# II 방정식과 부등식

미지수를 정하여 방정식이나 부등식을 만들고 그 해를 구하는 방법은 기원전 2000년경 고대 이집트나 바빌로니아 사람들도 이미 알고 있었다.

16세기에 접어들어 이탈리아의 수학자들은 삼차방정식과 사차방정식의 해법을 발견했는데, 이때 음수의 제곱근을 사용했지만 의미가 없다고 생각했다. 그 이후 수학자들은 음수의 제곱근에 대하여 다시 생각하게 되었으며 이로부터 방정식의 해법이 획기적으로 발전하는 계기가 되었다.

한편, 복소수는 현대 과학과 공학 등을 연구하는 데 매우 중요하게 쓰이며, 컴퓨터의 발전과 함께 그 응용 범위가 점차 넓어지고 있다.


1. 복소수와 이차방정식
2. 이차방정식과 이차함수
3. 여러 가지 방정식과 부등식

**이 단원에서는**

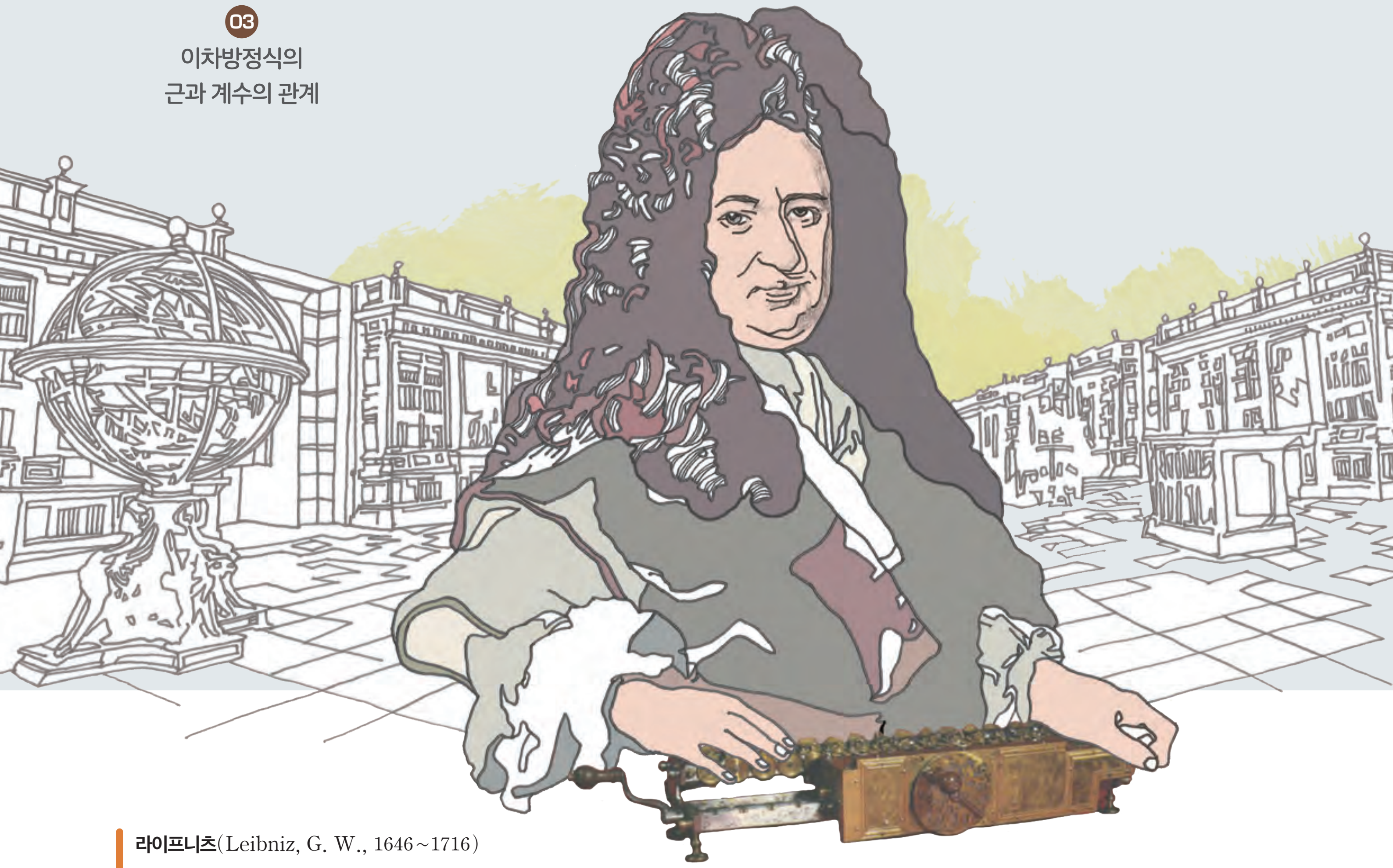
복소수의 뜻과 성질을 이해하고, 이차방정식과 이차함수,
이차부등식과 이차함수의 관계를 알아보며,
여러 가지 방정식과 부등식을 풀어 본다.

# 1 복소수와 이차방정식



“ 허수는 존재와 비존재의 양면성을 가진
신성한 영혼의 아름답고 놀라운 피난처이다. ”

(출처: Klein, F., 『Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis』)



**라이프니츠**(Leibniz, G. W., 1646~1716)
독일의 수학자

이 글은 제곱해서 $-1$이 되는 수는 실수 중에서 존재하지 않지만, 우리의 관념 속에서는 이차방정식 $x^2+1=0$의 근으로 존재하는 양면성에 대해 라이프니츠가 1702년에 한 말이다.

# 01 복소수와 그 연산

**학습 목표**

복소수의 뜻과 성질을 이해하고, 사칙연산을 할 수 있다.

**준비 하기**

다음을 계산하시오.

(1) $(1+2\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})$

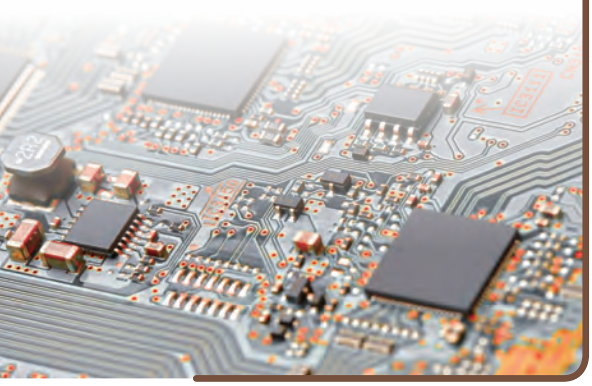
(2) $(3+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})$

(3) $\dfrac{3-\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}$

**다가 서기**

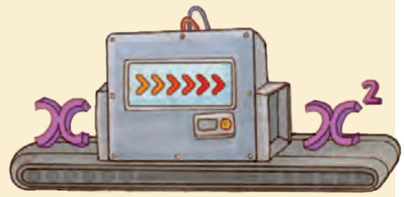
방정식의 해를 모두 표현하는 데 실수만으로는 충분하지 않아서 새로운 수를 생각하게 되었다.

이 새로운 수는 과학과 공학 등에서 다루는 여러 가지 현상을 설명하는 데 활용된다.



## 복소수

**생각 열기** 오른쪽 그림은 실수 $x$를 입력하면 $x^2$의 값이 출력되는 장치이다.




▶ 출력값이 $-1$이 되는 실수 $x$가 있는지 생각해 보고, 그 이유를 말해 보자.

제곱해서 음수가 되는 실수는 없으므로 방정식 $x^2=-1$은 실수의 범위에서 해를 갖지 않는다. 따라서 이 방정식이 해를 가지려면 실수 이외의 새로운 수가 필요하다.

제곱해서 $-1$이 되는 새로운 수를 생각하여 이것을

$$\boldsymbol{i}$$

로 나타내고 **허수단위**라고 한다. 즉,

$$i^2=-1$$

이며, 제곱해서 $-1$이 된다는 뜻에서 $i=\sqrt{-1}$로 나타내기도 한다.

> $i$는 허수단위를 뜻하는 imaginary unit의 첫 글자이다.

실수 $a$, $b$에 대하여

$$\boldsymbol{a+bi}$$

꼴의 수를 **복소수**라고 한다. 이때 $a$를 $a+bi$의 **실수부분**, $b$를 $a+bi$의 **허수부분**이라고 한다.

$$\underbrace{a}_{\text{실수부분}}+\underbrace{b}_{\text{허수부분}}i$$

특히, $0i=0$으로 정하면 실수 $a$는

$$a=a+0=a+0i$$

로 나타낼 수 있으므로 실수도 복소수이다.

이때 실수가 아닌 복소수 $a+bi\,(b\neq 0)$를 **허수**라고 한다.

이상으로부터 복소수는 다음과 같이 분류할 수 있다.

$$\text{복소수 } a+bi \begin{cases} \text{실수 } a & (b=0) \\ \text{허수 } a+bi & (b\neq 0) \end{cases} \quad (a,\ b\text{는 실수})$$

$2-i=2+(-1)i$

보기 ① 복소수 $2-i$의 실수부분은 2, 허수부분은 $-1$이다.
② 세 복소수 3, $4+2i$, $-5i$에서 3은 실수, $4+2i$와 $-5i$는 허수이다.

### 문제 1 다음 복소수의 실수부분과 허수부분을 구하시오.

(1) $3+2i$  (2) $-7$

(3) $4i$  (4) $5-3i$

두 복소수에서 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 서로 같을 때, 두 복소수는 '서로 같다'고 한다. 즉, 두 복소수 $a+bi$, $c+di$($a$, $b$, $c$, $d$는 실수)에 대하여

$$a=c,\ b=d \text{일 때, } a+bi=c+di$$

이다.

특히, $a+bi=0$이면 $a=0$, $b=0$이다.

같다.
$a+bi=c+di$
같다.

보기 $a$, $b$가 실수일 때, $a-3i=2+bi$이면 $a=2$, $b=-3$이다.

### 문제 2 다음 등식이 성립하도록 실수 $a$, $b$의 값을 정하시오.

(1) $a+bi=2+3i$  (2) $a=4+bi$

(3) $3+bi=a-2\sqrt{5}i$  (4) $(a+1)+(b-1)i=-2+i$

한 켤레의 신발처럼 서로 짝이 되는 복소수를 켤레복소수라고 한다.

복소수 $a+bi$($a$, $b$는 실수)에 대하여 허수부분의 부호를 바꾼 복소수 $a-bi$를 $a+bi$의 **켤레복소수**라 하며, 이것을 기호로

$$\overline{a+bi}$$

와 같이 나타낸다. 즉,

$$\overline{a+bi}=a-bi$$

이다. 또,

$$\overline{a-bi}=a+bi$$

이므로 두 복소수 $a+bi$와 $a-bi$는 서로 켤레복소수이다.

생각톡톡

켤레복소수가 자기 자신과 같은 수는 어떤 수일까?

보기 $\overline{3+i}=3-i$, $\overline{5}=5$, $\overline{-2-4i}=-2+4i$, $\overline{-\sqrt{2}i}=\sqrt{2}i$

**문제 3** 다음 복소수의 켤레복소수를 구하시오.

(1) $3-2i$ (2) $-1+\sqrt{3}i$

(3) $-6$ (4) $2i$

## 복소수의 사칙연산

오일러(Euler, L., 1707~1783)
스위스의 수학자로 허수를 나타내기 위한 기호 $i$를 처음 사용했다고 한다.

복소수의 덧셈과 뺄셈은 허수단위 $i$를 문자처럼 생각하여 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 모아서 다음과 같이 계산한다.

### 복소수의 덧셈과 뺄셈

$a, b, c, d$가 실수일 때,

① $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

② $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

**예제 1** 다음을 계산하시오.

(1) $(1+3i)+(2-i)$ (2) $(5+4i)-(4-3i)$

풀이 (1) $(1+3i)+(2-i)=(1+2)+\{3+(-1)\}i$
$=3+2i$

(2) $(5+4i)-(4-3i)=(5-4)+\{4-(-3)\}i$
$=1+7i$

답 (1) $3+2i$ (2) $1+7i$

**문제 4** 다음을 계산하시오.

(1) $(2-5i)+3i$ (2) $(2+3i)-(-4+i)$

다음을 통해 복소수의 곱셈을 알아보자.

**함께하기** 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

활동 ❶ 허수단위 $i$를 문자처럼 생각하여 다항식의 곱셈에서와 같이 다음 식을 전개해 보자. (단, $a$, $b$, $c$, $d$는 실수이다.)

$$(a+bi)(c+di)=\underset{①}{\boxed{\phantom{xx}}}+\underset{②}{\boxed{\phantom{xx}}}+\underset{③}{\boxed{\phantom{xx}}}+\underset{④}{\boxed{\phantom{xx}}}$$

활동 ❷ $i^2=-1$임을 이용하여 활동 ❶의 결과를 간단히 해 보자.

$$(a+bi)(c+di)=(\boxed{\phantom{xx}})+(\boxed{\phantom{xx}})i$$

**봄벨리**(Bombelli, Raphael, 1526~1572)
이탈리아의 수학자로 복소수의 곱셈에서 허수단위를 문자처럼 생각하여 계산하는 방법을 처음 체계화했다.

위의 활동으로부터 다음을 알 수 있다.

### 복소수의 곱셈

$a$, $b$, $c$, $d$가 실수일 때,

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

**예제 2** $(2+3i)(1-i)$를 계산하시오.

풀이 $(2+3i)(1-i)=2-2i+3i-3i^2=2-2i+3i+3$

$=5+i$

답 $5+i$

생각 톡톡

복소수와 그 켤레복소수의 곱은 어떤 수일까?

**문제 5** 다음을 계산하시오.

(1) $(5+2i)(2+3i)$

(2) $(3+2i)(3-2i)$

복소수의 나눗셈은 분모의 켤레복소수를 분자, 분모에 곱하여 계산한다. 즉, $a$, $b$, $c$, $d$가 실수이고 $c+di\neq0$일 때, 다음과 같이 계산한다.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

### 복소수의 나눗셈

$a$, $b$, $c$, $d$가 실수이고 $c+di\neq0$일 때,

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

**예제 3** 다음을 $a+bi$의 꼴로 나타내시오. (단, $a$, $b$는 실수이다.)

(1) $\dfrac{2}{1+i}$ (2) $\dfrac{2+i}{3-i}$

**풀이** (1) $\dfrac{2}{1+i}=\dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2-2i}{1+1}=1-i$

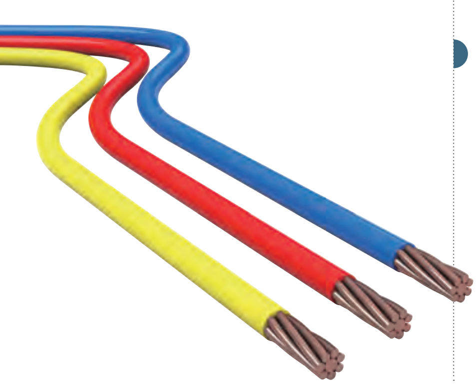
(2) $\dfrac{2+i}{3-i}=\dfrac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{5+5i}{9+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

답 (1) $1-i$ (2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

**문제 6** 다음을 $a+bi$의 꼴로 나타내시오. (단, $a$, $b$는 실수이다.)

(1) $\dfrac{1}{2-5i}$ (2) $\dfrac{1-3i}{3+2i}$

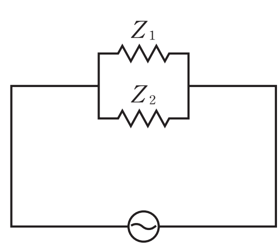
(3) $\dfrac{1}{i}$ (4) $\dfrac{1+i}{1-i}$



**문제 7** 교류 회로에서 전류가 흐르기 어려운 정도를 나타내는 임피던스는 복소수 $a+bi$의 꼴로 나타낸다. 오른쪽 그림과 같이 임피던스의 값이 각각 $Z_1$, $Z_2$인 저항을 병렬로 연결시킨 교류 회로에서 임피던스 $Z$는

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}$$

로 주어진다. $Z_1=3+i$, $Z_2=1+2i$일 때, 이 회로의 임피던스를 구하시오.



## 음수의 제곱근

어떤 수 $x$를 제곱하여 $a$가 될 때, 즉 $x^2=a$일 때 $x$를 $a$의 제곱근이라고 한다.

음수의 제곱근을 알아보자.

두 복소수 $\sqrt{3}i$와 $-\sqrt{3}i$에 대하여

$$(\sqrt{3}i)^2=3i^2=-3, \quad (-\sqrt{3}i)^2=3i^2=-3$$

이므로 $-3$의 제곱근은 $\sqrt{3}i$와 $-\sqrt{3}i$이다.

일반적으로 $a>0$일 때,

$$(\sqrt{a}i)^2=ai^2=-a, \quad (-\sqrt{a}i)^2=ai^2=-a$$

이므로 $-a$의 제곱근은 $\sqrt{a}i$와 $-\sqrt{a}i$이다.

이때 $\sqrt{a}i$를 $\sqrt{-a}$로 나타내기로 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

### 음수의 제곱근

$a>0$일 때,

❶ $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$ ❷ $-a$의 제곱근은 $\sqrt{a}i$와 $-\sqrt{a}i$이다.

$\sqrt{a}i$와 $-\sqrt{a}i$를 간단히 $\pm\sqrt{a}i$로 나타내기도 한다.

보기 ① $\sqrt{-2}=\sqrt{2}i$ ② $-9$의 제곱근은 $3i$와 $-3i$이다.

**문제 8** 다음 수의 제곱근을 구하시오.

(1) $-4$ (2) $-\dfrac{2}{3}$

**생각 넓히기**

문제 해결 | **추론** | 창의·융합 | **의사소통** | 정보 처리 | 태도 및 실천

허수단위 $i$의 거듭제곱의 규칙을 이용하여 오른쪽 식의 값을 구하려고 한다.

$$i+i^2+i^3+\cdots+i^{20}$$

활동 ❶ $n$이 자연수일 때, 다음 표를 완성해 보자.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i^n$ | $i$ | | | | | | | | $\cdots$ |

활동 ❷ 활동 ❶의 결과를 바탕으로 발견할 수 있는 규칙을 말해 보자.

활동 ❸ 활동 ❷에서 찾은 규칙을 이용하여 주어진 식의 값을 구해 보자.

탐구 & 융합

# 복소수에서도 대소 관계를 정할 수 있을까?

창의·융합 | 태도 및 실천

프랑스의 수학자 데카르트(Descartes, R., 1596～1650)는 실수를 수직선 위에 나타내었고, 수직선 위에 나타낼 수 없는 수를 상상의 수라는 뜻으로 허수(imaginary number)라고 했다.

실수는 수직선 위에 나타낼 수 있으므로 대소 관계를 확인할 수 있다. 즉, 두 실수 $a$, $b$에 대하여 수직선 위에서 실수 $b$를 나타내는 점이 실수 $a$를 나타내는 점보다 오른쪽에 있으면 $a<b$와 같이 대소 관계를 정한다.

따라서 두 실수 $a$, $b$에 대하여 반드시 오른쪽 세 가지 중 어느 하나만 성립함을 알 수 있다.

$$a>b, \quad a=b, \quad a<b$$

또한, 실수에서의 대소 관계는 다음과 같은 성질을 갖는다.

실수의 대소 관계에 대한 성질

세 실수 $a$, $b$, $c$에 대하여

① $a>b$이고 $c>0$이면 $ac>bc$  ② $a>b$이고 $c<0$이면 $ac<bc$

그렇다면 복소수에서도 실수에서와 같이 위의 성질을 만족시키는 대소 관계를 정할 수 있을까? 이를 위해 우선 허수단위 $i$와 0 사이에 실수에서와 같은 대소 관계를 정할 수 있는지 알아보자.

❶ $i>0$인 경우: 위의 성질 ①에 의하여

$$i\times i>0\times i=0$$

이고 $i\times i=i^2=-1$이므로, $-1>0$이 되어서 모순이다.

❷ $i=0$인 경우: 양변에 $i$를 곱하면

$$i\times i=0\times i=0$$

이고 $i\times i=i^2=-1$이므로, $-1=0$이 되어서 모순이다.

❸ $i<0$인 경우: 위의 성질 ②에 의하여

$$i\times i>0\times i=0$$

이고 $i\times i=i^2=-1$이므로, $-1>0$이 되어서 모순이다.

따라서 허수단위 $i$와 0 사이에 실수에서와 같은 대소 관계를 정할 수 없다. 이를 통해 복소수에서는 실수에서와 같은 대소 관계를 정할 수 없음을 알 수 있다.

# 02 이차방정식의 판별식

학습 목표

이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 알며, 이차방정식에서 판별식의 뜻을 이해하고, 이를 설명할 수 있다.

준비하기

다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2-3x+2=0$

(2) $x^2-2x-1=0$

## 이차방정식의 실근과 허근

생각 열기 다음과 같은 두 이차방정식이 있다.

ㄱ. $x^2+4x+2=0$ ㄴ. $x^2-3x+3=0$

▶ 실수의 범위에서 근을 갖는 이차방정식을 말해 보자.

지금까지는 이차방정식의 근을 실수의 범위에서 구하였으나 이제부터는 복소수의 범위에서 구할 수 있는지 알아보자.

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 공식

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

에서

$b^2-4ac\geq0$이면 $\sqrt{b^2-4ac}$ 는 실수,

$b^2-4ac<0$이면 $\sqrt{b^2-4ac}$ 는 허수

이다.

따라서 계수가 실수인 이차방정식은 복소수의 범위에서 반드시 근을 갖는다.

이때 실수인 근을 **실근**, 허수인 근을 **허근**이라고 한다.

보기 이차방정식 $x^2-4x+5=0$을 근의 공식을 이용하여 풀면

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times5}}{2\times1}$$

$$=\frac{4\pm2i}{2}=2\pm i$$

따라서 $x=2+i$ 또는 $x=2-i$

생각 톡톡

계수가 실수인 이차방정식이 서로 다른 두 허근을 가질 때, 두 허근은 어떤 관계일까?

다가서기

리트머스 시험지를 이용하면 용액이 산성인지 알칼리성인지를 판별할 수 있다.

이차방정식의 경우에도 근을 직접 구하지 않고, 그 근이 실수인지 허수인지를 판별하는 방법이 있다.

**문제 1** 다음 이차방정식을 풀고, 그 근이 실근인지 허근인지를 말하시오.

(1) $x^2-3x+6=0$ (2) $2x^2-5x+1=0$

## 이차방정식의 판별식

**생각 열기** 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $b^2-4ac$의 값의 부호를 판단하고, 그 근이 실근인지 허근인지를 조사하여 다음 표를 완성해 보자.

| $ax^2+bx+c=0$ | $b^2-4ac$의 값의 부호 | 실근, 허근 |
|---|---|---|
| $x^2+2x-1=0$ | $2^2-4\times1\times(-1)=8>0$ | 실근 |
| $4x^2-4x+1=0$ | | |
| $x^2-3x+4=0$ | | |

위의 **생각 열기**에서와 같이 이차방정식의 근을 직접 구하지 않고도 그 근이 실근인지 허근인지를 판별할 수 있다.

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

가 실근인지 허근인지는 근호 안에 있는 $b^2-4ac$의 값의 부호에 따라 다음과 같이 결정된다.

(i) $b^2-4ac>0$이면　서로 다른 두 실근

(ii) $b^2-4ac=0$이면　중근(실근)

(iii) $b^2-4ac<0$이면　서로 다른 두 허근

**실베스터**(Sylvester, J. J., 1814~1897)
영국의 수학자로 판별식의 기호 $D$를 처음 사용했다고 한다.

이와 같이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근을 $b^2-4ac$의 값의 부호에 따라 판별할 수 있으므로 $b^2-4ac$를 이차방정식의 **판별식**이라 하고, 기호 $D$로 나타낸다. 즉,

$$D=b^2-4ac$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

### 이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac$라 할 때,

1. $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
2. $D=0$이면 중근(실근)을 갖는다.
3. $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 실근을 가질 조건은
$D=b^2-4ac\geq0$
이다.

**예제 1** 다음 이차방정식의 근을 판별하시오.

(1) $x^2+4x-1=0$ (2) $x^2-8x+16=0$ (3) $x^2-3x+5=0$

**풀이** (1) 이차방정식 $x^2+4x-1=0$의 판별식 $D$는

$D=4^2-4\times1\times(-1)=20>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) 이차방정식 $x^2-8x+16=0$의 판별식 $D$는

$D=(-8)^2-4\times1\times16=0$이므로 중근을 갖는다.

(3) 이차방정식 $x^2-3x+5=0$의 판별식 $D$는

$D=(-3)^2-4\times1\times5=-11<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

답 (1) 서로 다른 두 실근 (2) 중근 (3) 서로 다른 두 허근

**문제 2** 다음 이차방정식의 근을 판별하시오.

(1) $x^2-3x+2=0$ (2) $x^2+6x+9=0$

(3) $2x^2-4x+3=0$ (4) $3x^2+x+1=0$

**예제 2** 이차방정식 $x^2-4x+a-5=0$이 실근을 갖도록 실수 $a$의 값의 범위를 정하시오.

**풀이** 주어진 이차방정식이 실근을 가지려면 판별식 $D$가 $D\geq0$이어야 하므로

$$D=(-4)^2-4\times1\times(a-5)=36-4a\geq0$$

따라서 $a\leq9$

답 $a\leq9$

**문제 3** 이차방정식 $x^2+2x+3-a=0$이 다음과 같은 근을 갖도록 실수 $a$의 값 또는 범위를 정하시오.

(1) 중근 (2) 서로 다른 두 허근

탐구 **문제 4** 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $a$와 $c$의 부호가 다르면 이 이차방정식은 항상 서로 다른 두 실근을 가짐을 설명하시오. (단, $c\neq0$)

# 03 이차방정식의 근과 계수의 관계

**학습 목표**

이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.

**준비 하기**

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\square$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\square}{\alpha\beta}$

**다가 서기**

지도상의 길이와 축척을 이용하면 두 도시 사이의 거리를 직접 측정하지 않고도 구할 수 있다.

이차방정식에서도 근과 계수의 관계를 이용하면 두 근을 직접 구하지 않고도 두 근의 합과 곱을 구할 수 있다.

## 이차방정식의 근과 계수의 관계

**생각 열기** 이차방정식 $x^2-2x-8=0$의 두 근과 계수 사이의 관계를 알아보려고 한다.

❶ 두 근의 합을 구하고, 그 값을 $x$의 계수와 비교해 보자.

❷ 두 근의 곱을 구하고, 그 값을 상수항과 비교해 보자.

이차방정식의 두 근의 합과 곱이 각 항의 계수와 어떤 관계가 있는지 알아보자.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

라 하면, 합 $\alpha+\beta$와 곱 $\alpha\beta$는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=-\frac{b}{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\beta&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}\\&=\frac{c}{a}\end{aligned}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

**이차방정식의 근과 계수의 관계**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

**참고** 계수가 실수인 이차방정식에서 두 근의 합과 곱은 항상 실수이다.

보기 이차방정식 $3x^2-4x+2=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{-4}{3}=\frac{4}{3},\quad \alpha\beta=\frac{2}{3}$$

**문제 1** 다음 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 구하시오.

(1) $x^2-3x+3=0$　　(2) $2x^2+5x-4=0$

(3) $3x^2-4x=0$　　(4) $-2x^2-7x+6=0$

**예제 1** 이차방정식 $x^2-3x+5=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\alpha^2+\beta^2$　　(2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

주어진 식을 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 식으로 변형한다.

풀이 근과 계수의 관계로부터　$\alpha+\beta=3$,　$\alpha\beta=5$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\times5=-1$

(2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3}{5}$

답 (1) $-1$　(2) $\frac{3}{5}$

**문제 2** 이차방정식 $4x^2+3x+8=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $(\alpha+1)(\beta+1)$　　(2) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$

탐구 **문제 3** 다음은 이차방정식 $x^2+ax+b=0$을 푼 후 나눈 대화이다. (단, $a$, $b$는 실수이다.)


(1) 근과 계수의 관계를 이용하여 $a$, $b$의 값을 구하시오.

(2) (1)의 결과를 이용하여 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 근을 구하시오.

## 두 수를 근으로 하는 이차방정식

다음을 통해 두 수를 근으로 하는 이차방정식을 구하는 방법을 알아보자.

**함께하기** 두 수 $\alpha$, $\beta$를 근으로 하고 $x^2$의 계수가 1인 이차방정식을 구하려고 한다. 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

> 구하는 이차방정식을
> $$x^2+bx+c=0$$
> 이라 하면, 근과 계수의 관계로부터
> $$\boxed{\phantom{aaa}}=-b,\quad \boxed{\phantom{aa}}=c$$
> 이므로
> $$x^2+bx+c=x^2-(\boxed{\phantom{aaa}})x+\boxed{\phantom{aa}}=0$$
> 이다.

위의 활동으로부터 다음이 성립함을 알 수 있다.

### 두 수를 근으로 하는 이차방정식

두 수 $\alpha$, $\beta$를 근으로 하고 $x^2$의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

두 근의 합

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

두 근의 곱

**예제 2** 다음 두 수를 근으로 하고 $x^2$의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

(1) $1+\sqrt{2},\quad 1-\sqrt{2}$ (2) $3+5i,\quad 3-5i$

**풀이** (1) 두 근의 합과 곱을 구하면

(두 근의 합)$=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$

(두 근의 곱)$=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=1^2-(\sqrt{2})^2=1-2=-1$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-2x-1=0$이다.

(2) 두 근의 합과 곱을 구하면

(두 근의 합)$=(3+5i)+(3-5i)=6$

(두 근의 곱)$=(3+5i)(3-5i)=3^2-(5i)^2=9+25=34$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-6x+34=0$이다.

답 (1) $x^2-2x-1=0$ (2) $x^2-6x+34=0$

**문제 4** 다음 두 수를 근으로 하고 $x^2$의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

(1) $2, \quad -3$

(2) $\sqrt{5}+1, \quad \sqrt{5}-1$

(3) $-3+i, \quad -3-i$

(4) $4+\sqrt{2}i, \quad 4-\sqrt{2}i$

**예제 3** 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 할 때, $\frac{1}{\alpha}$과 $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고 $x^2$의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

**풀이** 근과 계수의 관계로부터 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=5$이므로

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2}{5}, \quad \frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}=0$이다.

답 $x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}=0$

**문제 5** 이차방정식 $2x^2+6x+1=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 할 때, 다음 두 수를 근으로 하고 $x^2$의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

(1) $\alpha+\beta, \quad \alpha\beta$

(2) $\alpha+1, \quad \beta+1$

## 이차식의 인수분해

계수가 실수인 이차식 $ax^2+bx+c$의 인수분해는 지금까지 실수의 범위에서 생각하였지만 이차방정식의 근을 이용하면 복소수의 범위에서도 할 수 있다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면 근과 계수의 관계로부터

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\} \\ &= a(x-\alpha)(x-\beta) \end{aligned}$$

따라서 계수가 실수인 이차식은 복소수의 범위에서 항상 두 일차식의 곱으로 인수분해할 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

### 이차식의 인수분해

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

**예제 4** 다음 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해하시오.

(1) $x^2-6x+7$ (2) $x^2+4x+5$

**풀이** (1) 이차방정식 $x^2-6x+7=0$의 근은 $x=3\pm\sqrt{2}$이므로

$$\begin{aligned}x^2-6x+7&=\{x-(3+\sqrt{2})\}\{x-(3-\sqrt{2})\}\\&=(x-3-\sqrt{2})(x-3+\sqrt{2})\end{aligned}$$

(2) 이차방정식 $x^2+4x+5=0$의 근은 $x=-2\pm i$이므로

$$\begin{aligned}x^2+4x+5&=\{x-(-2+i)\}\{x-(-2-i)\}\\&=(x+2-i)(x+2+i)\end{aligned}$$

답 (1) $(x-3-\sqrt{2})(x-3+\sqrt{2})$ (2) $(x+2-i)(x+2+i)$

**문제 6** 다음 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해하시오.

(1) $x^2+8$ (2) $x^2+5x+5$

(3) $x^2-8x+4$ (4) $3x^2-2x+3$

**생각 넓히기**

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

이탈리아의 수학자 카르다노(Cardano, G., 1501~1576)는 1545년에 발간한 『위대한 술법』에서, 합이 10이고 곱이 40인 두 수를 찾는 문제를 제시했다.

활동 ❶ 두 근의 합이 10이고 곱이 40일 때, $x^2$의 계수가 1인 이차방정식을 구해 보자.

활동 ❷ 활동 ❶에서 구한 이차방정식을 풀고, 주어진 조건을 모두 만족시키는 두 수를 찾아보자.


2013년에 발행된 카르다노 기념 우표

Ⅱ-1. 복소수와 이차방정식

# 중단원 마무리하기

## 복소수

(1) 실수 $a$, $b$에 대하여 $a+bi$ 꼴의 수를 **복소수**라 하고, $a$를 **실수부분**, $b$를 **허수부분**이라고 한다.

(2) **복소수가 서로 같을 조건**

두 복소수 $a+bi$, $c+di$($a$, $b$, $c$, $d$는 실수)에 대하여 $a=c$, $b=d$일 때, $a+bi=c+di$이다.

(3) **켤레복소수**: $a$, $b$가 실수일 때,

$$\overline{a+bi}=a-bi$$

(4) **복소수의 사칙연산**: $a$, $b$, $c$, $d$가 실수일 때,

1. $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
2. $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
3. $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$
4. $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ (단, $c+di\neq0$)

(5) **음수의 제곱근**: $a>0$일 때,

1. $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$
2. $-a$의 제곱근은 $\sqrt{a}i$와 $-\sqrt{a}i$이다.

## 이차방정식의 판별식

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 판별식 $D=b^2-4ac$라 할 때,

1. $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
2. $D=0$이면 중근(실근)을 갖는다.
3. $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

## 이차방정식의 근과 계수의 관계

(1) **이차방정식의 근과 계수의 관계**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

(2) **두 수를 근으로 하는 이차방정식**

두 수 $\alpha$, $\beta$를 근으로 하고 $x^2$의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

(3) **이차식의 인수분해**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

## 기본

**01** 다음 등식이 성립하도록 실수 $x$, $y$의 값을 정하시오.

(1) $(x-3)+(2-y)i=0$

(2) $(2x+y)-yi=6i$

**02** 다음 복소수의 켤레복소수를 구하시오.

(1) $-3+4i$ (2) $-5+\sqrt{2}i$

**03** 다음을 계산하시오.

(1) $(2+i)+(1-3i)$

(2) $(3-2i)-(2-3i)$

(3) $(-3+i)(2-i)$

(4) $\dfrac{2-i}{3+4i}$

**04** 다음 이차방정식의 근을 판별하시오.

(1) $3x^2+4x-1=0$

(2) $9x^2+12x+4=0$

(3) $5x^2-x+3=0$

**05** 이차방정식 $2x^2-4x+1=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\alpha^2+\beta^2$ (2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

(3) $(\alpha-1)(\beta-1)$ (4) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

표 준

**06** 등식 $(1+i)(x-yi)=3+i$를 만족시키는 실수 $x$, $y$에 대하여 $x^2+y^2$의 값을 구하시오.

**07** 등식 $3z-2\overline{z}=2+15i$를 만족시키는 복소수 $z$에 대하여 $z\overline{z}$의 값을 구하시오.

(단, $\overline{z}$는 $z$의 켤레복소수이다.)

**08** 두 복소수 $z=5+3i$, $w=4-i$에 대하여 $\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{w}}$의 값을 구하시오.

(단, $\overline{w}$는 $w$의 켤레복소수이다.)

**09** 이차방정식 $x^2-6x+2a-1=0$이 서로 다른 두 허근을 갖도록 실수 $a$의 값의 범위를 정하시오.

|서·술·형|

**10** 이차방정식 $x^2+ax-6=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이고, 이차방정식 $x^2+bx+18=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$일 때, $a+b$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

(단, $a$, $b$는 실수이다.)

11 다음을 만족시키는 두 수 $\alpha$, $\beta$를 구하시오.

(1) $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=5$ (2) $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-4$

발 전

12 실수가 아닌 두 복소수 $z$, $w$가 $z+\overline{w}=0$을 만족시킬 때, 항상 실수인 것만을 **보기**에서 있는 대로 고르시오. (단, $\overline{z}$, $\overline{w}$는 각각 $z$, $w$의 켤레복소수이다.)

**보기**

ㄱ. $w-\overline{z}$ ㄴ. $i(z+w)$ ㄷ. $z\overline{w}$ ㄹ. $\dfrac{\overline{z}}{w}$

사고력+

13 $x$에 대한 이차방정식

$$x^2-2(a+b)x+(a-b)^2+3ab-5a-3b-2=0$$

이 중근을 갖도록 하는 정수 $a$, $b$에 대하여 $ab$의 값 중에서 가장 큰 값을 구하시오.

|서·술·형|

14 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $b$를 잘못 보고 풀었더니 두 근이 $-2$와 $\dfrac{1}{3}$이 되었고, $c$를 잘못 보고 풀었더니 두 근이 2와 $-\dfrac{5}{2}$가 되었다. 처음 이차방정식의 근을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.