2 나머지정리와 인수분해

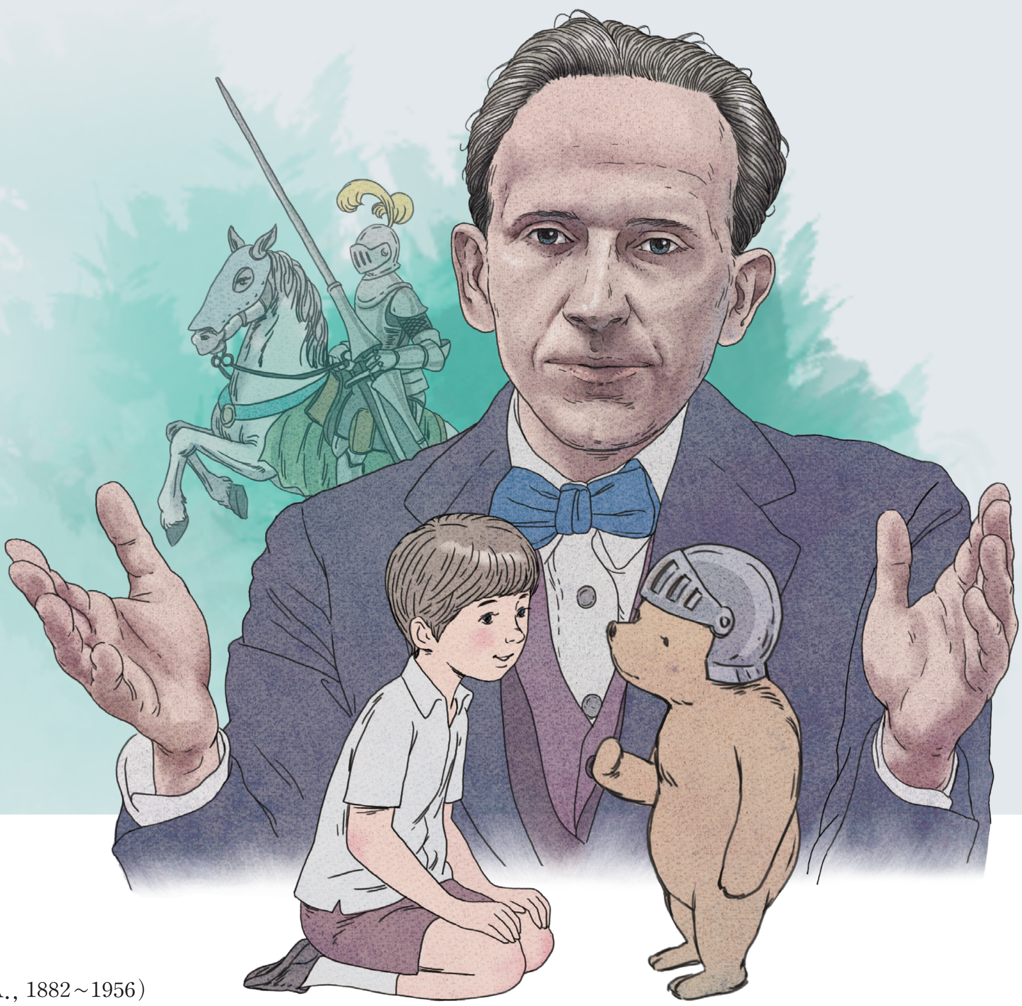
01 항등식

02 나머지정리

03 인수분해

“하지만 인수분해보다는 장엄해.”

(출처: 앨런 밀른, 『푸우 코너에 있는 집』)



앨런 밀른(Milne, A. A., 1882~1956)

영국의 작가

이 글은 동화 『푸우 코너에 있는 집』의 끝부분에서, 말을 타는 기사를 동경하는 푸우에게 크리스토퍼 로빈이 수학에서 중요하게 쓰이는 인수분해와 비교해서 말을 타는 기사가 중요한 사람임을 설명하는 장면에서 한 말이다.

01 항등식

학습 목표

항등식의 성질을 이해한다.

준비하기

다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $(x+2)(x-3)=x^2+\square x+\square$

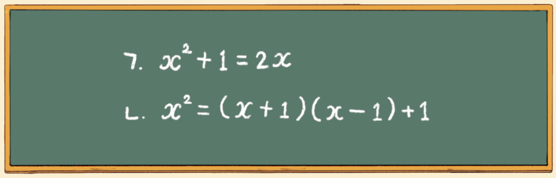
(2) $(x+1)^3=x^3+\square x^2+\square x+1$

다가서기

호텔의 객실은 열쇠가 다 다른데 모든 객실을 열 수 있는 마스터키가 있다. 등식에서도 모든 실수에 대하여 항상 성립하는 항등식이 있다.

항등식의 성질

생각 열기 칠판에 다음과 같은 두 등식이 적혀 있다.



❶ 등식 ㄱ을 성립하게 하는 실수 x의 값을 구해 보자.

❷ 등식 ㄴ을 성립하게 하는 실수 x의 값을 구해 보자.

항등식은 주어진 식의 문자에 어떤 값을 대입해도 항상 성립하는 등식이다.

위의 **생각 열기**에서 등식 $x^2=(x+1)(x-1)+1$은 항등식이고, 등식 $x^2+1=2x$는 $x=1$일 때만 성립하므로 항등식이 아니다.

예제 1 등식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=b=c=0$이 성립함을 설명하시오.

풀이 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 x에 어떤 값을 대입해도 등식이 항상 성립하므로 $x=0$, $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면

$$c=0,\quad a+b+c=0,\quad a-b+c=0$$

$c=0$을 나머지 두 식에 대입한 후 연립하여 풀면 $a=0, b=0$

따라서 $a=b=c=0$

답 풀이 참조

문제 1 등식 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이 성립함을 설명하시오.

이상으로부터 다음을 알 수 있다.

항등식의 성질

❶ $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=b=c=0$이다.

❷ $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.

항등식의 성질을 이용하여 주어진 등식에서 정해져 있지 않은 계수를 정하는 방법을 **미정계수법**이라고 한다. 미정계수법에는 양변에서 동류항의 계수를 비교하여 계수를 정하는 방법과 문자에 적당한 수를 대입하여 계수를 정하는 방법이 있다.

예제 2 등식 $a(x-1)^2+b(x-1)+c=x^2+4x-3$이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c의 값을 정하시오.

풀이 1 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$$ax^2-(2a-b)x+a-b+c=x^2+4x-3$$

양변에서 동류항의 계수를 비교하면

$$a=1,\quad -(2a-b)=4,\quad a-b+c=-3$$

이므로 $a=1$, $b=6$, $c=2$

풀이 2 양변에 $x=1$, $x=0$, $x=2$를 각각 대입해도 주어진 등식이 성립해야 하므로

$$c=2,\quad a-b+c=-3,\quad a+b+c=9$$

$c=2$를 나머지 두 식에 대입한 후 연립하여 풀면 $a=1$, $b=6$

답 $a=1$, $b=6$, $c=2$

문제 2 다음 등식이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c의 값을 정하시오.

(1) $2x^2+ax=(bx+1)(x+c)+3$

(2) $2x^2+3x-1=ax(x+1)+b(x+1)(x-1)+cx(x-1)$

생각 넓히기

문제 해결 | **추론** | 창의·융합 | **의사소통** | 정보 처리 | 태도 및 실천

다음을 각각 등식으로 나타내고, 그 등식이 항등식인 이유를 설명해 보자.

활동 ❶ 연속하는 세 자연수 중 가운데 수의 제곱에서 1을 뺀 것은 양 끝의 두 수의 곱과 같다.

활동 ❷ 연속하는 세 자연수 중 가장 큰 수의 제곱에서 가장 작은 수의 제곱을 빼면 가운데 수의 4배와 같다.

02 나머지정리

학습 목표

나머지정리의 뜻을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

준비하기

다음 다항식을 일차식 $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) x^2-2x+3

(2) x^3+2x^2-x-5

나머지정리

생각 열기 다항식 $f(x)=2x^2+x-3$을 일차식 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 알아보려고 한다.

❶ 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구해 보자.

❷ $f(-1)$의 값을 구하여 ❶의 결과와 비교해 보자.

다항식을 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 간편하게 구하는 방법을 알아보자.

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면 다음이 성립한다.

$$f(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=\alpha$를 대입하면

$$R=f(\alpha)$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같은 **나머지정리**를 얻는다.

다가서기

어떤 수가 3의 배수인지 아닌지는 직접 3으로 나누지 않고 각 자리의 숫자의 합이 3으로 나누어지는지 확인하여 알 수 있다.

다항식을 일차식으로 나누었을 때의 나머지도 직접 나누지 않고 알 수 있는 방법이 있다.

나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$$R=f(\alpha)$$

보기 다항식 $f(x)=x^3-3x^2-4x+2$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지 R는

$$R=f(-2)=(-2)^3-3\times(-2)^2-4\times(-2)+2=-10$$

문제 1 다항식 $f(x)=4x^3-6x^2-2x+1$을 다음 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

(1) $x+1$ (2) $x-2$ (3) $x-\dfrac{1}{2}$

다음을 통해 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지를 구하는 방법을 알아보자.

함께하기 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$f(x)=(ax+b)Q(x)+R=a\left(x+\square\right)Q(x)+R$$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=\square$를 대입하면 $R=f\left(\square\right)$이다.

위의 활동에서 알 수 있듯이 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지는 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$이다.

문제 2 다항식 $f(x)=4x^3-3x+1$을 다음 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

(1) $2x+1$ (2) $3x-1$

예제 1 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 5이고, $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 -4이다. $f(x)$를 $(x-2)(x+1)$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

다항식 $f(x)$를 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 일차 이하의 다항식이므로 나머지를 $ax+b$로 놓는다.

풀이 다항식 $f(x)$를 이차식 $(x-2)(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면 $f(x)=(x-2)(x+1)Q(x)+ax+b$

나머지정리에 의하여 $f(2)=5$, $f(-1)=-4$이므로

$2a+b=5$, $-a+b=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

따라서 구하는 나머지는 $3x-1$이다.

답 $3x-1$

문제 3 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 3이고, $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는 -5이다. $f(x)$를 $(x-1)(x+3)$으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

인수정리

다항식 $f(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $x-\alpha$는 $f(x)$의 인수이다.

나머지정리에 의하여 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$이다. 이때 $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어지고, $f(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $f(\alpha)=0$이다.

이상을 정리하면 다음과 같은 **인수정리**를 얻는다.

인수정리

다항식 $f(x)$에 대하여

① $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

② $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $f(\alpha)=0$이다.

예제 2 다항식 $f(x)=x^3-2x^2+4x+a$가 $x+1$로 나누어떨어지도록 상수 a의 값을 정하시오.

풀이 $f(x)=x^3-2x^2+4x+a$가 $x+1$로 나누어떨어지려면 인수정리에 의하여 $f(-1)=0$이어야 한다.

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3-2\times(-1)^2+4\times(-1)+a \\ &= -7+a \\ &= 0 \end{aligned}$$

따라서 $a=7$

답 7

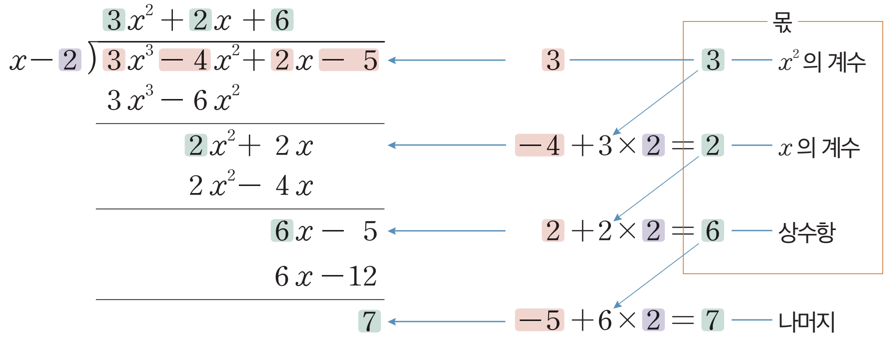
문제 4 다항식 $f(x)=x^3-3x^2+ax+6$이 $x-2$로 나누어떨어지도록 상수 a의 값을 정하시오.

문제 5 다항식 $f(x)=2x^3+ax^2+x+b$가 $(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지도록 상수 a, b의 값을 정하시오.

조립제법

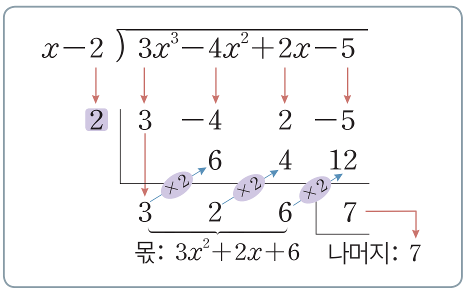
다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나눌 때, 계수만을 사용하여 몫과 나머지를 구하는 방법을 알아보자.

예를 들어 다항식 $3x^3-4x^2+2x-5$를 일차식 $x-2$로 나누면 다음과 같다.



따라서 몫은 $3x^2+2x+6$이고 나머지는 7이다.

위의 나눗셈에서 계수만을 사용하여 몫과 나머지를 다음과 같이 구할 수 있다.



조립제법은 다항식을 일차식으로 나누는 경우에만 이용한다.

다항식을 일차식으로 나눌 때, 이와 같이 계수만을 사용하여 몫과 나머지를 구하는 방법을 **조립제법**이라고 한다.

예제 3 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

$$(x^3-2x+1)\div(x+2)$$

조립제법을 이용할 때는 차수가 높은 항의 계수부터 차례대로 적는다. 이때 해당되는 차수의 항이 없으면 그 자리에 0을 적는다.

풀이 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하면 x^3-2x+1을 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 x^2-2x+2이고 나머지는 -3이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ & & -2 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \boxed{-3} \end{array}$$

답 몫: x^2-2x+2, 나머지: -3

문제 6 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(x^3-3x^2+x-5)\div(x-2)$ (2) $(2x^3+3x^2+15)\div(x+3)$

예제 4 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

$$(2x^3+3x^2-4x-5)\div(2x-1)$$

풀이 $2x-1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하면 $2x^3+3x^2-4x-5$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2+4x-2$이고 나머지는 -6이다. 즉,

$\frac{1}{2}$	2	3	-4	-5
		1	2	-1
	2	4	-2	-6

$$\begin{aligned}2x^3+3x^2-4x-5&=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+4x-2)-6\\&=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2+2x-1)-6\\&=(2x-1)(x^2+2x-1)-6\end{aligned}$$

따라서 $2x^3+3x^2-4x-5$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 x^2+2x-1이고 나머지는 -6이다.

답 몫: x^2+2x-1, 나머지: -6

문제 7 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(2x^3+3x^2-x-4)\div(2x+1)$ (2) $(6x^3-x^2-5x+3)\div(3x-2)$

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

나머지정리를 활용하여 2018^{10}을 2017로 나누었을 때의 나머지를 구하려고 한다.

활동 1 다항식 x^{10}을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$x^{10}=(x-1)Q(x)+R \quad \cdots\cdots ①$$

가 성립한다. 이때 R의 값을 구해 보자.

활동 2 조립제법을 이용하여 몫 $Q(x)$를 구하고, $Q(2018)$이 자연수임을 확인해 보자.

활동 3 ①의 양변에 $x=2018$을 대입하고, 활동 1과 활동 2의 결과를 이용하여 2018^{10}을 2017로 나누었을 때의 나머지를 구해 보자.

공학적 도구

정보 처리 | 태도 및 실천

몫과 나머지 구하기

컴퓨터 프로그램인 스프레드시트를 이용하여 다항식 $2x^3-8x^2+3x+5$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구해 보자.

❶ 셀 A1에 $x-2$의 '2'를 입력한다.

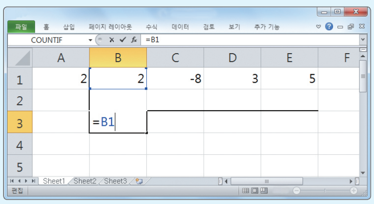
❷ 셀 B1, C1, D1, E1에 $2x^3-8x^2+3x+5$의 각 항의 계수 '2, -8, 3, 5'를 차례대로 입력한다.

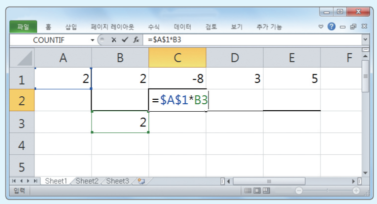
❸ 셀 B3에 '=B1'을 입력한다.

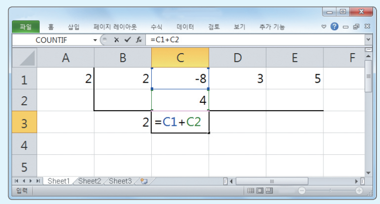
❹ 셀 C2에 '=A1*B3'을 입력한다.

❺ 셀 C3에 '=C1+C2'를 입력한다.

❻ 셀 C2, C3을 '채우기 핸들'을 이용하여 셀 E2, E3까지 드래그한다.

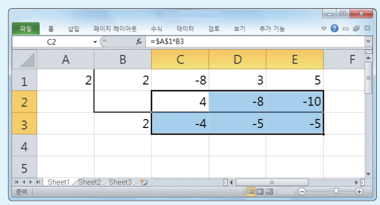






이때 셀 B3, C3, D3의 값 2, -4, -5는 몫의 계수이고, 셀 E3의 값 -5는 나머지이다.

즉, 다항식 $2x^3-8x^2+3x+5$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2-4x-5$이고 나머지는 -5이다.



따라서 삼차식을 x의 계수가 1인 일차식으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하려면, 셀 A1과 셀 B1, C1, D1, E1에 바뀐 값을 입력하여 구할 수 있다.

확인 1 위와 같은 방법으로 다항식 $3x^3-5x^2+7x-2$를 $x+3$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구해 보자.

2 스프레드시트를 이용하여 다항식 $2x^4-5x^3-x^2+6x+3$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구해 보자.

03 인수분해

학습 목표

다항식의 인수분해를 할 수 있다.

준비하기

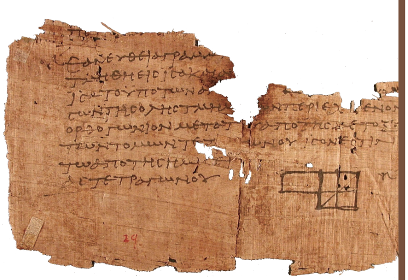
다음 식을 인수분해하시오.

(1) $5a^2b-3ab^2$

(2) x^2-5x+6

다가서기

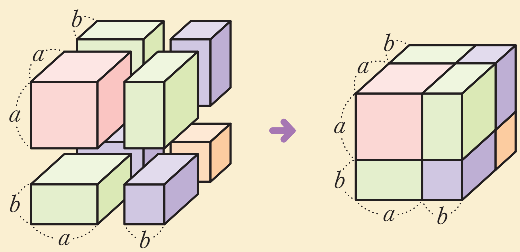
고대 그리스 사람들은 대수적 연산을 하기 위해 도형을 이용하여 여러 가지 항등식을 만들었다고 한다. 이러한 항등식은 다항식의 인수분해에 이용되고, 다항식의 인수분해는 방정식의 풀이에 이용된다.



그리스 로마 시대의 파피루스

인수분해 공식

생각 열기 다음 그림과 같이 직육면체 모양의 블록 8개를 맞추어 한 모서리의 길이가 $a+b$인 정육면체를 만들었다.



주어진 도형의 부피를 이용하여 다음 등식이 성립함을 설명해 보자.

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$$

하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 인수분해는 다항식의 전개 과정을 거꾸로 생각한 것이다.

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} (a+b)^3$$

다음 인수분해 공식은 17쪽의 **곱셈 공식** (1)과 18쪽의 **곱셈 공식** (2)에서 얻은 것이다.

인수분해 공식

❶ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,\quad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

❷ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

❸ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

❹ $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

❺ $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

❻ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3,\quad a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

❼ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),\quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

예제 1 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^3+6x^2+12x+8$ (2) a^3-27b^3

풀이 (1) $x^3+6x^2+12x+8=x^3+3\times x^2\times 2+3\times x\times 2^2+2^3$

$=(x+2)^3$

(2) $a^3-27b^3=a^3-(3b)^3$

$=(a-3b)\{a^2+a\times 3b+(3b)^2\}$

$=(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$

답 (1) $(x+2)^3$ (2) $(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$

문제 1 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^3-9x^2+27x-27$ (2) x^3-1

(3) $a^2+4b^2+c^2-4ab+4bc-2ca$ (4) $27a^3+8b^3$

인수분해 공식을 직접 이용할 수 없는 경우에는 공식을 이용할 수 있도록 식을 적절히 변형한다.

예제 2 다음 식을 인수분해하시오.

$(x^2+2x)(x^2+2x-1)-6$

공통부분을 하나의 문자로 놓고 인수분해한다.

풀이 $x^2+2x=X$로 놓으면

$(x^2+2x)(x^2+2x-1)-6=X(X-1)-6$

$=X^2-X-6=(X-3)(X+2)$

$=(x^2+2x-3)(x^2+2x+2)$

$=(x-1)(x+3)(x^2+2x+2)$

답 $(x-1)(x+3)(x^2+2x+2)$

문제 2 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $(x+y)^2+3(x+y)-10$ (2) $(x^2-3x+1)(x^2-3x+5)+3$

예제 3 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^4-x^2-12 (2) x^4+x^2+1

풀이 (1) $x^2=X$로 놓으면

$$x^4-x^2-12=X^2-X-12=(X-4)(X+3)$$
$$=(x^2-4)(x^2+3)=(x+2)(x-2)(x^2+3)$$

(2) A^2-B^2의 꼴로 변형하면

$$x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2$$
$$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

답 (1) $(x+2)(x-2)(x^2+3)$ (2) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

(2) $x^2=X$로 놓았을 때, X에 대한 이차식이 인수분해되지 않으면 A^2-B^2의 꼴로 변형해 본다.

문제 3 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^4-5x^2+4 (2) x^4-8x^2-9

(3) x^4+2x^2+9 (4) $x^4-3x^2y^2+9y^4$

두 개 이상의 문자를 포함하는 식을 인수분해할 경우에는 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해한다.

예제 4 다항식 $2x^2-5xy-3y^2+x+4y-1$을 인수분해하시오.

풀이 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$2x^2-5xy-3y^2+x+4y-1$$
$$=2x^2-(5y-1)x-3y^2+4y-1$$
$$=2x^2-(5y-1)x-(3y-1)(y-1)$$
$$=\{x-(3y-1)\}\{2x+(y-1)\}$$
$$=(x-3y+1)(2x+y-1)$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -(3y-1) & \rightarrow & -6y+2 \\ 2 & & y-1 & \rightarrow & y-1 \\ \hline & & & & -5y+1 \end{array}$$

답 $(x-3y+1)(2x+y-1)$

문제 4 다항식 $2x^2-xy-y^2+3x+1$을 인수분해하시오.

인수정리를 이용한 인수분해

인수정리를 이용하여 다항식을 인수분해하는 방법을 알아보자.

예를 들어 다항식 $f(x)=x^3-4x^2+x+6$이 계수가 정수인 두 다항식의 곱으로 다음과 같이 인수분해된다고 하자.

$$x^3-4x^2+x+6=(x-a)(x^2+bx+c)$$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 우변을 전개하여 양변의 상수항을 비교하면

$$6=-ac,\text{ 즉 } ac=-6$$

이다. 따라서 정수 a는 ±1, ±2, ±3, ±6 중의 하나이다.

이때 $f(-1)=-1-4-1+6=0$이므로 인수정리에 의하여 $x+1$은 $f(x)$의 인수이다. 따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$\begin{aligned} f(x)&=x^3-4x^2+x+6\\ &=(x+1)(x^2-5x+6)\\ &=(x+1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

다항식 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$이면 $x-a$는 $f(x)$의 인수이므로
$f(x)=(x-a)Q(x)$
와 같이 나타낼 수 있다.

예제 5 다항식 x^3-7x+6을 인수분해하시오.

풀이 $f(x)=x^3-7x+6$이라 하면 $f(1)=0$이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다. 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{aligned} x^3-7x+6&=(x-1)(x^2+x-6)\\ &=(x-1)(x-2)(x+3) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

답 $(x-1)(x-2)(x+3)$

문제 5 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^3+x^2-5x-6

(2) $x^4+2x^3-5x^2-2x+4$

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

인수분해를 이용하여 $\dfrac{997^3-3\times997-2}{997\times999+1}$의 값을 구하려고 한다.

활동 ❶ 두 다항식 $x(x+2)+1$과 x^3-3x-2를 인수분해해 보자.

활동 ❷ 활동 ❶의 두 다항식에 $x=997$을 대입하여 $\dfrac{997^3-3\times997-2}{997\times999+1}$의 값을 구해 보자.

탐구 & 융합

연산에 유용한 다항식의 인수분해

추론 | 창의·융합

다항식의 인수분해를 이용하면 식의 계산에서 연산 구조를 단순화시키고 연산 횟수를 줄일 수 있어서 계산을 쉽게 할 수 있다.

● $99\times99\times99+3\times99\times99+3\times99+1$의 계산

인수분해 공식 ❻

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$$

을 이용하면 오른쪽과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}&99\times99\times99+3\times99\times99+3\times99+1\\&=99^3+3\times99^2\times1+3\times99\times1^2+1^3\\&=(99+1)^3=100^3=1000000\end{aligned}$$

● $\sqrt{16\times17\times18\times19+1}$의 계산

연속한 네 자연수의 곱에 1을 더한 수를 나타낸 식을 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&x(x+1)(x+2)(x+3)+1\\&=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1\\&=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1\\&=(x^2+3x+1)^2\end{aligned}$$

이를 이용하여 오른쪽과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}&\sqrt{16\times17\times18\times19+1}\\&=\sqrt{16(16+1)(16+2)(16+3)+1}\\&=\sqrt{(16^2+3\times16+1)^2}\\&=256+48+1\\&=305\end{aligned}$$

● 1000027이 소수가 아님을 확인하는 방법

인수분해 공식 ❼

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

을 이용하면 오른쪽과 같이 나타낼 수 있으므로 소수가 아님을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}&1000027\\&=1000000+27=100^3+3^3\\&=(100+3)(100^2-100\times3+3^2)\\&=103\times9709\end{aligned}$$

탐구 인수분해를 이용하여 다음에 답하여 보자.

(1) $97^3+9\times97^2+27\times97+27$을 계산해 보자.

(2) 999973이 소수가 아님을 확인해 보자.

중단원 마무리하기

항등식

(1) **항등식의 성질**

① 등식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=b=c=0$이다.

② 등식 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.

(2) 항등식의 성질을 이용하여 주어진 등식에서 정해져 있지 않은 계수를 정하는 방법을 **미정계수법**이라고 한다.

나머지정리

(1) **나머지정리:** 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면 $R=f(\alpha)$이다.

(2) **인수정리:** 다항식 $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $f(\alpha)=0$이다.

(3) 다항식을 일차식으로 나눌 때, 계수만을 사용하여 몫과 나머지를 구하는 방법을 **조립제법**이라고 한다.

인수분해

(1) **인수분해 공식**

① $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

② $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

③ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

④ $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

⑤ $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

⑥ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$
$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

⑦ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(2) **복잡한 식의 인수분해**

① 두 개 이상의 문자를 포함하는 식은 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해한다.

② 삼차 이상의 다항식은 인수정리를 이용하여 인수분해한다.

기본

01 다음 등식이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c의 값을 정하시오.

(1) $(2a-b)x^2+(2-b)x+(c+3)=0$

(2) $x^2+2x-4=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

02 다항식 $f(x)=x^3+3x^2-4x-5$를 다음 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

(1) $x+3$ (2) $2x-1$

03 다항식 $f(x)=x^3+4x^2-5x-a$가 $x+2$로 나누어떨어지도록 상수 a의 값을 정하시오.

04 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $64x^3-27y^3$

(2) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

05 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $(x^2+x)(x^2+x-5)-6$

(2) $x^3-5x^2-2x+24$

표준

06 등식 $2x^2-3x+4=ax(x+1)+bx(x-2)+c(x+1)(x-2)$가 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c의 값을 정할 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오.

07 다항식 $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 3이고, $x+2$로 나누어떨어진다고 한다. 상수 a, b의 값을 구하시오.

|서·술·형|

08 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 7이고, $2x+1$로 나누었을 때의 나머지는 2이다. $f(x)$를 $2x^2-3x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

09 다항식 $x^2-xy-2y^2+x+7y-6$이 $(x+ay+3)(x+by+c)$로 인수분해될 때, 상수 a, b, c에 대하여 $2b-a+c$의 값을 구하시오.

10 다항식 $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+k$가 x에 대한 이차식 $f(x)$의 제곱으로 인수분해될 때, 상수 k의 값과 $f(1)$의 값의 합을 구하시오.

11 다항식 $f(x)=2x^3-3x^2+ax-1$이 $2x-1$로 나누어떨어진다고 할 때, 상수 a의 값을 구하고, $f(x)$를 인수분해하시오.

12 인수분해를 이용하여 $\dfrac{2018^3+1}{2017\times2018+1}$의 값을 구하시오.

발전

사고력+

13 상수 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{10}$에 대하여 등식

$$(x^2-2x-1)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$$

이 x에 대한 항등식일 때, $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$의 값을 구하시오.

|서·술·형|

14 다항식 $f(x)=x^3+ax^2-7x+b$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

15 전력은 단위 시간당 전기 장치에 공급되는 전기 에너지로

$$(\text{전력})=(\text{전압})\times(\text{전류})$$

와 같이 계산한다. 어느 전기 장치에서 시각 t인 순간의 전력이 $P(t)=t^3+9t^2+23t+a$이고 전류는 $I(t)=t+5$일 때, 전압 $V(t)$에 대하여 $V(10)$의 값을 구하시오.

하 중 상

01

두 다항식 A, B에 대하여

$$A+B=3x^2-2xy-y^2,$$
$$A-B=-x^2+4xy+5y^2$$

일 때, $3A+B$를 계산하시오.

02

$(x^3+ax+2)(x^2+bx-2)$를 전개한 식에서 x^2과 x^3의 계수가 모두 0이 되도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① -4 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

03

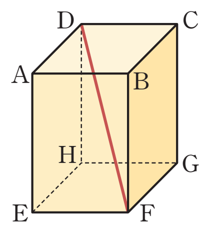
$(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$을 전개하시오.

04

$x+y=4$, $x^3+y^3=40$일 때, x^2+y^2의 값을 구하시오.

05

오른쪽 그림과 같은 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 모든 모서리의 길이의 합은 32 cm이고, 겉넓이는 38 cm^2이다. 이 상자의 대각선 DF의 길이를 구하시오.



06

다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 몫은 $x-1$이고 나머지는 $2x-1$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

07

다항식 x^3-4x^2+ax+6이 x^2-x+b로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 $\frac{b}{a}$의 값은?

① -2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

08

다항식 $f(x)$에 대하여 등식

$$x^{10}-ax^5+b=(x^2-1)f(x)+7x-4$$

가 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b의 값을 정할 때, ab의 값은?

① 15 ② 20 ③ 25

④ 30 ⑤ 35

09

$x+y=2$를 만족시키는 모든 실수 x, y에 대하여 등식

$$ax^2+xy+by^2+x+y-4=0$$

이 항상 성립하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a-b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

10

다항식 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$이고 나머지는 -1이다. $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 3일 때, $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

11

다항식 $f(x)=x^3+px^2+qx-2$가 $(x-1)(x+2)$로 나누어떨어지도록 상수 p, q의 값을 정하시오.

12

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 5이고, $\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 35이다. $f(x)g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

13

다항식 $f(x)$를 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 나머지는 $2x+5$이고, x^2-x-2로 나누었을 때의 나머지는 $3x-2$일 때, $f(x)$를 x^2+x-6으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

14

삼차식 $f(x)$에 대하여 $f(x)+8$은 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지고, $1-f(x)$는 x^2-1로 나누어떨어진다. $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

15

다음은 조립제법을 이용하여 다항식 x^3+ax^2-x+4를 $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하는 과정이다. $a\sim e$의 값으로 옳지 않은 것은?

$$\begin{array}{r|rrrr} e & 1 & a & -1 & b \\ & & c & d & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{2} \end{array}$$

① $a=1$　② $b=4$　③ $c=3$
④ $d=2$　⑤ $e=-2$

16

16^{12}을 15로 나누었을 때의 나머지를 r_1이라 하고, 17^{13}을 18로 나누었을 때의 나머지를 r_2라 할 때, r_1+r_2의 값을 구하시오.

17

$x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$일 때, $x^3+y^3-x^2y-xy^2$의 값을 구하시오.

18

다항식 x^4+64y^4이

$(x^2+axy+by^2)(x^2-axy+by^2)$

으로 인수분해될 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $a>0$)

19

다음 중에서 $(x^2+x-15)(x^2+x-17)-15$의 인수가 아닌 것은?

① $x-4$　② $x-3$　③ $x+3$
④ $x+4$　⑤ $x+5$

20

다항식 x^4+ax^2+b가 $(x+1)^2f(x)$로 인수분해될 때, $f(3)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

21

$f(x)=x^3+7x^2-17x+9$일 때, $f(71)$의 값의 각 자리의 숫자의 합을 구하시오.

22번부터 24번까지 서술형입니다.

22

다항식 $x^{30}-1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, 다음에 답하시오.

(1) 조립제법을 이용하여 $x^{30}-1$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 구하시오.

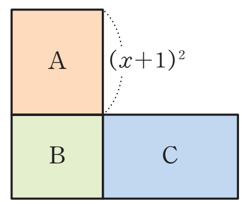
(2) $R(x)$를 구하시오.

23

다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $-3x+1$이고, $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 4이다. $f(x)$를 $(x+1)^2(x-2)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(0)$의 값을 구하시오.

24

오른쪽 그림과 같이 직사각형 A의 세로의 길이는 $(x+1)^2$이고, 세 직사각형 A, B, C의 넓이는 각각



x^3+5x^2+7x+a,

$x^2+5x+2a$,

$x^3+8x^2+18x+4a$

이다. 직사각형 C의 가로의 길이가 x^2+bx+c일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.

자기평가 정답을 맞힌 문항에 ○표 하여 학습 성취도를 표시하고, 부족한 부분은 교과서의 해당 쪽을 확인하여 복습하자.

문항 번호	성취 기준	성취도	복습
01	다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.	○ △ ×	13 ~ 15쪽
02 03 04 05 06 07	다항식의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있다.	○ △ ×	16 ~ 20쪽
08 09	항등식의 성질을 이해할 수 있다.	○ △ ×	26 ~ 27쪽
10 11 12 13 14 15 16 22 23	나머지정리와 인수정리의 뜻을 이해할 수 있다.	○ △ ×	28 ~ 32쪽
17 18 19 20 21 24	다항식을 인수분해할 수 있다.	○ △ ×	34 ~ 37쪽

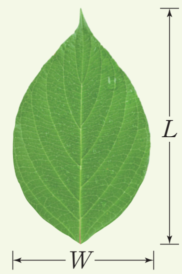
성취도 ○ 만족, △ 보통, × 미흡

수학 이야기

나뭇잎의 넓이와 다항식

식물은 잎을 통해 흡수한 태양의 빛 에너지를 이용하여 필요한 영양분을 스스로 만들어 내어 성장하기 때문에, 특히 과일나무나 채소는 잎의 모양과 크기가 중요한 역할을 한다.

식물학자나 농업을 연구하는 사람들은 나무나 채소가 차지하는 땅의 넓이에 대한 잎 전체의 넓이의 비를 나타내는 '잎 넓이 지수(LAI: Leaf Area Index)'를 연구에 이용한다.



이때 잎 넓이(LA: leaf area)를 오른쪽 그림과 같이 측정한 잎의 폭(W: width)과 길이(L: length)만으로 추정하는 식이 있으면 편리하다.

브라질의 학자들은 계절에 따라 오이와 토마토의 잎 넓이가 잎의 길이와 폭에 따라 어떤 영향을 받는지 연구한 결과를 여러 가지 다항식을 이용한 상관관계로 나타내고 있다. 즉, 잎 넓이 LA를 잎의 길이 L과 폭 W에 대한 일차 또는 이차 다항식으로 다음과 같이 나타내었다.

[오이의 잎 넓이]

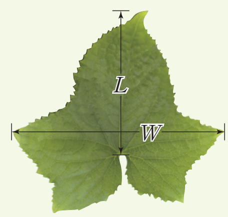
$LA=38.153L-333$ 또는 $LA=1.16L^2-3.1L+11.6$

$LA=38.2W-503$ 또는 $LA=0.36W^2+11.92W-88$

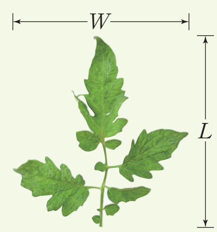
[토마토의 잎 넓이]

$LA=0.35L^2-5.31L+57.6$

$LA=0.708W^2-10.44W+83.4$



오이의 잎



토마토의 잎

한편, 이란의 식물학자는 피스타치오 나뭇잎이 싱싱한 상태(FW: fresh weight)일 때와 마른 상태(DW: dry weight)일 때의 무게(g)와 L과 W의 곱 LW(x mm^2) 사이의 관계를 연구하여 다음과 같은 일차식으로 나타내었다.

$FW=0.0186x-0.0037$

$DW=0.0076x-0.0095$

(출처: Karimi, S. 외, 「Estimation of Leaf Growth on the Basis of Measurements of Leaf Lengths and Widths, Choosing Pistachio Seedlings as Model」)

가상 현실과 다항식

가상 현실(VR: Virtual Reality)은 사람의 시각, 청각, 후각과 같은 감각을 이용해 직접 체험하지 않고도 현실에서 경험하기 어려운 환경에 들어와 있는 것처럼 보여 주고 조작할 수 있게 하는 것이다. 현실 공간에 가상의 물체를 겹쳐 보여 주는 증강 현실(AR: Augmented Reality)도 넓은 범위에서 가상 현실이라 할 수 있다. 가상 현실을 활용한 기술은 의료, 교육, 게임 등 일상생활의 모든 영역에 접목되어 사용될 만큼 그 활용 범위가 넓다.

가상 현실을 구현할 때 가장 중요한 것은 이용자가 가상의 공간 안에 실제로 들어가 있다고 느끼는 몰입감이다. 헤드셋 형태의 HMD(Head Mounted Display)를 착용하면 가상의 공간이 펼쳐지는데, 현실에서 고개를 오른쪽으로 돌리면 가상의 공간에서도 오른쪽으로 돌아간 영상을 보여 준다.

이처럼 몸의 움직임을 가상의 공간에서 쫓아가는 기술을 '트래킹'이라 하는데, 이는 기기 속에 들어 있는 '자이로 센서'를 이용해 구현된다.

자이로(gyro)는 라틴어로 '회전하는 것'이라는 뜻으로, 자이로 센서는 물체의 회전 속도를 구하는데, 어떤 물체가 회전 운동 할 때 생기는 속도는 '코리올리 힘(Coriolis force)'을 전기적 신호로 변환하여 계산할 수 있다.

이때 코리올리 힘의 크기는 직선 운동 중인 물체의 질량에 대한 다항식으로 나타내어 계산할 수 있다.

이와 같이 가상의 공간을 체험하거나 360° 사진을 볼 때, 그 콘텐츠를 이용하는 사람의 위치나 회전에 따라 이동하는 듯한 느낌을 주는 것이 바로 자이로 센서의 역할이다.

(출처: Martín Monteiro 외, 「Acceleration measurements using smartphone sensors: Dealing with the equivalence principle」)