인 피오르(Fiore, A.)에게만 알려주었다.

그런데 타르탈리아(Tartaglia, N. F., 1499～1557)가 $x^3+px^2=n$의 꼴의 일차항이 없는 삼차방정식에 대한 대수적인 해법을 발견했다고 주장했고, 피오르는 페로의 업적을 보호하기 위해 타르탈리아에게 공개적으로 삼차방정식의 해법에 대한 대결을 하자고 제안했다. 이 대결에서 타르탈리아는 피오르가 제시한 30개의 삼차방정식을 모두 풀어 승리하며 명성을 얻게 되었다.

한편, 카르다노는 책을 집필하던 도중에 타르탈리아가 삼차방정식을 풀 수 있다는 것을 알게 되어 1539년에 그와 만나고 싶다는 편지를 썼는데, 몇 번의 설득 끝에 타르탈리아가 동의했다. 이 만남에서 타르탈리아는 누구에게도 공개하지 않는다는 조건으로 카르다노에게 자신이 발견한 삼차방정식의 근의 공식을 알려 주었다.

몇 년이 지난 후, 카르다노는 독자적으로 발견한 여러 가지 형태의 삼차방정식의 해법을 발표하려고 했지만, 타르탈리아와의 약속 때문에 망설이고 있었다. 그러다가 페로가 타르탈리아보다 20여 년 전에 삼차방정식의 근의 공식을 발견했다는 사실을 알게 되었기에 1545년에 삼차방정식과 사차방정식의 근의 공식을 발표했다.

이 소식에 배신감을 느낀 타르탈리아는 카르다노를 맹렬히 비난했다. 그러나 페로가 삼차방정식의 근의 공식을 먼저 발견한 것이 사실이고, 카르다노가 그의 책에서 타르탈리아의 업적에 대한 충분한 설명과 함께 고마움을 표시했기 때문에 어쩔 도리가 없었다고 한다.

(출처: Marsden, J. E. 외, 『Vector Calculus, 6th Edition』/ 칼 B. 보이어 외, 『수학의 역사·상』)

02 연립이차방정식

학습 목표

미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.

준비하기

다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=6 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+2y=-2 \\ 3x-y=8 \end{cases}$

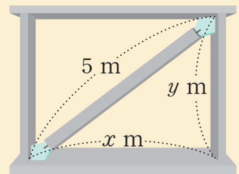
다가서기

건물 벽면에 시공하는 '진동 에너지 흡수 장치'는 지진에 의해 건물이 붕괴되는 것을 방지하기 위한 장치이다.

일정한 공간에 시공할 수 있는 이와 같은 장치를 설계하는 데에는 연립방정식이 활용된다.

미지수가 2개인 연립이차방정식

생각 열기 오른쪽 그림은 길이가 5 m인 '진동 에너지 흡수 장치'를 둘레의 길이가 14 m인 직사각형 모양의 대각선에 시공한 것이다.



▶ 가로와 세로의 길이를 각각 x m, y m라 할 때, x와 y에 대한 방정식을 2개 만들어 보자.

위의 **생각 열기**에서 x, y에 대한 방정식을 만들면

$$\begin{cases} 2x+2y=14 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$$

이다.

이와 같이 미지수가 2개인 연립방정식에서 차수가 가장 높은 방정식이 이차방정식일 때, 이것을 연립이차방정식이라고 한다.

이차방정식과 일차방정식으로 이루어진 연립이차방정식은 일차방정식을 한 문자에 대하여 정리한 것을 이차방정식에 대입하여 풀 수 있다.

예제 1 연립방정식 $\begin{cases} x+y=7 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=25 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 를 푸시오.

풀이 ①에서 $y=7-x$ ……③

③을 ②에 대입하면

$x^2+(7-x)^2=25,\quad x^2-7x+12=0$

$(x-3)(x-4)=0,\quad x=3$ 또는 $x=4$

$x=3$을 ③에 대입하면 $y=4$

$x=4$를 ③에 대입하면 $y=3$

따라서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ ……답

문제 1 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-y=-4 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$

두 개의 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식은 인수분해를 이용하여 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 두 개의 연립방정식으로 고쳐서 풀 수 있다.

예제 2 연립방정식 $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ① \\ 2x^2+y^2=9 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 를 푸시오.

풀이 ①의 좌변을 인수분해하면 $(x-2y)(x+y)=0$

따라서 $x=2y$ 또는 $x=-y$

(i) $x=2y$를 ②에 대입하면 $8y^2+y^2=9$, $y^2=1$, $y=\pm1$

$y=1$일 때 $x=2$, $y=-1$일 때 $x=-2$

(ii) $x=-y$를 ②에 대입하면 $2y^2+y^2=9$, $y^2=3$, $y=\pm\sqrt{3}$

$y=\sqrt{3}$일 때 $x=-\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}$일 때 $x=\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$ ⋯⋯ 답

문제 2 다음 연립방정식을 푸시오.

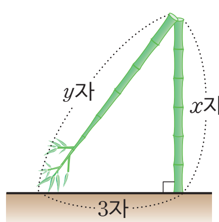
(1) $\begin{cases} x^2-4xy+3y^2=0 \\ x^2+xy=8 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} (x+1)^2-y^2=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

고대 중국의 수학책인 『구장산술』에는 '부러진 대나무 문제'가 실려 있다.

> 높이가 9자인 대나무가 바람에 부러져서 그 끝이 대나무로부터 3자 떨어진 곳에 닿았다.



활동 ▶ 대나무가 부러져서 생긴 두 부분의 길이를 각각 x자, y자라 할 때 x, y에 대한 연립방정식으로 나타내고, x와 y의 값을 구해 보자.

03 연립일차부등식

학습 목표

미지수가 1개인 연립일차부등식과 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.

준비하기

다음 부등식을 푸시오.

(1) $x+1\le 2x-3$

(2) $3(x+1)>-(x-1)$

미지수가 1개인 연립일차부등식

생각 열기 높은 건물 위로 물건을 옮기는 데 사용하는 사다리차는 한 번에 100 kg 이상의 물건을 올려놓으면 경고음이 울린다고 한다.

❶ 무게가 x kg인 물건 1개와 30 kg인 물건 1개를 동시에 올려놓았더니 경고음이 울리지 않았다. 이 상황을 부등식으로 나타내어 보자.

❷ 무게가 x kg인 물건 3개와 20 kg인 물건 1개를 동시에 올려놓았더니 경고음이 울렸다. 이 상황을 부등식으로 나타내어 보자.

부등식에서 우변에 있는 항을 좌변으로 이항하여 정리했을 때,

$$(\text{일차식})<0,\quad (\text{일차식})>0,$$
$$(\text{일차식})\le 0,\quad (\text{일차식})\ge 0$$

중에서 어느 하나의 꼴로 나타내어지는 부등식을 일차부등식이라고 한다.

위의 **생각 열기**에서 구한 두 부등식

$$x+30<100,\quad 3x+20\ge 100$$

의 공통인 해를 구하려고 할 때, 이들을 한 쌍으로 묶어서 보통

$$\begin{cases} x+30<100 \\ 3x+20\ge 100 \end{cases}$$

과 같이 나타낸다.

이와 같이 두 개 이상의 부등식을 한 쌍으로 묶어 나타낸 것을 **연립부등식**이라 하며, 일차부등식으로 이루어진 연립부등식을 연립일차부등식이라고 한다.

또, 연립부등식에서 각 부등식의 공통인 해를 그 연립부등식의 해라 하고, 연립부등식의 해를 구하는 것을 '연립부등식을 푼다'고 한다.

다가서기

기업에서는 이익을 극대화하기 위해 인사, 재무, 생산, 재고 등의 관리와 생산된 제품의 판매 가격과 수익 등을 고려해야 한다.

이익에 영향을 주는 이러한 요인들을 몇 개의 부등식으로 모델링한 다음 공통인 해를 구하면 이익 극대화에 가장 적합한 조건을 찾을 수 있다.

다음을 통해 연립부등식의 해를 구하는 방법을 알아보자.

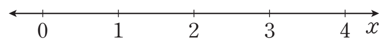
연립방정식의 해: 두 개 이상의 방정식의 공통인 해

연립부등식의 해: 두 개 이상의 부등식의 공통인 해

함께하기 연립부등식 $\begin{cases} 3x \le 9 & \cdots\cdots ① \\ 2x > x+1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$의 해를 다음 단계에 따라 구해 보자.

활동 ❶ 두 부등식 ①과 ②의 해를 각각 구해 보자.

활동 ❷ 두 부등식 ①과 ②의 해를 아래 수직선에 각각 나타내어 보자.



활동 ❸ 활동 ❷에서 수직선에 나타낸 결과로부터 두 부등식 ①과 ②의 공통인 해를 다음과 같이 나타내었다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어 주어진 연립부등식의 해를 구해 보자.

$\square < x \le \square$

위의 활동에서 알 수 있듯이 연립부등식을 풀 때는 연립부등식을 이루고 있는 각 부등식의 해를 구하고, 이들을 하나의 수직선에 나타내어 그 공통부분을 찾으면 된다.

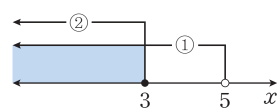
예제 1 연립부등식 $\begin{cases} 2x-3<7 & \cdots\cdots ① \\ 2(x+2) \ge 3x+1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 을 푸시오.

풀이 ①을 풀면 $2x<10$, $x<5$

②를 풀면 $2x+4 \ge 3x+1$, $x \le 3$

①, ②의 해를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 구하는 해는 $x \le 3$



답 $x \le 3$

문제 1 다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x-3<-x+3 \\ 3x+2<4x+3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+5 \ge 2x \\ -2x+3 \le x-6 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} -3x+8 \le 2 \\ 4x+3>3(2+x) \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{3}<1 \\ 2(x+2) \le x+3 \end{cases}$

예제 2 연립부등식 $\begin{cases} 4x+3>7 & \cdots\cdots ① \\ x+1\geq 3x+5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$를 푸시오.

풀이 ①을 풀면 $x>1$, ②를 풀면 $x\leq -2$

①, ②의 해를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같이 공통부분이 없다.

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.

답 해는 없다.

문제 2 다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x-2\leq -3 \\ 3x-8\geq -2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x-2\geq x+6 \\ 2x-4>5x+2 \end{cases}$

$A<B<C$ 꼴의 연립부등식

연립부등식 $A<B<C$는 두 부등식 $A<B$와 $B<C$를 하나의 식으로 나타낸 것이다. 따라서 $A<B<C$를 풀 때는 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$를 풀면 된다.

연립부등식 $A<B<C$를 $\begin{cases} A<B \\ A<C \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} A<C \\ B<C \end{cases}$로 풀어서는 안 된다.

예제 3 연립부등식 $5x-4<2x+5<4x+3$을 푸시오.

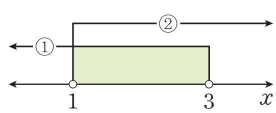
풀이 주어진 부등식을 변형하면 $\begin{cases} 5x-4<2x+5 & \cdots\cdots ① \\ 2x+5<4x+3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①을 풀면 $x<3$

②를 풀면 $x>1$

①, ②의 해를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 구하는 해는 $1<x<3$



답 $1<x<3$

문제 3 다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $-5<x-3<-x+7$

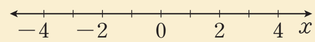
(2) $3+2(x-6)\leq -x-9<2x-3$

절댓값 기호를 포함한 일차부등식

생각 열기 부등식 $|x|\le 2$를 만족시키는 실수 x의 값의 범위를 수직선에 나타내려고 한다.

❶ $|x|=2$를 만족시키는 x의 값을 구해 보자.

❷ $|x|\le 2$를 만족시키는 x의 값의 범위를 오른쪽 수직선에 나타내어 보자.

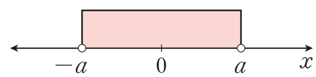


$a>0$일 때, 절댓값의 뜻에 따라 다음이 성립한다.

> $|a|=\begin{cases} a & (a\ge 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

(i) $|x|<a$이면

$$-a<x<a$$



(ii) $|x|>a$이면

$$x<-a \text{ 또는 } x>a$$

이와 같은 성질을 이용하면 절댓값 기호를 포함한 부등식을 풀 수 있다.

예제 4 다음 부등식을 푸시오.

(1) $|x-2|<4$ (2) $|2x-3|\ge 5$

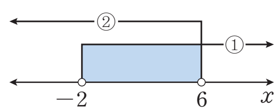
풀이 (1) $|x-2|<4$이면

$$-4<x-2<4$$

$-4<x-2$에서 $x>-2$ ······①

$x-2<4$에서 $x<6$ ······②

①, ②의 공통부분은 $-2<x<6$



(2) $|2x-3|\ge 5$이면

$$2x-3\le -5 \text{ 또는 } 2x-3\ge 5$$

따라서 $x\le -1$ 또는 $x\ge 4$

답 (1) $-2<x<6$ (2) $x\le -1$ 또는 $x\ge 4$

문제 4 다음 부등식을 푸시오.

(1) $|x+3|<7$ (2) $|x-6|>2$

(3) $|2x-1|\le 3$ (4) $|3x-4|\ge 5$

절댓값 기호를 포함한 부등식은 미지수의 값의 범위에 따라 절댓값 기호를 포함하지 않은 식으로 고쳐서 풀 수 있다.

예제 5 부등식 $|x|+|x-3|\le 7$을 푸시오.

풀이 주어진 부등식에서

$$|x|=\begin{cases} x & (x\ge 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}, \quad |x-3|=\begin{cases} x-3 & (x\ge 3) \\ -(x-3) & (x<3) \end{cases}$$

이므로 x의 값의 범위를 $x<0$, $0\le x<3$, $x\ge 3$의 세 경우로 나누어서 푼다.

(i) $x<0$일 때,

$-x-(x-3)\le 7$에서 $-2x+3\le 7$, $x\ge -2$

그런데 $x<0$이므로 $-2\le x<0$ ⋯⋯ ①

(ii) $0\le x<3$일 때,

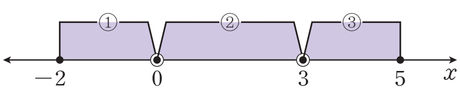
$x-(x-3)\le 7$에서 $3\le 7$이므로 부등식은 주어진 범위에서 항상 성립한다.

따라서 $0\le x<3$ ⋯⋯ ②

(iii) $x\ge 3$일 때,

$x+(x-3)\le 7$에서 $2x-3\le 7$, $x\le 5$

그런데 $x\ge 3$이므로 $3\le x\le 5$ ⋯⋯ ③



①, ②, ③에서 $-2\le x\le 5$

답 $-2\le x\le 5$

문제 5 다음 부등식을 푸시오.

(1) $|x|+|x-2|\le 4$

(2) $|x+2|+|2x-3|>10$

문제 6 오른쪽 표는 금속의 불꽃 반응에서 금속이 방출하는 빛의 파장에 따른 불꽃색을 나타낸 것이다. 칼슘(Ca)이 불꽃 반응에서 방출하는 빛의 파장 a nm(나노미터)에 대하여 $|a-600|<10$일 때, 칼슘의 불꽃 반응에서 나타나는 불꽃색을 말하시오.

파장에 따른 불꽃색

파장(nm)	색
$400\le a<450$	보라
$450\le a<500$	파랑
$500\le a<570$	초록
$570\le a<590$	노랑
$590\le a<610$	주황
$610\le a<700$	빨강

나노미터(nm)는 빛의 파장같이 짧은 길이를 나타내는 단위로 1나노미터는 1미터의 10억분의 1이다.

공학적 도구

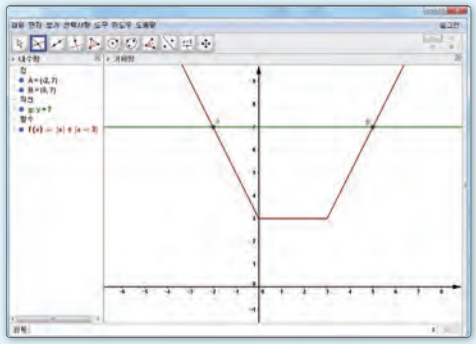
문제 해결 | 정보 처리

그래프를 이용하여 절댓값 기호를 포함한 부등식의 해 구하기

컴퓨터 프로그램을 이용하여 93쪽 **예제 5**의 부등식 $|x|+|x-3|\le 7$의 해를 구해 보자.

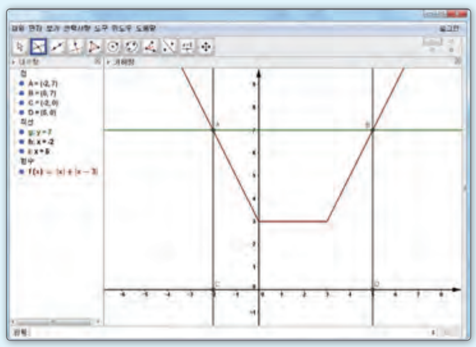
❶ 입력창에 ‘y=abs(x)+abs(x−3)’과 ‘y=7’을 입력하고, Enter를 누른다.

❷ 메뉴에서 ‘교점’을 클릭한 다음 함수 $y=|x|+|x-3|$의 그래프와 직선 $y=7$의 두 교점을 차례대로 선택한다.



❸ 메뉴에서 ‘수직선’을 클릭한 다음 ❷에서 구한 두 교점 중 한 점과 x축을 차례대로 선택하여 그 점을 지나고 x축과 수직인 직선을 그린다. 마찬가지 방법으로 나머지 한 교점을 지나고 x축과 수직인 직선을 그린다.

❹ 메뉴에서 ‘교점’을 클릭한 다음 ❸에서 구한 직선과 x축의 두 교점을 차례대로 선택한다.



부등식 $|x|+|x-3|\le 7$의 해는 함수 $y=|x|+|x-3|$의 그래프가 직선 $y=7$과 만나거나 그 직선보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다. 따라서 구하는 해는 다음과 같다.

$$-2\le x\le 5$$

확인 위와 같은 방법으로 부등식 $|x+2|+|x-1|>4$의 해를 구해 보자.

04 이차부등식과 연립이차부등식

학습 목표
이차부등식과 이차함수의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다.

준비하기
다음 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 말하시오.

(1) $y=x^2+x-2$

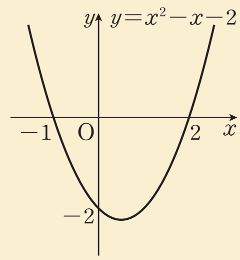
(2) $y=-x^2+2x-1$

(3) $y=x^2+3x+7$

다가서기
지상에서 쏘아 올린 로켓의 높이, 공중으로 차올린 공의 높이, 지면으로부터 일정한 높이에서 자유 낙하하는 물체의 높이는 시간에 대한 이차식으로 나타낼 수 있다.
이때 로켓이나 공, 자유 낙하하는 물체의 시간에 따른 높이의 변화와 관련된 다양한 현상은 이차부등식을 이용하여 설명할 수 있다.

이차부등식과 이차함수의 관계

생각 열기 오른쪽 그림은 이차함수 $y=x^2-x-2$의 그래프이다.



❶ 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위를 구해 보자.

❷ 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위를 구해 보자.

부등식에서 우변에 있는 항을 좌변으로 이항하여 정리했을 때,

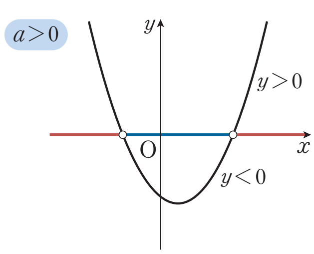
$$ax^2+bx+c<0,\quad ax^2+bx+c>0,$$
$$ax^2+bx+c\le 0,\quad ax^2+bx+c\ge 0\ (a\ne 0)$$

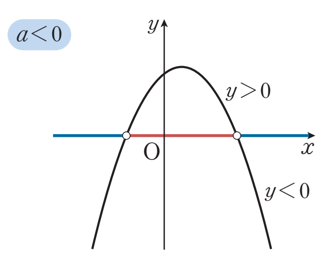
과 같이 좌변이 미지수 x에 대한 이차식으로 나타내어지는 부등식을 x에 대한 이차부등식이라고 한다.

일반적으로 이차부등식의 해와 이차함수의 그래프 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

(i) $ax^2+bx+c>0$의 해는 $y=ax^2+bx+c$에서 $y>0$인 x의 값의 범위, 즉 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.

(ii) $ax^2+bx+c<0$의 해는 $y=ax^2+bx+c$에서 $y<0$인 x의 값의 범위, 즉 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.





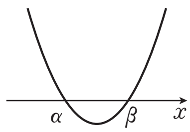
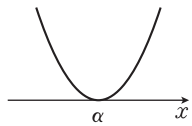
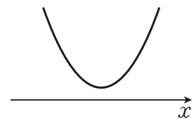
이차부등식의 해

이차부등식의 해는 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계로 구할 수 있다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a>0)$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 할 때, 이차부등식의 해는 다음과 같다.

> α, β는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해이다.

이차부등식의 해 ($a>0$인 경우)

$ax^2+bx+c=0$의 판별식 D	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$의 그래프			
$ax^2+bx+c>0$의 해	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\neq\alpha$인 모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c\geq0$의 해	$x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$	모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c<0$의 해	$\alpha<x<\beta$	없다.	없다.
$ax^2+bx+c\leq0$의 해	$\alpha\leq x\leq\beta$	$x=\alpha$	없다.

한편, $a<0$일 때는 이차부등식의 양변에 -1을 곱하여 x^2의 계수를 양수로 바꾸어서 풀면 된다.

예제 1 이차부등식 $x^2-6x+5>0$을 푸시오.

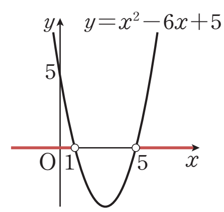
풀이 이차함수 $y=x^2-6x+5$에서

$$y=(x-1)(x-5)$$

이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 구하는 해는

$$x<1 \text{ 또는 } x>5$$



답 $x<1$ 또는 $x>5$

문제 1 다음 이차부등식을 푸시오.

(1) $x^2-x-6<0$

(2) $x^2+2x-15\geq0$

(3) $-3x^2+5x+2<0$

(4) $-2x^2+3x+5\geq0$

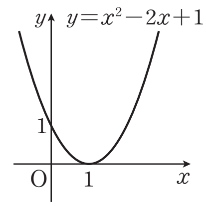
예제 2 이차부등식 $x^2+1<2x$를 푸시오.

풀이 우변을 이항하면 $x^2-2x+1<0$

이차함수 $y=x^2-2x+1$에서

$$y=(x-1)^2$$

이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주어진 이차부등식의 해는 없다.

답 해는 없다.

문제 2 다음 이차부등식을 푸시오.

(1) $x^2+4>4x$

(2) $9x^2+6x+1\le0$

(3) $-4x^2+12x-9\le0$

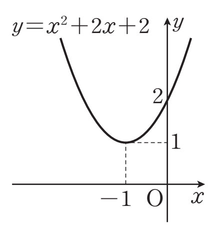
(4) $-x^2+10x>25$

예제 3 이차부등식 $x^2+2x+2>0$을 푸시오.

풀이 이차함수 $y=x^2+2x+2$에서

$$y=(x+1)^2+1$$

이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주어진 이차부등식의 해는 모든 실수이다.

답 모든 실수

문제 3 다음 이차부등식을 푸시오.

(1) $x^2+5x+8>0$

(2) $-4x^2+x-2\le0$

(3) $2x^2+3x+7<0$

(4) $-x^2+2x-2\ge0$

탐구 **문제 4** 이차부등식 $x^2+2(k+3)x+k+5>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 실수 k의 값의 범위를 정하시오.

연립이차부등식

연립부등식에서 차수가 가장 높은 부등식이 이차부등식일 때, 이것을 연립이차부등식이라고 한다.

연립이차부등식을 풀 때는 연립부등식을 이루고 있는 각 부등식의 해를 구한 다음 이들의 공통부분을 구하면 된다.

예제 4 다음 연립부등식을 푸시오.

$$\begin{cases} x^2+2x-8\le 0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-3x>0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

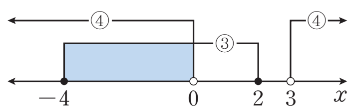
풀이 ①을 풀면 $(x+4)(x-2)\le 0$

$-4\le x\le 2$ $\cdots\cdots$ ③

②를 풀면 $x(x-3)>0$

$x<0$ 또는 $x>3$ $\cdots\cdots$ ④

③, ④의 공통부분은 $-4\le x<0$



답 $-4\le x<0$

문제 5 다음 연립부등식을 푸시오.

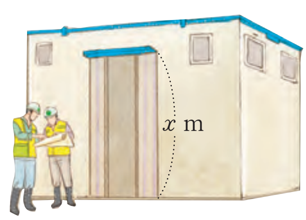
(1) $\begin{cases} 3x-2>7 \\ x^2-5x-6\le 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2-9x+18\ge 0 \\ x^2-4<3x \end{cases}$

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

어느 공장에서 다음 조건을 모두 만족시키는 직사각형 모양의 출입문을 만들려고 한다. 출입문의 세로의 길이를 x m라 할 때, x의 값의 범위를 정해 보자.



(가) 출입문의 둘레의 길이는 18 m이다.
(나) 출입문의 세로의 길이는 가로의 길이의 2배보다 길다.
(다) 출입문의 넓이는 14 m^2 이상이다.

II -3. 여러 가지 방정식과 부등식

중단원 마무리하기

삼차방정식과 사차방정식

(1) 인수정리와 조립제법을 이용하여 인수분해한 후 방정식의 해를 구한다.

(2) 공통부분이 있으면 그것을 하나의 문자로 치환하여 인수분해한 후 방정식의 해를 구한다.

연립이차방정식

미지수가 2개인 연립이차방정식은 인수분해 등을 이용하여 미지수가 1개인 이차방정식으로 고쳐서 푼다.

연립부등식

(1) 두 개 이상의 부등식을 한 쌍으로 묶어서 나타낸 것을 **연립부등식**이라 하며, 일차부등식으로 이루어진 연립부등식을 연립일차부등식이라고 한다.

(2) 연립부등식을 풀 때는 연립부등식을 이루고 있는 각 부등식의 해를 구하고, 이들을 한 수직선에 나타내어 그 공통부분을 찾는다.

절댓값 기호를 포함한 일차부등식

$a>0$일 때,

(i) $|x|<a$이면　$-a<x<a$

(ii) $|x|>a$이면　$x<-a$ 또는 $x>a$

이차부등식

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a>0)$이

❶ 서로 다른 두 실근 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$를 가질 때,

(i) $ax^2+bx+c>0$의 해는 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$이다.

(ii) $ax^2+bx+c<0$의 해는 $\alpha<x<\beta$이다.

❷ 중근 α를 가질 때,

(i) $ax^2+bx+c>0$의 해는 $x\neq\alpha$인 모든 실수이다.

(ii) $ax^2+bx+c<0$의 해는 없다.

❸ 서로 다른 두 허근을 가질 때,

(i) $ax^2+bx+c>0$의 해는 모든 실수이다.

(ii) $ax^2+bx+c<0$의 해는 없다.

연립이차부등식

연립이차부등식을 풀 때는 연립부등식을 이루고 있는 각 부등식의 해를 구한 다음 이들의 공통부분을 구한다.

기본

01 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^3-5x^2-x+5=0$

(2) $x^4-3x^2-4=0$

02 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+xy-y^2=5 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

03 다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 3x-4<8 \\ 2x+5\leq 3(2x+3) \end{cases}$

(2) $2x-4\leq x+1<3x-5$

04 다음 부등식을 푸시오.

(1) $|3x+1|>5$

(2) $|x-1|+|x-4|\leq 6$

05 다음 이차부등식을 푸시오.

(1) $x^2+6x-7<0$

(2) $-2x^2-3x+2\leq 0$

06 연립부등식 $\begin{cases} x^2-3x-4\geq 0 \\ 2x^2-13x+11<0 \end{cases}$을 푸시오.

표 준

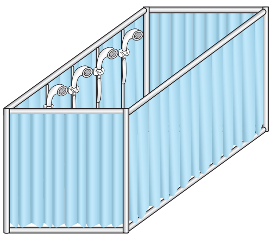
07 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-4=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 실수 a, b의 값과 나머지 두 근을 구하시오.

08 계수가 실수인 사차방정식 $x^4+x^3+ax^2-9x+b=0$의 두 근이 2, -1일 때, 나머지 두 근 α, β에 대하여 $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

09 삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 한 근이 2ω가 되도록 하는 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

|서·술·형|

10 어느 해수욕장에서 오른쪽 그림과 같이 가로의 길이와 높이가 같은 직육면체 모양의 간이 샤워실을 만들려고 한다. 직육면체의 모서리에 사용될 쇠막대의 길이의 합은 56 m이고, 옆의 네 면에 사용될 천의 넓이의 합은 66 m^2일 때, 간이 샤워실의 가로와 세로의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



11 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=a \\ x+y=-3 \end{cases}$을 만족시키는 실수 x, y가 연립방정식 $\begin{cases} ay+bx=1 \\ xy=-4 \end{cases}$를 만족시킬 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b+x+y$의 값을 구하시오. (단, $a>b$)

12 어느 문화 센터에서 한 달 수강료를 x % 인상하면 회원 수는 $0.5x$ % 감소한다고 한다. 이 문화 센터의 한 달 수입이 8 % 이상 증가하도록 하는 x의 최솟값을 구하시오.

|서·술·형|

13 연립부등식 $\begin{cases} x^2-2x-3\le 0 \\ (x-a)(x-2)>0 \end{cases}$의 해가 $2<x\le 3$이 되도록 실수 a의 값의 범위를 정하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

발전

14 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$의 한 근이 -1이고, 나머지 두 근의 제곱의 합이 6일 때, 실수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오.

15 연립방정식 $\begin{cases} x^2-4xy+3y^2=0 \\ x^2+3xy+2y^2=5 \end{cases}$를 만족시키는 x, y에 대하여 xy의 최댓값을 구하시오.

사고력+

16 실수 x, $x+1$, $x+2$가 둔각삼각형의 세 변의 길이가 되도록 x의 값의 범위를 정하시오.

하 중 상

01

등식 $(2-3i)x-(1-i)y=5-2i$를 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 xy의 값을 구하시오.

02

두 복소수 $z=3-2i$, $w=4+i$에 대하여
$zw+\overline{z}w+z\overline{w}+\overline{z}\,\overline{w}$의 값은?
(단, $\overline{z}$, $\overline{w}$는 각각 z, w의 켤레복소수이다.)

① 36 ② 42 ③ 48
④ 54 ⑤ 60

03

복소수 $z=3+i$에 대하여 $\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}\right)^2$의 값을 구하시오.
(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

04

복소수 $z=(1+i)x-(3+2i)$에 대하여 z^2이 음의 실수일 때, 실수 x의 값을 구하시오.

05

x에 대한 이차방정식

$$x^2+2(k-1)x+k^2-20=0$$

이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 개수는?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

06

x에 대한 이차방정식

$$x^2-2(m+a)x+m^2-2m+a^2=0$$

이 실수 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 a의 값을 구하시오.

07

x에 대한 이차방정식

$$x^2+2(a+c)x+(b+c)^2=0$$

이 중근을 가질 때, 실수 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하시오.

08

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 한 근이 $2+i$일 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

09

이차방정식 $x^2-2x-7=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}{14}$의 값을 구하시오.

10

이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표가 -1, 3일 때, 실수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

11

이차함수 $y=kx^2-x+k-1$의 그래프와 직선 $y=x+1$이 접하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오.

12

이차함수 $y=x^2+2ax+b$의 그래프가 x축과 직선 $y=2x+1$에 동시에 접할 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

13

$1\le x\le 3$일 때, 이차함수 $y=ax^2-8ax-b$의 최댓값이 2, 최솟값이 -6이다. 실수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하시오. (단, $a<0$)

14

삼차방정식 $x^3+x^2+ax=0$의 0이 아닌 두 근 α, β에 대하여 $\alpha-\beta=5$일 때, 실수 a의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -2

15

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\dfrac{2}{\omega^3+3\omega^2+\omega}$를 간단히 하면?

① 1　② ω　③ $-\omega$

④ $\dfrac{1}{\omega}$　⑤ $-\dfrac{1}{\omega}$

16

사차방정식

$$x^4+ax^3+ax^2+11x+b=0$$

의 두 근이 -1, 1일 때, 나머지 두 근의 합을 구하시오.

17

다음 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가질 때, 실수 a의 값은?

$$\begin{cases} x-2y=3 \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

① $\dfrac{2}{5}$　② $\dfrac{3}{5}$　③ $\dfrac{7}{5}$

④ $\dfrac{9}{5}$　⑤ $\dfrac{11}{5}$

18

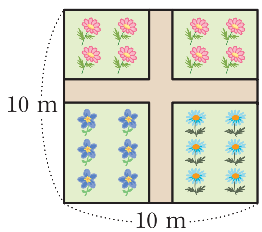
부등식 $2|x+1|-3|x-2|\geq 1$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.

19

이차부등식 $ax^2+2x+a-4>0$의 해가 없도록 실수 a의 값의 범위를 정하시오.

20

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 10 m인 정사각형 모양의 땅에 일정한 폭의 길을 만들었다. 꽃밭의 넓이가 64 m^2 이상이 되도록 할 때, 길의 폭의 범위를 정하시오.



21

다음 연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오.

$$\begin{cases} |2x-1|>1 \\ 2x^2-11x+5\leq 0 \end{cases}$$

22번부터 24번까지 서술형입니다.

22

이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 이차방정식 $x^2-(2a+1)x+b=0$의 두 근은 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이다. 다음에 답하시오. (단, a, b는 실수이다.)

(1) $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구하시오.

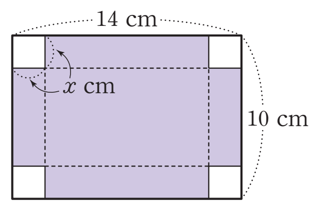
(2) b^2-a^2의 값을 구하시오.

23

이차함수 $y=-2x^2-2ax-3$의 최댓값은 -1이고, $-3\le x\le 0$일 때 이차함수 $y=-2x^2-2ax-3$의 최솟값은 m이다. 이때 $a+m$의 값을 구하시오. (단, $a>0$)

24

오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 14 cm, 세로의 길이가 10 cm인 직사각형 모양의 종이가 있다. 이 종이의 네 귀퉁이에서 한 변의 길이가 x cm인 정사각형을 잘라 내어 부피가 96 cm^3인 상자를 만들려고 한다. 이때 x의 값을 모두 구하시오.



자기 평가

정답을 맞힌 문항에 ○표 하여 학습 성취도를 표시하고, 부족한 부분은 교과서의 해당 쪽을 확인하여 복습하자.

문항 번호	성취 기준	성취도	복습
01 02 03 04	복소수의 뜻과 성질을 이해하고, 사칙연산을 할 수 있다.	○ △ ×	51 ~ 56쪽
05 06 07 08 09 22	이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 알며, 이차방정식에서 판별식의 뜻과 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.	○ △ ×	58 ~ 65쪽
10 11 12	이차방정식과 이차함수의 관계, 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.	○ △ ×	70 ~ 73쪽
13 23	이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.	○ △ ×	75 ~ 78쪽
14 15 16 24	간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.	○ △ ×	83 ~ 85쪽
17	미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.	○ △ ×	87 ~ 88쪽
18	미지수가 1개인 연립일차부등식과 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.	○ △ ×	89 ~ 93쪽
19 20 21	이차부등식과 이차함수의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다.	○ △ ×	95 ~ 98쪽

성취도 ○ 만족, △ 보통, × 미흡

수학 이야기

이차방정식의 역사

옛날 사람들이 이차방정식을 언제부터 알고 있었으며 어떻게 풀었는지에 대한 정확한 기록은 남아 있지 않지만, 기원전 1800년을 전후해서 이미 간단한 이차방정식을 풀 수 있었던 것으로 짐작된다.

이 무렵 고대 바빌로니아 사람들은 이미 $x^2=2$와 같은 이차방정식을 풀어서

$$\sqrt{2}=1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=1.41421296\cdots$$

과 같이 계산했으며, $c>0$인 경우에 $x^2+bx=c$의 근을

$$x=-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}$$

와 같이 구했다고 한다.

지금과 같이 완전히 일반적인 경우는 아니지만 이차방정식의 근의 공식을 처음으로 발견한 사람은 인도의 수학자인 브라마굽타(Brahmagupta, 598~665?)인데, 628년에 그가 쓴 『우주의 원리에 의해 계시된 올바른 천문학』이라는 책에서 $ax^2+bx=c$의 근을

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$$

와 같이 나타내었다.

지금과 같은 완전한 근의 공식은 12세기 인도 최고의 수학자였던 바스카라(Bhaskara, A., 1114~1185)에 의하여 완성되었다.

이차방정식의 근의 공식이 서양에 처음 소개된 것은 『측정과 계산에 관하여』라는 책을 통해서였다. 스페인의 유대계 수학자인 사바소르다(Savasorda, 1070~1136?)가 쓴 이 책은 그의 사후인 1145년에 출간되었다.

이와 같이 이차방정식의 근을 구하는 방법은 알고 있었지만, '방정식(方程式, equation)'이라는 용어는 훨씬 후에 등장했는데, 유럽에서는 16세기에 이르러서야 'equation'이라는 용어를 사용했다고 한다.

한편, 중국에서는 기원전 200년경에 제작된 수학책인 『구장산술(九章算術)』에서 이미 '방정(方程)'이라는 용어를 사용했다.

(출처: Katz, V. J., 『A History of Mathematics』)

『구장산술세초도설 방정편』

뿌리가 되는 수학

자율 주행 자동차와 연립방정식

자율 주행 자동차는 운전자의 개입 없이 주변 환경을 인식하고, 주행 상황을 판단하여 차량을 제어함으로써 스스로 목적지까지 주행하는 자동차를 말한다. 자율 주행 자동차가 복잡하고 돌발 상황이 많은 도로에서 빠르고 정확하게 판단하기 위해서는 주변 변화를 인지할 수 있는 센서와 함께 수집된 정보를 디지털화하고 전송하는 과정 및 수집된 데이터를 기반으로 다음 행동을 지시하는 인공 지능이 필요하다.

자율 주행에 사용되는 인공 지능 시스템은 자율 주행 중인 자동차의 전방에 보행자나 물체가 감지되었을 때 현재 속도를 기준으로 장애물까지의 도달 시간을 계산한 다음 자동차의 속도를 어떻게 바꾸어야 할지 판단하는데, 이러한 과정에서 방정식, 부등식과 같은 수학적 지식이 이용된다.

예를 들어 시속 40 km로 자율 주행 중인 자동차가 50 m 전방에 있는 과속 방지턱을 감지하고, 일정하게 속도를 줄여 시속 20 km로 과속 방지턱을 넘으려고 한다면 다음과 같이 두 방정식을 연립하여 풀어 가속도와 시간을 구할 수 있다.

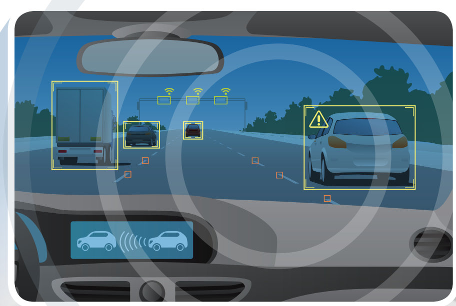
초기 속도를 $v_0=\frac{40}{3.6}$ m/s, 나중 속도를 $v=\frac{20}{3.6}$ m/s,

가속도를 a m/s^2, 시간을 t초, 거리를 $s=50$ m라 하면

$v=v_0+at$, $s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$에서 $\quad \frac{20}{3.6}=\frac{40}{3.6}+at$, $\quad 50=\frac{40}{3.6}t+\frac{1}{2}at^2$

위의 두 방정식을 연립하여 풀면 $\quad t=6$, $\quad a=-0.925925\cdots$

따라서 자율 주행 시스템이 약 -0.93 m/s^{2}의 가속도를 계산해서 명령을 내리면 자동차의 속도가 일정하게 줄어들어 6초 후에 시속 20 km로 과속 방지턱을 넘을 수 있게 된다.



이와 같은 신기술이 더욱 안전하게 정착될 수 있도록 수학적 지식을 바탕으로 기술적 보완을 끊임없이 지속한다면, 머지않아 자율 주행 자동차로 지금보다 훨씬 더 안전하고 편리한 주행을 할 수 있을 것이다.

(출처: 안경환 외, 『자율 주행 자동차 기술 동향』/ Chris Urmson 외, 「Autonomous driving in urban environments: Boss and the Urban Challenge」)