홍범준 | 신사고수학콘텐츠연구회

SINSAGO

수학의 **쎈** 힘을 키우는 사전식 **개념 기본서**

개념 SSEN

확률과 통계

새교육과정

Best Choice for Math
개념 기본서
개념 쎈

좋은책 신사고

홍범준 | 신사고수학콘텐츠연구회

ㅎ|ㄴㅏ고
| S I N S A G O |

수학의 **쎈** 힘을 키우는 사전식 **개념 기본서**

개념SSEN

확률과 통계

새교육과정

Best Choice for Math
개념 기본서
개념 쎈

좋은책 신사고

기획 및 집필

홍범준 (주)좋은책신사고 대표이사 | 서울대 수학과 | 신사고 쎈 수학 시리즈, 우공비 수학 시리즈, 일품 수학 시리즈

신사고수학콘텐츠연구회 대한민국 수학 교육의 리더 좋은책신사고의 수학 전문 콘텐츠 연구회

개념SSEN

꿈을 이룬 내일을 상상합니다. Dreams come true

이 책을 공부할 ____________ 에게,

모바일로 만나는 우리의 꿈, 행복, 자유.
내 마음을 콕 알아 주는
mobile 나를 바꾸는 힘

머리말

수학은 논리적이고 체계적인 학문입니다. 수학을 공부함으로써 합리적, 추상적, 통합적, 창의적 사고력을 기르고 이를 바탕으로 종합적인 문제 해결 능력을 키울 수 있습니다. 이러한 능력은 이공 계열 관련 학문뿐 아니라 인문·사회·예체능 계열과 같이 수학과 무관해 보이는 분야에 진출한 사람에게도 요구되는 것으로, 수학을 배워야 하는 가장 중요한 이유입니다.

이에 필자는 여러분들이 수학의 힘을 키울 수 있도록 개념기본서 **개념쎈**을 집필하였고, 다음과 같은 교재가 되도록 정성을 기울였습니다.

1. 수학적 논리에 엄밀하게 부합하는 교재
2. 고등 교육 과정 내용을 충실히 담은 교재
3. 추상적인 개념을 구체적으로 쉽게 설명한 교재
4. 스스로 문제 해결력을 기를 수 있는 교재
5. 내신과 수능을 모두 대비할 수 있는 교재

개념쎈은 필자가 강의를 하며, 많은 교재를 집필하며 체득한 노하우를 그대로 담았습니다. 수학의 절대 진리가 가지고 있는 간결한 추상 요소들을 사전처럼 잘게 쪼개고 구체적으로 풀어서 각 개념에 맞는 최적의 설명 방법을 찾아 쉽고 자세하게 설명하였습니다.

사전식 개념 기본서 개념쎈으로 수학의 힘을 크게 키우고, 수학 그 자체의 아름다움을 즐길 수 있기를 바랍니다.

저자 홍범준

구성과 특장 STRUCTURE

개념 익힘 학습

- **개념 정리**

교육 과정의 개념을 총망라하고 사전식으로 잘게 나누어 체계적으로 정리하였습니다.

개념 Approach

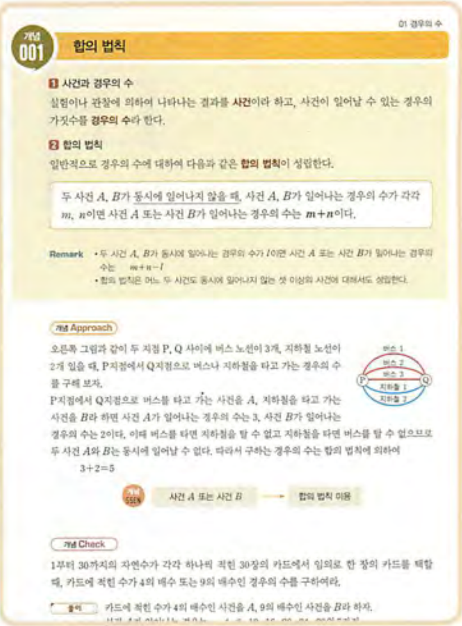
개념 정리 내용을 예를 통해 구체적으로 확인하고, 공식과 성질을 자세하게 설명하여 개념에 대한 완전 학습이 이루어지도록 하였습니다.

개념 SSEN 중요 핵심 사항을 도식화하여 제시

개념 Check

공식과 성질을 이용하여 개념을 확인할 수 있는 문제입니다.

활용의 기술 ① 개념 학습은 수학 공부의 기본이다. 개념을 이해한 후 공식과 성질을 꼭 암기하여 실전에 활용할 수 있도록 하자.



01 경우의 수

개념 001 **합의 법칙**

1 사건과 경우의 수

실험이나 관찰에 의하여 나타나는 결과를 **사건**이라 하고, 사건이 일어날 수 있는 경우의 가짓수를 **경우의 수**라 한다.

2 합의 법칙

일반적으로 경우의 수에 대하여 다음과 같은 **합의 법칙**이 성립한다.

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $\boldsymbol{m+n}$이다.

Remark • 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수가 l이면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n-l$
• 합의 법칙은 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않는 셋 이상의 사건에 대해서도 성립한다.

개념 Approach

오른쪽 그림과 같이 두 지점 P, Q 사이에 버스 노선이 3개, 지하철 노선이 2개 있을 때, P지점에서 Q지점으로 버스나 지하철을 타고 가는 경우의 수를 구해 보자.

P지점에서 Q지점으로 버스를 타고 가는 사건을 A, 지하철을 타고 가는 사건을 B라 하면 사건 A가 일어나는 경우의 수는 3, 사건 B가 일어나는 경우의 수는 2이다. 이때 버스를 타면 지하철을 탈 수 없고 지하철을 타면 버스를 탈 수 없으므로 두 사건 A와 B는 동시에 일어날 수 없다. 따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$$3+2=5$$

개념 SSEN 사건 A 또는 사건 B → 합의 법칙 이용

개념 Check

1부터 30까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 30장의 카드에서 임의로 한 장의 카드를 택할 때, 카드에 적힌 수가 4의 배수 또는 9의 배수인 경우의 수를 구하여라.

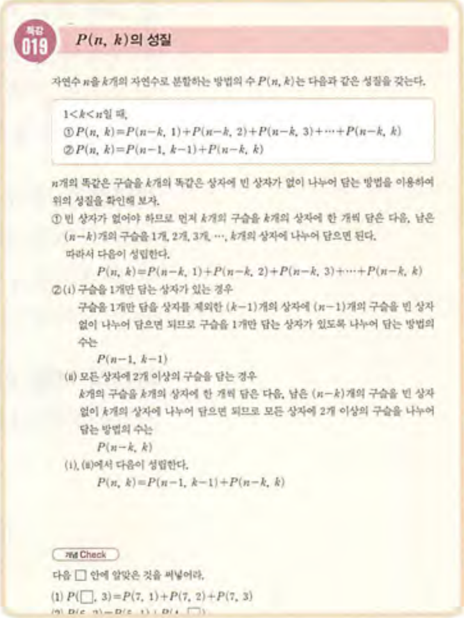
풀이 카드에 적힌 수가 4의 배수인 사건을 A, 9의 배수인 사건을 B라 하자.

개념 특강 학습

- **특강**

교과서에서 다루지는 않지만 실전에 꼭 필요한 개념, 이미 알고 있는 것이지만 문제에 적용하기 어려운 개념을 별도로 구성하였습니다. 또 개념을 바로 확인할 수 있는 개념 Check 문제를 구성하였습니다.

활용의 기술 ② 교과서에 나오지 않는다고 대충 넘어가지 않는다. 다른 교재에서 다시 학습할 수 없으니 더 꼼꼼하게 이해하고 숙지하자. 그 효과는 실전에서 확인할 수 있다.



특강 019 **$P(n, k)$의 성질**

자연수 n을 k개의 자연수로 분할하는 방법의 수 $P(n, k)$는 다음과 같은 성질을 갖는다.

$1<k<n$일 때,
① $P(n, k)=P(n-k, 1)+P(n-k, 2)+P(n-k, 3)+\cdots+P(n-k, k)$
② $P(n, k)=P(n-1, k-1)+P(n-k, k)$

n개의 똑같은 구슬을 k개의 똑같은 상자에 빈 상자가 없이 나누어 담는 방법을 이용하여 위의 성질을 확인해 보자.

① 빈 상자가 없어야 하므로 먼저 k개의 구슬을 k개의 상자에 한 개씩 담은 다음, 남은 $(n-k)$개의 구슬을 1개, 2개, 3개, $\cdots$, k개의 상자에 나누어 담으면 된다.
따라서 다음이 성립한다.

$$P(n, k)=P(n-k, 1)+P(n-k, 2)+P(n-k, 3)+\cdots+P(n-k, k)$$

② (i) 구슬을 1개만 담는 상자가 있는 경우
구슬을 1개만 담을 상자를 제외한 $(k-1)$개의 상자에 $(n-1)$개의 구슬을 빈 상자 없이 나누어 담으면 되므로 구슬을 1개만 담는 상자가 있도록 나누어 담는 방법의 수는

$$P(n-1, k-1)$$

(ii) 모든 상자에 2개 이상의 구슬을 담는 경우
k개의 구슬을 k개의 상자에 한 개씩 담은 다음, 남은 $(n-k)$개의 구슬을 빈 상자 없이 k개의 상자에 나누어 담으면 되므로 모든 상자에 2개 이상의 구슬을 나누어 담는 방법의 수는

$$P(n-k, k)$$

(i), (ii)에서 다음이 성립한다.

$$P(n, k)=P(n-1, k-1)+P(n-k, k)$$

개념 Check

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

(1) $P(\square, 3)=P(7, 1)+P(7, 2)+P(7, 3)$

유형 학습

- **대표유형**

실전에 자주 출제되는 문제로, 해결 과정을 꼭 알아 두어야 하는 유형들을 엄선하였습니다.

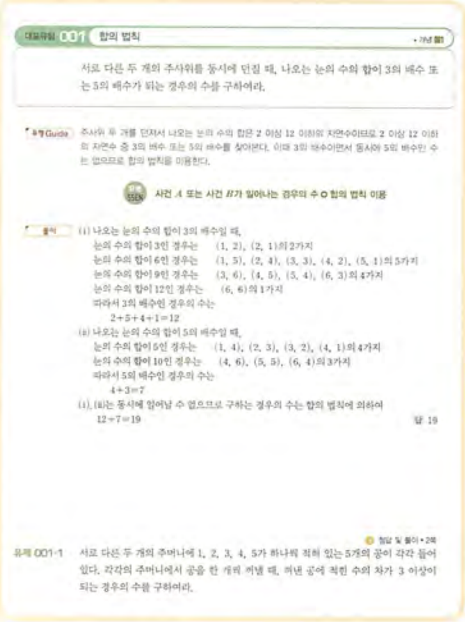
유형 Guide 대표유형의 해결 원리를 자세하게 설명

유형 SSEN 대표유형을 해결하는 핵심 원리를 도식화하여 제시

- **유제**

대표유형과 닮은꼴 문제를 구성하여 유형을 반복 학습할 수 있도록 하였습니다. **Plus 유제**를 구성하여 실전에 적용할 수 있도록 하였습니다.

활용의 기술 ③ 유형 Guide에서 주어진 유형의 구체적인 해결 방법을 익히고, 유형 SSEN의 유형 해결 핵심 방법을 기억하자.



대표유형 001 합의 법칙

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 3의 배수 또는 5의 배수가 되는 경우의 수를 구하여라.

유형 Guide 주사위 두 개를 던져서 나오는 눈의 수의 합은 2 이상 12 이하의 자연수이므로 2 이상 12 이하의 자연수 중 3의 배수 또는 5의 배수를 찾아본다. 이때 3의 배수이면서 동시에 5의 배수인 수는 없으므로 합의 법칙을 이용한다.

유형 SSEN 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수 ⊙ 합의 법칙 이용

풀이 (i) 나오는 눈의 수의 합이 3의 배수일 때,
눈의 수의 합이 3인 경우는 (1, 2), (2, 1)의 2가지
눈의 수의 합이 6인 경우는 (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지
눈의 수의 합이 9인 경우는 (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)의 4가지
눈의 수의 합이 12인 경우는 (6, 6)의 1가지
따라서 3의 배수인 경우의 수는
$2+5+4+1=12$
(ii) 나오는 눈의 수의 합이 5의 배수일 때,
눈의 수의 합이 5인 경우는 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지
눈의 수의 합이 10인 경우는 (4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지
따라서 5의 배수인 경우의 수는
$4+3=7$
(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$12+7=19$ 답 19

정답 및 풀이 • 2쪽

유제 001-1 서로 다른 두 개의 주머니에 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 각각 들어 있다. 각각의 주머니에서 공을 한 개씩 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 수의 차가 3 이상이 되는 경우의 수를 구하여라.

마무리 학습

- **중단원 연습 문제**

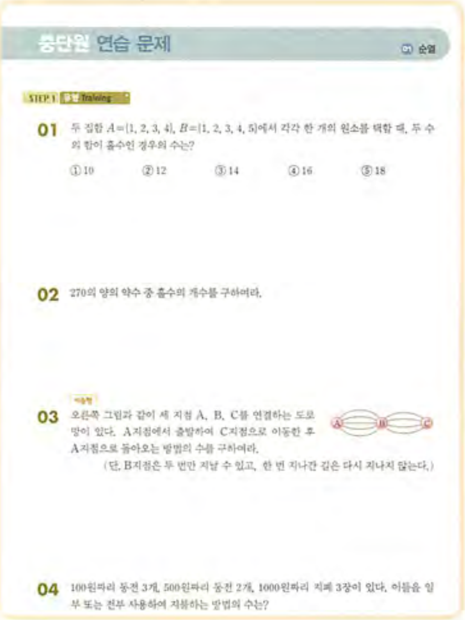
중단원 학습을 마무리할 수 있도록 3단계로 구성하였습니다.

STEP 1 **유형 Training**

STEP 2 **실전 Application**

STEP 3 **심화 Forwarding**

활용의 기술 ④ 다양한 유형의 문제와 기출 문제를 풀어 봄으로써 문제 해결력을 기르고 수능에 대한 자신감을 키우자.



중단원 연습 문제 01 순열

STEP 1 유형 Training

01 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 각각 한 개의 원소를 택할 때, 두 수의 합이 홀수인 경우의 수는?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

02 270의 양의 약수 중 홀수의 개수를 구하여라.

03 오른쪽 그림과 같이 세 지점 A, B, C를 연결하는 도로망이 있다. A지점에서 출발하여 C지점으로 이동한 후 A지점으로 돌아오는 방법의 수를 구하여라.
(단, B지점은 두 번만 지날 수 있고, 한 번 지나간 길은 다시 지나지 않는다.)

04 100원짜리 동전 3개, 500원짜리 동전 2개, 1000원짜리 지폐 3장이 있다. 이들을 일부 또는 전부 사용하여 지불하는 방법의 수는?

차례 CONTENT

Ⅰ 순열과 조합

Ⅱ 확률

Ⅲ 통계

I 순열과 조합

01

순열

우리의 일상은 늘 선택의 문제와 맞닥뜨려 있다. 옷을 고르고 식사 메뉴를 정하는 것과 같이 단순한 경우도 있고, 시험 대비를 위해 공부 순서를 정하거나 야구에서 타순을 정하는 것처럼 서로 다른 여러 개의 물건이나 사람을 한 줄로 세워야 하는 경우도 있다. 이럴 때 가장 효율적인 결정을 내리기 위해서는 그 상황에서 일어날 수 있는 모든 경우의 수를 빠짐없이 중복되지 않게 생각해 봐야 한다.

이 단원에서는 중학교에서 공부한 경우의 수를 바탕으로, 합의 법칙, 곱의 법칙, 순열 등을 이용하여 다양한 상황에서 일어날 수 있는 경우의 수를 구해 보자.

●한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

01 경우의 수

- 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.

02 순열

- 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다.
- ${}_nP_r$의 뜻과 성질을 알고, 이를 이용한 계산을 할 수 있다.


개념 & 특강
대표유형 & 유제
001 합의 법칙
002 곱의 법칙
001 합의 법칙
002 곱의 법칙
003 도로망에서의 방법의 수
004 지불하는 방법의 수
005 색칠하는 방법의 수


003 순열
004 ${}_n\mathrm{P}_r$의 계산
006 ${}_n\mathrm{P}_r$의 계산
007 일렬로 세우는 순열의 수
008 이웃하거나 이웃하지 않는 순열의 수
009 자리가 정해진 순열의 수
010 '적어도 ~인' 순열의 수
011 자연수의 개수 – 순열
012 사전식 배열에서 문자열 찾기

개념 001 합의 법칙

1 사건과 경우의 수

실험이나 관찰에 의하여 나타나는 결과를 **사건**이라 하고, 사건이 일어날 수 있는 경우의 가짓수를 **경우의 수**라 한다.

2 합의 법칙

일반적으로 경우의 수에 대하여 다음과 같은 **합의 법칙**이 성립한다.

> 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $\boldsymbol{m+n}$이다.

Remark

- 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수가 l이면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n-l$
- 합의 법칙은 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않는 셋 이상의 사건에 대해서도 성립한다.

개념 Approach

오른쪽 그림과 같이 두 지점 P, Q 사이에 버스 노선이 3개, 지하철 노선이 2개 있을 때, P지점에서 Q지점으로 버스나 지하철을 타고 가는 경우의 수를 구해 보자.

P지점에서 Q지점으로 버스를 타고 가는 사건을 A, 지하철을 타고 가는 사건을 B라 하면 사건 A가 일어나는 경우의 수는 3, 사건 B가 일어나는 경우의 수는 2이다. 이때 버스를 타면 지하철을 탈 수 없고 지하철을 타면 버스를 탈 수 없으므로 두 사건 A와 B는 동시에 일어날 수 없다. 따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$$3+2=5$$

개념 SSEN 사건 A 또는 사건 B → 합의 법칙 이용

개념 Check

1부터 30까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 30장의 카드에서 임의로 한 장의 카드를 택할 때, 카드에 적힌 수가 4의 배수 또는 9의 배수인 경우의 수를 구하여라.

풀이 카드에 적힌 수가 4의 배수인 사건을 A, 9의 배수인 사건을 B라 하자.

사건 A가 일어나는 경우는 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28의 7가지

사건 B가 일어나는 경우는 9, 18, 27의 3가지

이때 두 사건 A, B는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $7+3=10$

답 10

대표유형 001 합의 법칙

• 개념 001

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 3의 배수 또는 5의 배수가 되는 경우의 수를 구하여라.

유형 Guide 주사위 두 개를 던져서 나오는 눈의 수의 합은 2 이상 12 이하의 자연수이므로 2 이상 12 이하의 자연수 중 3의 배수 또는 5의 배수를 찾아본다. 이때 3의 배수이면서 동시에 5의 배수인 수는 없으므로 합의 법칙을 이용한다.

유형 SSEN **사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수 ○ 합의 법칙 이용**

풀이 (i) 나오는 눈의 수의 합이 3의 배수일 때,

눈의 수의 합이 3인 경우는 (1, 2), (2, 1)의 2가지
눈의 수의 합이 6인 경우는 (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지
눈의 수의 합이 9인 경우는 (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)의 4가지
눈의 수의 합이 12인 경우는 (6, 6)의 1가지

따라서 3의 배수인 경우의 수는

$2+5+4+1=12$

(ii) 나오는 눈의 수의 합이 5의 배수일 때,

눈의 수의 합이 5인 경우는 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지
눈의 수의 합이 10인 경우는 (4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지

따라서 5의 배수인 경우의 수는

$4+3=7$

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$12+7=19$

답 19

정답 및 풀이 • 2쪽

유제 001-1 서로 다른 두 개의 주머니에 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 각각 들어 있다. 각각의 주머니에서 공을 한 개씩 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 수의 차가 3 이상이 되는 경우의 수를 구하여라.

유제 001-2 방정식 $x+6y+10z=40$을 만족시키는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라.

개념 002

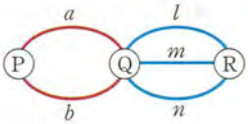
곱의 법칙

일반적으로 경우의 수에 대하여 다음과 같은 **곱의 법칙**이 성립한다.

> 두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 잇달아 일어나는 경우의 수는 $\boldsymbol{m\times n}$이다.

Remark 곱의 법칙은 잇달아 일어나는 셋 이상의 사건에 대해서도 성립한다.

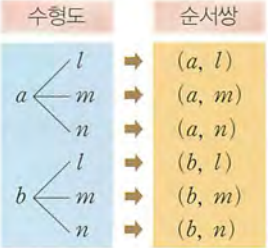
개념 Approach



오른쪽 그림과 같이 P지점에서 Q지점으로 가는 길은 a, b의 2가지이고, Q지점에서 R지점으로 가는 길은 l, m, n의 3가지라 할 때, P지점을 출발하여 Q지점을 거쳐 R지점으로 가는 경우의 수를 구해 보자.
P지점에서 Q지점으로 가는 사건을 A, Q지점에서 R지점으로 가는 사건을 B라 하면 사건 A가 일어나는 경우의 수는 a, b의 2, 사건 B가 일어나는 경우의 수는 l, m, n의 3이다.
이때 두 사건 A, B는 잇달아 일어나므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$$2\cdot 3=6$$

Remark 주어진 조건이 복잡하여 일일이 나열하기 힘든 경우, 수형도 또는 순서쌍을 이용하면 편리하다.
예를 들어 위에서 일어날 수 있는 모든 경우를 수형도와 순서쌍을 이용하여 나타내면 오른쪽과 같다.



개념 SSEN 사건 A, B가 잇달아 ⟶ 곱의 법칙 이용

개념 Check

서로 다른 티셔츠 3벌과 바지 4벌이 있다. 티셔츠와 바지를 각각 하나씩 택하여 입는 방법의 수를 구하여라.

풀이 $3\cdot 4=12$

답 12

대표유형 002 곱의 법칙

• 개념 002

다음을 구하여라.

(1) 다항식 $(p+q)(x+y+z)$의 전개식에서 항의 개수

(2) 108의 양의 약수의 개수

유형 Guide (1) 곱해지는 각 항이 모두 서로 다른 문자이므로 동류항이 생기지 않는다. 이때 전개식의 항은 식 $p+q$의 항 하나와 식 $x+y+z$의 항 하나의 곱의 꼴이다. 즉 p, q 각각에 대하여 x, y, z를 택하는 것과 같으므로 곱의 법칙을 이용한다.

(2) $108=2^2\cdot3^3$이므로 108의 양의 약수는 2^2의 양의 약수 중 하나와 3^3의 양의 약수 중 하나의 곱의 꼴이다. 즉 2^2의 양의 약수 각각에 대하여 3^3의 양의 약수를 택하는 것과 같으므로 곱의 법칙을 이용한다.

유형 SSEN
- **다항식의 전개식에서 항의 개수**
- **자연수의 양의 약수의 개수**

○ **곱의 법칙 이용**

풀이 (1) p, q 중 어느 하나를 택하면 그 각각에 대하여 x, y, z의 3가지의 선택이 가능하므로 구하는 항의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$$2\cdot3=6$$

(2) 108을 소인수분해하면

$$108=2^2\cdot3^3$$

이므로 108의 양의 약수는

$$2^m\cdot3^n\ (m=0,\ 1,\ 2,\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

으로 나타낼 수 있다.

이때 m을 택하는 경우의 수는 3이고, 그 각각에 대하여 n을 택하는 경우의 수는 4이다.

따라서 108의 양의 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$$3\cdot4=12$$

×	1	3	3^2	3^3
1	1×1	1×3	1×3^2	1×3^3
2	2×1	2×3	2×3^2	2×3^3
2^2	$2^2\times1$	$2^2\times3$	$2^2\times3^2$	$2^2\times3^3$

답 (1) 6 (2) 12

Remark (2) 자연수 N이 $N=p^lq^mr^n$ (p, q, r는 서로 다른 소수, l, m, n은 자연수) 꼴로 소인수분해될 때, 자연수 N의 양의 약수의 개수는

$$(l+1)(m+1)(n+1)$$

정답 및 풀이 • 2쪽

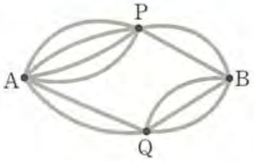
유제 002-1 다항식 $(a+b+c)(p+q)(x+y)$를 전개하였을 때, 항의 개수를 구하여라.

유제 002-2 120과 300의 양의 공약수의 개수를 구하여라.

대표유형 003 도로망에서의 방법의 수

• 개념 001, 002

오른쪽 그림과 같이 네 지점 A, P, Q, B를 연결하는 길이 있다. 다음을 구하여라.



(1) A지점에서 B지점으로 가는 방법의 수

(2) 상현이와 은주가 A지점에서 출발하여 B지점으로 가는 방법의 수

(단, 한 사람이 통과한 중간 지점은 다른 사람이 통과할 수 없다.)

유형 Guide A지점에서 B지점으로 가는 방법은 A → P → B, A → Q → B의 2가지가 있고, 이것은 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙을 이용한다. 이때 각 지점을 이동하는 것은 잇달아 갈 수 있는 길이므로 곱의 법칙을 이용한다.

유형 SSEN

- **동시에 갈 수 없는 길 ➔ 합의 법칙 이용**
- **잇달아 갈 수 있는 길 ➔ 곱의 법칙 이용**

풀이 (1) A지점에서 B지점으로 가는 방법은 A → P → B, A → Q → B의 2가지가 있다.

(i) A → P → B로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여 $4\cdot2=8$

(ii) A → Q → B로 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여 $2\cdot3=6$

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 방법의 수는 합의 법칙에 의하여

$8+6=14$

(2) (i) 상현이가 A → P → B로 가는 방법의 수는 8이고, 은주가 A → Q → B로 가는 방법의 수는 6이므로 곱의 법칙에 의하여 $8\cdot6=48$

(ii) 상현이가 A → Q → B로 가는 방법의 수는 6이고, 은주가 A → P → B로 가는 방법의 수는 8이므로 곱의 법칙에 의하여 $6\cdot8=48$

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 방법의 수는 합의 법칙에 의하여

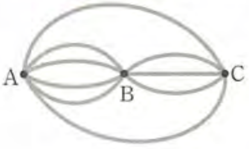
$48+48=96$

답 (1) 14 (2) 96

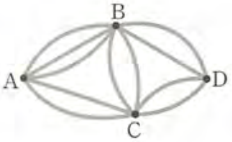
정답 및 풀이 • 2쪽

유제 003-1 오른쪽 그림과 같이 세 지점 A, B, C를 연결하는 길이 있다. A지점에서 출발하여 C지점으로 이동한 후 다시 A지점으로 돌아오는 방법의 수를 구하여라.

(단, B지점은 한 번만 지난다.)



유제 003-2 A, B, C, D 네 지점 사이에 오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. A지점에서 출발하여 D지점으로 가는 방법의 수를 구하여라. (단, 같은 지점은 한 번만 지난다.)



대표유형 004 지불하는 방법의 수

• 개념 002

100원짜리 동전 4개, 50원짜리 동전 3개, 10원짜리 동전 3개의 일부 또는 전부를 사용하여 돈을 지불할 때, 다음을 구하여라. (단, 0원을 지불하는 것은 제외한다.)

(1) 지불하는 방법의 수

(2) 지불할 수 있는 금액의 수

유형 Guide (1) a원짜리 동전 n개를 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, $\cdots$, n개

이므로 지불하는 방법의 수는 $n+1$

(2) 지불하는 금액의 수를 구할 때, a원짜리 동전 1개로 지불하는 금액과 b원짜리 동전 k개로 지불하는 금액이 같으면 a원짜리 동전을 b원짜리 동전 k개로 바꾸어 생각한다.

유형 SSEN **a원짜리 동전 n개의 지불 방법의 수 ➡ $(n+1)$가지**

풀이 (1) 100원짜리 동전을 지불하는 방법은 $0, 1, 2, 3, 4$개의 5가지

50원짜리 동전을 지불하는 방법은 $0, 1, 2, 3$개의 4가지

10원짜리 동전을 지불하는 방법은 $0, 1, 2, 3$개의 4가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

$5\cdot4\cdot4-1=79$

(2) 100원짜리 동전 1개로 지불하는 금액과 50원짜리 동전 2개로 지불하는 금액이 같으므로 100원짜리 동전 4개를 50원짜리 동전 8개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 50원짜리 동전 11개, 10원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은 $0, 50, 100, \cdots, 550$원의 12가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은 $0, 10, 20, 30$원의 4가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는

$12\cdot4-1=47$

답 (1) 79 (2) 47

정답 및 풀이 • 3쪽

유제 004-1 10원짜리 동전 6개, 100원짜리 동전 4개, 1000원짜리 지폐 1장이 있을 때, 이들을 일부 또는 전부 사용하여 지불할 수 있는 금액의 수를 구하여라.

(단, 0원을 지불하는 것은 제외한다.)

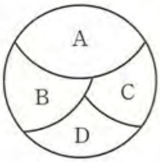
유제 004-2 1000원짜리 지폐 5장, 5000원짜리 지폐 2장, 10000원짜리 지폐 1장의 일부 또는 전부를 사용하여 지불하는 방법의 수를 a, 지불할 수 있는 금액의 수를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, 0원을 지불하는 것은 제외한다.)

대표유형 005 색칠하는 방법의 수

• 개념 002

오른쪽 그림에서 A, B, C, D 4개의 영역을 서로 다른 5가지 색을 이용하여 칠하려고 한다. 다음을 구하여라.

(단, 각 영역에는 한 가지 색만 칠한다.)



(1) 모두 다른 색으로 칠하는 방법의 수

(2) 같은 색을 중복하여 사용해도 좋으나 이웃한 영역은 서로 다른 색으로 칠하는 방법의 수

유형 Guide 각 영역에 칠할 수 있는 색의 개수를 각각 구한다. 이때 각 영역에 색을 칠하는 사건은 잇달아 일어나므로 곱의 법칙을 이용한다.

유형 SSEN 색칠하는 방법의 수 ◎ 곱의 법칙 이용

풀이 주어진 그림에서 A, B, C, D의 순서로 칠할 때

(1) A, B, C, D에 칠할 수 있는 색은 각각 5가지, 4가지, 3가지, 2가지이므로 구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$$5\cdot4\cdot3\cdot2=120$$

(2) A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 B와 C에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

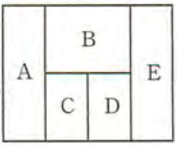
따라서 구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$$5\cdot4\cdot3\cdot3=180$$

답 (1) 120 (2) 180

정답 및 풀이 • 3쪽

유제 005-1 오른쪽 그림에서 A, B, C, D, E 5개의 영역을 서로 다른 4가지 색을 이용하여 칠하려고 한다. 같은 색을 중복하여 사용해도 좋으나 이웃한 영역은 서로 다른 색으로 칠하는 방법의 수를 구하여라. (단, 각 영역에는 한 가지 색만 칠한다.)

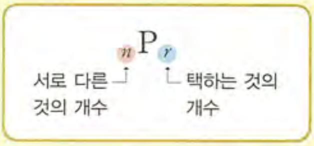


개념 003

순열

1 순열

서로 다른 n개에서 $r\ (0<r\le n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **순열**이라 하고, 이 순열의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{P}_r$와 같이 나타낸다.



Remark ${}_n\mathrm{P}_r$의 P는 순열을 뜻하는 permutation의 첫 글자이다.

2 순열의 수

서로 다른 n개에서 $r\ (0<r\le n)$개를 택하는 순열의 수는

$$ {}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) $$

Remark ${}_n\mathrm{P}_r$는 n에서 시작하여 1씩 작아지는 자연수를 차례대로 r개 곱한 것이다.

개념 Approach

1 순열

3개의 숫자 1, 2, 3에서 서로 다른 두 개의 숫자를 택하여 만들 수 있는 두 자리 자연수의 개수를 구해 보자.

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3의 3가지이고, 그 각각에 대하여 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 십의 자리에 온 숫자를 제외한 2가지씩이므로 구하는 자연수의 개수는

$$3\cdot 2=6$$

이다. 이와 같이 서로 다른 3개에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 3개에서 2개를 택하는 순열이라 하고, 이 순열의 수를 기호로 ${}_3\mathrm{P}_2$와 같이 나타낸다.

2 순열의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열할 때, 첫 번째 자리에 올 수 있는 것은 n가지, 그 각각에 대하여 두 번째 자리에 올 수 있는 것은 첫 번째 자리에 놓인 것을 제외한 $(n-1)$가지이다. 또 세 번째 자리에 올 수 있는 것은 앞의 두 자리에 놓인 것을 제외한 $(n-2)$가지이다. 같은 방법으로 계속하면 r번째 자리에 올 수 있는 것은 앞의 $(r-1)$자리에 놓인 것을 제외한 $(n-r+1)$가지임을 알 수 있다.

첫 번째	두 번째	세 번째	⋯	r번째
↑	↑	↑		↑
n가지	$(n-1)$가지	$(n-2)$가지		$(n-r+1)$가지

따라서 곱의 법칙에 의하여 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수 ${}_n\mathrm{P}_r$는 다음과 같다.

$$ {}_n\mathrm{P}_r=\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{개}}\ (\text{단, } 0<r\le n) $$

개념
004

${}_{n}\mathrm{P}_{r}$의 계산

1 n의 계승

1부터 n까지의 자연수를 차례대로 곱한 것을 n의 **계승**이라 하며, 이것을 기호로 $n!$과 같이 나타낸다. 즉

$$n!=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

Remark $n!$은 'n 팩토리얼(factorial)'이라 읽기도 한다.

2 $n!$을 이용한 순열의 수

① ${}_{n}\mathrm{P}_{n}=n!$, $0!=1$, ${}_{n}\mathrm{P}_{0}=1$

② ${}_{n}\mathrm{P}_{r}=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

개념 Approach

서로 다른 n개에서 n개를 모두 택하는 순열의 수는

$${}_{n}\mathrm{P}_{n}=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

이므로 다음이 성립한다.

$${}_{n}\mathrm{P}_{n}=n!$$

한편 $0<r<n$일 때 순열의 수 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$를 계승을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}{}_{n}\mathrm{P}_{r}&=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\\&=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\\&=\frac{n!}{(n-r)!}\qquad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

여기서 $0!=1$로 정의하면 ${}_{n}\mathrm{P}_{n}=\dfrac{n!}{0!}=n!$이므로 ㉠은 $r=n$일 때도 성립한다.

또 ${}_{n}\mathrm{P}_{0}=1$로 정의하면 ${}_{n}\mathrm{P}_{0}=\dfrac{n!}{n!}=1$이므로 ㉠은 $r=0$일 때도 성립한다.

개념 Check

다음 값을 구하여라.

(1) $3!$ (2) $5!$ (3) ${}_{4}\mathrm{P}_{0}$ (4) $4!\cdot 0!$

풀이 (1) $3!=3\cdot 2\cdot 1=6$ (2) $5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$

(3) ${}_{4}\mathrm{P}_{0}=1$ (4) $4!\cdot 0!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1=24$

답 (1) 6 (2) 120 (3) 1 (4) 24

대표유형 006 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$의 계산

• 개념 003, 004

다음 등식을 만족시키는 n 또는 r의 값을 구하여라.

(1) ${}_{n}\mathrm{P}_{2}=42$　　(2) ${}_{7}\mathrm{P}_{r}=210$　　(3) ${}_{n}\mathrm{P}_{5}=30{}_{n}\mathrm{P}_{3}$

유형 Guide ${}_{n}\mathrm{P}_{r}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$임을 이용하여 주어진 식을 n 또는 r에 대한 방정식으로 나타낸다. 이때 $n\geq r$임에 주의한다.

유형 SSEN ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$ ○ n부터 1씩 작아지는 r개의 자연수의 곱

풀이 (1) ${}_{n}\mathrm{P}_{2}=n(n-1)=42=7\cdot6$이므로　$n=7$

(2) ${}_{7}\mathrm{P}_{r}=210=7\cdot6\cdot5$이므로　$r=3$

(3) ${}_{n}\mathrm{P}_{5}=30{}_{n}\mathrm{P}_{3}$에서

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)=30n(n-1)(n-2)$$

$n\geq5$이므로

$$(n-3)(n-4)=30,\qquad n^2-7n-18=0$$

$$(n+2)(n-9)=0$$

$$\therefore n=9$$

답 (1) 7　(2) 3　(3) 9

다른 풀이 (1) ${}_{n}\mathrm{P}_{2}=n(n-1)=42$에서

$$n^2-n-42=0,\qquad (n+6)(n-7)=0$$

$n\geq2$이므로　$n=7$

정답 및 풀이 • 3쪽

유제 006-1 다음 등식을 만족시키는 n 또는 r의 값을 구하여라.

(1) ${}_{n}\mathrm{P}_{2}=9n$　　(2) ${}_{6}\mathrm{P}_{r}\cdot3!=720$

(3) ${}_{n}\mathrm{P}_{3}+3{}_{n}\mathrm{P}_{2}=60$　　(4) ${}_{n}\mathrm{P}_{4}:{}_{n+1}\mathrm{P}_{3}=10:3$

Plus
유제 006-2 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}={}_{n-1}\mathrm{P}_{r}+r{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$을 증명하여라. (단, $1\leq r<n$)

대표유형 007 일렬로 세우는 순열의 수

• 개념 003, 004

6명의 학생이 있을 때, 다음을 구하여라.

(1) 6명을 일렬로 세우는 방법의 수

(2) 6명 중 4명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수

(3) 6명 중에서 반장과 부반장을 뽑는 방법의 수

유형Guide 서로 다른 n개에서 r개를 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수는 서로 다른 n개에서 순서를 생각하여 r개를 뽑는 방법의 수와 같다. 이때 순서를 생각한다는 뜻은 뽑는 순서가 다른 것은 서로 다른 경우로 생각한다는 뜻이다.

일반적으로 일렬로 세우는 방법의 수를 구할 때뿐 아니라 순서를 생각하여 뽑는 문제나 자격이 다른 대표를 뽑는 문제는 순열의 수를 이용하여 풀 수 있다. 순열과 달리 순서를 생각하지 않고 뽑는 방법의 수는 48쪽에서 공부하도록 하자.

유형 SSEN **일렬로 세우는 방법의 수, 순서를 생각하여 뽑는 방법의 수 ➡ 순열 이용**

풀이 (1) 서로 다른 6개에서 6개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_6P_6=6!=720$$

(2) 서로 다른 6개에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_6P_4=6\cdot5\cdot4\cdot3=360$$

(3) 서로 다른 6개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_6P_2=6\cdot5=30$$

답 (1) 720 (2) 360 (3) 30

정답 및 풀이 • 3쪽

유제 007-1 1번부터 10번까지 10명의 학생 중 회장, 부회장, 서기를 각각 한 사람씩 뽑으려고 한다. 다음을 구하여라.

(1) 모든 방법의 수

(2) 1번이 서기를 하는 방법의 수

Plus
유제 007-2 어떤 야구팀에서 9명의 선수의 타순을 정하려고 하는데 특정한 n명의 타순이 이미 정해져 있다고 한다. 9명의 선수의 타순을 정하는 방법의 수가 120일 때, n의 값을 구하여라.

대표유형 008 이웃하거나 이웃하지 않는 순열의 수

• 개념 **003, 004**

남학생 2명과 여학생 3명을 일렬로 세울 때, 다음을 구하여라.

(1) 남학생이 서로 이웃하도록 세우는 방법의 수

(2) 남학생끼리 이웃하지 않도록 세우는 방법의 수

(3) 남학생과 여학생이 교대로 서는 방법의 수

유형 Guide (1) 이웃하는 것이 있는 순열의 수는 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 나열하는 방법의 수를 구한 다음 이웃하는 것끼리 자리를 바꾸는 방법의 수를 곱하여 구한다.

(2) 이웃하지 않는 것이 있는 순열의 수는 이웃해도 되는 것을 일렬로 나열하는 방법의 수를 구한 다음 나열한 것 사이사이와 양 끝에 이웃하지 않는 것을 나열하는 방법의 수를 곱하여 구한다.

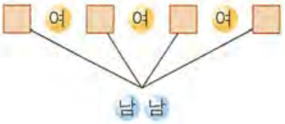
유형 SSEN

- **이웃하는 경우 ○ 이웃하는 것을 하나로 묶어서 생각**
- **이웃하지 않는 경우 ○ 이웃해도 되는 것을 먼저 나열**

풀이 (1) 남학생 2명을 한 묶음으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!=24$

그 각각에 대하여 남학생 2명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는 $24\cdot2=48$

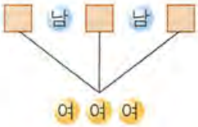


(2) 여학생 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$

여학생 사이사이와 양 끝의 4개의 자리 중에서 2개의 자리에 남학생 2명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$_4P_2=12$

따라서 구하는 방법의 수는 $6\cdot12=72$



(3) 남학생 2명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $2!=2$

남학생 사이와 양 끝의 3개의 자리에 여학생 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는 $2\cdot6=12$

답 (1) 48 (2) 72 (3) 12

다른 풀이 (2) 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $5!=120$

(1)에서 남학생끼리 이웃하도록 세우는 방법의 수가 48이므로 이웃하지 않도록 세우는 방법의 수는 $120-48=72$

정답 및 풀이 • 4쪽

유제 008-1 축구 선수 3명과 야구 선수 4명을 일렬로 세울 때, 다음을 구하여라.

(1) 축구 선수 3명이 서로 이웃하도록 세우는 방법의 수

(2) 축구 선수끼리 이웃하지 않도록 세우는 방법의 수

(3) 축구 선수와 야구 선수가 교대로 서는 방법의 수

대표유형 009 자리가 정해진 순열의 수

• 개념 003, 004

worldcup의 8개의 문자를 일렬로 나열할 때, 다음을 구하여라.

(1) w와 p가 양 끝에 오는 경우의 수

(2) w와 p 사이에 2개의 문자가 있는 경우의 수

유형 Guide (1) 양 끝에 특정한 문자가 오는 경우에는 이 문자를 제외한 나머지 문자를 일렬로 나열한 다음, 특정한 문자를 양 끝에 나열하면 된다. 이때 양 끝에 오는 문자끼리 서로 자리를 바꾸는 경우도 생각해야 함을 주의한다.

(2) 두 문자 x, y 사이에 n개의 문자가 있는 경우에는 $x\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{n\text{개}}y$를 한 묶음으로 생각하여 일렬로 나열한다. x와 y 사이에 들어갈 문자는 순열의 수를 이용하여 구할 수 있고, (1)의 경우와 마찬가지로 양 끝에 오는 문자 x, y가 서로 자리를 바꾸는 경우도 생각해야 한다.

유형 5SEN **특정한 자리에 대한 조건이 있는 경우**
➲ 조건에 맞도록 먼저 나열한 후 나머지를 나열한다.

풀이 (1) w와 p를 제외한 6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$6!=720$

w와 p를 양 끝에 나열하는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$720\cdot 2=1440$

(2) w○○p를 한 묶음으로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$5!=120$

w와 p 사이에 2개의 문자를 나열하는 방법의 수는

${}_6P_2=30$

이때 w와 p의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\cdot 30\cdot 2=7200$

답 (1) 1440 (2) 7200

➲ 정답 및 풀이 • 4쪽

유제 009-1 holiday의 7개의 문자를 일렬로 나열할 때, 다음을 구하여라.

(1) h가 맨 처음에, y가 맨 마지막에 오는 경우의 수

(2) h와 y 사이에 2개의 문자가 있는 경우의 수

대표유형 010 '적어도 ~인' 순열의 수

• 개념 003, 004

mother의 6개의 문자를 일렬로 나열할 때, 적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 경우의 수를 구하여라.

유형 Guide '적어도 하나가 ~인 경우', '~가 아닌 경우'와 같은 사건의 경우의 수는 전체 경우의 수에서 '하나도 ~가 아닌' 경우의 수를 빼면 된다.

즉 적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 사건은 한쪽 끝에만 모음이 오거나 양 끝에 모음이 오는 사건이므로

(적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 순열의 수)

=(전체 순열의 수)−(양 끝에 자음이 오는 순열의 수)

임을 이용한다.

모 ○○○○ 모
모 ○○○○ 자
자 ○○○○ 모
자 ○○○○ 자

적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 경우

유형 SSEN **적어도 하나가 ■인 경우의 수**
⊙ (전체 경우의 수)−(하나도 ■가 아닌 경우의 수)

풀이 적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 경우의 수는 전체 순열의 수에서 양 끝에 자음이 오는 경우의 수를 빼면 된다.

6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$6!=720$

양 끝에 자음인 m, t, h, r의 4개의 문자 중에서 2개를 택하여 나열하는 방법의 수는

${}_4P_2=12$

가운데에 나머지 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$720-12\cdot24=432$

답 432

정답 및 풀이 • 4쪽

유제 010-1 romance의 7개의 문자를 일렬로 나열할 때, 적어도 한쪽 끝에 자음이 오는 경우의 수를 구하여라.

대표유형 011 자연수의 개수 – 순열

• 개념 003, 004

5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 4개의 숫자를 택하여 네 자리 자연수를 만들 때, 다음을 구하여라.

(1) 네 자리 자연수의 개수　　　　(2) 짝수의 개수

유형 Guide (1) 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 올 수 있는 숫자의 개수를 구한다.
(2) 짝수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 2 또는 4이어야 한다. 따라서 일의 자리의 숫자가 0, 2, 4인 경우로 나누어 각 자리에 올 수 있는 숫자의 개수를 구한다.

유형 SSEN 자연수의 개수 ⊙ 가장 앞자리에 0이 오는 것을 제외한다.

풀이 (1) 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지이다. 각각에 대하여 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 천의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 3개를 택하여 나열하면 되므로 구하는 네 자리 자연수의 개수는
$4\cdot{}_4P_3=96$

(2) 짝수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 2 또는 4이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우
천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에는 1, 2, 3, 4의 4개의 숫자 중에서 3개를 택하여 나열하면 되므로　${}_4P_3=24$

(ii) 일의 자리의 숫자가 2 또는 4인 경우
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 3가지이다. 각각에 대하여 백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로　$2\cdot3\cdot{}_3P_2=36$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는　$24+36=60$

답 (1) 96　(2) 60

정답 및 풀이 • 4쪽

유제 011-1 6개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 세 자리 자연수를 만들 때, 다음을 구하여라.

(1) 세 자리 자연수의 개수　　　　(2) 5의 배수의 개수

Plus 유제 011-2 6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 서로 다른 4개의 숫자를 택하여 네 자리 자연수를 만들 때, 다음을 구하여라.

(1) 3의 배수의 개수　　　　(2) 5200보다 작은 자연수의 개수

대표유형 012 사전식 배열에서 문자열 찾기

• 개념 **003, 004**

5개의 문자 a, b, c, d, e를 한 번씩만 사용하여 사전식으로 $abcde$에서 $edcba$까지 배열할 때, 다음에 답하여라.

(1) $bdcea$는 몇 번째에 오는지 구하여라.

(2) 63번째에 오는 문자열을 구하여라.

유형 Guide (1) 순열을 이용하여 $bdcea$ 앞에 오는 문자열의 총 개수를 구한다.
(2) 순열을 이용하여 $a\square\square\square\square$, $b\square\square\square\square$ 꼴의 문자열의 개수를 각각 구한다.

유형 SSEN 사전식 배열에서 문자열 찾기 ○ 순열 이용

풀이 (1) $a\square\square\square\square$ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$
$ba\square\square\square$ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$
$bc\square\square\square$ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$
$bda\square\square$ 꼴인 문자열의 개수는 $2!=2$
이때 $bdcea$는 $bdc\square\square$ 꼴에서 두 번째에 오는 문자열이므로
$$24+6+6+2+2=40\,(\text{번째})$$
에 오는 문자열이다.

$bdcae$, $bdcea$이므로 $bdcea$는 $bdc\square\square$ 꼴에서 두 번째에 오는 문자열이다.

(2) $a\square\square\square\square$ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$
$b\square\square\square\square$ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$
$ca\square\square\square$ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$
$cb\square\square\square$ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$
$cda\square\square$ 꼴인 문자열의 개수는 $2!=2$
이때 $24+24+6+6+2=62$이므로 63번째에 오는 문자열은 $cdbae$이다.

답 (1) 40번째 (2) $cdbae$

정답 및 풀이 • 5쪽

유제 012-1 6개의 문자 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ, ㅂ을 한 번씩만 사용하여 사전식으로 'ㄱㄴㄷㄹㅁㅂ'에서 'ㅂㅁㄹㄷㄴㄱ'까지 배열할 때, 'ㄷㄹㄱㅁㅂㄴ'은 몇 번째에 오는 문자열인지 구하여라.

중단원 연습 문제

STEP 1 유형 Training

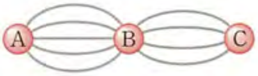
01 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 각각 한 개의 원소를 택할 때, 두 수의 합이 홀수인 경우의 수는?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

02 270의 양의 약수 중 홀수의 개수를 구하여라.

서술형

03 오른쪽 그림과 같이 세 지점 A, B, C를 연결하는 도로망이 있다. A지점에서 출발하여 C지점으로 이동한 후 A지점으로 돌아오는 방법의 수를 구하여라.



(단, B지점은 두 번만 지날 수 있고, 한 번 지나간 길은 다시 지나지 않는다.)

04 100원짜리 동전 3개, 500원짜리 동전 2개, 1000원짜리 지폐 3장이 있다. 이들을 일부 또는 전부 사용하여 지불하는 방법의 수는?

(단, 0원을 지불하는 것은 제외한다.)

① 17 ② 27 ③ 37 ④ 47 ⑤ 57

서술형

05 방정식 ${}_nP_4-6{}_nP_3+20{}_{n-1}P_2=0$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하여라.

06 다음 중 나머지 넷과 다른 하나는?

① 세 사람을 한 줄로 세우는 방법의 수
② 세 사람 중에서 반장, 부반장, 총무를 뽑는 방법의 수
③ 세 사람이 가위바위보를 할 때, 모두 다른 것을 내는 방법의 수
④ 1, 2, 3의 3개의 숫자 중에서 2개를 뽑아 만들 수 있는 두 자리 자연수의 개수
⑤ 0, 1, 2의 3개의 숫자를 모두 사용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수

서술형

07 6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6을 일렬로 나열할 때, 홀수와 짝수를 교대로 나열하는 방법의 수를 구하여라.

STEP 2 실전 Application

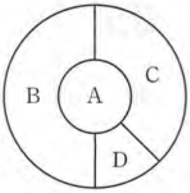
08 부등식 $5x+y\leq 12$를 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

서술형

09 크기가 서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 6 이상이 되는 경우의 수를 구하여라.

10 오른쪽 그림에서 A, B, C, D 4개의 영역을 서로 다른 4가지 색을 이용하여 칠하려고 한다. 같은 색을 중복하여 사용해도 좋으나 이웃한 영역은 서로 다른 색으로 칠하는 방법의 수를 구하여라. (단, 각 영역에는 한 가지 색만 칠한다.)



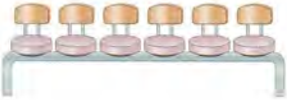
11 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 $f: X \longrightarrow Y$의 개수를 구하여라.

(가) $f(1)=3,\ f(2)=4$
(나) $x_1 \in X,\ x_2 \in X$일 때, $x_1 \neq x_2$이면 $\quad f(x_1) \neq f(x_2)$

교육청기출

12 그림과 같이 의자 6개가 나란히 설치되어 있다. 여학생 2명과 남학생 3명이 모두 의자에 앉을 때 여학생이 이웃하지 않게 앉는 경우의 수를 구하여라.

(단, 두 학생 사이에 빈 의자가 있는 경우는 이웃하지 않는 것으로 한다.)



13 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g$의 7개의 문자를 일렬로 나열할 때, $f,\ g$ 사이에 적어도 1개의 문자가 들어가는 경우의 수는?

① 2880 ② 3240 ③ 3600 ④ 3960 ⑤ 4320

14 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 4개의 숫자를 택하여 네 자리 자연수를 만들 때, 4의 배수의 개수를 구하여라.

15 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 모두 사용하여 다섯 자리 자연수를 만들어 작은 수부터 차례대로 나열할 때, 32145는 몇 번째로 나타나는가?

① 53번째 ② 54번째 ③ 55번째 ④ 56번째 ⑤ 57번째

STEP 3 심화 Forwarding

서술형

16 서로 다른 세 개의 주머니 A, B, C에 각각 크기와 모양이 똑같은 공이 3개씩 들어 있다. A주머니에 들어 있는 공에는 숫자 0, 1, 2가, B주머니에 들어 있는 공에는 숫자 1, 2, 3이, C주머니에 들어 있는 공에는 숫자 2, 3, 4가 각각 하나씩 적혀 있다. 각 주머니에서 공을 한 개씩 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수의 합이 5 이하이거나 소수인 경우의 수를 구하여라.

17 두 집합 $A=\{a,\ b,\ c\}$, $B=\{-4,\ -2,\ 0,\ 2\}$에 대하여 A에서 B로의 함수 f 중 $f(a)f(b)f(c)\geq 0$을 만족시키는 함수 f의 개수는?

① 46 ② 48 ③ 50 ④ 52 ⑤ 54

18 a, b, c, d, e의 5개의 문자를 일렬로 나열할 때, a와 c 또는 c와 e가 서로 이웃하는 경우의 수를 구하여라.

02

여러 가지 순열

은행에서 사용하는 비밀번호는 0000부터 9999까지 네 자리의 숫자로 되어 있다. 그렇다면 비밀번호는 모두 몇 가지가 존재하는 걸까? 비밀번호의 네 자리의 숫자가 모두 달라야 하는 것은 아니므로 서로 다른 것을 한 번씩만 사용하는 순열의 수와는 다르게 헤아려야 할 것이다.

이 단원에서는 앞에서 배운 순열의 수를 바탕으로 같은 것이 있거나 중복을 허용하는 것과 같이 특별한 조건을 만족시키는 순열의 수를 구하는 방법에 대하여 알아보자.

●한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

03 원순열

- 원순열의 뜻을 알고, 원순열의 수를 구할 수 있다.

04 중복순열

- 중복순열의 뜻을 알고, 중복순열의 수를 구할 수 있다.

05 같은 것이 있는 순열

- 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 같은 것이 있는 순열의 수를 구할 수 있다.

개념 & 특강	대표유형 & 유제	
005 원순열	013 원탁에 둘러앉는 방법의 수	014 색칠하는 방법의 수 - 원순열
특강 006 다각형으로 배열하는 방법의 수	015 다각형 탁자에 둘러앉는 방법의 수	
007 중복순열	016 자연수의 개수 - 중복순열	017 함수의 개수
008 같은 것이 있는 순열	018 같은 것이 있는 순열	019 최단 경로의 수

개념
005

원순열

1 원순열

서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열을 **원순열**이라 한다.

2 원순열의 수

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 다음과 같다.

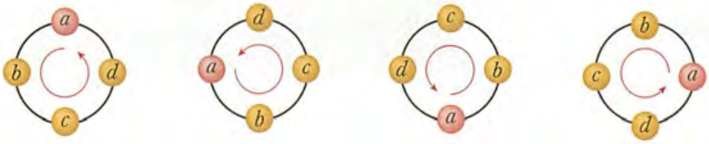
$$\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

Remark 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r}$이다.

개념 Approach

4개의 문자 a, b, c, d를 원형으로 배열하는 원순열의 수를 구해 보자.

4개의 문자 a, b, c, d를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!$이다. 그런데 a, b, c, d를 다음과 같이 원형으로 배열하는 경우에는 위치를 생각하지 않고 순서만을 생각하여 모두 같은 경우로 본다.



즉 가장 위쪽에 있는 문자부터 일렬로 나열한 $abcd$, $dabc$, $cdab$, $bcda$는 서로 다른 경우지만 원형으로 배열하면 a의 오른쪽에 b, b의 오른쪽에 c, c의 오른쪽에 d, d의 오른쪽에 a가 놓여 있어 모두 같은 경우가 된다.

따라서 서로 다른 네 개의 문자를 일렬로 나열하는 모든 경우를 원형으로 배열하면 같은 것이 4가지씩 있으므로 구하는 원순열의 수는 다음과 같다.

$$\frac{4!}{4}=3!=6$$

일반적으로 서로 다른 n개를 일렬로 나열한 것을 원형으로 배열하면 같은 배열이 n개씩 있으므로 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 다음과 같다.

$$\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

개념 Check

서로 다른 6개의 깃발을 원형으로 배열하는 방법의 수를 구하여라.

풀이 $(6-1)!=5!=120$

답 120

대표유형 013 원탁에 둘러앉는 방법의 수

• 개념 005

여학생 3명과 남학생 4명이 원탁에 둘러앉을 때, 다음을 구하여라.

(1) 원탁에 둘러앉는 모든 방법의 수

(2) 여학생끼리 이웃하여 앉는 방법의 수

(3) 여학생끼리 이웃하지 않게 앉는 방법의 수

유형 Guide (1) 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $(n-1)!$이다.

(2) 이웃하는 것이 있는 원순열의 수는 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 원순열의 수를 구한 다음 이웃하는 것끼리 자리를 바꾸는 방법의 수를 곱하여 구한다.

(3) 이웃하지 않는 것이 있는 원순열의 수는 이웃해도 되는 것을 원형으로 배열하는 방법의 수를 구한 다음 나열한 것 사이사이에 이웃하지 않는 것을 배열하는 방법의 수를 곱하여 구한다.

유형 SSEN **원탁에 둘러앉는 방법의 수 ⊙ 원순열의 수**

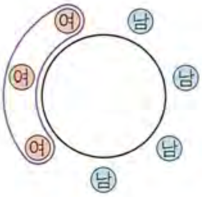
풀이 (1) 7명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는 $(7-1)!=6!=720$

(2) 여학생 3명을 한 묶음으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(5-1)!=4!=24$

여학생 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는 $24\cdot6=144$

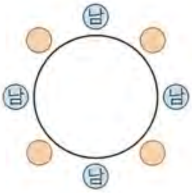


(3) 남학생 4명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$

남학생과 남학생 사이의 4개의 자리 중에서 3개의 자리에 여학생 3명이 앉는 방법의 수는 ${}_4P_3=24$

따라서 구하는 방법의 수는 $6\cdot24=144$



답 (1) 720 (2) 144 (3) 144

정답 및 풀이 • 9쪽

유제 013-1 회장과 부회장을 포함한 어떤 모임의 회원 8명이 원탁에 둘러앉아 회의를 할 때, 다음을 구하여라.

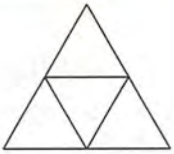
(1) 회장과 부회장이 이웃하여 앉는 방법의 수

(2) 회장과 부회장이 서로 마주 보고 앉는 방법의 수

대표유형 014 색칠하는 방법의 수 – 원순열

• 개념 005

오른쪽 그림과 같이 정삼각형으로 이루어진 4개의 영역을 빨강, 파랑, 보라, 노랑의 4가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수를 구하여라. (단, 각 영역에는 한 가지 색만 칠한다.)



유형 Guide 회전시켰을 때 모양이 일치하는 도형을 색칠하는 방법의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 기준이 되는 영역을 색칠하는 방법의 수를 구한다.
(ii) 원순열을 이용하여 나머지 영역을 색칠하는 방법의 수를 구한다.
(iii) (i), (ii)에서 구한 방법의 수를 곱한다.

유형 SSEN **회전시키면 일치하는 도형을 색칠하는 방법의 수**
⊙ 기준을 정한 후 원순열 이용

풀이 가운데 삼각형을 색칠하는 방법의 수는　　4

가운데 삼각형을 제외한 나머지 3개의 삼각형을 색칠하는 방법의 수는 가운데 삼각형에 칠한 색을 제외한 나머지 3가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$$(3-1)!=2!=2$$

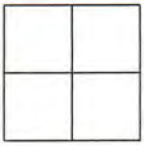
따라서 구하는 방법의 수는

$$4\cdot 2=8$$

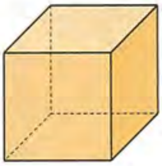
답 8

정답 및 풀이 • 9쪽

유제 014-1 오른쪽 그림과 같이 정사각형을 4등분한 영역을 서로 다른 4가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수를 구하여라.
(단, 각 영역에는 한 가지 색만 칠한다.)

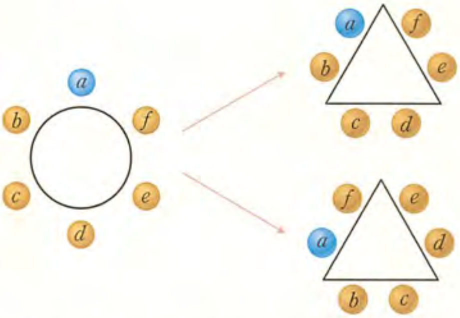


Plus 유제 014-2 오른쪽 그림과 같은 정육면체의 각 면을 서로 다른 6가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수를 구하여라.
(단, 각 면에는 한 가지 색만 칠한다.)



특강 006 다각형으로 배열하는 방법의 수

원형으로 배열하는 원순열의 수를 이용하여 다각형으로 배열하는 방법의 수를 구할 수 있다.
예를 들어 a, b, c, d, e, f를 원형으로 배열한 한 가지 경우를 정삼각형으로 다음과 같이 배열할 수 있다.



즉 원형으로 배열한 한 가지 경우를 정삼각형으로 배열하면 기준이 되는 a의 위치에 따라 서로 다른 2가지 경우가 된다.

따라서 a, b, c, d, e, f의 6개를 원형으로 배열한 것을 정삼각형으로 배열하면 다른 것이 2가지씩 있으므로 6개를 정삼각형으로 배열하는 방법의 수는

$$(6-1)!\cdot 2=240$$

일반적으로 다각형으로 배열하는 방법의 수는 다음과 같다.

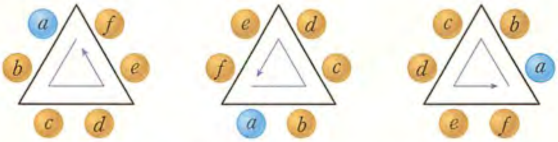
(원순열의 수) × (회전시켰을 때 겹치지 않는 자리의 수)

한편 일렬로 나열하는 방법의 수를 이용하여 다각형으로 배열하는 방법의 수를 구할 수도 있다.

a, b, c, d, e, f를 일렬로 나열하는 서로 다른 경우

$$abcdef,\quad efabcd,\quad cdefab$$

를 정삼각형으로 배열하면 다음과 같다.



이때 위치를 생각하지 않고 순서만을 생각하면 모두 같은 경우가 된다.

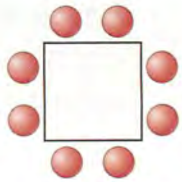
따라서 서로 다른 6개의 문자를 일렬로 나열하는 모든 경우를 정삼각형으로 배열하면 같은 것이 3가지씩 있으므로 정삼각형으로 배열하는 방법의 수는

$$\frac{6!}{3}=240$$

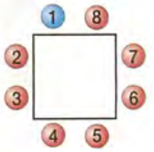
대표유형 015 다각형 탁자에 둘러앉는 방법의 수

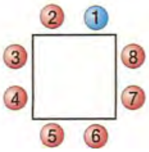
• 특강 006

오른쪽 그림과 같은 정사각형 모양의 탁자에 8명의 가족이 둘러앉는 방법의 수를 구하여라.



유형 Guide 주어진 그림과 같은 정사각형 모양의 탁자에 둘러앉는 방법은 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 오른쪽 그림과 같이 기준이 되는 ①의 위치에 따라 2가지의 서로 다른 경우가 된다.





유형 SSEN **다각형 탁자에 둘러앉는 방법의 수**
⊙ (원순열의 수) × (회전시켰을 때 겹치지 않는 자리의 수)

풀이 8명이 원형으로 둘러앉는 방법의 수는

$$(8-1)!=7!=5040$$

이때 주어진 그림과 같은 정사각형 모양의 탁자에 둘러앉을 때, 원형으로 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 2가지의 서로 다른 경우가 존재한다.

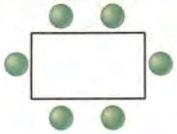
따라서 구하는 방법의 수는

$$5040 \cdot 2=10080$$

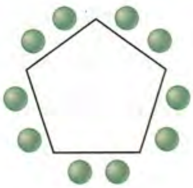
답 10080

» 정답 및 풀이 • 9쪽

유제 015-1 오른쪽 그림과 같은 직사각형 모양의 탁자에 6명의 학생이 둘러앉는 방법의 수를 구하여라.



유제 015-2 오른쪽 그림과 같은 정오각형 모양의 탁자에 10명이 둘러앉는 방법의 수는?

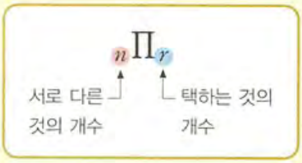


① $9!\cdot 2$
② $9!\cdot 5$
③ $10!\cdot 2$
④ $10!\cdot 3$
⑤ $11!\cdot 2$

개념 007 중복순열

1 중복순열

중복을 허용하여 만든 순열을 **중복순열**이라 하고, 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 중복순열의 수를 기호로 ${}_n\Pi_r$와 같이 나타낸다.



2 중복순열의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는 다음과 같다.

$${}_n\Pi_r = n^r$$

Remark
- 순열의 수 ${}_nP_r$에서는 $0 \le r \le n$이어야 하지만 중복순열의 수 ${}_n\Pi_r$에서는 중복하여 택할 수 있기 때문에 $r > n$일 수도 있다.
- ${}_n\Pi_r$의 Π는 곱을 뜻하는 Product의 첫 글자 P에 해당하는 그리스 문자로 '파이'라 읽는다.

개념 Approach

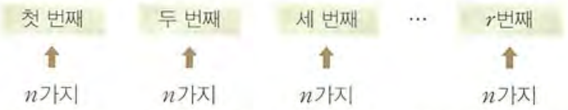
3개의 숫자 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 두 자리 자연수의 개수를 구해 보자.

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3의 3가지이고, 그 각각에 대하여 일의 자리에 올 수 있는 숫자도 1, 2, 3의 3가지씩이므로 구하는 자연수의 개수는

$$3\cdot 3 = 3^2 = 9$$

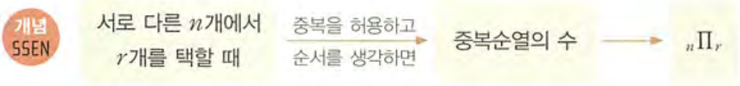
이다.

서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하여 일렬로 나열할 때, 첫 번째, 두 번째, 세 번째, …, r번째에 올 수 있는 것은 각각 n가지씩이다.



따라서 곱의 법칙에 의하여 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수 ${}_n\Pi_r$는 다음과 같다.

$${}_n\Pi_r = \underbrace{n\cdot n\cdot \cdots \cdot n}_{r\text{개}} = n^r$$



개념 Check

부호 △와 ▽를 사용하여 신호를 만들 때, △, ▽에서 3개를 택하여 만들 수 있는 신호의 개수를 구하여라.

풀이 ${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$

답 8

대표유형 016 자연수의 개수 - 중복순열

• 개념 007

5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 네 자리 자연수를 만들 때, 다음을 구하여라.

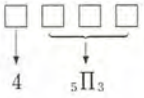
(1) 네 자리 자연수의 개수

(2) 3000보다 큰 자연수의 개수

유형 Guide 서로 다른 n개의 숫자에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 r자리 자연수의 개수는 ${}_n\Pi_r=n^r$임을 이용한다. 이때 0은 맨 앞자리에 올 수 없음에 주의한다.

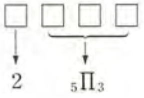
유형 SSEN **숫자의 중복을 허용하여 만드는 자연수의 개수 ➊ 중복순열 이용**

풀이 (1) 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 1, 2, 3, 4의 4가지이다. 각각에 대하여 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 나열하면 되므로 구하는 네 자리 자연수의 개수는



$4\cdot{}_5\Pi_3=4\cdot5^3=500$

(2) 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 3, 4의 2가지이다. 각각에 대하여 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 나열하면 되므로 3000보다 큰 자연수의 개수는



$2\cdot{}_5\Pi_3-1=2\cdot5^3-1=249$

3000보다 큰 자연수이므로 3000은 제외한다.

답 (1) 500 (2) 249

다른 풀이 (1) 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수는

${}_5\Pi_4=5^4=625$

천의 자리에 0이 오는 경우의 수는 ${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 네 자리 자연수의 개수는

$625-125=500$

정답 및 풀이 • 9쪽

유제 016-1 6개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 네 자리 자연수를 만들 때, 다음을 구하여라.

(1) 5의 배수의 개수

(2) 0을 한 번만 사용한 자연수의 개수

대표유형 017 함수의 개수

• 개념 003, 004, 007

두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) X에서 Y로의 함수의 개수

(2) X에서 Y로의 일대일함수의 개수

유형 Guide 함수의 개수를 구할 때에는 정의역의 각 원소에 대응할 수 있는 공역의 원소의 개수를 생각한다.

(1) 함수가 되려면 정의역에 속하는 각 원소에 대하여 공역의 원소가 하나씩 대응되어야 한다. 이때 정의역의 서로 다른 두 원소에 같은 원소가 대응되어도 되므로 공역의 원소를 중복하여 택할 수 있다.

(2) 일대일함수가 되려면 정의역에 속하는 각 원소에 대하여 공역의 서로 다른 원소가 하나씩 대응되어야 하므로 공역의 원소를 중복하여 택할 수 없다.

유형 SSEN

- **함수의 개수 ⊙ 중복순열 이용**
- **일대일함수의 개수 ⊙ 순열 이용**

풀이 (1) X에서 Y로의 함수는 집합 Y의 원소 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 집합 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 되므로 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

따라서 구하는 함수의 개수는 $\quad {}_5\Pi_3=5^3=125$

(2) X에서 Y로의 일대일함수는 집합 Y의 원소 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$에서 서로 다른 3개를 뽑아 집합 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 되므로 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같다.

따라서 구하는 일대일함수의 개수는 $\quad {}_5\mathrm{P}_3=60$

답 (1) 125 (2) 60

Remark 두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n일 때,

(i) X에서 Y로의 함수의 개수 ➡ ${}_n\Pi_m=n^m$

(ii) X에서 Y로의 일대일함수의 개수 ➡ ${}_n\mathrm{P}_m$ (단, $n\geq m$)

(iii) X에서 X로의 일대일 대응의 개수 ➡ ${}_m\mathrm{P}_m=m!$

정답 및 풀이 • 9쪽

유제 017-1 두 집합 $X=\{1,\ 2\}$, $Y=\{a,\ b,\ c,\ d\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수의 개수를 m, 일대일함수의 개수를 n이라 할 때, $m+n$의 값을 구하여라.

Plus 유제 017-2 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) X에서 X로의 일대일 대응의 개수

(2) X에서 X로의 함수 f 중에서 $f(x)=f(y)$인 서로 다른 두 원소 x, y가 존재하는 함수의 개수

개념 008 같은 것이 있는 순열

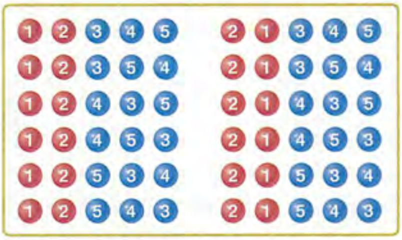
n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 다음과 같다.

$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!} \text{ (단, } p+q+\cdots+r=n\text{)}$$

개념 Approach

모양과 크기가 같은 빨간 공 2개와 파란 공 3개를 일렬로 나열하는 순열의 수를 구해 보자.

구하는 순열의 수를 k라 하고, k가지 중에서 한 배열인 🔴🔴🔵🔵🔵에 대하여 생각해 보자.



🔴🔴🔵🔵🔵에서 2개의 빨간 공을 구별하여 각각 ①, ②라 하고 3개의 파란 공을 구별하여 ③, ④, ⑤라 하면 이 하나의 배열에 대하여 오른쪽 그림과 같이 $2!\cdot3!$가지의 서로 다른 배열을 얻을 수 있다.
마찬가지로 k가지의 배열 각각에 대해서도 $2!\cdot3!$가지의 서로 다른 배열을 얻을 수 있으므로 빨간 공 2개와 파란 공 3개를 구별하여 일렬로 나열하는 방법의 수는 $k\cdot2!\cdot3!$이다.
이것은 서로 다른 5개의 공을 일렬로 나열하는 방법의 수 $5!$과 같으므로

$$k\cdot2!\cdot3!=5!$$

이다. 따라서 구하는 순열의 수는

$$k=\frac{5!}{2!\cdot3!}=10$$

이다.
일반적으로 n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 다음과 같다.

$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!} \text{ (단, } p+q+\cdots+r=n\text{)}$$

개념 Check

다음을 모두 일렬로 나열하는 방법의 수를 구하여라.

(1) x, x, y, y　　　　(2) 1, 2, 2, 3, 3

풀이 (1) 4개의 문자 중 x가 2개, y가 2개 있으므로 $\frac{4!}{2!\cdot2!}=6$

(2) 5개의 숫자 중 2가 2개, 3이 2개 있으므로 $\frac{5!}{2!\cdot2!}=30$

답 (1) 6 (2) 30

대표유형 018 같은 것이 있는 순열

• 개념 008

banana의 6개의 문자를 일렬로 나열할 때, 다음을 구하여라.

(1) 6개의 문자를 일렬로 나열하는 모든 방법의 수
(2) 양 끝에 n이 오도록 나열하는 방법의 수
(3) 3개의 a가 모두 이웃하도록 나열하는 방법의 수
(4) b가 n보다 앞에 오도록 나열하는 방법의 수

유형 Guide 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수를 구할 때, 같은 문자가 있는 경우에는 주어진 문자가 모두 다르다고 생각하고 일렬로 나열하는 방법의 수를 구한 후 같은 것의 개수에 대한 계승으로 나눈다.
(2) 양 끝에 n을 고정하고 순열의 수를 구한다.
(3) 3개의 a를 묶어서 하나의 문자로 생각하여 순열의 수를 구한다.
(4) b와 n을 같은 문자로 생각하여 순열의 수를 구한다.

유형 SSEN **n개 중에서 같은 것이 p개, q개, ⋯, r개씩 있을 때의 순열의 수 ⭘ $\dfrac{n!}{p!q!\cdots r!}$**

풀이 (1) 6개의 문자 a, a, a, b, n, n을 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\dfrac{6!}{3!\cdot2!}=60$

(2) n□□□□n과 같이 양 끝에 n을 고정하고 4개의 □ 안에 a, a, a, b를 일렬로 나열하면 되므로 구하는 방법의 수는 $\dfrac{4!}{3!}=4$

(3) 3개의 a를 하나의 문자 A로 생각하고 A, n, n, b를 일렬로 나열하면 되므로 구하는 방법의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

(4) b, n의 순서가 고정되어 있으므로 b, n을 모두 x로 생각하여 6개의 문자 a, a, a, x, x, x를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 b로, 두 번째와 세 번째 x는 n으로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는 $\dfrac{6!}{3!\cdot3!}=20$

답 (1) 60 (2) 4 (3) 12 (4) 20

정답 및 풀이 • 10쪽

유제 018-1 chicken의 7개의 문자를 일렬로 나열할 때, 맨 앞에 모음이 오는 경우의 수를 구하여라.

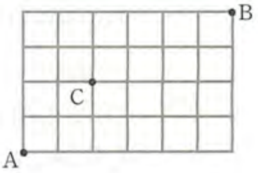
Plus 유제 018-2 다음을 구하여라.

(1) 6개의 숫자 0, 1, 1, 2, 2, 3을 모두 이용하여 만든 여섯 자리 홀수의 개수
(2) 7개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3에서 4개를 택하여 만든 네 자리 자연수 중에서 3의 배수의 개수

대표유형 019 최단 경로의 수

• 개념 008

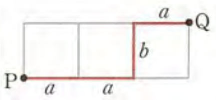
오른쪽 그림은 A지점과 B지점 사이의 도로망을 나타낸 것이다. 다음을 구하여라.



(1) A지점에서 B지점으로 가는 최단 경로의 수

(2) A지점에서 C지점을 거쳐서 B지점으로 가는 최단 경로의 수

유형 Guide 오른쪽 그림과 같은 도로망에서 P지점에서 Q지점으로 최단 경로로 가려면 가로로 3칸, 세로로 1칸을 가야 한다. 따라서 가로로 1칸 가는 것을 a, 세로로 1칸 가는 것을 b라 하면 최단 경로의 수는 a, a, a, b를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다.



유형 SSEN **최단 경로의 수 ⊙ 같은 것이 있는 순열 이용**

풀이 (1) A지점에서 B지점으로 최단 경로로 가려면 가로로 6칸, 세로로 4칸을 이동해야 하므로

구하는 최단 경로의 수는 $\frac{10!}{6!\cdot 4!}=210$

(2) A지점에서 C지점으로 가는 최단 경로의 수는 $\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

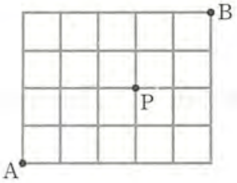
C지점에서 B지점으로 가는 최단 경로의 수는 $\frac{6!}{4!\cdot 2!}=15$

따라서 구하는 최단 경로의 수는 $6\cdot 15=90$

답 (1) 210 (2) 90

정답 및 풀이 • 10쪽

유제 019-1 오른쪽 그림과 같은 도로망에서 A지점에서 P지점을 거치지 않고 B지점으로 가는 최단 경로의 수를 구하여라.



Plus
유제 019-2 오른쪽 그림과 같은 도로망에서 A지점에서 B지점으로 가는 최단 경로의 수를 구하여라.

중단원 연습 문제

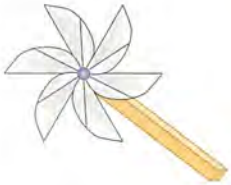
정답 및 풀이 • 11쪽

STEP 1 유형 Training

01 남자 3명, 여자 3명이 원탁에 둘러앉을 때, 남녀가 번갈아 앉는 방법의 수를 구하여라.

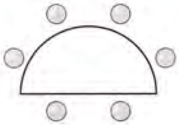
평가원기출

02 빨간색과 파란색을 포함한 서로 다른 6가지의 색을 모두 사용하여, 날개가 6개인 바람개비의 각 날개에 색칠하려고 한다. 빨간색과 파란색을 서로 맞은편의 날개에 칠하는 경우의 수는? (단, 각 날개에는 한 가지 색만 칠하고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 12 ② 18 ③ 24 ④ 30 ⑤ 36

03 6명의 학생을 오른쪽 그림과 같은 반원 모양의 탁자에 앉히는 방법의 수는?



① 600 ② 630 ③ 700
④ 720 ⑤ 750

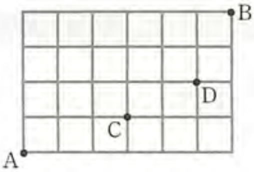
서술형

04 두 개의 숫자 1, 2에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 자연수를 k라 할 때, $99<k<10000$을 만족시키는 k의 개수를 구하여라.

05 engineer의 8개의 문자를 일렬로 나열할 때, 세 문자 g, i, r를 이 순서대로 나열하는 방법의 수를 구하여라.

서술형

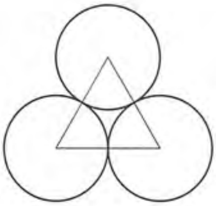
06 오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. A지점에서 B지점으로 가는 최단 경로 중 C지점은 반드시 지나고 D지점은 지나지 않는 최단 경로의 수를 구하여라.



STEP 2 실전 Application

평가원기출

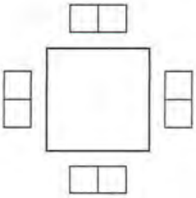
07 그림과 같이 서로 접하고 크기가 같은 원 3개와 이 세 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 정삼각형이 있다. 원의 내부 또는 정삼각형의 내부에 만들어지는 7개의 영역에 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는?



(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① 1260　② 1680　③ 2520　④ 3760　⑤ 5040

08 어느 야영 활동에 참가한 남학생 4명과 여학생 4명이 게임을 하기 위하여 오른쪽 그림과 같이 정사각형 모양으로 배열된 8개의 의자에 앉으려 한다. 붙어 있는 의자에는 반드시 남녀가 1명씩 앉도록 할 때, 이들 8명이 앉을 수 있는 모든 방법의 수는?



① 1152　② 2304　③ 4608
④ 5760　⑤ 9216

09 부호 •와 −를 나열하여 신호를 만들려고 한다. 부호를 n개 이하로 사용하여 만들 수 있는 신호가 300개 이상일 때, 자연수 n의 최솟값은?

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

서술형

10 숫자 7과 3개의 문자 a, b, c에서 중복을 허용하여 다섯 자리의 비밀번호를 만들려고 한다. 다음 규칙에 따라 만들 수 있는 비밀번호의 개수를 구하여라.

> (가) 숫자는 적어도 한 번 이상 사용해야 한다.
> (나) 맨 앞과 맨 뒤에는 문자가 와야 한다.

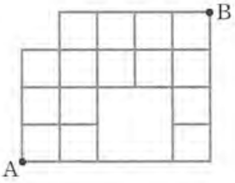
11 x, x, x, y, y, z, z의 7개의 문자를 일렬로 나열할 때, z와 z 사이에 홀수 개의 문자가 놓이도록 나열하는 방법의 수는?

① 60 ② 70 ③ 80 ④ 90 ⑤ 100

평가원기출

12 0을 한 개 이하 사용하여 만든 세 자리 자연수 중에서 각 자리의 수의 합이 3인 자연수는 111, 120, 210, 102, 201이다. 0을 한 개 이하 사용하여 만든 다섯 자리 자연수 중에서 각 자리의 수의 합이 5인 자연수의 개수를 구하여라.

13 오른쪽 그림과 같은 도로망에서 A지점에서 B지점으로 가는 최단 경로의 수는?



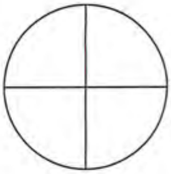
① 78 ② 80 ③ 85
④ 88 ⑤ 90

STEP 3 심화 Forwarding

서술형

14 오른쪽 그림과 같이 원을 4등분한 영역을 서로 다른 4가지 색을 사용하여 칠하려고 한다. 같은 색을 중복하여 사용해도 좋으나 인접한 부분은 서로 다른 색으로 칠하는 방법의 수를 구하여라.

(단, 각 영역에는 한 가지 색만 칠한다.)



15 두 집합 $X=\{a,\ b,\ c,\ d\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중에서 $f(a)f(b)f(c)f(d)\geq 9$를 만족시키는 함수 f의 개수를 구하여라.

평가원기출

16 좌표평면 위의 점들의 집합 $S=\{(x,\ y)\,|\,x$와 y는 정수$\}$가 있다. 집합 S에 속하는 한 점에서 S에 속하는 다른 점으로 이동하는 '점프'는 다음 규칙을 만족시킨다.

> 점 P에서 한 번의 '점프'로 점 Q로 이동할 때, 선분 PQ의 길이는 1 또는 $\sqrt{2}$이다.

점 A$(-2,\ 0)$에서 점 B$(2,\ 0)$까지 4번만 '점프'하여 이동하는 경우의 수를 구하여라.

(단, 이동하는 과정에서 지나는 점이 다르면 다른 경우이다.)

서술형

17 갑, 을 두 사람이 어떤 게임을 해서 이긴 사람은 3개, 진 사람은 1개의 사탕을 갖고, 비기면 두 사람이 각각 2개씩 사탕을 갖는다고 한다. 이 게임을 4번 해서 16개의 사탕을 8개씩 나누어 갖게 되는 경우의 수를 구하여라.

남들보다 더 잘하려고 고민하지 마라.
'지금의 나'보다 잘하려고 애쓰는 것이 중요하다.

- 윌리엄 포크너

다른 사람과 비교하며 나를 탓하다 보면 아마 끝이 없을 것입니다.
그 사람을 따라잡는다고 해도 더 나은 사람이 다시금 나타나곤 하니까요.
우리가 집중해야 할 상대는 외부에 있는 타인이 아닌 바로 나 자신입니다.
오늘은 어제보다 더 나은 나, 내일은 오늘보다 더 나은 나를 만드는 것.
그것이야말로 진정한 승리가 아닐까요?

03

조합

로또는 1부터 45까지의 수가 적힌 45개의 공 중에서 6개의 공을 뽑아 1등 당첨 번호를 결정한다. 이때 공이 뽑히는 순서는 당첨 여부와 상관이 없다. 즉 1, 2, 3, 4, 5, 6의 순서로 뽑힌 경우와 6, 5, 4, 3, 2, 1의 순서로 뽑힌 경우 모두 동일하게 보는 것이다.

이 단원에서는 순서를 고려하지 않고 택하는 경우와 순서를 고려하지 않으면서 중복하여 택하는 경우의 수를 구하는 방법에 대하여 알아보자.

●한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

06 조합

- 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.
- ${}_nC_r$의 뜻과 성질을 알고, 이를 이용한 계산을 할 수 있다.

07 중복조합

- 중복조합의 뜻을 알고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.

개념 & 특강	대표유형 & 유제
009 조합	020 ${}_nC_r$의 계산 — 021 조건이 있는 조합의 수 — 022 뽑아서 나열하는 방법의 수 023 직선 또는 삼각형의 개수 — 024 사각형의 개수
010 중복조합 특강 011 순열, 중복순열, 조합, 중복조합의 비교	025 중복조합의 수 — 026 전개식의 항의 개수 027 방정식의 해의 개수 — 028 함수의 개수

개념 009 조합

1 조합

서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 $r\,(0<r\le n)$개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **조합**이라 하고, 이 조합의 수를 기호로 $_{n}\mathrm{C}_{r}$와 같이 나타낸다.

Remark $_{n}\mathrm{C}_{r}$의 C는 조합을 뜻하는 combination의 첫 글자이다.

2 조합의 수

① $_{n}\mathrm{C}_{n}=1,\ _{n}\mathrm{C}_{0}=1$

② $_{n}\mathrm{C}_{r}=\dfrac{_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

③ $_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{n-r}$ (단, $0\le r\le n$)

④ $_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r}$ (단, $1\le r<n$)

개념 Approach

1 조합

세 개의 문자 a, b, c에서 순서를 생각하지 않고 2개를 택하는 경우는

$\{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{b,\ c\}$

의 3가지이다.

이와 같이 서로 다른 3개에서 순서를 생각하지 않고 2개를 택하는 것을 3개에서 2개를 택하는 조합이라 하고, 이 조합의 수를 기호로 $_{3}\mathrm{C}_{2}$와 같이 나타낸다.

Remark 서로 다른 것 중에서 순서를 생각하지 않고 택하는 것은 조합이고, 순서를 생각하여 택하는 것은 순열이다. 예를 들어 어떤 모임의 대표 2명을 뽑는 것은 조합이고, 회장과 부회장을 각각 1명씩 뽑는 것은 순열이다.

2 조합의 수

② 서로 다른 n개에서 $r\ (0<r\le n)$개를 택하는 조합의 수는 $_{n}\mathrm{C}_{r}$이고, 그 각각에 대하여 r개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $r!$이다.

따라서 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수는 $_{n}\mathrm{C}_{r}\cdot r!$이고, 이것은 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수 $_{n}\mathrm{P}_{r}$와 같으므로

$$_{n}\mathrm{C}_{r}\cdot r!={}_{n}\mathrm{P}_{r}$$

$$\therefore\ _{n}\mathrm{C}_{r}=\frac{_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

한편 $0!=1,\ _{n}\mathrm{P}_{0}=1$이므로 $_{n}\mathrm{C}_{0}=1$로 정의하면 위의 식은 $r=0$일 때도 성립한다.

③ ${}_{n}\mathrm{C}_{n-r}=\dfrac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!}=\dfrac{n!}{(n-r)!r!}={}_{n}\mathrm{C}_{r}$

$\therefore\ {}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{n-r}$

④
$$\begin{aligned}{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r}&=\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}+\frac{(n-1)!}{r!\{(n-1)-r\}!}\\&=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}+\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}\\&=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r-1)!}\left(\frac{1}{n-r}+\frac{1}{r}\right)\\&=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r-1)!}\cdot\frac{n}{(n-r)r}\\&=\frac{n!}{r!(n-r)!}={}_{n}\mathrm{C}_{r}\end{aligned}$$

$\therefore\ {}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r}$

Remark ③, ④는 다음과 같이 생각할 수 있다.

③ 서로 다른 n개에서 r개를 뽑는 조합의 수는 n개에서 뽑지 않을 $(n-r)$개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{n-r}$가 성립한다.

따라서 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$의 값을 구할 때, $r>n-r$인 경우 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{n-r}$임을 이용하면 간단히 계산할 수 있다.

④ ${}_{n}\mathrm{C}_{r}=$(특정한 한 개를 뽑고 나머지 $(n-1)$개 중에서 $r-1$개를 뽑는 조합의 수)
+(특정한 한 개를 제외하고 나머지 $(n-1)$개 중에서 r개를 뽑는 조합의 수)
$={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r}$

개념 Check 1

다음 값을 구하여라.

(1) ${}_{5}\mathrm{C}_{2}$ (2) ${}_{10}\mathrm{C}_{4}$ (3) ${}_{4}\mathrm{C}_{4}$ (4) ${}_{8}\mathrm{C}_{1}$

풀이 (1) ${}_{5}\mathrm{C}_{2}=\dfrac{{}_{5}\mathrm{P}_{2}}{2!}=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ (2) ${}_{10}\mathrm{C}_{4}=\dfrac{{}_{10}\mathrm{P}_{4}}{4!}=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210$

(3) ${}_{4}\mathrm{C}_{4}=\dfrac{{}_{4}\mathrm{P}_{4}}{4!}=\dfrac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=1$ (4) ${}_{8}\mathrm{C}_{1}=\dfrac{{}_{8}\mathrm{P}_{1}}{1!}=\dfrac{8}{1}=8$

답 (1) 10 (2) 210 (3) 1 (4) 8

개념 Check 2

다음을 구하여라.

(1) 서로 다른 6개의 사탕 중에서 2개를 택하는 방법의 수

(2) 12명의 탁구 선수 중에서 시합에 나갈 3명의 선수를 선발하는 방법의 수

풀이 (1) ${}_{6}\mathrm{C}_{2}=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$ (2) ${}_{12}\mathrm{C}_{3}=\dfrac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=220$

답 (1) 15 (2) 220

대표유형 020 $_nC_r$의 계산

• 개념 003, 009

다음 등식을 만족시키는 n의 값을 구하여라.

(1) $_nC_4=35$　　(2) $_nC_4={}_nC_7$　　(3) $_{n+3}C_2={}_nC_2+{}_{n-2}C_2$

유형 Guide $_nC_r=\frac{_nP_r}{r!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot r}$임을 이용하여 주어진 식을 n에 대한 방정식으로 나타낸다.

유형 SSEN $_nC_r$ ○ $\frac{_nP_r}{r!}$를 이용

풀이 (1) $_nC_4=\frac{_nP_4}{4!}=35$이므로　$_nP_4=35\cdot4!=7\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=7\cdot6\cdot5\cdot4$

$\therefore n=7$

(2) $_nC_4={}_nC_7$에서

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$$

$n\ge7$이므로　$1=\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{5\cdot6\cdot7}$

즉 $(n-6)(n-5)(n-4)=5\cdot6\cdot7$이므로　$n-6=5$　$\therefore n=11$

(3) $_{n+3}C_2={}_nC_2+{}_{n-2}C_2$에서

$$\frac{(n+3)(n+2)}{2\cdot1}=\frac{n(n-1)}{2\cdot1}+\frac{(n-2)(n-3)}{2\cdot1}$$

$n^2+5n+6=n^2-n+n^2-5n+6$

$n^2-11n=0,$　$n(n-11)=0$

$\underline{n\ge4}$이므로　$n=11$

$n+3\ge2,\ n\ge2,\ n-2\ge2$ 에서 $n\ge4$

답 (1) 7　(2) 11　(3) 11

다른 풀이 (2) $_nC_4={}_nC_{n-4}$이므로 $_nC_4={}_nC_7$에서　$_nC_{n-4}={}_nC_7$

따라서 $n-4=7$이므로　$n=11$

정답 및 풀이 • 15쪽

유제 020-1 다음 등식을 만족시키는 n의 값을 모두 구하여라.

(1) $_nC_2+{}_nC_3=56$　　(2) $_nP_3+5{}_nC_3=44$　　(3) $_{16}C_{n+7}={}_{16}C_{2n}$

Plus
유제 020-2 $1\le r\le n$일 때, $r\cdot{}_nC_r=n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}$임을 증명하여라.

대표유형 021 조건이 있는 조합의 수

• 개념 009

남학생 6명과 여학생 4명 중에서 5명의 대표를 뽑으려고 한다. 다음을 구하여라.

(1) 남학생 2명과 여학생 3명을 뽑는 방법의 수

(2) 특정한 3명을 포함하여 뽑는 방법의 수

(3) 적어도 한 명은 여학생을 뽑는 방법의 수

유형 Guide (1) 6명의 남학생 중에서 2명을 뽑는 각각의 경우에 대하여 4명의 여학생 중에서 3명을 뽑는 방법의 수가 있다.

(2) 특정한 3명을 제외한 7명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수를 구한다.

(3) (적어도 한 명은 여학생을 뽑는 방법의 수)

=(5명의 대표를 뽑는 방법의 수)−(여학생이 한 명도 포함되지 않도록 뽑는 방법의 수)

임을 이용한다.

유형 SSEN **적어도 하나가 ■인 경우의 수 ➡ (전체 경우의 수)−(하나도 ■가 아닌 경우의 수)**

풀이 (1) 남학생 6명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는 $_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$

여학생 4명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 $_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 구하는 방법의 수는 $15\cdot4=60$

(2) 특정한 3명을 대표로 뽑았다고 생각하고 나머지 7명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수와 같으므로 $_7C_2=\frac{7\cdot6}{2\cdot1}=21$

(3) 10명 중에서 5명의 대표를 뽑는 방법의 수는 $_{10}C_5=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=252$

5명의 대표 중에서 여학생이 한 명도 포함되지 않는, 즉 남학생만 5명을 뽑는 방법의 수는

$_6C_5={}_6C_1=6$

따라서 구하는 방법의 수는 $252-6=246$

답 (1) 60 (2) 21 (3) 246

Remark ① n개에서 특정한 k개를 포함하여 r개를 뽑는 방법의 수는 $(n-k)$개에서 $(r-k)$개를 뽑는 방법의 수와 같다.

② n개에서 특정한 k개를 제외하고 r개를 뽑는 방법의 수는 $(n-k)$개에서 r개를 뽑는 방법의 수와 같다.

정답 및 풀이 • 16쪽

유제 021-1 서로 다른 볼펜 6자루와 서로 다른 연필 5자루가 들어 있는 필통에서 4자루를 꺼내려고 한다. 다음을 구하여라.

(1) 볼펜 2자루와 연필 2자루를 꺼내는 방법의 수

(2) 볼펜을 3자루 이상 꺼내는 방법의 수

(3) 볼펜과 연필이 각각 적어도 한 자루씩 포함되도록 꺼내는 방법의 수

대표유형 022 뽑아서 나열하는 방법의 수

• 개념 003, 004, 009

다음을 구하여라.

(1) 남자 4명과 여자 5명 중에서 남자 2명과 여자 3명을 뽑아서 일렬로 세우는 방법의 수

(2) 9명 중에서 A와 B를 포함한 5명을 뽑아서 일렬로 세울 때, A, B 두 사람을 서로 이웃하게 세우는 방법의 수

유형 Guide 두 개 이상의 집단에서 각각 몇 개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우에는 순열을 이용할 수 없다. 이런 경우에는 조합을 이용하여 뽑는 방법의 수를 구한 다음 일렬로 세우는 방법의 수를 곱한다.

유형 SSEN **(뽑아서 나열하는 방법의 수) ⊙ (조합의 수)×$n!$**

풀이 (1) 남자 4명 중에서 2명, 여자 5명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$${}_4C_2\cdot{}_5C_3={}_4C_2\cdot{}_5C_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\cdot\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=6\cdot10=60$$

위의 각각의 경우에 대하여 뽑힌 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 방법의 수는 $60\cdot120=7200$

(2) A와 B를 제외한 7명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$${}_7C_3=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$$

A, B를 한 묶음으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!$이고, 그 각각의 경우에 대하여 A, B가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!$이므로

$4!\cdot2!=24\cdot2=48$

따라서 구하는 방법의 수는 $35\cdot48=1680$

답 (1) 7200 (2) 1680

정답 및 풀이 • 16쪽

유제 022-1 어른 6명, 어린이 5명 중에서 어른 2명, 어린이 1명을 뽑아서 일렬로 세울 때, 다음을 구하여라.

(1) 일렬로 세우는 방법의 수

(2) 어른 2명을 이웃하게 세우는 방법의 수

유제 022-2 7개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 중에서 3개를 택하여 세 자리 자연수를 만들 때, 7을 포함하는 자연수의 개수를 구하여라.

대표유형 023 직선 또는 삼각형의 개수

• 개념 009

오른쪽 그림과 같이 반원 위에 7개의 점이 있을 때, 다음에 답하여라.

(1) 두 점을 연결하여 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수를 구하여라.

(2) 세 점을 꼭짓점으로 하여 만들 수 있는 삼각형의 개수를 구하여라.

유형 Guide (1) 두 점을 지나는 직선은 오직 하나뿐이므로 직선의 개수는 두 점을 택하는 방법의 수와 같다. 이때 일직선 위에 있는 2개 이상의 점으로 만들 수 있는 직선은 오직 1개임에 주의한다.

(2) 삼각형의 개수는 세 점을 택하는 방법의 수와 같다. 이때 일직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없음에 주의한다.

유형 SSEN **일직선 위에 있지 않은 서로 다른 n개의 점으로 만들 수 있는** [**직선의 개수** ➲ $_nC_2$ / **삼각형의 개수** ➲ $_nC_3$

풀이 (1) 7개의 점에서 2개의 점을 택하는 방법의 수는 $_7C_2=\frac{7\cdot6}{2\cdot1}=21$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_4C_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$

이때 일직선 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선은 1개이므로 구하는 직선의 개수는

$21-6+1=16$

(2) 7개의 점에서 3개의 점을 택하는 방법의 수는

$_7C_3=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$_4C_3={}_4C_1=4$

이때 일직선 위에 있는 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$35-4=31$

답 (1) 16 (2) 31

➲ 정답 및 풀이 • 16쪽

유제 023-1 오른쪽 그림과 같이 평행한 두 직선 l_1, l_2 위에 각각 3개, 5개의 점이 있다. 다음을 구하여라.

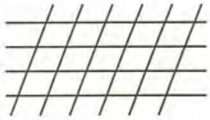
(1) 두 점을 연결하여 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수

(2) 세 점을 꼭짓점으로 하여 만들 수 있는 삼각형의 개수

대표유형 024 사각형의 개수

• 개념 009

오른쪽 그림과 같이 4개의 평행선과 6개의 평행선이 만날 때, 이 평행선으로 만들어지는 평행사변형의 개수를 구하여라.



유형 Guide 가로 방향의 평행선 중에서 2개, 세로 방향의 평행선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어지므로 평행사변형의 개수는 가로 방향의 평행선과 세로 방향의 평행선 중에서 각각 2개를 택하는 방법의 수와 같다.

유형 5SEN **m개의 평행선과 n개의 평행선이 교차할 때, 만들 수 있는 평행사변형의 개수 ➡ ${}_mC_2 \cdot {}_nC_2$**

풀이 가로 방향의 평행선 4개 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_4C_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$$

세로 방향의 평행선 6개 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$$

가로 방향의 평행선 2개와 세로 방향의 평행선 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 결정되므로 구하는 평행사변형의 개수는

$$6\cdot15=90$$

답 90

정답 및 풀이 • 17쪽

유제 024-1 오른쪽 그림과 같이 가로선과 세로선이 같은 간격을 이루며 서로 수직일 때, 이 선으로 만들 수 있는 사각형 중에서 다음을 구하여라.

(1) 직사각형의 개수

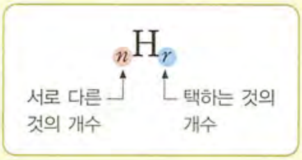
(2) 정사각형이 아닌 직사각형의 개수

Plus 유제 024-2 오른쪽 그림과 같은 원 위에 같은 간격으로 놓인 10개의 점이 있다. 이 중에서 4개의 점을 연결하여 만들 수 있는 직사각형의 개수를 구하여라.

개념 010 중복조합

1 중복조합

중복을 허용하여 만든 조합을 **중복조합**이라 하고, 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 중복조합의 수를 기호로 $_{n}\mathrm{H}_{r}$와 같이 나타낸다.



2 중복조합의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는 다음과 같다.

$$_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

Remark
- 조합의 수 $_{n}\mathrm{C}_{r}$에서는 $0\le r\le n$이어야 하지만 중복조합의 수 $_{n}\mathrm{H}_{r}$에서는 중복하여 택할 수 있기 때문에 $r>n$일 수도 있다.
- $_{n}\mathrm{H}_{r}$의 H는 같음을 뜻하는 homogeneous의 첫 글자이다.

개념 Approach

세 개의 문자 a, b, c에서 중복을 허용하여 6개의 문자를 택하는 방법의 수를 구해 보자.

선택된 6개의 문자를 a, b, c의 순서로 나열한 후 문자를 ●로 나타내고 문자 사이의 경계에는 |를 사용하여 구분하기로 하면 a를 2개, b를 3개, c를 1개 택한 경우를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

a를 2개, b를 3개, c를 1개 ➡ ●●|●●●|●

즉 6개의 ●와 a, b, c를 구분하기 위한 2개의 |를 나열한 다음 |로 구분되는 첫 번째 구간의 ●를 a로, 두 번째 구간의 ●를 b로, 세 번째 구간의 ●를 c로 생각하면

a를 2개, b를 1개, c를 3개 ➡ ●●|●|●●●

a를 4개, b를 2개, c를 0개 ➡ ●●●●|●●|

a를 0개, b를 0개, c를 6개 ➡ ||●●●●●●

로 나타낼 수 있다.

따라서 구하는 방법의 수는 6개의 ●와 $2(=3-1)$개의 |로 이루어진 순열의 수와 같으므로 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$$\frac{(6+2)!}{6!\cdot 2!}=\frac{8!}{6!\cdot 2!}=28$$

이다.

일반적으로 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 중복조합의 수는 r개의 ● 와 $(n-1)$개의 | 로 이루어진 같은 것이 있는 순열의 수와 같으므로 다음이 성립한다.

$$ {}_nH_r=\frac{\{r+(n-1)\}!}{r!(n-1)!}=\frac{(n+r-1)!}{r!\{(n+r-1)-r\}!}={}_{n+r-1}C_r $$

개념 SSEN 서로 다른 n개에서 r개를 택할 때 $\xrightarrow[\text{순서를 생각하지 않으면}]{\text{중복을 허용하고}}$ 중복조합의 수 $\longrightarrow$ ${}_nH_r$

개념 Check 1

다음 값을 구하여라.

(1) ${}_3H_0$ (2) ${}_3H_2$ (3) ${}_3H_3$

풀이 (1) ${}_3H_0={}_{3+0-1}C_0={}_2C_0=1$

(2) ${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$

(3) ${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

답 (1) 1 (2) 6 (3) 10

개념 Check 2

다음을 구하여라.

(1) 4개의 문자 a, b, c, d에서 중복을 허용하여 7개의 문자를 택하는 방법의 수

(2) 1부터 8까지의 자연수에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수

풀이 (1) ${}_4H_7={}_{4+7-1}C_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=120$

(2) ${}_8H_4={}_{8+4-1}C_4={}_{11}C_4=330$

답 (1) 120 (2) 330

대표유형 025 중복조합의 수

• 개념 010

세 학생 A, B, C에게 같은 모양의 스티커 6장을 나누어 주려고 한다. 다음을 구하여라.

(1) 스티커 6장을 나누어 주는 방법의 수

(2) 스티커 6장을 각 학생에게 적어도 한 장씩 나누어 주는 방법의 수

유형 Guide (1) A에게 2장, B에게 3장, C에게 1장의 스티커를 나누어 주는 것을 A를 2번, B를 3번, C를 1번 택하는 방법의 수로 생각할 수 있다. 따라서 구하는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

(2) 각 학생에게 적어도 스티커 한 장씩을 나누어 주려면 먼저 3명의 학생에게 스티커를 각각 한 장씩 준 다음, 남은 스티커 3장을 나누어 주면 된다. 즉 구하는 방법의 수는 3명의 학생에게 같은 모양의 스티커 3장을 나누어 주는 방법의 수와 같다.

유형 SSEN **n명에게 서로 같은 r개를 나누어 주는 방법의 수 ⊙ ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$**

풀이 (1) A, B, C에게 같은 모양의 스티커 6장을 나누어 주는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{3}\mathrm{H}_{6}={}_{3+6-1}\mathrm{C}_{6}={}_{8}\mathrm{C}_{6}={}_{8}\mathrm{C}_{2}=28$$

(2) 먼저 A, B, C에게 스티커를 각각 한 장씩 나누어 주고, 남은 스티커 3장을 A, B, C에게 나누어 주면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{3}\mathrm{H}_{3}={}_{3+3-1}\mathrm{C}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=10$$

답 (1) 28 (2) 10

정답 및 풀이 • 17쪽

유제 025-1 오렌지 주스, 포도 주스, 딸기 주스 중에서 5병을 구입하려고 한다. 다음을 구하여라.

(단, 각 주스는 5병 이상 있다.)

(1) 5병을 구입하는 방법의 수

(2) 오렌지 주스, 포도 주스, 딸기 주스를 각각 적어도 한 병 이상씩 구입하는 방법의 수

대표유형 026 전개식의 항의 개수

• 개념 010

다항식 $(x+y+z)^5$의 전개식에서 항의 개수를 구하여라.

유형 Guide $(x+y+z)^n=\underbrace{(x+y+z)}_{❶}\underbrace{(x+y+z)}_{❷}\underbrace{(x+y+z)}_{❸}\cdots\underbrace{(x+y+z)}_{ⓝ}$

이므로 $(x+y+z)^n$의 전개식에서 각 항은 ❶~ⓝ의 n개의 인수에서 x, y, z 중에 하나씩을 택하여 곱한 것이다.

따라서 $(x+y+z)^n$의 전개식에서 항의 개수는 x, y, z에서 n개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

유형 SSEN **$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m)^n$의 전개식에서 항의 개수** ○ ${}_m\mathrm{H}_n$

풀이 $(x+y+z)^5$의 전개식에서 항의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_5={}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$$

답 21

Remark $(x+y+z)^n$을 전개하여 동류항끼리 정리하면 각 항은 $x^ay^bz^c$ 꼴이다.
이때 a, b, c는 $a+b+c=n$을 만족시키는 음이 아닌 정수이므로 **대표유형 027**과 같은 방법으로 문제를 해결할 수도 있다.

정답 및 풀이 • 17쪽

유제 026-1 다항식 $(a+b+c+d)^3$의 전개식에서 항의 개수를 구하여라.

Plus 유제 026-2 다항식 $(a+b+c)^n$의 전개식에서 항의 개수가 45일 때, 자연수 n의 값을 구하여라.

대표유형 027 방정식의 해의 개수

• 개념 010

방정식 $x+y+z=9$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) x, y, z가 모두 음이 아닌 정수인 해의 개수

(2) x, y, z가 모두 양의 정수인 해의 개수

유형 Guide (1) 방정식 $x+y+z=9$의 해의 하나인 $x=2$, $y=3$, $z=4$를 x를 2개, y를 3개, z를 4개 택한 것으로 생각하면 음이 아닌 정수인 해의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

(2) $x\geq1$, $y\geq1$, $z\geq1$이므로 x, y, z를 적어도 1개씩 뽑아야 한다. 따라서 구하는 해의 개수는 x, y, z를 각각 1개씩 뽑은 다음 (1)과 같이 생각하여 개수를 구한다.

유형 SSEN **방정식의 정수인 해의 개수 ○ 중복조합 이용**

풀이 (1) 구하는 해의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{3}\mathrm{H}_{9}={}_{3+9-1}\mathrm{C}_{9}={}_{11}\mathrm{C}_{9}={}_{11}\mathrm{C}_{2}=55$$

(2) $x-1=a$, $y-1=b$, $z-1=c$로 놓으면 $\quad x=a+1$, $y=b+1$, $z=c+1$

$x+y+z=9$에서 $\quad (a+1)+(b+1)+(c+1)=9$

$\therefore a+b+c=6$ (단, a, b, c는 음이 아닌 정수) ……㉠

즉 구하는 해의 개수는 방정식 ㉠의 해의 개수와 같으므로

$${}_{3}\mathrm{H}_{6}={}_{3+6-1}\mathrm{C}_{6}={}_{8}\mathrm{C}_{6}={}_{8}\mathrm{C}_{2}=28$$

답 (1) 55 (2) 28

Remark 방정식 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=r$ (n, r는 자연수)에서

① 음이 아닌 정수인 해의 개수 ➡ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수
➡ ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$

② 양의 정수인 해의 개수 ➡ 서로 다른 n개에서 $(r-n)$개를 택하는 중복조합의 수
➡ ${}_{n}\mathrm{H}_{r-n}$ (단, $n\leq r$)

정답 및 풀이 • 17쪽

유제 027-1 방정식 $x+y+z+w=12$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) x, y, z, w가 모두 음이 아닌 정수인 해의 개수

(2) x, y, z, w가 모두 자연수인 해의 개수

Plus
유제 027-2 $a+b+c=13$에서 $a\geq1$, $b\geq2$, $c\geq3$을 만족시키는 정수인 해의 개수를 구하여라.

대표유형 028 함수의 개수

• 개념 009, 010

두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 $i\in A$, $j\in A$일 때, 다음을 구하여라.

(1) $i<j$이면 $f(i)<f(j)$를 만족시키는 함수 $f:A\longrightarrow B$의 개수

(2) $i<j$이면 $g(i)\leq g(j)$를 만족시키는 함수 $g:A\longrightarrow B$의 개수

유형 Guide (1) 함수 f는 정의역의 원소가 클수록 대응하는 공역의 원소도 커지는 함수이다. 따라서 중복을 허용하지 않고 정의역의 원소의 개수만큼 공역의 원소를 택하면 함수가 결정되므로 조합의 수를 이용하여 함수의 개수를 구한다.

(2) 함수 g는 정의역의 원소가 크면 대응하는 공역의 원소가 크거나 같은 함수이다. 따라서 중복을 허용하여 정의역의 원소의 개수만큼 공역의 원소를 택하면 함수가 결정되므로 중복조합의 수를 이용하여 함수의 개수를 구한다.

유형 SSEN
- **$a<b$이면 $f(a)<f(b)$인 함수 f의 개수 ⊙ 조합 이용**
- **$a<b$이면 $g(a)\leq g(b)$인 함수 g의 개수 ⊙ 중복조합 이용**

풀이 (1) 주어진 조건을 만족시키려면 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 3개를 택한 후 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.

즉 함수 f의 개수는 공역의 원소 5개 중에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_5C_3={}_5C_2=10$$

(2) 주어진 조건을 만족시키려면 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.

즉 함수 g의 개수는 공역의 원소 5개 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35$$

답 (1) 10 (2) 35

Remark 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ r\}$에서 집합 $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$으로의 함수 중에서

① 일대일함수의 개수

➡ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수 ➡ ${}_nP_r$ (단, $n\geq r$)

② 함수의 개수

➡ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수 ➡ ${}_n\Pi_r$

③ $a<b$이면 $f(a)<f(b)$를 만족시키는 함수 f의 개수

➡ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수 ➡ ${}_nC_r$ (단, $n\geq r$)

④ $a<b$이면 $g(a)\leq g(b)$를 만족시키는 함수 g의 개수

➡ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수 ➡ ${}_nH_r$

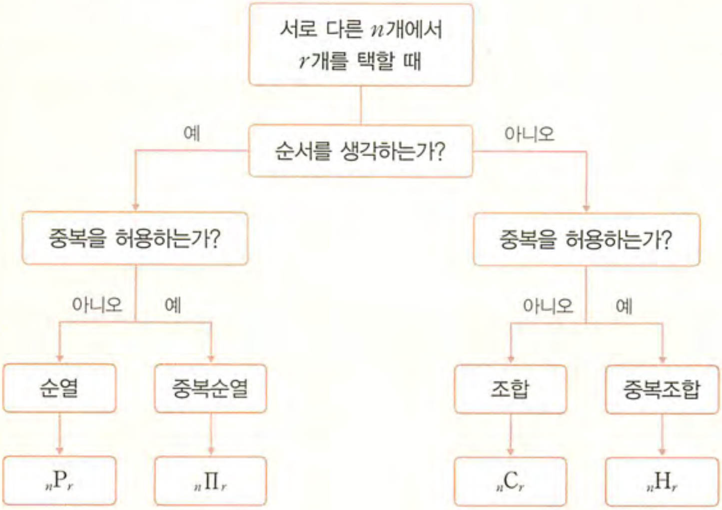
정답 및 풀이 • 17쪽

유제 028-1 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{3,\ 5,\ 7\}$에 대하여 $a\in X$, $b\in X$일 때, $a<b$이면 $f(a)\leq f(b)$를 만족시키는 함수 $f:X\longrightarrow Y$ 중에서 공역과 치역이 같은 함수 f의 개수를 구하여라.

특강 011

순열, 중복순열, 조합, 중복조합의 비교

지금까지 공부한 순열, 중복순열, 조합, 중복조합을 정리하면 다음과 같다.



예를 들어 서로 다른 3개의 문자 중에서 2개의 문자를 택하는 방법의 수를 비교해 보자.

① 순서를 생각하고 서로 다른 2개의 문자를 택하는 방법

➡ 순열 ➡ $_{3}P_{2}=6$

② 순서를 생각하고 중복을 허용하여 2개의 문자를 택하는 방법

➡ 중복순열 ➡ $_{3}\Pi_{2}=3^{2}=9$

③ 순서를 생각하지 않고 서로 다른 2개의 문자를 택하는 방법

➡ 조합 ➡ $_{3}C_{2}=3$

④ 순서를 생각하지 않고 중복을 허용하여 2개의 문자를 택하는 방법

➡ 중복조합 ➡ $_{3}H_{2}={}_{3+2-1}C_{2}={}_{4}C_{2}=6$

개념 SSEN

순열의 수 →	$_{n}P_{r}=\frac{n!}{(n-r)!}$
중복순열의 수 →	$_{n}\Pi_{r}=n^{r}$
조합의 수 →	$_{n}C_{r}=\frac{_{n}P_{r}}{r!}$
중복조합의 수 →	$_{n}H_{r}={}_{n+r-1}C_{r}$

중단원 연습 문제

STEP 1 유형 Training

01 서로 다른 7개의 공 중에서 5개의 공을 택할 때, 특정한 공 1개를 항상 포함하는 방법의 수를 a, 포함하지 않는 방법의 수를 b라 하자. $a+b$의 값을 구하여라.

02 8개의 문자 A, B, C, D, E, F, G, H 중에서 B, G를 포함하여 4개의 문자를 뽑아 일렬로 나열할 때, B, G가 이웃하지 않게 나열하는 방법의 수는?

① 60 ② 90 ③ 120 ④ 150 ⑤ 180

03 오른쪽 그림과 같은 원 위에 같은 간격으로 놓인 6개의 점이 있다. 이 중에서 3개의 점을 연결하여 만들 수 있는 삼각형 중에서 직각삼각형이 아닌 것의 개수는?

① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

04 $(a+b)^4(x+y+z)^3$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구하여라.

05 x, y, z가 모두 음이 아닌 정수일 때, $10 \leq x+y+z \leq 12$를 만족시키는 해의 개수를 구하여라.

STEP 2 실전 Application

서술형

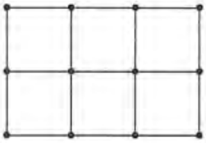
06 x에 대한 이차방정식 ${}_nC_6x^2-{}_nC_5x+{}_nC_4=0$의 두 근을 α, β라 하자. $\alpha+\beta=\frac{6}{5}$일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하여라.

07 어느 모임에 12쌍의 부부가 참석하였다. 남편들은 자신의 부인을 제외한 모든 사람과 악수를 하였고, 부인들끼리는 서로 악수를 하지 않았다고 할 때, 모임에 참석한 24명이 나눈 악수는 총 몇 번인가?

① 78번 ② 108번 ③ 144번 ④ 198번 ⑤ 276번

서술형

08 오른쪽 그림과 같이 합동인 정사각형 6개로 만든 도형 위에 12개의 점이 놓여 있다. 주어진 점을 연결하여 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수를 a, 주어진 점을 꼭짓점으로 하여 만들 수 있는 삼각형의 개수를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.



평가원기출

09 고구마피자, 새우피자, 불고기피자 중에서 m개를 주문하는 경우의 수가 36일 때, 고구마피자, 새우피자, 불고기피자를 적어도 하나씩 포함하여 m개를 주문하는 경우의 수는?

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

서술형

10 같은 모양의 초콜릿 8개를 A, B, C 3명의 아이들에게 나누어 주려고 한다. 각 아이에게 적어도 한 개씩 나누어 주는 방법의 수를 m이라 하고 A, B에게는 각각 2개 이상씩, C에게는 홀수 개를 나누어 주는 방법의 수를 n이라 할 때, $m+n$의 값을 구하여라.

평가원기출

11 방정식 $x+y+z=4$를 만족시키는 -1 이상의 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는?

① 21 ② 28 ③ 36 ④ 45 ⑤ 56

12 x, y, z가 음이 아닌 정수일 때, 자연수 a에 대하여 방정식 $x+y+z=a$를 만족시키는 해의 개수를 $f(a)$라 하자. 이때 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(20)$의 값은?

① 885 ② 1078 ③ 1770 ④ 2156 ⑤ 3540

평가원기출

13 어느 상담 교사는 월요일, 화요일, 수요일 3일 동안 학생 9명과 상담하기 위하여 상담 계획표를 작성하려고 한다.

[상담 계획표]

요일	월요일	화요일	수요일
학생 수(명)	a	b	c

상담 교사는 각 학생과 한 번만 상담하고, 요일별로 적어도 한 명의 학생과 상담한다. 상담 계획표에 학생 수만을 기록할 때, 작성할 수 있는 상담 계획표의 가짓수를 구하여라. (단, a, b, c는 자연수이다.)

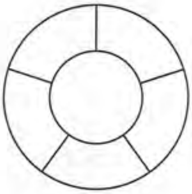
서술형

14 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 $a \in X$, $b \in X$일 때, 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \longrightarrow Y$의 개수를 구하여라.

(가) $a<b$이면 $f(a) \leq f(b)$이다. (나) $f(1)f(4)=6$

STEP 3 심화 Forwarding

15 오른쪽 그림과 같이 6개의 영역으로 나누어진 원을 빨강, 파랑, 노랑, 주황, 보라, 초록의 6가지 색을 사용하여 칠하려고 한다. 같은 색을 중복하여 사용해도 좋으나 이웃한 영역은 서로 다른 색으로 칠하는 방법의 수는? (단, 각 영역에는 한 가지 색만 칠하고, 가운데 원을 제외한 나머지 5개의 영역은 모두 합동이다.)



① 720　② 1080　③ 1224　④ 1444　⑤ 1600

16 1부터 40까지의 홀수 중에서 서로 다른 두 수를 택할 때, 두 수의 합이 3의 배수가 되는 경우의 수는?

① 57　② 59　③ 61　④ 63　⑤ 65

서술형

17 6개의 빨간 구슬과 4개의 노란 구슬을 서로 다른 3개의 상자에 넣을 때, 빈 상자가 없도록 넣는 방법의 수를 구하여라. (단, 색깔이 같은 구슬은 구분하지 않는다.)

서술형

18 x, y, z가 양의 홀수일 때, 방정식 $x+y+z=n$을 만족시키는 해의 개수를 A_n이라 하자. $A_n \geq 100$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하여라.

04

이항정리와 분할

재산 분할이나 토지 분할과 같이 전체를 둘 또는 그 이상으로 쪼개는 것을 분할이라 한다. 그렇다면 자연수나 집합도 분할할 수 있을까?

이 단원에서는 자연수의 분할과 집합의 분할의 수에 대하여 알아보고 이것을 활용하여 서로 같은 것이나 서로 다른 것을 몇 개의 묶음으로 나누는 방법에 대하여 알아보자. 또 앞에서 배운 조합의 수를 이용하여 $(a+b)^n$의 전개식의 일반항을 구하는 방법에 대해서 공부해 보자.

●한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

08 이항정리

- 이항정리의 뜻을 알고, 이항계수에 대한 여러 가지 성질을 이해한다.
- 이항정리를 이용하여 식을 전개하고, 이를 이용한 계산을 할 수 있다.
- 파스칼의 삼각형의 성질을 이해한다.

09 자연수의 분할

- 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타내는 방법의 수를 구할 수 있다.

10 집합의 분할

- 유한집합을 서로소인 몇 개의 집합의 합집합으로 나타내는 방법의 수를 구할 수 있다.

개념 & 특강	대표유형 & 유제	
012 이항정리	029 $(a+b)^n$의 전개식	030 $(a+b)^p(c+d)^q$의 전개식
특강 013 $(a+b+c)^n$의 전개식의 일반항	031 $(a+b+c)^n$의 전개식	
014 파스칼의 삼각형	032 이항계수의 합	
특강 015 파스칼의 삼각형의 성질		
016 이항계수의 성질	033 이항계수의 성질	
017 자연수의 분할	034 자연수의 분할의 수의 활용	
특강 018 그림으로 이해하는 자연수의 분할		
특강 019 $P(n,\ k)$의 성질		
020 집합의 분할	035 집합의 분할의 수	036 집합의 분할의 수의 활용
021 집합의 분할의 수 구하기		
특강 022 $S(n,\ k)$의 성질		

개념 012 이항정리

자연수 n에 대하여 $(a+b)^n$의 전개식을 조합의 수를 이용하여 나타내면 다음과 같고, 이것을 **이항정리**라 한다.

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= {}_nC_0\,a^n + {}_nC_1\,a^{n-1}b^1 + \cdots + {}_nC_r\,a^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_n\,b^n \\ &= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\,a^{n-r}b^r\end{aligned}$$

$(a+b)^n$의 전개식에서 각 항의 계수 ${}_nC_0$, ${}_nC_1$, $\cdots$, ${}_nC_r$, $\cdots$, ${}_nC_n$을 **이항계수**라 하고, ${}_nC_r\,a^{n-r}b^r$을 $(a+b)^n$의 전개식의 **일반항**이라 한다.

Remark ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$이므로 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$의 계수와 a^rb^{n-r}의 계수는 같다.

개념 Approach

다항식 $(a+b)^3$을 곱셈 공식을 이용하여 전개하면

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

이다. 이 전개식을 조합의 수를 이용하여 나타내는 방법을 생각해 보자.

$$(a+b)^3 = (\underset{❶}{\underline{a+b}})(\underset{❷}{\underline{a+b}})(\underset{❸}{\underline{a+b}})$$

위의 식을 전개하려면 3개의 인수 ❶, ❷, ❸의 각각에서 a, b 중 하나를 택하여 곱해야 한다.

(i) a^3의 계수는 ❶, ❷, ❸에서 모두 a를 택하고 b를 택하지 않는 방법의 수와 같다.

➡ ${}_3C_3$

(ii) a^2b의 계수는 ❶, ❷, ❸ 중 2개에서 a를 택하고 1개에서 b를 택하는 방법의 수와 같다.

➡ ${}_3C_2$

(iii) ab^2의 계수는 ❶, ❷, ❸ 중 1개에서 a를 택하고 2개에서 b를 택하는 방법의 수와 같다.

➡ ${}_3C_1$

(iv) b^3의 계수는 ❶, ❷, ❸에서 a를 택하지 않고 모두 b를 택하는 방법의 수와 같다.

➡ ${}_3C_0$

	$a+b$	$a+b$	$a+b$
$a^3 \cdots$	a	a	a
$a^2b \cdots$	a	a	b
	a	b	a
	b	a	a
$ab^2 \cdots$	a	b	b
	b	a	b
	b	b	a
$b^3 \cdots$	b	b	b

따라서 $(a+b)^3$의 전개식을 조합의 수를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$(a+b)^3 = {}_3C_3\,a^3 + {}_3C_2\,a^2b + {}_3C_1\,ab^2 + {}_3C_0\,b^3$$

이때 ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$이므로 다음이 성립한다.

$$(a+b)^3 = {}_3C_0\,a^3 + {}_3C_1\,a^2b + {}_3C_2\,ab^2 + {}_3C_3\,b^3$$

일반적으로 자연수 n에 대하여

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n\text{개}}$$

이므로 $(a+b)^n$의 전개식은 n개의 인수 $(a+b)$에서 각각 a, b 중 어느 하나를 택하여 곱한 항을 모두 더한 것이다.

이때 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$은 n개의 인수 중 r개의 인수에서 b를 택하고 나머지 $(n-r)$개의 인수에서 a를 택하여 곱한 것이므로 $a^{n-r}b^r$의 계수는 ${}_n\mathrm{C}_r$이다.

따라서 $r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$에 대하여 각 항의 계수는

$${}_n\mathrm{C}_0,\ {}_n\mathrm{C}_1,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_r,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_n$$

이므로 $(a+b)^n$의 전개식을 조합의 수를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

1씩 증가

1씩 감소

$(n-r)+r=n$

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0\underbrace{a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b^1+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n}_{(n+1)\text{개}}b^n$$

위에서 $(a+b)^n$의 전개식에는 다음과 같은 특징이 있음을 알 수 있다.

① 항의 개수는 $n+1$이다.

② 각 항에서 a의 지수와 b의 지수의 합은 n이다.

개념 Check 1

이항정리를 이용하여 $(2x-y)^4$을 전개하여라.

풀이

$$\begin{aligned}(2x-y)^4&=\sum_{r=0}^{4}{}_4\mathrm{C}_r\,(2x)^{4-r}(-y)^r\\&={}_4\mathrm{C}_0\,(2x)^4+{}_4\mathrm{C}_1\,(2x)^3(-y)+{}_4\mathrm{C}_2\,(2x)^2(-y)^2+{}_4\mathrm{C}_3\,(2x)(-y)^3\\&\quad+{}_4\mathrm{C}_4\,(-y)^4\\&=16x^4-32x^3y+24x^2y^2-8xy^3+y^4\end{aligned}$$

답 풀이 참조

개념 Check 2

$(a+b)^8$의 전개식에서 a^6b^2의 계수를 구하여라.

풀이 $(a+b)^8$의 전개식의 일반항은 ${}_8\mathrm{C}_ra^{8-r}b^r$

a^6b^2항은 $r=2$일 때이므로 a^6b^2의 계수는 ${}_8\mathrm{C}_2=28$

답 28

대표유형 029 $(a+b)^n$의 전개식

• 개념 012

다음을 구하여라.

(1) $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항

(2) $(a-2b^2)^9$의 전개식에서 a^6b^6의 계수

유형 Guide $(a+b)^n$의 전개식의 일반항이 $_nC_r a^{n-r}b^r$임을 이용하여 일반항을 구한 후 조건을 만족시키는 r의 값을 찾는다. 이 값을 일반항에 대입하면 각 항의 계수를 구할 수 있다.

유형 SSEN **$(a+b)^n$의 전개식에서 계수 구하기 ➡ 일반항 $_nC_r a^{n-r}b^r$ 이용**

풀이 (1) $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$$_6C_r x^{6-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_6C_r x^{6-r}\cdot 2^r\cdot x^{-r}={}_6C_r 2^r x^{6-2r}$$

상수항은 $6-2r=0$일 때이므로 $r=3$

따라서 상수항은

$$_6C_3\, 2^3=20\cdot 8=160$$

(2) $(a-2b^2)^9$의 전개식의 일반항은

$$_9C_r a^{9-r}(-2b^2)^r={}_9C_r\,(-2)^r a^{9-r}b^{2r}$$

a^6b^6항은 $9-r=6$, $2r=6$일 때이므로 $r=3$

따라서 a^6b^6의 계수는

$$_9C_3(-2)^3=84\cdot(-8)=-672$$

답 (1) 160 (2) -672

Remark $(ax+by)^n$의 전개식의 일반항은 $_nC_r a^{n-r}b^r x^{n-r}y^r$이므로 $x^{n-r}y^r$의 계수는 $_nC_r a^{n-r}b^r$이다.

정답 및 풀이 • 22쪽

유제 029-1 다음 식의 전개식에서 [ ] 안의 항의 계수를 구하여라.

(1) $\left(x^2-\dfrac{3}{x}\right)^5$ $[x^4]$

(2) $(3x-2y)^4$ $[xy^3]$

Plus 유제 029-2 $\left(kx^3-\dfrac{2}{x}\right)^4$의 전개식에서 상수항이 8일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

대표유형 030 $(a+b)^p(c+d)^q$의 전개식

• 개념 012

다음을 구하여라.

(1) $(x+2)^4(x+3)^3$의 전개식에서 x^2의 계수

(2) $(x^2+2)\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$의 전개식에서 상수항

유형 Guide (1) $(a+b)^p$과 $(c+d)^q$의 전개식의 일반항을 곱하여 $(a+b)^p(c+d)^q$의 전개식의 일반항을 구한다.
(2) $(a+b)(c+d)^q=a(c+d)^q+b(c+d)^q$이므로 $a(c+d)^q$과 $b(c+d)^q$에서 각각 상수항을 구한다.

유형 SSEN **$(a+b)^p(c+d)^q$의 전개식의 일반항 ○ $(a+b)^p$과 $(c+d)^q$의 전개식의 일반항의 곱**

풀이 (1) $(x+2)^4$의 전개식의 일반항은 $\quad {}_4C_r x^{4-r}2^r$

$(x+3)^3$의 전개식의 일반항은 $\quad {}_3C_s x^{3-s}3^s$

따라서 $(x+2)^4(x+3)^3$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r x^{4-r}2^r\cdot{}_3C_s x^{3-s}3^s={}_4C_r\cdot{}_3C_s\cdot 2^r\cdot 3^s\cdot x^{7-r-s}$$

x^2항은 $7-r-s=2$, 즉 $r+s=5\,(0\le r\le 4,\ 0\le s\le 3)$일 때이다.

이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는 $\quad (2, 3), (3, 2), (4, 1)$

따라서 구하는 x^2의 계수는

$${}_4C_2\cdot{}_3C_3\cdot 2^2\cdot 3^3+{}_4C_3\cdot{}_3C_2\cdot 2^3\cdot 3^2+{}_4C_4\cdot{}_3C_1\cdot 2^4\cdot 3^1=648+864+144=1656$$

(2) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$의 전개식의 일반항은 $\quad {}_8C_r x^{8-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_8C_r(-1)^r x^{8-2r} \quad \cdots\cdots$ ㉠

$(x^2+2)\left(x-\frac{1}{x}\right)^8=x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^8+2\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$이므로 전개식에서 상수항은 x^2과 ㉠의 $\frac{1}{x^2}$항, 2와 ㉠의 상수항이 곱해질 때 나타난다.

(i) ㉠에서 $\frac{1}{x^2}$항은 $8-2r=-2$, 즉 $r=5$일 때이므로 $\quad {}_8C_5(-1)^5x^{-2}=-\frac{56}{x^2}$

(ii) ㉠에서 상수항은 $8-2r=0$, 즉 $r=4$일 때이므로 $\quad {}_8C_4(-1)^4=70$

(i), (ii)에서 구하는 상수항은

$$x^2\cdot\left(-\frac{56}{x^2}\right)+2\cdot 70=-56+140=84$$

답 (1) 1656 (2) 84

정답 및 풀이 • 22쪽

유제 030-1 다음을 구하여라.

(1) $(x-2)^4(x^2+y)^7$의 전개식에서 x^6y^5의 계수

(2) $(x^2-3)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^2의 계수

특강 013 $(a+b+c)^n$의 전개식의 일반항

앞에서 이항정리를 이용하면 분배법칙을 쓰지 않고 $(a+b)^4$, $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$과 같은 식을 간편하게 전개할 수 있음을 공부하였다.
이제 항이 3개인 식의 거듭제곱을 전개하는 방법에 대하여 알아보자.

자연수 n에 대하여 $(a+b+c)^n$의 전개식의 일반항은 다음과 같다.

$$\frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r \text{ (단, } p+q+r=n\text{)}$$

위와 같은 사실은 $(a+b+c)^n$을 $\{a+(b+c)\}^n$ 꼴로 바꾸어 이항정리를 이용하면 증명할 수 있다.
$\{a+(b+c)\}^n$의 전개식에서 a^p을 포함하는 항은 $\quad {}_n\mathrm{C}_p a^p(b+c)^{n-p}$
$(b+c)^{n-p}$의 전개식에서 b^q을 포함하는 항은 $\quad {}_{n-p}\mathrm{C}_q b^qc^{n-p-q}$
따라서 $p+q+r=n$이라 하면 $(a+b+c)^n$의 전개식에서 $a^pb^qc^r$의 계수는

$$ {}_n\mathrm{C}_p\cdot{}_{n-p}\mathrm{C}_q=\frac{n!}{p!(n-p)!}\cdot\frac{(n-p)!}{\underbrace{q!(n-p-q)!}_{p+q+r=n\text{이므로}\quad n-p-q=r}}=\frac{n!}{p!q!r!}$$

이다.

개념 SSEN

$(a+b)^n$의 전개식의 일반항 → $\dfrac{n!}{p!q!}a^pb^q \ (p+q=n)$

$(a+b+c)^n$의 전개식의 일반항 → $\dfrac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r \ (p+q+r=n)$

Remark $(a+b+c)^n$의 전개식의 일반항은 같은 것이 있는 순열을 이용하여 구할 수도 있다.
$(a+b+c)^n$의 전개식에서 $a^pb^qc^r$ $(p+q+r=n)$항은 a가 p개, b가 q개, c가 r개 곱해진 것이다. 따라서 $a^pb^qc^r$의 계수는 n개 중에서 같은 것이 p개, q개, r개씩 있을 때 n개를 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로 $(a+b+c)^n$의 전개식의 일반항은 $\dfrac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$이다.

개념 Check

$(x+y+z)^8$의 전개식에서 x^2yz^5의 계수를 구하여라.

풀이 $(x+y+z)^8$의 전개식의 일반항은

$$\frac{8!}{p!q!r!}x^py^qz^r \ (p+q+r=8)$$

x^2yz^5에서 $p=2$, $q=1$, $r=5$이므로 구하는 계수는

$$\frac{8!}{2!\cdot1!\cdot5!}=168$$

답 168

대표유형 031 $(a+b+c)^n$의 전개식

• 특강 013

다음을 구하여라.

(1) $(x^2-x+3)^5$의 전개식에서 x^5의 계수

(2) $\left(x^2+2+\frac{1}{x}\right)^7$의 전개식에서 x^6의 계수

유형 Guide $(a+b+c)^n$의 전개식의 일반항이 $\frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$ $(p+q+r=n)$임을 이용하여 주어진 식의 일반항을 구한 후 조건을 만족시키는 p, q, r의 값을 찾는다. 이 값을 일반항에 대입하면 계수를 구할 수 있다.

유형 SSEN **$(a+b+c)^n$의 전개식에서 계수 구하기 ◎ 일반항 $\frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$ 이용**

풀이 (1) $(x^2-x+3)^5$의 전개식의 일반항은

$$\frac{5!}{p!q!r!}(x^2)^p(-x)^q3^r=\frac{5!}{p!q!r!}(-1)^q3^rx^{2p+q} \text{ (단, } p+q+r=5)$$

x^5항은 $2p+q=5$일 때이므로 p, q, r의 순서쌍 (p, q, r)는

$(0, 5, 0)$, $(1, 3, 1)$, $(2, 1, 2)$

따라서 x^5의 계수는

$$\frac{5!}{0!\cdot5!\cdot0!}(-1)^5+\frac{5!}{1!\cdot3!\cdot1!}(-1)^3\cdot3^1+\frac{5!}{2!\cdot1!\cdot2!}(-1)^1\cdot3^2$$
$$=-1-60-270=-331$$

(2) $\left(x^2+2+\frac{1}{x}\right)^7$의 전개식의 일반항은

$$\frac{7!}{p!q!r!}(x^2)^p2^q\left(\frac{1}{x}\right)^r=\frac{7!}{p!q!r!}2^qx^{2p-r} \text{ (단, } p+q+r=7)$$

x^6항은 $2p-r=6$일 때이므로 p, q, r의 순서쌍 (p, q, r)는

$(3, 4, 0)$, $(4, 1, 2)$

따라서 x^6의 계수는

$$\frac{7!}{3!\cdot4!\cdot0!}\cdot2^4+\frac{7!}{4!\cdot1!\cdot2!}\cdot2^1=560+210=770$$

답 (1) -331 (2) 770

정답 및 풀이 • 23쪽

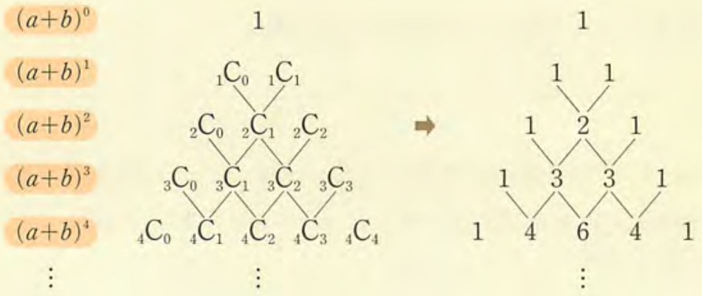
유제 031-1 $(x+y-2z)^6$의 전개식에서 x^2yz^3의 계수를 구하여라.

Plus
유제 031-2 $(x^2+ax+2)^6$의 전개식에서 x^3의 계수가 2240일 때, 실수 a의 값을 구하여라.

개념 014

파스칼의 삼각형

$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$일 때, $(a+b)^n$의 전개식에서 이항계수를 차례대로 다음과 같이 배열한 것을 **파스칼의 삼각형**이라 한다.



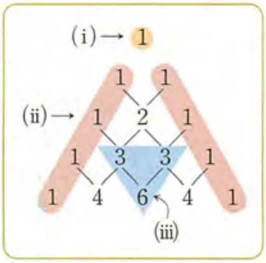
개념 Approach

파스칼의 삼각형은 이항계수를 삼각형의 모양으로 배열한 것으로 다음과 같은 방법으로 만들 수 있다.

(i) 첫 번째 줄에 숫자 1을 적는다.

(ii) 각 단계의 양 끝에 1을 적는다.

(iii) 각 단계의 이웃하는 두 수의 합을 다음 단계의 두 수 사이에 적는다.



파스칼의 삼각형을 살펴보면 다음과 같은 조합의 성질을 확인할 수 있다.

① 각 단계의 양 끝에 있는 수는 모두 1이므로 ${}_{n}C_{0}=1,\ {}_{n}C_{n}=1$

② 각 단계의 수의 배열이 좌우 대칭이므로 ${}_{n}C_{r}={}_{n}C_{n-r}$

③ 각 단계의 수는 그 위 단계의 이웃하는 두 수의 합과 같으므로 ${}_{n}C_{r}={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_{r}$

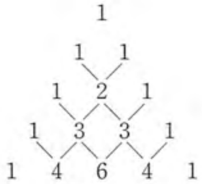
파스칼의 삼각형을 이용하면 이항계수를 일일이 계산하지 않아도 $(a+b)^n$을 쉽게 전개할 수 있다.

개념 Check

파스칼의 삼각형을 이용하여 $(a-2b)^4$을 전개하여라.

풀이 오른쪽 그림의 파스칼의 삼각형에 의하여

$$\begin{aligned}(a-2b)^4&=a^4+4a^3\cdot(-2b)+6a^2\cdot(-2b)^2\\&\quad+4a\cdot(-2b)^3+(-2b)^4\\&=a^4-8a^3b+24a^2b^2-32ab^3+16b^4\end{aligned}$$

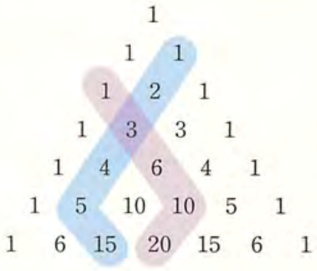


답 풀이 참조

특강 015 파스칼의 삼각형의 성질

개념 014에서 파스칼의 삼각형의 각 단계의 수는 그 위 단계의 이웃하는 두 수의 합과 같고, 배열이 좌우 대칭임을 확인하였다. 이밖에 파스칼의 삼각형이 갖는 특징에 대하여 알아보자.

(1) 하키스틱 모양의 배열



오른쪽 그림과 같이 파스칼의 삼각형에서 왼쪽 1부터 오른쪽 아래의 대각선 방향으로 내려가면서 이항계수를 더한 값은 마지막 이항계수의 왼쪽 아래에 있는 이항계수와 같다. 예를 들어

$$\begin{aligned}1+3+6+10&={}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3 \quad \Big) {}_2C_0={}_3C_0\\&={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3\\&={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3\\&={}_5C_2+{}_5C_3\\&={}_6C_3=20\end{aligned}$$

이다. 마찬가지로 파스칼의 삼각형에서 오른쪽 1부터 왼쪽 아래의 대각선 방향으로 내려가면서 이항계수를 더한 값은 마지막 이항계수의 오른쪽 아래에 있는 이항계수와 같다. 예를 들어

$$\begin{aligned}1+2+3+4+5&={}_1C_1+{}_2C_1+{}_3C_1+{}_4C_1+{}_5C_1 \quad \Big) {}_1C_1={}_2C_2\\&={}_2C_2+{}_2C_1+{}_3C_1+{}_4C_1+{}_5C_1\\&={}_3C_2+{}_3C_1+{}_4C_1+{}_5C_1\\&={}_4C_2+{}_4C_1+{}_5C_1\\&={}_5C_2+{}_5C_1\\&={}_6C_2=15\end{aligned}$$

이다.

(2) 각 단계의 합

파스칼의 삼각형에서 각 단계의 수를 모두 더하면

1단계의 합 ➡ $1=2^0$
2단계의 합 ➡ $1+1=2=2^1$
3단계의 합 ➡ $1+2+1=4=2^2$
4단계의 합 ➡ $1+3+3+1=8=2^3$
⋮

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
⋮

따라서 파스칼의 삼각형에서 n단계의 수를 모두 더한 값은 2^{n-1}임을 알 수 있다.

대표유형 032 이항계수의 합

• 개념 014 • 특강 015

${}_{2}C_{2}+{}_{3}C_{2}+{}_{4}C_{2}+\cdots+{}_{15}C_{2}$의 값을 구하여라.

유형 Guide ${}_{n}C_{n}=1$과 ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_{r}={}_{n}C_{r}$임을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

유형 SSEN 이항계수의 합 ⊙ ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_{r}={}_{n}C_{r}$임을 이용

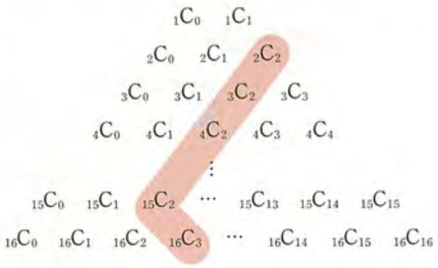
풀이

$$\begin{aligned}{}_{2}C_{2}+{}_{3}C_{2}+{}_{4}C_{2}+\cdots+{}_{15}C_{2}&=\underline{{}_{3}C_{3}}+{}_{3}C_{2}+{}_{4}C_{2}+\cdots+{}_{15}C_{2}\\&={}_{4}C_{3}+{}_{4}C_{2}+{}_{5}C_{2}+\cdots+{}_{15}C_{2}\\&={}_{5}C_{3}+{}_{5}C_{2}+\cdots+{}_{15}C_{2}\\&={}_{6}C_{3}+\cdots+{}_{15}C_{2}\\&\vdots\\&={}_{15}C_{3}+{}_{15}C_{2}\\&={}_{16}C_{3}=560\end{aligned}$$

$\boxed{{}_{3}C_{3}={}_{2}C_{2}=1}$

답 560

Remark 구하는 식의 값은 오른쪽 그림과 같이 파스칼의 삼각형에서 ${}_{2}C_{2}=1$부터 왼쪽 아래의 대각선 방향으로 ${}_{15}C_{2}$까지 내려가면서 이항계수를 더한 값과 같고, 이 값은 마지막 이항계수 ${}_{15}C_{2}$의 오른쪽 아래에 있는 이항계수 ${}_{16}C_{3}$과 같다.



정답 및 풀이 • 23쪽

유제 032-1 ${}_{5}C_{1}+{}_{6}C_{2}+{}_{7}C_{3}+\cdots+{}_{14}C_{10}$의 값을 구하여라.

유제 032-2 오른쪽 파스칼의 삼각형에서 1행부터 10행까지의 모든 수의 합을 구하여라.

[1행] 1
[2행] 1 1
[3행] 1 2 1
[4행] 1 3 3 1
[5행] 1 4 6 4 1
⋮

개념 016

이항계수의 성질

이항정리를 이용하여 다항식 $(1+x)^n$을 전개하면

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$$

이다. 이를 이용하면 다음과 같은 이항계수의 성질을 얻을 수 있다.

① $\mathbf{{}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n}$

② ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

③ ${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots=2^{n-1}$

개념 Approach

이항계수의 성질을 증명해 보자.

$(1+x)^n$의 전개식은

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 식은 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입해도 항상 성립한다.

① ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$(1+1)^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$$

$$\therefore\ {}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n \quad \cdots\cdots ㉡$$

② ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$(1-1)^n={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^n{}_nC_n$$

$$\therefore\ {}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0 \quad \cdots\cdots ㉢$$

③ ㉡+㉢을 하면 $2({}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots)=2^n$

$\therefore\ {}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots=2^{n-1}$ ⇐ 홀수 번째 항의 계수의 합

㉡−㉢을 하면 $2({}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots)=2^n$

$\therefore\ {}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots=2^{n-1}$ ⇐ 짝수 번째 항의 계수의 합

개념 Check

다음 식의 값을 구하여라.

(1) ${}_5C_0-{}_5C_1+{}_5C_2-{}_5C_3+{}_5C_4-{}_5C_5$

(2) ${}_6C_0+{}_6C_2+{}_6C_4+{}_6C_6$

풀이 (1) ${}_5C_0-{}_5C_1+{}_5C_2-{}_5C_3+{}_5C_4-{}_5C_5=0$

(2) ${}_6C_0+{}_6C_2+{}_6C_4+{}_6C_6=2^{6-1}=2^5=32$

답 (1) 0 (2) 32

대표유형 033 이항계수의 성질

• 개념 016

다음에 답하여라.

(1) 부등식 $1000<{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n<2000$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하여라.

(2) ${}_{99}\mathrm{C}_{50}+{}_{99}\mathrm{C}_{51}+\cdots+{}_{99}\mathrm{C}_{99}$의 값을 구하여라.

(3) $\sum_{n=1}^{10}\left(\sum_{r=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_r\right)$의 값을 구하여라.

유형 Guide 이항계수의 성질 ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$을 이용하면 이항계수의 합에 대한 식의 값을 구할 수 있다. 이때 ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$, ${}_n\mathrm{C}_0=1$임을 이용하여 식을 변형한다.

유형 SSEN 이항계수의 합 ○ $\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r=2^n$임을 이용

풀이 (1) ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$이므로

${}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n-1$

따라서 주어진 부등식은 $1000<2^n-1<2000$이므로 $1001<2^n<2001$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$이므로 $n=10$

(2) ${}_{99}\mathrm{C}_0+{}_{99}\mathrm{C}_1+{}_{99}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{99}\mathrm{C}_{99}=2^{99}$이므로

$$({}_{99}\mathrm{C}_{99}+{}_{99}\mathrm{C}_{98}+\cdots+{}_{99}\mathrm{C}_{50})+({}_{99}\mathrm{C}_{50}+{}_{99}\mathrm{C}_{51}+\cdots+{}_{99}\mathrm{C}_{99})=2^{99}$$

$$2({}_{99}\mathrm{C}_{50}+{}_{99}\mathrm{C}_{51}+\cdots+{}_{99}\mathrm{C}_{99})=2^{99} \quad \boxed{{}_{99}\mathrm{C}_r={}_{99}\mathrm{C}_{99-r}}$$

$$\therefore\ {}_{99}\mathrm{C}_{50}+{}_{99}\mathrm{C}_{51}+\cdots+{}_{99}\mathrm{C}_{99}=\frac{1}{2}\cdot 2^{99}=2^{98}$$

(3) $\sum_{r=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n-1$이므로

$$\sum_{n=1}^{10}\left(\sum_{r=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_r\right)=\sum_{n=1}^{10}(2^n-1)=\sum_{n=1}^{10}2^n-\sum_{n=1}^{10}1$$

$$=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}-10=2^{11}-12=2036$$

답 (1) 10 (2) 2^{98} (3) 2036

정답 및 풀이 • 23쪽

유제 033-1 다음에 답하여라.

(1) 부등식 $2000<\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r<3000$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하여라.

(2) $\log_2\left(\sum_{k=25}^{49}{}_{49}\mathrm{C}_k\right)$의 값을 구하여라.

개념 017 자연수의 분할

자연수 n을 자신보다 크지 않은 자연수 $n_1, n_2, n_3, \cdots, n_k$의 합으로

$$n=n_1+n_2+n_3+\cdots+n_k \ (n \geq n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \cdots \geq n_k)$$

와 같이 나타내는 것을 **자연수의 분할**이라 하고, 자연수 n을 k개의 자연수로 분할하는 방법의 수를 기호로 $\boldsymbol{P(n,\ k)}$와 같이 나타낸다.

Remark $P(n,\ k)$의 P는 분할을 뜻하는 partition의 첫 글자이다.

개념 Approach

자연수의 분할은 자연수를 순서를 생각하지 않고 몇 개의 자연수의 합으로 나타내는 것이다.

예를 들어 자연수 6을 3개의 자연수의 합으로

$$6=4+1+1=3+2+1=2+2+2$$

와 같이 나타낼 수 있다. 즉 자연수 6을 3개의 자연수로 분할하는 방법의 수가 3이므로

$$P(6,\ 3)=3$$

이다.

일반적으로 자연수 n을 1개의 자연수로 분할하는 방법은 1가지, n개의 자연수로 분할하는 방법도 1가지이므로

$$P(n,\ 1)=1,\ P(n,\ n)=1$$

이다.

한편 자연수 n의 분할의 수는 자연수 n을 n개 이하의 자연수로 분할하는 방법의 수이므로 다음과 같다.

$$P(n,\ 1)+P(n,\ 2)+P(n,\ 3)+\cdots+P(n,\ n)$$

Remark 똑같은 n개를 똑같은 k개에 나누어 담는 방법의 수는 자연수 n을 k개의 자연수로 분할하는 방법의 수인 $P(n,\ k)$와 같다.

개념 Check

다음을 구하여라.

(1) $P(6,\ 4)$　　　　(2) $P(7,\ 2)$

풀이 (1) $6=3+1+1+1=2+2+1+1$이므로　$P(6,\ 4)=2$

(2) $7=6+1=5+2=4+3$이므로　$P(7,\ 2)=3$

답 (1) 2　(2) 3

특강 018

그림으로 이해하는 자연수의 분할

자연수의 분할을 그림으로 나타내는 방법을 알아보자.

자연수 n의 분할

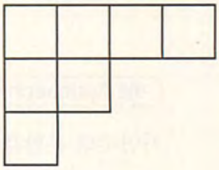
$$n=n_1+n_2+n_3+\cdots+n_k\ (n\geq n_1\geq n_2\geq n_3\geq\cdots\geq n_k)$$

에 대하여 첫째 줄에는 n_1개, 둘째 줄에는 n_2개, 셋째 줄에는 n_3개, …, k번째 줄에는 n_k개의 정사각형을 그리면 자연수의 분할을 그림으로 나타낼 수 있다.

예를 들어 7의 분할

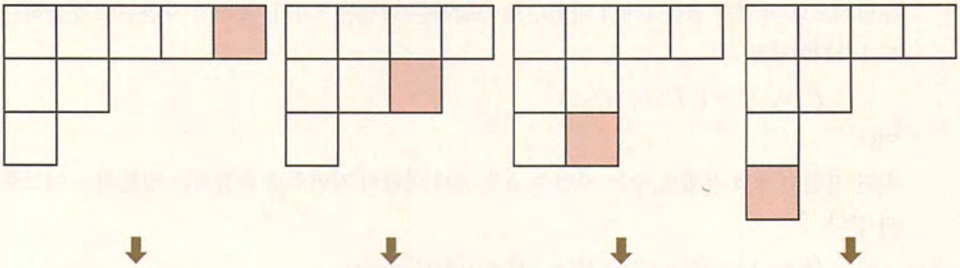
$$7=4+2+1$$

을 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.



이와 같이 나타낸 그림에서 가장 긴 가로줄의 칸 수는 자연수의 분할에서 가장 큰 수로 나타내고, 가장 긴 세로줄의 칸 수는 분할하는 자연수의 개수를 나타낸다.

한편 위의 그림의 각 가로줄의 오른쪽 끝이나 맨 왼쪽 세로줄의 끝에 정사각형을 한 개씩 추가하면 다음과 같이 8의 분할을 구할 수 있다.



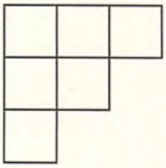
8=5+2+1　　8=4+3+1　　8=4+2+2　　8=4+2+1+1

이와 같은 방법으로 자연수 n의 분할을 나타내는 그림을 이용하여 자연수 $n+1$의 분할을 알아낼 수 있다.

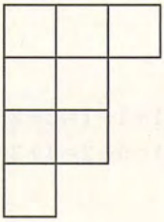
개념 Check

다음 그림이 나타내는 자연수의 분할을 구하여라.

(1)



(2)



답 (1) 6=3+2+1　(2) 8=3+2+2+1

대표유형 034 자연수의 분할의 수의 활용

• 개념 017

7개의 똑같은 구슬을 3개의 똑같은 상자에 나누어 담으려고 한다. 다음을 구하여라.

(1) 빈 상자가 없이 나누어 담는 방법의 수

(2) 빈 상자가 있어도 될 때, 나누어 담는 방법의 수

유형 Guide 7개의 똑같은 구슬은 자연수 7로, 3개의 똑같은 상자는 3개의 자연수로 생각하면 주어진 문제는 자연수 7을 3개 또는 3개 이하의 자연수로 분할하는 방법의 수를 구하는 문제로 생각할 수 있다.

유형 55EN 똑같은 것을 똑같은 것에 나누어 담는 문제 ⊙ 자연수의 분할 이용

풀이 $7=6+1=5+2=4+3$

$=5+1+1=4+2+1=3+3+1=3+2+2$

(1) 구하는 방법의 수는 자연수 7을 3개의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같으므로

$$P(7,\ 3)=4$$

(2) 빈 상자가 1개인 것은 7개의 구슬을 2개의 상자에 나누어 담는 것과 같고, 빈 상자가 2개인 것은 7개의 구슬을 1개의 상자에 나누어 담는 것과 같다.

즉 구하는 방법의 수는 자연수 7을 3개 이하의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같으므로

$$P(7,\ 3)+P(7,\ 2)+P(7,\ 1)=4+3+1=8$$

답 (1) 4 (2) 8

정답 및 풀이 • 24쪽

유제 034-1 9개의 똑같은 사탕을 4개의 똑같은 봉지에 나누어 담으려고 한다. 다음을 구하여라.

(1) 빈 봉지가 없이 나누어 담는 방법의 수

(2) 빈 봉지가 있어도 될 때, 나누어 담는 방법의 수

Plus 유제 034-2 나란히 붙어 있는 똑같은 우표 10장을 절취선을 따라 세 부분으로 나누려고 한다. 각 부분에 적어도 2장 이상의 우표가 포함되는 경우의 수를 구하여라.

특강 019

$P(n,\ k)$의 성질

자연수 n을 k개의 자연수로 분할하는 방법의 수 $P(n, k)$는 다음과 같은 성질을 갖는다.

> $1<k<n$일 때,
> ① $P(n,\ k)=P(n-k,\ 1)+P(n-k,\ 2)+P(n-k,\ 3)+\cdots+P(n-k,\ k)$
> ② $P(n,\ k)=P(n-1,\ k-1)+P(n-k,\ k)$

n개의 똑같은 구슬을 k개의 똑같은 상자에 빈 상자가 없이 나누어 담는 방법을 이용하여 위의 성질을 확인해 보자.

① 빈 상자가 없어야 하므로 먼저 k개의 구슬을 k개의 상자에 한 개씩 담은 다음, 남은 $(n-k)$개의 구슬을 1개, 2개, 3개, ⋯, k개의 상자에 나누어 담으면 된다.
따라서 다음이 성립한다.

$$P(n,\ k)=P(n-k,\ 1)+P(n-k,\ 2)+P(n-k,\ 3)+\cdots+P(n-k,\ k)$$

②(i) 구슬을 1개만 담는 상자가 있는 경우
구슬을 1개만 담을 상자를 제외한 $(k-1)$개의 상자에 $(n-1)$개의 구슬을 빈 상자 없이 나누어 담으면 되므로 구슬을 1개만 담는 상자가 있도록 나누어 담는 방법의 수는

$$P(n-1,\ k-1)$$

(ii) 모든 상자에 2개 이상의 구슬을 담는 경우
k개의 구슬을 k개의 상자에 한 개씩 담은 다음, 남은 $(n-k)$개의 구슬을 빈 상자 없이 k개의 상자에 나누어 담으면 되므로 모든 상자에 2개 이상의 구슬을 나누어 담는 방법의 수는

$$P(n-k,\ k)$$

(i), (ii)에서 다음이 성립한다.

$$P(n,\ k)=P(n-1,\ k-1)+P(n-k,\ k)$$

개념 Check

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

(1) $P(\square,\ 3)=P(7,\ 1)+P(7,\ 2)+P(7,\ 3)$

(2) $P(6,\ 2)=P(5,\ 1)+P(4,\ \square)$

답 (1) 10 (2) 2

개념 020 집합의 분할

원소의 개수가 n인 집합을 공집합이 아니면서 서로소인 k개의 부분집합의 합집합으로 나타내는 것을 **집합의 분할**이라 하고, 원소의 개수가 n인 집합을 k개의 집합으로 분할하는 방법의 수를 기호로 $\boldsymbol{S(n,\ k)}$와 같이 나타낸다.

Remark
- 세 개 이상의 집합이 서로소라는 것은 임의의 두 집합이 서로소인 것을 말한다.
- $S(n,\ k)$의 S는 스코틀랜드의 수학자 스털링(Stirling, J.; 1692~1770)의 이름의 첫 글자이다.

개념 Approach

자연수의 분할이 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타내는 것이라면 집합의 분할은 집합을 몇 개의 집합의 합집합으로 나타내는 것이다.

예를 들어 집합 $A=\{a,\ b,\ c\}$를 공집합이 아니면서 서로소인 2개의 집합의 합집합으로 나타내면

$$\{a\}\cup\{b,\ c\},\ \{b\}\cup\{a,\ c\},\ \{c\}\cup\{a,\ b\}$$

이다. 즉 원소의 개수가 3인 집합을 서로소인 2개의 집합으로 분할하는 방법의 수가 3이므로

$$S(3,\ 2)=3$$

이다.

일반적으로 원소의 개수가 n인 집합을 1개의 집합으로 분할하는 방법은 1가지, n개의 집합으로 분할하는 방법도 1가지이므로

$$S(n,\ 1)=1,\ S(n,\ n)=1$$

이다. 한편 원소의 개수가 n인 집합의 분할의 수는 집합을 n개 이하의 집합으로 분할하는 방법의 수이므로 다음과 같다.

$$S(n,\ 1)+S(n,\ 2)+S(n,\ 3)+\cdots+S(n,\ n)$$

Remark 서로 다른 n개를 서로 같은 k개에 나누어 담는 방법의 수는 원소의 개수가 n인 집합을 k개의 집합으로 분할하는 방법의 수 $S(n,\ k)$와 같다.

개념 Check

집합 $A=\{a, b, c, d\}$의 모든 분할을 이용하여 $S(4,\ 1)$, $S(4,\ 2)$, $S(4,\ 3)$, $S(4,\ 4)$를 구하여라.

풀이 1개의 집합으로 분할하면 $\{a, b, c, d\}$

2개의 집합으로 분할하면

$\{a\}\cup\{b, c, d\},\ \ \{b\}\cup\{a, c, d\},\ \ \{c\}\cup\{a, b, d\},\ \ \{d\}\cup\{a, b, c\},$

$\{a, b\}\cup\{c, d\},\ \ \{a, c\}\cup\{b, d\},\ \ \{a, d\}\cup\{b, c\}$

3개의 집합으로 분할하면

$\{a\}\cup\{b\}\cup\{c, d\},\ \ \{a\}\cup\{c\}\cup\{b, d\},\ \ \{a\}\cup\{d\}\cup\{b, c\},\ \ \{b\}\cup\{c\}\cup\{a, d\},$

$\{b\}\cup\{d\}\cup\{a, c\},\ \ \{c\}\cup\{d\}\cup\{a, b\}$

4개의 집합으로 분할하면 $\{a\}\cup\{b\}\cup\{c\}\cup\{d\}$

이상에서 $S(4,\ 1)=1,\ S(4,\ 2)=7,\ S(4,\ 3)=6,\ S(4,\ 4)=1$ 답 풀이 참조

개념
021

집합의 분할의 수 구하기

원소의 개수가 n인 집합을 원소의 개수가 p, q, r $(p+q+r=n)$인 3개의 집합으로 분할하는 방법의 수는 다음과 같다.

① $p,\ q,\ r$가 모두 다른 수일 때, $_{n}\mathrm{C}_{p}\cdot{}_{n-p}\mathrm{C}_{q}\cdot{}_{r}\mathrm{C}_{r}$

② $p,\ q,\ r$ 중 어느 두 수가 같을 때, $_{n}\mathrm{C}_{p}\cdot{}_{n-p}\mathrm{C}_{q}\cdot{}_{r}\mathrm{C}_{r}\cdot\dfrac{1}{2!}$

③ $p,\ q,\ r$의 세 수가 모두 같을 때, $_{n}\mathrm{C}_{p}\cdot{}_{n-p}\mathrm{C}_{q}\cdot{}_{r}\mathrm{C}_{r}\cdot\dfrac{1}{3!}$

Remark 위와 같이 분할한 세 집합을 일렬로 나열하거나 세 명에게 나누어 주는 방법의 수를 구할 때에는 각각의 분할하는 방법의 수에 3!을 곱한다.

➡ (분할하는 방법의 수)×3!

개념 Approach

자연수 4를 2개의 자연수로 분할하는 방법은

$$4=3+1=2+2$$

이므로 원소의 개수가 4인 집합을 2개의 집합으로 분할할 때는 원소의 개수가 1, 3인 집합으로 분할하는 경우와 원소의 개수가 2, 2인 집합으로 분할하는 경우로 나누어 생각할 수 있다.

예를 들어 집합 $\{a,\ b,\ c,\ d\}$를 2개의 집합으로 분할하는 방법의 수를 구해 보자.

(i) 원소의 개수가 1, 3인 집합으로 분할하는 경우

4개의 원소 $a,\ b,\ c,\ d$에서 1개를 택하여 하나의 집합으로 하고 나머지 3개에서 3개를 택하여 하나의 집합으로 하면 되므로

$$_{4}\mathrm{C}_{1}\cdot{}_{3}\mathrm{C}_{3}=4$$

$\{a\}\cup\{b,\ c,\ d\}$
$\{b\}\cup\{a,\ c,\ d\}$
$\{c\}\cup\{a,\ b,\ d\}$
$\{d\}\cup\{a,\ b,\ c\}$

(ii) 원소의 개수가 2, 2인 집합으로 분할하는 경우

4개의 원소 $a,\ b,\ c,\ d$에서 2개를 택하여 하나의 집합으로 하고 나머지 2개에서 2개를 택하여 하나의 집합으로 하면 되므로

$$_{4}\mathrm{C}_{2}\cdot{}_{2}\mathrm{C}_{2}$$

이때 $a,\ b$를 택하고 $c,\ d$를 택하는 것과 $c,\ d$를 택하고 $a,\ b$를 택하는 것은 서로 같은 경우이다.

이와 같이 서로 같은 것이 2!개씩 있으므로

$$_{4}\mathrm{C}_{2}\cdot{}_{2}\mathrm{C}_{2}\cdot\frac{1}{2!}=3$$

$\{a,\ b\}\cup\{c,\ d\}$ $\{c,\ d\}\cup\{a,\ b\}$
같다.
$\{a,\ c\}\cup\{b,\ d\}$ $\{b,\ d\}\cup\{a,\ c\}$
같다.
$\{a,\ d\}\cup\{b,\ c\}$ $\{b,\ c\}\cup\{a,\ d\}$
같다.

(i), (ii)에서 집합 $\{a, b, c, d\}$를 2개의 집합으로 분할하는 방법의 수는

$$4+3=7$$

대표유형 035 집합의 분할의 수

• 개념 **020, 021**

원소가 5개인 집합에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 2개의 집합으로 분할하는 방법의 수

(2) 3개의 집합으로 분할하는 방법의 수

유형 Guide 5개의 원소를 2개의 집합으로 분할할 때에는 원소의 개수가 1, 4인 집합으로 분할하는 경우와 원소의 개수가 2, 3인 집합으로 분할하는 경우로 나눌 수 있다. 또 3개의 집합으로 분할할 때에는 원소의 개수가 1, 1, 3인 집합으로 분할하는 경우와 원소의 개수가 1, 2, 2인 집합으로 분할하는 경우로 나눌 수 있다. 이때 각 경우의 수는 조합을 이용하여 구할 수 있다.

유형 5SEN **집합의 분할의 수 ○ 조합 이용**

풀이 (1)(i) 원소의 개수가 1, 4인 집합으로 분할하는 경우

5개의 원소 중에서 1개를 택하여 하나의 집합으로 하고, 나머지 4개의 원소를 하나의 집합으로 하면 되므로 $_5C_1\cdot{}_4C_4=5$

(ii) 원소의 개수가 2, 3인 집합으로 분할하는 경우

5개의 원소 중에서 2개를 택하여 하나의 집합으로 하고, 나머지 3개의 원소를 하나의 집합으로 하면 되므로 $_5C_2\cdot{}_3C_3=10$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $5+10=15$

(2)(i) 원소의 개수가 1, 1, 3인 집합으로 분할하는 방법의 수는

$$_5C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}=10$$

(ii) 원소의 개수가 1, 2, 2인 집합으로 분할하는 방법의 수는

$$_5C_1\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=15$$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $10+15=25$

답 (1) 15 (2) 25

Remark (1)에서는 자연수 5를 2개의 자연수로 분할하는 방법

$5=4+1=3+2$

를 이용하여 경우를 나누고 (2)에서는 자연수 5를 3개의 자연수로 분할하는 방법

$5=3+1+1=2+2+1$

을 이용하여 경우를 나눈다.

정답 및 풀이 • 24쪽

유제 035-1 다음을 구하여라.

(1) $S(6,\ 2)$ (2) $S(6,\ 3)$

대표유형 036 집합의 분할의 수의 활용

• 개념 021

7명의 학생을 3개의 모둠으로 나누는 방법의 수를 구하여라.

유형 Guide 7명의 학생을 원소의 개수가 7인 집합으로, 3개의 모둠을 3개의 집합으로 생각하면 주어진 문제는 원소의 개수가 7인 집합을 3개의 집합으로 분할하는 방법의 수를 구하는 문제로 생각할 수 있다.

유형 SSEN **서로 다른 것을 서로 같은 것에 나누어 담는 문제 ○ 집합의 분할 이용**

풀이 $7=5+1+1=4+2+1=3+3+1=3+2+2$

이므로 7명을 3개의 모둠으로 나누는 경우는 다음과 같다.

(i) 1명, 1명, 5명으로 나누는 방법의 수는

$$ {}_7C_1 \cdot {}_6C_1 \cdot {}_5C_5 \cdot \frac{1}{2!}=21 $$

(ii) 1명, 2명, 4명으로 나누는 방법의 수는

$$ {}_7C_1 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_4=105 $$

(iii) 1명, 3명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$$ {}_7C_1 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!}=70 $$

(iv) 2명, 2명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$$ {}_7C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!}=105 $$

이상에서 구하는 방법의 수는

$$ 21+105+70+105=301 $$

답 301

정답 및 풀이 • 24쪽

유제 036-1 서로 다른 8송이의 꽃으로 2개의 꽃다발을 만들려고 한다. 다음을 구하여라.

(1) 꽃다발을 만드는 방법의 수

(2) 꽃다발을 만들어 두 사람 A, B에게 나누어 주는 방법의 수

Plus
유제 036-2 다음을 구하여라. (단, 빈 상자가 없도록 담는다.)

(1) 서로 같은 5개의 공을 서로 같은 2개의 상자에 나누어 담는 방법의 수

(2) 서로 다른 5개의 공을 서로 같은 2개의 상자에 나누어 담는 방법의 수

(3) 서로 다른 5개의 공을 서로 다른 2개의 상자에 나누어 담는 방법의 수

특강
022

$S(n,\ k)$의 성질

원소의 개수가 n인 집합을 k개의 집합으로 분할하는 방법의 수 $S(n,\ k)$는 다음과 같은 성질을 갖는다.

> $1<k<n$일 때,
>
> $$S(n,\ k)=S(n-1,\ k-1)+k\cdot S(n-1,\ k)$$

원소의 개수가 n인 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$을 k개의 집합으로 분할하는 방법을 이용하여 위의 성질을 확인해 보자.

(i) 원소 n이 하나의 집합을 이루는 경우

집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1\}$을 $(k-1)$개의 집합으로 분할한 것과 집합 $\{n\}$을 합치면 되므로 집합 $\{n\}$을 포함하여 분할하는 방법의 수는

$$S(n-1,\ k-1)$$

(ii) 원소 n이 다른 원소와 함께 집합을 이루는 경우

집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1\}$을 k개의 집합으로 분할한 다음 원소 n을 k개의 집합 중 하나의 집합에 넣으면 되므로 집합 $\{n\}$을 포함하지 않고 분할하는 방법의 수는

$$k\cdot S(n-1,\ k)$$

(i), (ii)에서 다음이 성립한다.

$$S(n,\ k)=S(n-1,\ k-1)+k\cdot S(n-1,\ k)$$

개념 SSEN

자연수의 분할 ⟶ $P(n,\ k)=P(n-1,\ k-1)+P(n-k,\ k)$

집합의 분할 ⟶ $S(n,\ k)=S(n-1,\ k-1)+k\cdot S(n-1,\ k)$

개념 Check

$S(4,\ 2)=7$, $S(4,\ 3)=6$임을 이용하여 $S(5,\ 3)$을 구하여라.

풀이 $S(5,\ 3)=S(4,\ 2)+3\cdot S(4,\ 3)$
$=7+3\cdot 6=25$

답 25

중단원 연습 문제

STEP 1 유형 Training

01 $(x-a)^9$의 전개식에서 x의 계수와 상수항의 합이 0일 때, 양수 a의 값은?

① 3　② 6　③ 9　④ 12　⑤ 18

02 $(x^2+1)^3(2x-y)^5$의 전개식에서 x^7y^4의 계수를 a, x^2y^3의 계수를 b라 할 때, $a-b$의 값은?

① -50　② -30　③ 10　④ 30　⑤ 50

03 $\log_2({}_{100}\mathrm{C}_1+{}_{100}\mathrm{C}_3+{}_{100}\mathrm{C}_5+\cdots+{}_{100}\mathrm{C}_{97}+{}_{100}\mathrm{C}_{99})$의 값을 구하여라.

04 자연수 8을 홀수로만 분할하는 방법의 수는?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

05 원소의 개수가 9인 집합을 원소의 개수가 3, 3, 3인 세 개의 집합으로 분할하는 방법의 수를 구하여라.

STEP 2 실전 Application

수능기출

06 다항식 $(x+a)^7$의 전개식에서 x^4의 계수가 280일 때, x^5의 계수는?

(단, a는 상수이다.)

① 84 ② 91 ③ 98 ④ 105 ⑤ 112

서술형

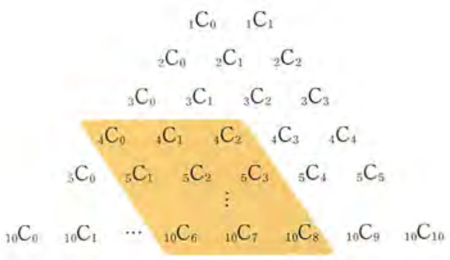
07 $\left(x^5-\frac{3}{x^3}\right)^n$의 전개식에서 상수항이 나오도록 하는 100 이하의 자연수 n의 값의 합을 구하여라.

08 $(x+ay+3)^5$의 전개식에서 x^2y의 계수가 540일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

09 다항식 $(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^8$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하여라.

서술형

10 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 모든 수의 합을 구하여라.



서술형

11 모양과 크기가 같은 검은색 바둑알 8개를 3개의 똑같은 통에 나누어 담으려고 한다. 빈 통이 없도록 담는 방법의 수를 a, 3개 이하의 통에 담는 방법의 수를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

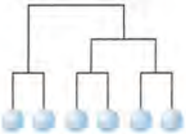
12 서로 같은 사탕 12개를 3개의 서로 같은 상자에 나누어 담으려고 한다. 각 상자에 적어도 2개의 사탕을 담는 방법의 수를 구하여라.

서술형

13 크기가 각각 50 MiB, 100 MiB, 150 MiB, 200 MiB, 250 MiB인 5개의 파일을 용량이 1 GiB인 똑같은 USB 3개에 나누어 저장하는 방법의 수를 구하여라.

(단, 1 GiB는 1024 MiB이고, 각 USB에는 적어도 하나의 파일을 저장한다.)

14 6개의 팀이 오른쪽 그림과 같은 토너먼트 방식으로 경기를 할 때, 대진표를 작성하는 방법의 수는?



① 15　② 30　③ 45

④ 60　⑤ 90

15 $S(6,\ 2)=31$, $S(6,\ 3)=90$, $S(7,\ 2)=63$임을 이용하여 $S(8,\ 3)$을 구하면?

① 184　② 368　③ 552　④ 644　⑤ 966

STEP 3 심화 Forwarding

16 $\{a+(b+c)^2\}^6$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는?

① 47 ② 48 ③ 49 ④ 50 ⑤ 51

평가원기출

17 50 이하의 자연수 n 중에서 $\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k$의 값이 3의 배수가 되도록 하는 n의 개수를 구하여라.

서술형

18 $N={}_{50}C_1\cdot6+{}_{50}C_2\cdot6^2+{}_{50}C_3\cdot6^3+\cdots+{}_{50}C_{50}\cdot6^{50}$일 때, N을 10으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

19 2310을 1보다 큰 두 자연수의 곱으로 나타내는 방법의 수는?

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

서술형

20 A, B, C 세 사람에게 서로 다른 종류의 과일 7개를 나누어 줄 때, 적어도 1개씩은 나누어 주는 방법의 수를 구하여라.

로사다의 비율

심리학자이자 비즈니스 컨설턴트인 마셜 로사다는
2.9013이라는 수를 로사다의 비율이라고 명명했습니다.
이 생소한 수에 과연 어떤 의미가 담겨 있는 것일까요?

로사다는 성공적인 기업의 긍정성과 부정성의 비율을 연구했습니다.
그 결과 2.9013 : 1의 비율, 즉 부정적인 자극이 한 번 발생할 때
긍정적인 자극이 대략 2.9번 정도 나타난다는 것을 발견했습니다.

또한 그는 기업 내의 팀들을 실적에 따라 분류하여
실적이 낮은 팀들은 1 : 1의 비율, 중간 팀들은 2 : 1의 비율,
높은 팀들은 6 : 1의 비율을 보인다는 것을 밝혀냈습니다.

실제로 로사다가 한 회사의 컨설팅을 맡았을 당시
회사의 긍정성과 부정성 비율은 1.15에 불과했는데
이를 3.56까지 끌어올리니 매출이 40% 정도 증가했다고 합니다.

이처럼 성공하는 사람들은 대략 3 : 1 정도의 긍정성과 부정성 비율을 보이는데
중요한 것은 이 비율을 우리의 노력으로 조절할 수 있다는 것입니다.
부정적인 자극이 한 번 주어지면 세 번 정도 긍정적인 생각과 다짐을 해 보는 것이지요.
성공하는 사람들의 3 : 1 황금 비율, 지금부터 적용해 보는 것은 어떨까요?

Ⅱ 확률

05

확률의 뜻과 활용

내일의 날씨나 야구 선수의 타율과 같은 자연 현상과 사회 현상은 다양한 변수의 영향을 받으므로 연역적인 계산을 통하여 그 결과를 산출하기 어렵다. 이와 같은 경우에는 많은 자료와 관찰, 실험을 통하여 통계적으로 확률을 구하여 그 결과를 예측하게 된다. 확률은 이처럼 임의적인 요소에 의해 결정되는 상황을 미리 예측하고 대처하는 것을 가능하게 한다.

이 단원에서는 중학교에서 학습한 확률의 개념을 바탕으로 확률의 다양한 의미와 그 성질에 대하여 살펴보고, 여러 가지 사건의 확률을 구하는 방법에 대하여 알아보자.

●한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

11 시행과 사건

- 시행과 사건의 뜻을 안다.
- 배반사건과 여사건의 뜻을 안다.

12 확률의 뜻과 기본 성질

- 수학적 확률과 통계적 확률의 차이를 이해하고, 문제 상황에 이를 적절하게 활용할 수 있다.

13 확률의 덧셈정리

- 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

개념 & 특강	대표유형 & 유제		
023 시행과 사건			
024 합사건, 곱사건, 배반사건, 여사건	037 합사건, 곱사건, 배반사건, 여사건		
025 수학적 확률	038 수학적 확률	039 수학적 확률 - 순열	040 수학적 확률 - 조합
026 통계적 확률	041 통계적 확률		
특강 027 기하학적 확률	042 기하학적 확률		
028 확률의 기본 성질			
029 확률의 덧셈정리	043 확률의 덧셈정리 (1)	044 확률의 덧셈정리 (2)	
030 여사건의 확률	045 여사건의 확률		

개념 023 시행과 사건

(1) 시행: 같은 조건에서 반복할 수 있고 그 결과가 우연에 의하여 결정되는 실험이나 관찰을 **시행**이라 한다.

(2) 표본공간: 어느 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 **표본공간**이라 한다.

(3) 사건: 어느 시행에서 얻어지는 결과를 **사건**이라 한다.

(4) 근원사건: 표본공간의 부분집합 중에서 한 개의 원소로 이루어진 사건을 **근원사건**이라 한다.

(5) 전사건: 반드시 일어나는 사건을 **전사건**이라 하며 표본공간 자신의 집합이 된다.

(6) 공사건: 절대 일어나지 않는 사건을 **공사건**이라 하고, 이것을 기호로 $\varnothing$과 같이 나타낸다.

Remark
- 표본공간은 전체집합으로, 사건은 표본공간의 부분집합으로 볼 수 있다. 일반적으로 사건과 그 사건을 나타내는 집합은 구별하지 않고 모두 사건이라 한다.
- 표본공간은 공집합이 아닌 경우만 생각한다.

개념 Approach

경우의 수를 집합의 개념을 도입하여 알아보자.

예를 들어 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 일어날 수 있는 모든 경우는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 표본공간과 근원사건은 다음과 같다.

표본공간: $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
근원사건: $\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{5\},\ \{6\}$

이때 '1의 눈이 나온다.', '짝수의 눈이 나온다.' 등은 사건이며 두 사건을 각각 A, B라 하면

$$A=\{1\},\ B=\{2,\ 4,\ 6\}$$

이다.

개념 Check

서로 다른 두 개의 동전을 동시에 한 번 던지는 시행에서 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타낼 때, 다음을 구하여라.

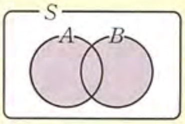
(1) 표본공간 S
(2) 서로 다른 면이 나오는 사건 A
(3) 모두 앞면이 나오는 사건 B
(4) 뒷면이 적어도 한 번 나오는 사건 C

답 (1) $S=\{\mathrm{HH},\ \mathrm{HT},\ \mathrm{TH},\ \mathrm{TT}\}$ (2) $A=\{\mathrm{HT},\ \mathrm{TH}\}$
(3) $B=\{\mathrm{HH}\}$ (4) $C=\{\mathrm{HT},\ \mathrm{TH},\ \mathrm{TT}\}$

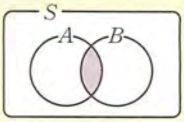
개념 024 합사건, 곱사건, 배반사건, 여사건

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 다음과 같이 정의한다.

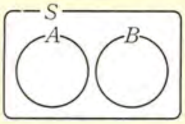
(1) 합사건: A 또는 B가 일어나는 사건을 A와 B의 **합사건**이라 하고, 이것을 기호로 $\boldsymbol{A\cup B}$와 같이 나타낸다.



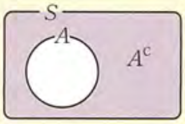
(2) 곱사건: A와 B가 동시에 일어나는 사건을 A와 B의 **곱사건**이라 하고, 이것을 기호로 $\boldsymbol{A\cap B}$와 같이 나타낸다.



(3) 배반사건: A와 B가 동시에 일어나지 않을 때, 즉 $A\cap B=\varnothing$일 때, A와 B는 서로 **배반사건**이라 한다.



(4) 여사건: 사건 A에 대하여 A가 일어나지 않는 사건을 A의 **여사건**이라 하고, 이것을 기호로 $\boldsymbol{A^C}$와 같이 나타낸다.



Remark
- $A\cap A^C=\varnothing$이므로 사건 A와 그 여사건 A^C는 서로 배반사건이다.
- 공사건은 모든 사건과 서로 배반사건이다.
- 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $A\subset B^C$, $B\subset A^C$

개념 Approach

한 개의 주사위를 던지는 시행에서 홀수의 눈이 나오는 사건을 A, 3 이상의 눈이 나오는 사건을 B, 6의 눈이 나오는 사건을 C라 하면

$$A=\{1,\ 3,\ 5\},\ B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\},\ C=\{6\}$$

(1) 홀수 또는 3 이상의 눈이 나오는 사건은 A와 B의 합사건 $A\cup B$이므로

$$A\cup B=\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

(2) 홀수인 동시에 3 이상의 눈이 나오는 사건은 A와 B의 곱사건 $A\cap B$이므로

$$A\cap B=\{3,\ 5\}$$

(3) $A\cap C=\varnothing$이므로 A와 C는 서로 배반사건이다.

(4) 짝수의 눈이 나오는 사건은 A의 여사건 A^C이므로

$$A^C=\{2,\ 4,\ 6\}$$

개념 SSEN

A와 B의 합사건 → 합집합 $A\cup B$
A와 B의 곱사건 → 교집합 $A\cap B$
A의 여사건 → 여집합 A^C

대표유형 037 합사건, 곱사건, 배반사건, 여사건 • 개념 024

1부터 10까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 10장의 카드 중에서 임의로 한 장의 카드를 뽑을 때, 2의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 A, 3의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 B라 하자. 다음을 구하여라.

(1) $A\cap B$
(2) $(A\cup B)^C$
(3) 사건 A와 서로 배반인 사건의 개수

유형 Guide 사건 A, B를 집합으로 나타낸 후 합사건은 합집합, 곱사건은 교집합, 여사건은 여집합으로 생각한다.
(3) 사건 A와 서로 배반인 사건은 여사건 A^C의 부분집합임을 이용한다.

유형 SSEN 합사건, 곱사건, 배반사건, 여사건 ⊙ 집합의 연산 이용

풀이 표본공간을 S라 하면 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$
이고 두 사건 A, B는
$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $B=\{3,\ 6,\ 9\}$
(1) $A\cap B=\{6\}$
(2) $A\cup B=\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10\}$이므로 $(A\cup B)^C=\{1,\ 5,\ 7\}$
(3) 사건 A의 여사건 A^C는 $A^C=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$
사건 A와 서로 배반인 사건은 여사건 A^C의 부분집합이므로 구하는 사건의 개수는
$\underline{2^5=32}$

원소의 개수가 n인 집합의 부분집합의 개수는 2^n

답 (1) $\{6\}$ (2) $\{1,\ 5,\ 7\}$ (3) 32

정답 및 풀이 • 30쪽

유제 037-1 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라 할 때, 다음을 구하여라.

(1) $A\cup B$ (2) $A\cap B$ (3) $A^C\cap B$

유제 037-2 한 개의 주사위를 던질 때, 다음 세 사건 A, B, C 중 서로 배반인 사건을 모두 구하여라.

A: 4 이상의 눈이 나오는 사건
B: 짝수인 소수의 눈이 나오는 사건
C: 홀수의 눈이 나오는 사건

개념 025 수학적 확률

1 확률

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것을 사건 A의 **확률**이라 하고, 이 것을 기호로 $\mathbf{P(A)}$와 같이 나타낸다.

Remark $\mathrm{P}(A)$의 P는 확률을 뜻하는 probability의 첫 글자이다.

2 수학적 확률

표본공간 S가 m개의 근원사건으로 이루어져 있고 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 r개의 근원사건으로 이루어져 있으면 사건 A가 일어날 확률은 다음과 같다.

$$\boxed{\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{r}{m}}$$

이와 같이 정의한 확률을 표본공간 S에서 사건 A가 일어날 **수학적 확률**이라 한다.

Remark 수학적 확률은 표본공간이 유한집합인 경우에만 생각한다.

개념 Approach

한 개의 주사위를 던지는 시행에서 1, 2, 3, 4, 5, 6의 눈 중에서 어떤 눈이 나올지는 우연에 의하여 결정되므로 정확히 예측할 수 없다. 그러나 정상적으로 만들어진 주사위라면 각 눈이 나올 가능성은 모두 같은 정도로 기대할 수 있으므로 그 확률은 각각 $\frac{1}{6}$이라 할 수 있다.

이와 같이 각 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대될 때에는 근원사건의 개수를 이용하여 수학적 확률을 구한다.

Remark 앞으로 특별한 말이 없으면 어떤 시행에서 일어날 수 있는 각 근원사건이 일어날 가능성은 모두 같은 정도로 기대된다고 생각한다.

개념 Check

한 개의 주사위를 던지는 시행에서 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 5 이하의 눈이 나오는 사건을 B라 할 때, $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$를 구하여라.

풀이 표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}$

답 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}$

대표유형 038 수학적 확률

• 개념 025

서로 다른 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던질 때, 다음을 구하여라.

(1) 서로 같은 눈이 나올 확률

(2) 두 눈의 수의 합이 11 이상일 확률

(3) 두 눈의 수의 곱이 완전제곱수가 될 확률

유형 Guide 어떤 시행에서 각각의 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대될 때, 표본공간 S의 원소의 개수를 $n(S)$, 사건 A의 원소의 개수를 $n(A)$라 하면 사건 A가 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{모든 경우의 수})}=\frac{n(A)}{n(S)}$$

임을 이용한다.

유형 SSEN **수학적 확률** ○ $\mathrm{P}(A)=\dfrac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{모든 경우의 수})}$

풀이 두 개의 주사위를 던질 때, 모든 경우의 수는 $6\cdot6=36$

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(1) 서로 같은 눈이 나오는 경우는

$(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)$

의 6가지이므로 구하는 확률은 $\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

(2) 두 눈의 수의 합이 11 이상인 경우는

$(5,\ 6),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)$

의 3가지이므로 구하는 확률은 $\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$

(3) 두 눈의 수의 곱이 완전제곱수가 되는 경우는

$(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (1,\ 4),\ (4,\ 1),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)$

의 8가지이므로 구하는 확률은 $\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$

답 (1) $\dfrac{1}{6}$ (2) $\dfrac{1}{12}$ (3) $\dfrac{2}{9}$

정답 및 풀이 • 30쪽

유제 038-1 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 두 눈의 수의 차가 4일 확률을 a, 두 눈의 수의 곱이 홀수일 확률을 b라 하자. $a+b$의 값을 구하여라.

유제 038-2 60의 양의 약수 중에서 임의로 하나의 수를 택할 때, 그 수가 6의 약수일 확률을 구하여라.

대표유형 039 수학적 확률 – 순열

• 개념 025

1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 각각 하나씩 적힌 6장의 카드를 일렬로 나열할 때, 다음을 구하여라.

(1) 1, 2, 3이 적힌 3장의 카드가 이웃할 확률

(2) 3이 적힌 카드와 4가 적힌 카드가 양 끝에 올 확률

유형Guide 모든 경우의 수와 각 사건이 일어나는 경우의 수를 이용하여 확률을 구한다. 특히 일렬로 나열하는 것은 순서를 생각하는 것이므로 순열을 이용하여 경우의 수를 구한다.

(1) 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 나열한다.

(2) 양 끝에 오는 카드를 제외한 나머지를 먼저 나열한다.

유형 55EN **순서를 생각하는 확률 ⊙ 순열 이용**

풀이 6장의 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $6!=720$

(1) 1, 2, 3이 적힌 3장의 카드를 한 묶음으로 생각하여 4장의 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$

이때 1, 2, 3이 적힌 3장의 카드의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 1, 2, 3이 적힌 3장의 카드가 이웃하도록 나열하는 방법의 수는 $24\cdot 6=144$

이므로 구하는 확률은 $\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$

(2) 3과 4가 적힌 카드를 제외한 나머지 4장의 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4!=24$

이때 3과 4가 적힌 카드를 양 끝에 나열하는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 3과 4가 적힌 카드가 양 끝에 오도록 나열하는 방법의 수는 $24\cdot 2=48$

이므로 구하는 확률은 $\frac{48}{720}=\frac{1}{15}$

답 (1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{1}{15}$

정답 및 풀이 • 30쪽

유제 039-1 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자를 한 번씩 사용하여 다섯 자리 자연수를 만들 때, 이 수가 짝수일 확률을 구하여라.

Plus
유제 039-2 남학생 3명, 여학생 3명이 원탁에 둘러앉을 때, 여학생끼리 이웃하여 앉을 확률을 구하여라.

대표유형 040 수학적 확률 – 조합

• 개념 025

흰 공 5개, 빨간 공 3개, 검은 공 2개가 들어 있는 상자에서 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 다음을 구하여라.

(1) 꺼낸 공이 모두 흰 공일 확률

(2) 꺼낸 공이 빨간 공 2개, 검은 공 1개일 확률

(3) 꺼낸 공 중에서 흰 공이 2개일 확률

유형 Guide 모든 경우의 수와 각 사건이 일어나는 경우의 수를 이용하여 확률을 구한다. 특히 공을 꺼낼 때 순서를 생각하지 않으므로 조합을 이용하여 경우의 수를 구한다.

유형 SSEN 순서를 생각하지 않는 확률 ⊙ 조합 이용

풀이 10개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내는 방법의 수는 ${}_{10}C_3=120$

(1) 흰 공 5개 중에서 3개를 꺼내는 방법의 수는 ${}_5C_3=10$

따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$

(2) 빨간 공 3개 중에서 2개, 검은 공 2개 중에서 1개를 꺼내는 방법의 수는

${}_3C_2\cdot{}_2C_1=3\cdot2=6$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$

(3) 흰 공 5개 중에서 2개, 나머지 5개의 공 중에서 1개를 꺼내는 방법의 수는

${}_5C_2\cdot{}_5C_1=10\cdot5=50$

따라서 구하는 확률은 $\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$

답 (1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{1}{20}$ (3) $\frac{5}{12}$

정답 및 풀이 • 30쪽

유제 040-1 당첨 제비 4개가 포함된 12개의 제비 중에서 임의로 3개의 제비를 뽑을 때, 다음을 구하여라.

(1) 3개 모두 당첨 제비일 확률

(2) 당첨 제비가 1개일 확률

Plus 유제 040-2 주머니 안에 흰 구슬과 검은 구슬을 합하여 모두 10개의 구슬이 들어 있다. 이 주머니에서 3개의 구슬을 동시에 꺼내는 시행에서 모두 흰 구슬이 나올 확률이 $\frac{1}{6}$일 때, 이 주머니 안에 들어 있는 흰 구슬의 개수를 구하여라.

개념 026

통계적 확률

같은 시행을 n번 반복할 때 사건 A가 일어난 횟수를 r_n이라 하자. 시행 횟수 n이 한없이 커짐에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워질 때, 이 값 p를 사건 A의 **통계적 확률**이라 한다.

Remark 실제로 시행 횟수 n을 한없이 크게 할 수 없으므로 n이 충분히 클 때의 상대도수 $\frac{r_n}{n}$을 통계적 확률로 생각한다.

개념 Approach

질병이 발생하는 것, 비가 오는 것 등과 같이 사회 현상이나 자연 현상 중에는 어떤 사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대되지 않는 경우가 많다. 이와 같은 사건의 확률은 수학적 확률로 구할 수 없으므로 같은 시행을 여러 번 반복함으로써 얻어지는 상대도수를 통하여 확률을 짐작한다.

예를 들어 윷짝을 던지는 경우를 생각해 보자. 다음 표는 한 개의 윷짝을 던지는 시행을 여러 번 반복하였을 때, 평평한 면이 나오는 횟수를 조사하여 그 상대도수를 나타낸 것이다.

시행 횟수 (n)	100	200	300	400	500	1000
평평한 면이 나오는 횟수 (r_n)	53	113	186	242	301	599
상대도수 $\left(\frac{r_n}{n}\right)$	0.53	0.565	0.62	0.605	0.602	0.599

위의 표에서 시행 횟수가 커짐에 따라 상대도수는 0.6에 가까워지므로 윷짝을 한 개 던졌을 때 평평한 면이 나오는 사건을 A라 하면 $\mathrm{P}(A)=0.6$이라 할 수 있고, 이것을 사건 A의 통계적 확률로 본다.

일반적으로 시행 횟수가 충분히 클 때 통계적 확률은 수학적 확률에 가까워진다. 따라서 수학적 확률을 구하기 어려운 경우에는 통계적 확률을 대신 사용할 수 있다.

Remark
- 수학적 확률: $\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$
- 통계적 확률: $\mathrm{P}(A)=\frac{r_n}{n}$

개념 Check

어느 씨앗 20000개를 심었을 때, 싹이 나는 것이 12000개이었다. 이 씨앗 1개를 심을 때, 싹이 날 확률을 구하여라.

풀이 $\frac{12000}{20000}=\frac{3}{5}$

답 $\frac{3}{5}$

대표유형 041 통계적 확률

• 개념 026

오른쪽 표는 실험용 쥐 100마리에게 담배 연기 농축물을 매일 일정량씩 투여하였을 때, 농축물을 투여한 기간에 따라 생존한 쥐의 수를 나타낸 것이다. 이때 농축물을 투여한 후 11일 동안 생존한 쥐가 앞으로 3일 이내에 사망할 확률을 구하여라.

기간(일)	생존한 쥐의 수(마리)
10	80
11	60
12	48
13	36
14	20
15	12

유형 Guide 주어진 관찰 자료에 대한 확률을 추정하는 문제이므로 통계적 확률을 이용한다. 일정한 조건에서 같은 시행을 n번 반복할 때, 시행 횟수 n이 충분히 크고 사건 A가 일어나는 횟수가 r이면 사건 A가 일어날 통계적 확률은 $\frac{r}{n}$이다.

유형 SSEN **통계적 확률** ○ $\mathrm{P}(A)=\dfrac{(\text{사건 } A\text{가 일어난 횟수})}{(\text{전체 시행 횟수})}$

풀이 주어진 표에서 농축물을 투여하기 시작한 후 11일 동안 생존한 쥐는 60마리이고, 3일 후인 14일 동안 생존한 쥐는 20마리이므로 11일로부터 3일 이내에 사망한 쥐는 40마리이다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{40}{60}=\dfrac{2}{3}$

답 $\dfrac{2}{3}$

정답 및 풀이 • 31쪽

유제 041-1 건강 상태를

A: 매우 건강함, B: 건강함, C: 보통, D: 건강하지 못함, E: 매우 나쁨

의 5단계로 분류할 때, P지역에 거주하는 20세 이상의 성인을 대상으로 건강 상태를 조사한 결과는 다음과 같다.

단계	A	B	C	D	E	합계
비율(%)	6.1	36.6	37.8	16.8	2.7	100

한편 서울에 거주하는 20세 이상의 성인 500명을 대상으로 건강 상태를 조사한 결과가 다음과 같을 때, 이 중 P지역에 비해 그 비율이 높은 단계를 모두 구하여라.

단계	A	B	C	D	E	합계
인구수(명)	35	190	185	80	10	500

특강 027

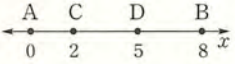
기하학적 확률

연속적인 변량을 크기로 갖는 표본공간의 영역 S 안에서 각각의 점을 잡을 가능성이 같은 정도로 기대될 때, 영역 S에 포함되어 있는 영역 A에 대하여 영역 S에서 임의로 잡은 점이 영역 A에 속할 확률은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{(\text{영역 } A\text{의 크기})}{(\text{영역 } S\text{의 크기})}$$

이와 같이 정의한 확률을 **기하학적 확률**이라 한다.

예를 들어 오른쪽 그림과 같이 수직선 위에 네 점 A, B, C, D가 있을 때, 선분 AB 위의 임의의 점이 선분 CD 위에 있을 확률을 구해 보자.



이때 표본공간은 선분 AB 위에 있는 모든 점에 대응하는 실수의 집합이므로 표본공간을 S, 임의의 점이 선분 CD 위에 있는 사건을 A라 하면

$$S=\{x\,|\,0\le x\le 8\},\ A=\{x\,|\,2\le x\le 5\}$$

이다. 이때 확률을 구하려면 $n(S)$와 $n(A)$를 각각 구해야 하는데 S와 A 모두 무수히 많은 근원사건으로 이루어져 있으므로 그 수를 셀 수 없다. 따라서 $n(S)$와 $n(A)$의 값 대신 각각의 집합이 나타내는 길이를 이용하면 구하는 확률 $\mathrm{P}(A)$는

$$\mathrm{P}(A)=\frac{(\text{선분 CD의 길이})}{(\text{선분 AB의 길이})}=\frac{3}{8}$$

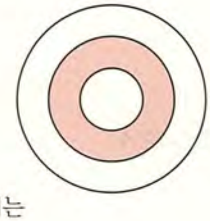
이다.

이와 같이 길이, 넓이 등 근원사건의 개수가 무수히 많아서 그 수를 셀 수 없는 경우에는 기하학적 확률을 이용한다.

개념 Check

오른쪽 그림과 같이 작은 원부터 반지름의 길이가 각각 1, 2, 3인 동심원으로 이루어진 과녁에 화살을 쏠 때, 화살이 색칠한 부분에 맞을 확률을 구하여라.

(단, 화살은 경계선에 꽂히지 않고 과녁을 벗어나지 않는다.)



풀이 작은 원부터 넓이가 각각 π, 4π, 9π이므로 색칠한 부분의 넓이는

$$4\pi-\pi=3\pi$$

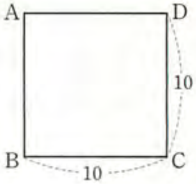
따라서 화살이 색칠한 부분에 맞을 확률은 $\dfrac{3\pi}{9\pi}=\dfrac{1}{3}$

답 $\dfrac{1}{3}$

대표유형 042 기하학적 확률

• 특강 027

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 10인 정사각형 ABCD가 있다. 사각형 ABCD의 내부에 한 점 P를 잡을 때, 삼각형 PBC가 둔각삼각형이 될 확률을 구하여라.



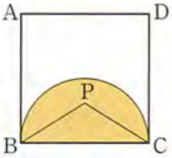
유형 Guide 근원사건의 개수가 무수히 많아서 그 수를 셀 수 없는 경우에는 기하학적 확률을 이용한다. 이때 $\overline{BC}$를 지름으로 하는 반원을 기준으로 점 P의 위치를 생각해 본다.

유형 SSEN **기하학적 확률** ○ $P(A)=\dfrac{\text{(사건 }A\text{가 일어나는 영역의 크기)}}{\text{(전 영역의 크기)}}$

풀이 한 변의 길이가 10인 정사각형 ABCD의 넓이는

$10\cdot10=100$

$\overline{BC}$를 지름으로 하는 반원에서 점 P가 $\overset{\frown}{BC}$ 위에 있을 때 △PBC는 직각삼각형이므로 이 반원의 내부에 점 P를 잡으면 △PBC는 둔각삼각형이 된다.



이때 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\pi\cdot5^2=\dfrac{25}{2}\pi$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\text{(색칠한 부분의 넓이)}}{\text{(□ABCD의 넓이)}}=\frac{\frac{25}{2}\pi}{100}=\frac{\pi}{8}$$

답 $\dfrac{\pi}{8}$

▶ 정답 및 풀이 • 31쪽

유제 042-1 $-2\le k\le4$를 만족시키는 실수 k에 대하여 이차방정식 $x^2+2kx+3k=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 확률을 구하여라.

Plus
유제 042-2 A공원의 음악 분수는 오후 2시부터 2시 30분 사이의 어느 시각에 시작하여 15분 동안 공연을 한다고 한다. 주원이가 오후 2시와 2시 30분 사이에 A공원에 도착하여 분수대에서 15분을 머무른다고 할 때, 음악 분수 공연을 볼 확률을 구하여라.

개념 028

확률의 기본 성질

표본공간이 S인 어떤 시행에서 확률의 기본 성질은 다음과 같다.

① 임의의 사건 A에 대하여 $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$

② 반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $\mathrm{P}(S)=1$

③ 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $\mathrm{P}(\varnothing)=0$

Remark $\mathrm{P}(A)=1$이면 사건 A는 반드시 일어나고, $\mathrm{P}(A)=0$이면 사건 A는 절대로 일어나지 않는다.

개념 Approach

확률의 기본 성질을 증명해 보자.

어떤 시행의 표본공간 S에서 각 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대될 때,

① 표본공간 S의 임의의 사건 A에 대하여 $\varnothing \subset A \subset S$이므로

$$0 \leq n(A) \leq n(S)$$

이 부등식의 각 변을 $n(S)$로 나누면

$$\frac{0}{n(S)} \leq \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)}$$

$$\therefore 0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$$

② $A=S$이면 $\mathrm{P}(S)=\dfrac{n(S)}{n(S)}=1$

③ $A=\varnothing$이면 $\mathrm{P}(\varnothing)=\dfrac{n(\varnothing)}{n(S)}=0$

개념 Check

흰 공 3개, 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 다음을 구하여라.

(1) 흰 공이 나올 확률

(2) 흰 공 또는 검은 공이 나올 확률

(3) 파란 공이 나올 확률

풀이 (1) $\frac{3}{5}$

(2) 흰 공 또는 검은 공이 나오는 사건은 반드시 일어나는 사건이므로 구하는 확률은 1이다.

(3) 파란 공이 나오는 사건은 절대로 일어나지 않는 사건이므로 구하는 확률은 0이다.

답 (1) $\frac{3}{5}$ (2) 1 (3) 0

개념 029 확률의 덧셈정리

다음을 **확률의 덧셈정리**라 한다.

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

특히 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

개념 Approach

확률의 덧셈정리를 증명해 보자.

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

이므로 양변을 $n(S)$로 나누면

$$\frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

특히 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

이다.

한편 확률의 덧셈정리는 세 사건에 대해서도 성립한다.

즉 표본공간 S의 세 사건 A, B, C에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(C\cap A)$$
$$+\mathrm{P}(A\cap B\cap C)$$

이고, 특히 세 사건 A, B, C가 서로 배반사건이면 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$$

Remark 일반적으로 n개의 사건 A_1, A_2, $\cdots$, $A_n(n\geq 2)$이 서로 배반사건이면
$\mathrm{P}(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\mathrm{P}(A_1)+\mathrm{P}(A_2)+\cdots+\mathrm{P}(A_n)$

개념 Check

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=0.3$, $\mathrm{P}(B)=0.4$이고 $\mathrm{P}(A\cup B)=0.6$일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$를 구하여라.

풀이 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$0.6=0.3+0.4-\mathrm{P}(A\cap B)$ $\quad\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=0.1$

답 0.1

대표유형 043 확률의 덧셈정리 (1)

• 개념 029

1부터 20까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 20개의 구슬 중에서 임의로 한 개의 구슬을 뽑을 때, 3의 배수 또는 4의 배수가 적힌 구슬이 나올 확률을 구하여라.

유형 Guide 구슬에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 A, 4의 배수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 두 사건 A, B의 합사건 $A\cup B$가 일어날 확률이다. 따라서 확률의 덧셈정리를 이용하여 합사건의 확률을 구한다.

유형 SSEN **두 사건 A, B의 합사건의 확률** ○ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

풀이 구슬에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 A, 4의 배수인 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{6}{20},\ P(B)=\frac{5}{20},\ P(A\cap B)=\frac{1}{20}$$

$n(A)=6$, $n(B)=5$

12의 배수인 사건

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{6}{20}+\frac{5}{20}-\frac{1}{20}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

Remark 확률은 기약분수로 나타내는 것이 원칙이지만, 이 책에서는 계산의 편의를 위해 중간 과정에서 약분하지 않은 경우도 있다.

정답 및 풀이 • 31쪽

유제 043-1 어느 반 학생 중에서 음악을 좋아하는 학생은 전체의 30%이고, 체육을 좋아하는 학생은 전체의 70%이다. 또 음악과 체육을 모두 좋아하는 학생은 전체의 20%이다. 이 반에서 임의로 한 학생을 택할 때, 그 학생이 음악 또는 체육을 좋아할 확률을 구하여라.

유제 043-2 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 곱이 12의 배수이거나 18의 배수일 확률을 구하여라.

Plus
유제 043-3 두 사건 A, B에 대하여

$$P(A)=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{1}{2}$$

일 때, $P(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

대표유형 044 확률의 덧셈정리 (2)

• 개념 029

수학 경시대회에 출전할 학교 대표 2명을 선발하는 시험에 2학년 학생 5명과 3학년 학생 7명이 응시하였다. 이때 대표로 뽑힌 두 학생이 같은 학년일 확률을 구하여라.

유형 Guide 대표로 뽑힌 두 학생이 모두 2학년인 사건과 모두 3학년인 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 두 사건은 서로 배반사건이다. 따라서 배반사건에 대한 확률의 덧셈정리를 이용한다.

유형 SSEN **두 사건 A, B가 서로 배반사건이면** ○ $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

풀이 대표로 뽑힌 두 학생이 같은 학년인 경우는 두 학생 모두 2학년이거나 두 학생 모두 3학년인 경우이다.

2명의 대표가 모두 2학년 학생인 사건을 A, 2명의 대표가 모두 3학년 학생인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2}=\frac{10}{66},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2}=\frac{21}{66}$$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\\&=\frac{10}{66}+\frac{21}{66}=\frac{31}{66}\end{aligned}$$

답 $\frac{31}{66}$

정답 및 풀이 • 32쪽

유제 044-1 어느 회사에 입사지원서를 낸 지원자 중에서 남자는 7명, 여자는 3명이다. 이 중에서 2명의 사원을 뽑을 때, 2명의 성별이 같을 확률을 구하여라.

유제 044-2 흰 공 5개, 검은 공 4개, 노란 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 꺼낼 때, 3개가 모두 같은 색일 확률을 구하여라.

개념 030 여사건의 확률

표본공간 S의 사건 A와 그 여사건 A^C에 대하여 다음이 성립한다.

$$P(A^C)=1-P(A)$$

Remark
- '적어도 ~인 사건', '~ 이상(이하)인 사건', '~가 아닌 사건' 등의 확률을 구할 때, 여사건의 확률을 이용하면 편리하다.
- $P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)$, $P(A^C\cup B^C)=P((A\cap B)^C)=1-P(A\cap B)$

개념 Approach

표본공간 S의 임의의 사건 A와 그 여사건 A^C는 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(A\cup A^C)=P(A)+P(A^C)$$

이다. 이때 $P(A\cup A^C)=P(S)=1$이므로

$$P(A)+P(A^C)=1,\text{ 즉 }P(A^C)=1-P(A)$$

가 성립한다.

예를 들어 서로 다른 세 개의 동전을 동시에 던질 때, 일어나는 경우는 다음과 같다.

사건 A_0: 뒷면이 0개 나오는 경우(모두 앞면이 나오는 경우)

$$\left.\begin{array}{l}\text{사건 }A_1\text{: 뒷면이 1개 나오는 경우}\\ \text{사건 }A_2\text{: 뒷면이 2개 나오는 경우}\\ \text{사건 }A_3\text{: 뒷면이 3개 나오는 경우}\end{array}\right\}\text{뒷면이 적어도 한 개 나오는 경우}$$

따라서 뒷면이 적어도 한 개 나오는 사건을 A라 하면 $P(A)$를 다음 두 가지 방법으로 구할 수 있다.

방법1 사건 A는 사건 A_1, A_2, A_3의 합사건이므로 $P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$

방법2 사건 A의 여사건 A^C는 A_0이므로 $P(A)=1-P(A^C)=1-P(A_0)$

이와 같이 사건 A가 여러 사건의 합사건인 경우에는 **방법1** 보다 여사건의 확률을 이용하는 **방법2** 가 편리함을 알 수 있다.

개념 Check

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 곱이 짝수일 확률을 구하여라.

풀이 두 눈의 수의 곱이 짝수인 사건을 A라 하면 여사건 A^C는 두 눈의 수의 곱이 홀수인 사건이므로 $P(A^C)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은 $P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

답 $\frac{3}{4}$

대표유형 045 여사건의 확률

• 개념 030

1부터 10까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 10장의 카드 중에서 임의로 3장의 카드를 택할 때, 소수가 적힌 카드를 적어도 한 장 택할 확률을 구하여라.

유형 Guide '적어도 ~인 사건', '~이 아닌 사건', '~ 이상(이하)인 사건' 등의 확률을 구할 때에는 여사건의 확률을 이용하면 편리할 때가 많다.

이 문제에서 '소수가 적힌 카드를 적어도 한 장 택하는 사건'의 여사건은 '3장 모두 소수가 아닌 수가 적힌 카드를 택하는 사건'이므로

(소수가 적힌 카드를 적어도 한 장 택할 확률)

=1−(3장 모두 소수가 아닌 수가 적힌 카드를 택할 확률)

임을 이용한다.

유형 SSEN '적어도 ~인 사건'의 확률 ○ 여사건의 확률 이용

풀이 소수가 적힌 카드를 적어도 한 장 택하는 사건을 A라 하면 여사건 A^C는 소수가 아닌 수가 적힌 카드를 3장 택하는 사건이다.

1부터 10까지의 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이므로 소수가 아닌 자연수는 6개이다.

따라서 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

답 $\frac{5}{6}$

정답 및 풀이 • 32쪽

유제 045-1 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 4 이상일 확률을 구하여라.

유제 045-2 20개의 제비 중에 4개의 당첨 제비가 들어 있다. 이 중에서 임의로 3개의 제비를 뽑을 때, 당첨 제비가 2개 이하일 확률을 구하여라.

Plus 유제 045-3 두 학생 A, B가 어떤 문제를 풀 때, 두 명 중 한 명만 문제를 맞힐 확률은 0.6, 두 명 모두 문제를 맞힐 확률은 0.2라 한다. A, B 모두 문제를 틀릴 확률을 구하여라.

중단원 연습 문제

정답 및 풀이 • 33쪽

STEP 1 유형 Training

서술형

01 흰 공 3개, 검은 공 2개가 들어 있는 상자에서 한 개씩 차례대로 3개의 공을 꺼낼 때, 처음에 흰 공이 나오는 사건을 P, 세 번째에 흰 공이 나오는 사건을 Q라 하자. P와 Q의 곱사건을 R라 할 때, R와 서로 배반인 사건의 개수를 구하여라.

(단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

02 두 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{a, b, c, d\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 중에서 임의로 하나를 택할 때, 그 함수가 일대일함수일 확률은?

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{3}{16}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{3}{8}$　⑤ $\frac{15}{32}$

03 남자 5명, 여자 3명 중에서 대표 4명을 뽑을 때, 남자 3명, 여자 1명을 뽑을 확률은?

① $\frac{2}{7}$　② $\frac{5}{14}$　③ $\frac{2}{5}$　④ $\frac{3}{7}$　⑤ $\frac{1}{2}$

04 어느 정원사가 베고니아의 잡종 품종 중 세이라, 베라세븐, 워커, 진, 위스키의 5종의 종자를 각각 30개, 40개, 50개, 40개, 30개씩 정원에 심은 후, 꽃을 피운 것의 개수를 조사하였더니 오른쪽 표와 같았다. 이들 5종의 베고니아 중 꽃을 피울 확률이 가장 큰 것은?

베고니아	꽃을 피운 것의 개수
세이라	25
베라세븐	32
워커	44
진	35
위스키	27

① 세이라　② 베라세븐
③ 워커　④ 진
⑤ 위스키

수능기출

05 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C \cup B^C)=\frac{4}{5},\ \mathrm{P}(A \cap B^C)=\frac{1}{4}$$

일 때, $\mathrm{P}(A^C)$의 값은? (단, A^C는 A의 여사건이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{11}{20}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{13}{20}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

06 각 면에 1, 2, 2, 3, 4, 4가 하나씩 적힌 정육면체를 두 번 던질 때, 6의 약수가 적어도 한 번 나올 확률을 구하여라.

STEP 2 실전 Application

07 서로 다른 두 주사위 A, B를 동시에 던져서 나온 눈의 수를 각각 a, b라 할 때, 이차방정식 $x^2-2ax+3b=0$이 허근을 가질 확률을 구하여라.

평가원기출

08 주머니 안에 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 있다. 주머니에서 갑이 2장의 카드를 임의로 뽑고, 을이 남은 2장의 카드 중에서 1장의 카드를 임의로 뽑을 때, 갑이 뽑은 2장의 카드에 적힌 수의 곱이 을이 뽑은 카드에 적힌 수보다 작을 확률은?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

09 A, B, C, D, E의 5명을 일렬로 세울 때, A, B 사이에 한 명이 서게 될 확률을 구하여라.

서술형

10 1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 9장의 카드 중에서 3장의 카드를 택할 때, 카드에 적힌 3개의 수의 곱이 6의 배수일 확률을 구하여라.

서술형

11 100원짜리 동전과 500원짜리 동전을 합하여 20개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 두 개의 동전을 꺼낼 때, 꺼낸 동전의 금액의 합이 600원일 확률은 $\frac{1}{10}$이다. 이 주머니에서 두 개의 동전을 꺼낼 때, 동전의 금액의 합이 1000원일 확률을 구하여라. (단, 100원짜리 동전보다 500원짜리 동전의 개수가 더 많다.)

12 길이가 3인 선분 AB 위에 임의로 두 점 C, D를 잡을 때, 선분 CD의 길이가 1 이하일 확률을 구하여라.

수능기출

13 상자 A에는 빨간 공 3개와 검은 공 5개가 들어 있고, 상자 B는 비어 있다. 상자 A에서 임의로 2개의 공을 꺼내어 빨간 공이 나오면 [실행 1]을, 빨간 공이 나오지 않으면 [실행 2]를 할 때, 상자 B에 있는 빨간 공의 개수가 1일 확률은?

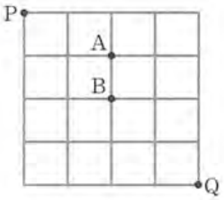
[실행 1] 꺼낸 공을 상자 B에 넣는다.
[실행 2] 꺼낸 공을 상자 B에 넣고, 상자 A에서 임의로 2개의 공을 더 꺼내어 상자 B에 넣는다.

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

서술형

14 오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. P지점에서 출발하여 Q지점까지 최단 경로로 갈 때, A지점 또는 B지점을 지날 확률을 구하여라.

(단, 각 최단 경로를 택할 확률은 같은 것으로 생각한다.)



15 상자 속에 흰 공 3개, 검은 공 2개, 빨간 공 2개가 들어 있다. 이 중에서 임의로 4개의 공을 꺼낼 때, 세 종류의 공이 모두 포함될 확률은?

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{18}{35}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{22}{35}$ ⑤ $\frac{24}{35}$

평가원기출

16 어느 동호회 회원 21명이 5인승, 7인승, 9인승의 차 3대에 나누어 타고 여행을 떠나려고 한다. 현재 5인승, 7인승, 9인승의 차에 각각 4명, 5명, 6명이 타고 있고, A와 B를 포함한 6명이 아직 도착하지 않았다. 이 6명을 차 3대에 임의로 배정할 때, A와 B가 같은 차에 배정될 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $10p+q$의 값을 구하여라.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

서술형

17 서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수를 각각 a, b, c라 할 때,

$$(a-b)(b-c)(c-a)=0$$

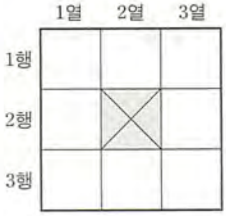
일 확률을 구하여라.

서술형

18 1부터 10까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 10장의 카드에서 임의로 3장의 카드를 택할 때, 3장의 카드에 적힌 수 중에서 가장 큰 수를 M, 가장 작은 수를 m이라 하자. 이때 $M-m\le 7$일 확률을 구하여라.

수능기출

19 오른쪽 좌석표에서 2행 2열 좌석을 제외한 8개의 좌석에 여학생 4명과 남학생 4명을 1명씩 임의로 배정할 때, 적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정될 확률은 p이다. $70p$의 값을 구하여라. (단, 2명이 같은 행의 바로 옆이나 같은 열의 바로 앞뒤에 있을 때 이웃한 것으로 본다.)



STEP 3 심화 Forwarding

서술형

20 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 X로의 일대일 대응인 함수 f 중에서 임의로 하나를 택할 때, 그 함수가 X의 임의의 원소 x에 대하여 $(f\circ f)(x)=x$를 만족시킬 확률을 구하여라.

21 오른쪽 그림과 같이 9개의 버튼이 놓여 있고 이 버튼들은 이웃한 버튼끼리 선분으로 연결되어 있다. 서로 다른 3개의 버튼을 차례대로 누를 때, 첫 번째 버튼과 두 번째 버튼, 두 번째 버튼과 세 번째 버튼이 각각 1개의 선분으로 연결될 확률을 구하여라.

평가원기출

22 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수 a, b, c $(a<b<c)$가 다음 조건을 만족시킬 확률은?

(가) $a+b+c$는 홀수이다.　　(나) $a\times b\times c$는 3의 배수이다.

① $\frac{5}{14}$　② $\frac{8}{21}$　③ $\frac{17}{42}$　④ $\frac{3}{7}$　⑤ $\frac{19}{42}$

수능기출

23 한국, 중국, 일본 학생이 2명씩 있다. 이 6명이 그림과 같이 좌석 번호가 지정된 6개의 좌석 중 임의로 1개씩 선택하여 앉을 때, 같은 나라의 두 학생끼리는 좌석 번호의 차가 1 또는 10이 되도록 앉게 될 확률은?

11	12	13
21	22	23

① $\frac{1}{20}$　② $\frac{1}{10}$　③ $\frac{3}{20}$　④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{1}{4}$

06

조건부확률

잠실구장에서 야구 경기가 열릴 확률은 우리나라에 비가 올 확률에는 영향을 받지만 미국에 비가 올 확률에는 영향을 받지 않는다. 이와 같이 두 사건은 서로가 발생할 확률에 영향을 줄 수도 있고, 서로 아무런 영향을 끼치지 않을 수도 있다.
일상의 많은 사건들은 대체로 서로 영향을 주고 받으며 발생한다. 이때에는 앞서 발생한 사건의 결과에 따라 다음 사건의 확률이 달라지게 된다.

이 단원에서는 두 사건이 서로가 발생할 확률에 영향을 주는지 여부에 따라 사건의 독립과 종속을 판단하고, 어떤 사건이 일어났다는 조건 하에 다른 사건이 일어날 확률인 조건부확률을 구하는 방법에 대하여 알아보자.

●한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

14 조건부확률

- 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
- 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

15 사건의 독립과 종속

- 두 사건의 독립과 종속의 뜻을 알고, 독립사건과 종속사건을 구별할 수 있다.

16 독립시행의 확률

- 독립시행의 뜻을 안다.
- 독립시행의 확률을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

개념 & 특강	대표유형 & 유제		
031 조건부확률	**046** 조건부확률의 계산	**047** 조건부확률	
032 확률의 곱셈정리	**048** 확률의 곱셈정리 (1)	**049** 확률의 곱셈정리 (2)	**050** 확률의 곱셈정리와 조건부확률
033 사건의 독립과 종속			
특강 **034** 배반사건과 독립사건의 관계			
035 독립이기 위한 필요충분조건	**051** 독립과 종속	**053** 독립사건의 확률 (2)	
특강 **036** 두 사건 A, B가 독립일 때, A와 B^c, A^c와 B, A^c와 B^c의 관계	**052** 독립사건의 확률 (1)		
037 독립시행의 확률	**054** 독립시행의 확률 (1)	**055** 독립시행의 확률 (2)	

개념 031

조건부확률

(1) 조건부확률

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어났다고 가정할 때 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 **조건부확률**이라 하고, 이것을 기호로 $\mathbf{P}(B|A)$와 같이 나타낸다.

(2) 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\quad (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

Remark 사건 B가 일어났을 때 사건 A의 조건부확률은 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$이고, 일반적으로 $\mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(A|B)$이다.

개념 Approach

조건부확률이란 한 사건이 일어났다는 조건 하에 다른 사건이 일어날 확률을 의미한다.

표본공간이 S인 어떤 시행에서 각 결과가 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

이다.

이 식의 우변의 분자와 분모를 각각 $n(S)$로 나누면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\dfrac{n(A)}{n(S)}}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

가 성립한다.

이것을 예를 통하여 확인해 보자.

어느 등산 동호회에서 산행지 결정을 위하여 40명의 회원을 대상으로 설악산과 지리산의 선호도를 조사하였더니 오른쪽 표와 같았다. 40명의 회원 중 임의로 뽑은 한 명의 회원이 남자였을 때, 그 회원이 설악산을 선호하는 회원일 확률을 구해 보자.

산 성별	설악산 (B)	지리산 (B^C)	합계
남 (A)	7	17	24
여 (A^C)	11	5	16
합계	18	22	40

40명의 회원 중 임의로 한 명을 뽑는 사건을 S, 남자가 뽑히는 사건을 A, 설악산을 선호하는 사람이 뽑히는 사건을 B라 하자.

뽑힌 한 명의 회원이 남자였을 때 그 회원이 설악산을 선호할 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이고, $\mathrm{P}(B|A)$는 남자 중 설악산을 선호하는 사람의 비율과 같으므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{7}{24} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이다.

또 $\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{24}{40}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{7}{40}$이므로

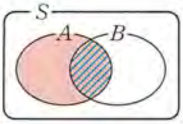
$$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{7}{40}}{\frac{24}{40}}=\frac{7}{24} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이다.

즉 ㉠, ㉡에서 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

Remark $\mathrm{P}(A\cap B)$는 표본공간 S에서 사건 $A\cap B$가 일어날 확률이고, $\mathrm{P}(B|A)$는 A를 새로운 표본공간으로 생각할 때 사건 $A\cap B$가 일어날 확률이다.



개념 Check

한 개의 주사위를 던져서 짝수의 눈이 나왔을 때, 그 눈이 소수일 확률을 구하여라.

풀이 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면

$$A=\{2, 4, 6\},\ B=\{2, 3, 5\},\ A\cap B=\{2\}$$

이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

대표유형 046 조건부확률의 계산

• 개념 031

두 사건 A, B에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{3}{10}$일 때, $\mathrm{P}(B|A)$

(2) $\mathrm{P}(A)=0.5$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.3$, $\mathrm{P}(A\cup B)=0.7$일 때, $\mathrm{P}(A^C|B^C)$

유형 Guide 사건 A가 일어났을 때 사건 B가 일어날 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

이므로 주어진 조건을 이용하여 분자, 분모의 확률을 먼저 구한다.

(1) $\mathrm{P}(A)$는 주어져 있으므로 확률의 덧셈정리와 여사건의 확률을 이용하여 $\mathrm{P}(A\cap B)$를 구한다.

(2) 확률의 덧셈정리와 여사건의 확률을 이용하여 $\mathrm{P}(B^C)$, $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$를 구한다.

유형 SSEN **조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$ ⊙ $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A\cap B)$를 구한다.**

풀이 (1) $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로 $\mathrm{P}((A\cup B)^C)=\frac{3}{10}$

$$1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{10} \qquad \therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{7}{10}$$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$\frac{7}{10}=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\mathrm{P}(A\cap B) \qquad \therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$$

$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}$$

(2) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$0.7=0.5+\mathrm{P}(B)-0.3 \qquad \therefore \mathrm{P}(B)=0.5 \qquad \therefore \mathrm{P}(B^C)=1-0.5=0.5$$

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=1-0.7=0.3$$

$$\therefore \mathrm{P}(A^C|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{0.3}{0.5}=0.6$$

답 (1) $\frac{2}{5}$ (2) 0.6

정답 및 풀이 • 39쪽

유제 046-1 두 사건 A, B에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{6}$일 때, $\mathrm{P}(A|B)$

(2) $\mathrm{P}(A)=0.6$, $\mathrm{P}(B)=0.4$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.3$일 때, $\mathrm{P}(B^C|A^C)$

대표유형 047 조건부확률

• 개념 031

오른쪽 표는 어느 학급 학생 50명에 대하여 어떤 영화의 관람 여부를 조사하여 나타낸 것이다. 이 중에서 임의로 뽑은 한 명이 여학생이었을 때, 그 학생이 영화를 관람한 학생일 확률을 구하여라.

성별 관람 여부	남학생	여학생	합계
관람	12	18	30
미관람	8	12	20
합계	20	30	50

유형 Guide 임의로 뽑은 한 학생이 여학생인 사건을 A, 영화를 관람한 학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{(\text{영화를 관람한 여학생이 뽑힐 확률})}{(\text{여학생이 뽑힐 확률})}$$

임을 이용한다.

유형 SSEN 사건 A가 일어났을 때 사건 B가 일어날 확률 ○ $\mathrm{P}(B|A)$ 이용

풀이 임의로 뽑은 한 학생이 여학생인 사건을 A, 영화를 관람한 학생인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{30}{50}=\frac{3}{5},\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{18}{50}=\frac{9}{25}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{9}{25}}{\frac{3}{5}}=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

▶ 정답 및 풀이 • 39쪽

유제 047-1 오른쪽 표는 어느 학교의 A, B 두 학급 학생들에 대하여 통학 수단을 조사하여 나타낸 것이다. 두 학급 전체 100명의 학생 중에서 임의로 뽑은 한 명이 자전거로 통학하는 학생이었을 때, 그 학생이 B학급 학생일 확률을 구하여라.

학급 통학 수단	A학급	B학급	합계
자전거	8	4	12
그 외	42	46	88
합계	50	50	100

Plus 유제 047-2 40명의 남학생 중에서 28명, 30명의 여학생 중에서 12명이 운동을 좋아한다고 한다. 전체 70명의 학생 중에서 임의로 뽑은 한 명이 운동을 좋아하지 않는 학생이었을 때, 그 학생이 남학생일 확률을 구하여라.

개념 032

확률의 곱셈정리

다음을 **확률의 곱셈정리**라 한다.

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$일 때,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)\end{aligned}$$

개념 Approach

두 사건 A, B에 대하여 A, B가 동시에 일어날 확률, 즉 사건 $A\cap B$의 확률을 조건부확률을 이용하여 구하는 방법을 알아보자.

사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$의 양변에 $\mathrm{P}(A)$를 곱하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$$

가 성립한다.

마찬가지로 조건부확률 $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$의 양변에 $\mathrm{P}(B)$를 곱하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

가 성립한다.

개념 Check

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=0.4$, $\mathrm{P}(B)=0.6$, $\mathrm{P}(A|B)=0.5$일 때, 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(B|A)$

(2) $\mathrm{P}(B|A^C)$

풀이 (1) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)=0.6\times0.5=0.3$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.3}{0.4}=0.75$$

(2) $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-0.4=0.6$

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=0.6-0.3=0.3$이므로

$$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{0.3}{0.6}=0.5$$

답 (1) 0.75 (2) 0.5

대표유형 048 확률의 곱셈정리 (1)

• 개념 032

3장의 당첨권이 포함된 7장의 경품 응모권이 들어 있는 상자에서 한 장씩 두 번 응모권을 뽑을 때, 두 번 모두 당첨권을 뽑을 확률을 구하여라.

(단, 뽑은 응모권은 다시 넣지 않는다.)

유형 Guide 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률 $\mathrm{P}(A\cap B)$는 확률의 곱셈정리

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$$

를 이용하여 구한다.

유형 SSEN 두 사건이 동시에 일어날 확률 ➔ 확률의 곱셈정리 이용

풀이 첫 번째에 당첨권을 뽑는 사건을 A, 두 번째에 당첨권을 뽑는 사건을 B라 하자.

첫 번째에 당첨권을 뽑을 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{7}$$

첫 번째에 당첨권을 뽑았을 때 두 번째에도 당첨권을 뽑을 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

6장의 응모권 중 당첨권은 2장이다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{7}$$

답 $\frac{1}{7}$

정답 및 풀이 • 39쪽

유제 048-1 흰 공 3개, 검은 공 5개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개씩 두 번 공을 꺼낼 때, 첫 번째는 흰 공, 두 번째는 검은 공이 나올 확률을 구하여라.

(단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

Plus 유제 048-2 상자에 들어 있는 15개의 제품 중 n개가 불량품이다. 이 상자에서 한 개씩 두 번 제품을 꺼낼 때, 두 번 모두 불량품을 꺼낼 확률은 $\frac{1}{35}$이다. n의 값을 구하여라.

(단, 꺼낸 제품은 다시 넣지 않는다.)

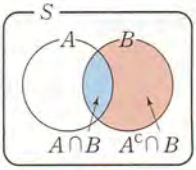
대표유형 049 확률의 곱셈정리 (2)

• 개념 032

4장의 당첨 복권을 포함하여 10장의 복권이 들어 있는 상자에서 갑, 을의 순서로 각각 1장씩 복권을 뽑을 때, 을이 당첨 복권을 뽑을 확률을 구하여라.

(단, 뽑은 복권은 다시 넣지 않는다.)

유형 Guide 표본공간을 S라 하고 갑, 을이 당첨 복권을 뽑는 사건을 각각 A, B라 하자. 갑이 뽑은 복권을 다시 넣지 않기 때문에 갑이 당첨 복권을 뽑는 경우와 뽑지 않는 경우에 을이 당첨 복권을 뽑을 확률이 달라진다. 따라서 사건 A가 일어난 경우와 사건 A가 일어나지 않은 경우, 즉 사건 A^C가 일어난 경우로 나누어 각각의 경우에 사건 B가 일어날 확률을 구한다. 이때 $A\cap B$와 $A^C\cap B$는 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$임을 이용한다.



유형 SSEN $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

풀이 갑, 을이 당첨 복권을 뽑는 사건을 각각 A, B라 하자.

(i) 갑이 당첨 복권을 뽑고 을도 당첨 복권을 뽑을 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{2}{15}$$

(ii) 갑이 당첨 복권을 뽑지 않고 을이 당첨 복권을 뽑을 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$$

사건 $A\cap B$와 사건 $A^C\cap B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{2}{15}+\frac{4}{15}=\frac{2}{5}$$

답 $\frac{2}{5}$

정답 및 풀이 • 39쪽

유제 049-1 비가 온 다음 날 비가 올 확률은 0.6이고, 비가 오지 않은 다음 날 비가 올 확률은 0.8이다. 이번 주 월요일에 비가 왔을 때, 이번 주 수요일에도 비가 올 확률을 구하여라.

유제 049-2 어느 청량음료 회사가 한 해의 판매 목표액을 달성할 확률은 그 해 여름의 평균 기온이 예년보다 높은 경우에 0.8, 예년과 비슷하거나 예년보다 낮은 경우에 0.5이다. 일기예보에 따르면 내년 여름의 평균 기온이 예년보다 높을 확률이 0.4일 때, 이 회사가 내년에 판매 목표액을 달성할 확률을 구하여라.

대표유형 050 확률의 곱셈정리와 조건부확률

• 개념 032

주머니 A에는 흰 바둑돌 4개, 검은 바둑돌 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 바둑돌 2개, 검은 바둑돌 4개가 들어 있다. A, B 두 주머니 중에서 한 주머니를 임의로 택하여 2개의 바둑돌을 동시에 꺼냈더니 흰 바둑돌과 검은 바둑돌이 각각 한 개씩 나왔을 때, 이 바둑돌 2개가 주머니 A에서 나왔을 확률을 구하여라.

유형 Guide 표본공간 S에서 주머니 A를 택하는 사건을 A, 흰 바둑돌과 검은 바둑돌을 각각 한 개씩 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$이다. 이때 사건 $A\cap B$와 사건 $A^C\cap B$는 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$임을 이용한다.

유형 SSEN

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)}$$

풀이 주머니 A를 택하는 사건을 A, 흰 바둑돌과 검은 바둑돌을 각각 한 개씩 꺼내는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$$

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15}$$

$$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{2}{7}+\frac{4}{15}=\frac{58}{105}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{2}{7}}{\frac{58}{105}}=\frac{15}{29}$$

답 $\dfrac{15}{29}$

Remark 사건 A와 여사건 A^C는 서로 배반사건이므로 두 사건 $A\cap B$와 $A^C\cap B$도 서로 배반사건이다.
따라서 확률의 덧셈정리와 곱셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$$

$$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(B)>0)$$

정답 및 풀이 • 40쪽

유제 050-1 어떤 제품을 만드는 회사에서 A, B 두 대의 기계가 각각 전체 제품의 30 %, 70 %를 생산하고, 불량률은 각각 5 %, 4 %라 한다. 제품 중 임의로 한 개를 꺼냈더니 불량품이었을 때, 이 불량품이 A기계에서 만들어졌을 확률을 구하여라.

개념 033 사건의 독립과 종속

1 독립

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나거나 일어나지 않는 것이 사건 B가 일어날 확률에 영향을 주지 않을 때, 즉

$$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)$$

일 때, 두 사건 A와 B는 서로 **독립**이라 한다.

2 종속

두 사건 $\underline{A,\ B\text{가 서로 독립이 아닐 때}}$, 즉

$$\mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B|A^C)\ \text{ 또는 }\ \mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B)$$

일 때, 두 사건 A와 B는 서로 **종속**이라 한다.

Remark 서로 독립인 두 사건을 독립사건, 서로 종속인 두 사건을 종속사건이라 한다.

개념 Approach

흰 공 3개와 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 공을 한 개씩 두 번 꺼낼 때, 첫 번째에 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 A, 두 번째에 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 B라 하자.

(i) 첫 번째에 꺼낸 공을 다시 넣고 두 번째에 공을 꺼내는 경우

두 번째에 흰 공을 꺼낼 확률은 첫 번째에 꺼낸 공의 색깔에 영향을 받지 않는다.

즉 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{5}$이므로 $\quad\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(ii) 첫 번째에 꺼낸 공을 다시 넣지 않고 두 번째에 공을 꺼내는 경우

첫 번째에 꺼낸 공의 색깔에 따라 두 번째에 흰 공을 꺼낼 확률이 달라진다.

즉 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{4}$이므로 $\quad\mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B|A^C)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 종속이다.

개념 Check

두 사건 A, B가 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{5}$일 때, 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(B|A)$ (2) $\mathrm{P}(A|B)$

풀이 (1) $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)=\frac{4}{5}$ (2) $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

답 (1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{1}{2}$

특강
034

배반사건과 독립사건의 관계

배반사건과 독립사건을 종종 혼동하는 경우가 있는데, 여기에서 둘의 관계를 명확히 짚어 보자.

$\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$인 두 사건 A, B에 대하여 A와 B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이다.

따라서

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0}{\mathrm{P}(B)}=0\neq\mathrm{P}(A)$$

이므로 A, B는 서로 종속이다.

즉 두 사건이 배반사건이면 두 사건은 동시에 일어나지 않으므로 한 사건이 일어나면 다른 사건은 일어날 수 없다. 따라서 두 사건이 서로 일어날 확률에 영향을 주므로 두 사건은 서로 종속임을 알 수 있다.

한편 A, B가 서로 독립이면

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\mathrm{P}(A)\neq 0$$

이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq 0$이다. 따라서 A, B는 서로 배반사건이 아니다.

즉 두 사건이 서로 독립이면 한 사건이 일어나는 것이 다른 사건이 일어날 확률에 영향을 주지 않으므로 두 사건은 동시에 일어날 수 있다. 따라서 두 사건은 서로 배반사건이 아니다.

이상에서 배반사건과 독립사건의 관계는 다음과 같다.

$\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$인 두 사건 A, B에 대하여

① A, B가 서로 배반사건이면 A, B는 서로 종속이다.

② A, B가 서로 독립이면 A, B는 서로 배반사건이 아니다.

개념 SSEN 배반사건이면 → 종속사건이다.

개념 035

독립이기 위한 필요충분조건

두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0)$$

Remark 두 사건 A, B가 서로 독립인지 종속인지 판별할 때에는 독립과 종속의 정의보다 위의 등식을 이용하는 것이 편리하다.

개념 Approach

두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$이므로 확률의 곱셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

이고, 역으로 $\mathrm{P}(A)>0$일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이면 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A)$$

이다. 따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

즉 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$는 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건이다.

예를 들어 한 개의 주사위를 던질 때, 2의 배수의 눈이 나오는 사건을 A, 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{3,\ 6\}$, $A\cap B=\{6\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

이다. 이때 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

개념 SSEN

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ ⟶ A, B는 서로 독립

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ ⟶ A, B는 서로 종속

개념 Check

다음을 만족시키는 두 사건 A, B가 서로 독립인지 종속인지를 조사하여라.

(1) $\mathrm{P}(A)=0.5$, $\mathrm{P}(B)=0.6$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.4$

(2) $\mathrm{P}(A)=0.25$, $\mathrm{P}(B)=0.4$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.1$

풀이 (1) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.5\times0.6=0.3\neq\mathrm{P}(A\cap B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

(2) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.25\times0.4=0.1=\mathrm{P}(A\cap B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

답 (1) 종속 (2) 독립

특강 036

두 사건 A, B가 독립일 때, A와 B^{C}, A^{C}와 B, A^{C}와 B^{C}의 관계

두 사건 A, B가 서로 독립이면 A와 B^{C}, A^{C}와 B, A^{C}와 B^{C}도 서로 독립이다.

A, B가 서로 독립이면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

임을 이용하여 이를 증명해 보자.

① A와 B^{C}가 서로 독립

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^{\mathrm{C}})&=\mathrm{P}(A-B)\\&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^{\mathrm{C}})\end{aligned}$$

즉 $\mathrm{P}(A\cap B^{\mathrm{C}})=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^{\mathrm{C}})$이므로 두 사건 A와 B^{C}는 서로 독립이다.

② A^{C}와 B가 서로 독립

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^{\mathrm{C}}\cap B)&=\mathrm{P}(B-A)\\&=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(B)\{1-\mathrm{P}(A)\}\\&=\mathrm{P}(A^{\mathrm{C}})\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

즉 $\mathrm{P}(A^{\mathrm{C}}\cap B)=\mathrm{P}(A^{\mathrm{C}})\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A^{C}와 B는 서로 독립이다.

③ A^{C}와 B^{C}가 서로 독립

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^{\mathrm{C}}\cap B^{\mathrm{C}})&=\mathrm{P}((A\cup B)^{\mathrm{C}})\\&=1-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}\\&=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)\{1-\mathrm{P}(A)\}\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\mathrm{P}(A^{\mathrm{C}})\mathrm{P}(B^{\mathrm{C}})\end{aligned}$$

즉 $\mathrm{P}(A^{\mathrm{C}}\cap B^{\mathrm{C}})=\mathrm{P}(A^{\mathrm{C}})\mathrm{P}(B^{\mathrm{C}})$이므로 두 사건 A^{C}와 B^{C}는 서로 독립이다.

개념 SSEN

A, B가 서로 독립 →
- A와 B^{C}는 서로 독립
- A^{C}와 B는 서로 독립
- A^{C}와 B^{C}는 서로 독립

대표유형 051 독립과 종속

• 개념 035

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 홀수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B, 5 이상의 눈이 나오는 사건을 C라 하자. 짝지어진 두 사건이 서로 독립인 것만을 **보기**에서 있는 대로 골라라.

보 기

ㄱ. A와 B　　ㄴ. B와 C　　ㄷ. A와 C

유형 Guide 두 사건 A, B가 독립인지 확인하려면 $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A\cap B)$를 각각 구한 후

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

가 성립하는지 조사한다.

유형 SSEN

- $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ ➲ 독립
- $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ ➲ 종속

풀이 $A=\{1,\ 3,\ 5\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5\}$, $C=\{5,\ 6\}$이므로

$$A\cap B=\{3,\ 5\},\ B\cap C=\{5\},\ A\cap C=\{5\}$$

ㄱ. $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

ㄴ. $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}$이므로

$$\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$$

따라서 두 사건 B, C는 서로 독립이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{6}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$$

따라서 두 사건 A, C는 서로 독립이다.

이상에서 두 사건이 서로 독립인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

정답 및 풀이 • 40쪽

유제 051-1 3개의 동전을 동시에 던질 때, 동전 3개가 모두 같은 면이 나오는 사건을 A, 앞면이 3개 나오는 사건을 B, 앞면이 2개 나오는 사건을 C, 앞면이 1개 이하가 나오는 사건을 D라 하자. 사건 B, C, D 중 사건 A와 서로 독립인 사건을 구하여라.

대표유형 052 독립사건의 확률 (1)

• 개념 035 • 특강 036

승부차기의 성공률이 각각 0.7, 0.8인 두 선수 A, B가 차례대로 승부차기를 할 때, 다음을 구하여라.

(1) A, B 모두 승부차기에 성공할 확률

(2) A는 승부차기에 성공하고 B는 성공하지 못할 확률

(3) A, B 중 적어도 한 명이 승부차기에 성공할 확률

유형 Guide 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

임을 이용하여 두 사건 A, B가 모두 일어날 확률을 구할 수 있다.

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A와 B^C, A^C와 B, A^C와 B^C도 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B^C)$, $\mathrm{P}(A^C\cap B)$, $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$도 같은 방법으로 구할 수 있다.

유형 SSEN 두 사건 A, B가 서로 독립 ⭘ A와 B^C, A^C와 B, A^C와 B^C도 서로 독립

풀이 두 선수 A, B가 승부차기에 성공하는 사건을 각각 A, B라 하면 A와 B는 서로 독립이다.

(1) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.7\times0.8=0.56$

(2) A는 승부차기에 성공하고 B는 성공하지 못할 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B^C)$이고 두 사건 A와 B^C는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=0.7\times(1-0.8)=0.14$$

(3) A, B 중 적어도 한 명이 승부차기에 성공할 사건은 A, B가 모두 성공하지 못하는 사건의 여사건이다.

A, B 모두 승부차기에 성공하지 못할 확률은 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$이고 두 사건 A^C와 B^C는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=(1-0.7)\times(1-0.8)=0.06$$

따라서 구하는 확률은

$$1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-0.06=0.94$$

답 (1) 0.56 (2) 0.14 (3) 0.94

정답 및 풀이 • 40쪽

유제 052-1 갑, 을이 어떤 수학 문제를 맞힐 확률이 각각 0.4, 0.6일 때, 갑, 을 중 한 사람만 이 문제를 맞힐 확률을 구하여라.

Plus 유제 052-2 명중률이 각각 0.8, 0.6, 0.5인 세 사격 선수 A, B, C가 각각 한 발씩 쏘았을 때, 적어도 한 발이 표적에 명중할 확률을 구하여라.

대표유형 053 독립사건의 확률 (2)

• 개념 035

A, B 두 사람이 번갈아 가며 한 개의 주사위를 던져서 먼저 3의 배수의 눈이 나오는 사람이 이긴다고 한다. A부터 시작하여 승부가 날 때까지 주사위를 던진다고 할 때, 5회 이내에 A가 이길 확률을 구하여라.

유형 Guide A와 B가 번갈아 가며 던지는 것을 1회, 2회, 3회, …라 하면 각 회에서 주사위의 눈이 나오는 사건은 서로 독립이므로 확률의 곱셈정리를 이용하여 각 회에서 이길 확률을 구할 수 있다. 이때 A가 이기는 것은 1회, 3회, 5회에 처음으로 3의 배수의 눈이 나오는 경우이고, 각 사건은 서로 배반사건이다.

유형 SSEN **주사위를 번갈아 가며 던지는 시행 ◐ 각 시행에서 일어나는 사건은 서로 독립**

풀이 한 개의 주사위를 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 3의 배수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

3의 배수의 눈이 나오는 경우를 ○, 그렇지 않은 경우를 × 로 나타내면 5회 이내에 A가 이기는 경우는 오른쪽 표와 같다.

1회	2회	3회	4회	5회
○				
×	×	○		
×	×	×	×	○

(i) A가 1회에 이길 확률은 $\frac{1}{3}$

(ii) A가 3회에 이길 확률은 $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}$

(iii) A가 5회에 이길 확률은 $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\frac{1}{3}$

이때 A가 1회, 3회, 5회에 이기는 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\frac{1}{3}=\frac{81+36+16}{243}=\frac{133}{243}$$

답 $\frac{133}{243}$

정답 및 풀이 • 41쪽

유제 053-1 흰 공 3개, 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 갑, 을 두 사람이 갑, 을의 순서로 공을 하나씩 꺼낼 때, 먼저 흰 공을 꺼내는 사람이 이긴다고 한다. 다음을 구하여라.

(1) 꺼낸 공을 다시 넣지 않을 때, 갑이 이길 확률

(2) 꺼낸 공을 다시 넣을 때, 3회 이내에 갑이 이길 확률

개념 037 독립시행의 확률

1 독립시행

동일한 시행을 여러 번 반복하는 경우에 각 시행에서 일어나는 사건이 서로 독립일 때, 이 것을 **독립시행**이라 한다.

2 독립시행의 확률

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, 이 시행을 n회 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은 다음과 같다.

$$ {}_{n}\mathrm{C}_{r}\, p^{r}(1-p)^{n-r} \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n) $$

개념 Approach

독립시행에서는 각 시행에서 일어나는 사건들이 서로 독립이므로 각 시행의 결과가 다른 시행의 결과에 아무런 영향을 주지 않는다. 대표적인 독립시행으로는 주사위나 동전을 던지는 시행, 화살이나 총알을 과녁에 쏘는 시행 등이 있다.

독립시행의 확률은 각 시행에서 일어나는 사건의 확률을 곱하여 계산할 수 있다.

예를 들어 한 개의 주사위를 4번 던져서 1의 눈이 3번 나올 확률을 구해 보자.

1의 눈이 나오는 경우를 ○, 1의 눈이 나오지 않는 경우를 ×로 나타내면 한 개의 주사위를 4번 던지는 독립시행에서 1의 눈이 3번 나오는 경우는 오른쪽 표와 같이 4가지이다.

시행	확률
○○○×	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1$
○○×○	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1$
○×○○	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1$
×○○○	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1$

이때 각 사건은 서로 독립이고 ○의 확률은 $\frac{1}{6}$, ×의 확률은 $\frac{5}{6}$이므로 각 사건이 일어날 확률은 $\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1$이다. 또 ${}_{4}\mathrm{C}_{3}=4$(가지)의 사건은 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은 다음과 같다.

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1+\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1+\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1+\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1={}_{4}\mathrm{C}_{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1$$

개념 Check

어떤 양궁 선수의 10점 명중률이 70%라 할 때, 이 선수가 3발을 쏘아 2발을 10점에 명중시킬 확률을 구하여라.

풀이 이 양궁 선수가 화살 1발을 쏘아 10점에 명중시킬 확률은 $\frac{7}{10}$, 명중시키지 못할 확률은 $\frac{3}{10}$이므로 구하는 확률은 ${}_{3}\mathrm{C}_{2}\left(\frac{7}{10}\right)^2\left(\frac{3}{10}\right)^1=\frac{441}{1000}$

답 $\frac{441}{1000}$

대표유형 054 독립시행의 확률 (1)

• 개념 037

한 개의 동전을 5번 던질 때, 다음을 구하여라.

(1) 앞면이 3번 나올 확률

(2) 앞면이 4번 이상 나올 확률

(3) 앞면이 적어도 2번 나올 확률

유형 Guide 한 개의 동전을 5번 던지는 시행에서 일어나는 사건은 서로 독립이므로 독립시행의 확률을 이용한다. 즉 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

$${}_{n}\mathrm{C}_{r}\,p^{r}(1-p)^{n-r}\ (r=0, 1, 2, \cdots, n)$$

임을 이용한다.

유형 SSEN **반복되는 시행에서 일어나는 사건이 독립 ○ 독립시행의 확률 이용**

풀이 한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 앞면이 나오지 않을 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(1) ${}_{5}\mathrm{C}_{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{5}{16}$

(2) (i) 앞면이 4번 나올 확률은 ${}_{5}\mathrm{C}_{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{5}{32}$

(ii) 앞면이 5번 나올 확률은 ${}_{5}\mathrm{C}_{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=\frac{1}{32}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{3}{16}$

(3) 앞면이 적어도 2번 나오는 사건은 앞면이 1번 이하로 나오는 사건의 여사건이다.

(i) 앞면이 0번 나올 확률은 ${}_{5}\mathrm{C}_{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=\frac{1}{32}$

(ii) 앞면이 1번 나올 확률은 ${}_{5}\mathrm{C}_{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{5}{32}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $1-\left(\frac{1}{32}+\frac{5}{32}\right)=\frac{13}{16}$

답 (1) $\frac{5}{16}$ (2) $\frac{3}{16}$ (3) $\frac{13}{16}$

정답 및 풀이 • 41쪽

유제 054-1 자유투 성공률이 $\frac{3}{10}$인 어떤 학생이 4회의 자유투를 던질 때, 3회 이상 성공할 확률을 구하여라.

Plus 유제 054-2 수직선 위의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 던져 짝수의 눈이 나오면 점 P를 양의 방향으로 1만큼 옮기고, 홀수의 눈이 나오면 점 P를 음의 방향으로 1만큼 옮긴다. 주사위를 5번 던졌을 때, 점 P와 원점 사이의 거리가 1일 확률을 구하여라.

대표유형 055 독립시행의 확률 (2)

• 개념 037

한 개의 주사위를 던져서 홀수의 눈이 나오면 동전을 3번 던지고, 짝수의 눈이 나오면 동전을 2번 던지기로 할 때, 동전의 앞면이 2번 나올 확률을 구하여라.

유형 Guide 주사위를 던져서 나오는 눈에 따라 동전을 던지는 횟수가 정해지므로 주사위의 눈이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나눈 후 각각 독립시행의 확률을 이용한다.

유형 SSEN **사건에 따라 시행 횟수가 달라지면 ➜ 경우를 나누어 생각한다.**

풀이 한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 앞면이 나오지 않을 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(i) 주사위를 던져서 홀수의 눈이 나오는 경우

홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은 ${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$

$\therefore \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{16}$

(ii) 주사위를 던져서 짝수의 눈이 나오는 경우

짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

동전을 2번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은 ${}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{4}$

$\therefore \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{3}{16}+\frac{1}{8}=\frac{5}{16}$

답 $\frac{5}{16}$

정답 및 풀이 • 41쪽

유제 055-1 빨간 공 3개, 노란 공 5개가 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼내어 빨간 공이 나오면 주사위를 3번 던지고, 노란 공이 나오면 주사위를 4번 던지기로 할 때, 2 이하의 눈이 3번 나올 확률을 구하여라.

중단원 연습 문제

STEP 1 유형 Training

01 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{1}{2}$일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$를 구하여라.

02 1부터 10까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 10개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때, 짝수가 적힌 공이 나오는 사건을 A, 홀수가 적힌 공이 나오는 사건을 B, 소수가 적힌 공이 나오는 사건을 C, 5의 배수가 적힌 공이 나오는 사건을 D라 하자. 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 골라라.

보기

ㄱ. A와 B는 서로 독립이다.
ㄴ. A와 D는 서로 독립이다.
ㄷ. C와 D는 서로 종속이다.

03 두 사건 A, B에 대하여 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?
(단, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq 0$)

보기

ㄱ. A와 B가 서로 독립이면 A^C와 B^C도 서로 독립이다.
ㄴ. A와 B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(B|A)=0$이다.
ㄷ. A와 B가 서로 배반사건이면 A와 B는 서로 독립이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄷ

04 지영이와 수진이는 교대로 두 개의 주사위를 던져서 각각의 주사위에서 나온 눈의 수의 합이 먼저 5가 되는 사람이 이기는 게임을 하려고 한다. 지영이부터 시작하여 승부가 날 때까지 게임을 계속할 때, 지영이가 3회 이내에 이길 확률을 구하여라.

수능기출

05 어느 디자인 공모 대회에 철수가 참가하였다. 참가자는 두 항목에서 점수를 받으며, 각 항목에서 받을 수 있는 점수는 표와 같이 3가지 중 하나이다. 철수가 각 항목에서 점수 A를 받을 확률은 $\frac{1}{2}$, 점수 B를 받을 확률은 $\frac{1}{3}$, 점수 C를 받을 확률은 $\frac{1}{6}$이다. 관람객 투표 점수를 받는 사건과 심사 위원 점수를 받는 사건이 서로 독립일 때, 철수가 받는 두 점수의 합이 70일 확률은?

점수 항목	점수 A	점수 B	점수 C
관람객 투표	40	30	20
심사 위원	50	40	30

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{11}{36}$ ③ $\frac{5}{18}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{2}{9}$

06 흰 공 2개, 검은 공 4개가 들어 있는 상자에서 1개의 공을 꺼내어 그 색깔을 조사하고 다시 넣는 시행을 6번 반복할 때, 마지막 시행에서 세 번째로 흰 공이 나올 확률을 구하여라.

서술형

07 두 축구팀 A, B가 4번의 경기를 할 때 A팀이 모두 이길 확률이 $\frac{1}{81}$이라 한다. A, B 두 팀이 5번의 경기를 할 때, A팀이 2번 이길 확률을 구하여라.

(단, 각 경기는 다음 경기의 결과에 영향을 미치지 않고, 비기는 경우는 없다.)

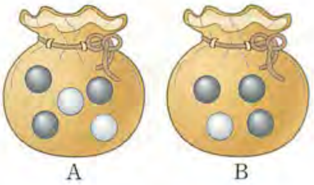
STEP 2 실전 Application

서술형

08 어떤 회사에서 만든 음주 측정기는 음주한 사람을 음주하지 않았다고 측정할 확률이 0.15이고, 음주하지 않은 사람을 음주했다고 측정할 확률이 0.2라 한다. 실제 음주한 사람 6명과 음주하지 않은 사람 4명을 이 음주 측정기로 측정한 후 이 중에서 임의로 한 사람을 택하였을 때, 그 사람이 음주했다고 측정되었을 확률을 구하여라.

수능기출

09 주머니 A에는 흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 1개와 검은 공 3개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 흰 공이면 흰 공 2개를 주머니 B에 넣고 검은 공이면 검은 공 2개를 주머니 B에 넣은 후, 주머니 B에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 꺼낸 공이 흰 공일 확률은?



① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{7}{30}$　④ $\frac{4}{15}$　⑤ $\frac{3}{10}$

수능기출

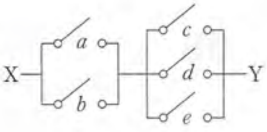
10 어느 학교 전체 학생의 60%는 버스로, 나머지 40%는 걸어서 등교하였다. 버스로 등교한 학생의 $\frac{1}{20}$이 지각하였고, 걸어서 등교한 학생의 $\frac{1}{15}$이 지각하였다. 이 학교 전체 학생 중 임의로 선택한 1명의 학생이 지각하였을 때, 이 학생이 버스로 등교하였을 확률은?

① $\frac{3}{7}$　② $\frac{9}{20}$　③ $\frac{9}{19}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{9}{17}$

서술형

11 어느 고등학교의 항공반 동아리에서는 로켓 발사 장치에 대한 실험을 하고 있다. 이 발사 장치에는 A, B, C 세 개의 점화 플러그가 있는데 지금까지의 실험 결과 A, B, C 세 플러그가 점화될 확률은 각각 0.8, 0.6, 0.4이다. B, C 중 적어도 한 플러그가 점화되고 동시에 A플러그가 점화되면 로켓이 발사된다고 할 때, 이 로켓이 발사될 확률을 구하여라. (단, A, B, C 세 개의 플러그는 독립적으로 작동한다.)

12 오른쪽 그림과 같은 전기 회로가 있다. 각 스위치는 독립적으로 작동되고, 다섯 개의 스위치 a, b, c, d, e가 닫혀 있을 확률은 각각 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$이다. 이때 X에서 Y로 전류가 흐를 확률을 구하여라.



서술형

13 A, B 두 팀이 7번 경기를 하여 먼저 4번을 이기면 승리하는 시합을 한다. 한 경기에서 A팀이 이길 확률이 $\frac{2}{3}$일 때, 이 시합의 6번째 경기에서 승리 팀이 결정될 확률을 구하여라. (단, 비기는 경우는 없다.)

평가원기출

14 한 개의 주사위를 A는 4번 던지고 B는 3번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 각각 a, b라 하자. $a+b$의 값이 6일 확률은?

① $\frac{10}{3^7}$ ② $\frac{11}{3^7}$ ③ $\frac{4}{3^6}$ ④ $\frac{13}{3^7}$ ⑤ $\frac{14}{3^7}$

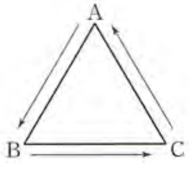
서술형

15 유전에 관한 멘델의 법칙에 의하면 빨간 꽃이 피는 나무와 흰 꽃이 피는 나무를 접목시켰을 때, 그 중에서 25 %는 빨간 꽃이 피는 나무가 된다고 한다. 빨간 꽃이 피는 나무와 흰 꽃이 피는 나무를 접목시켜 만든 5그루의 나무 중에서 빨간 꽃이 피는 나무가 4그루 이상 나올 확률이 $\frac{n}{m}$이라 할 때, $m+n$의 값을 구하여라.

(단, m, n은 서로소인 자연수이다.)

서술형

16 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. 주사위 한 개를 던져서 짝수의 눈이 나오면 2만큼, 홀수의 눈이 나오면 1만큼 화살표 방향으로 움직인다. 주사위를 5번 던졌을 때, 점 A에서 출발한 점 P가 다시 점 A로 돌아올 확률을 구하여라.



수능기출

17 흰 공 4개, 검은 공 3개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어, 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다르면 1개의 동전을 3번 던지고, 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같으면 1개의 동전을 2번 던진다. 이 시행에서 동전의 앞면이 2번 나올 확률은?

① $\frac{9}{28}$ ② $\frac{19}{56}$ ③ $\frac{5}{14}$ ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{11}{28}$

STEP 3 심화 Forwarding

평가원기출

18 남학생 수와 여학생 수의 비가 $2:3$인 어느 고등학교에서 전체 학생의 70 %가 K자격증을 가지고 있고, 나머지 30 %는 가지고 있지 않다. 이 학교의 학생 중에서 임의로 한 명을 선택할 때, 이 학생이 K자격증을 가지고 있는 남학생일 확률이 $\frac{1}{5}$이다. 이 학교의 학생 중에서 임의로 선택한 학생이 K자격증을 가지고 있지 않을 때, 이 학생이 여학생일 확률은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

19 좌표평면 위에 점 P$(1,\ 1)$이 있다. 한 개의 주사위를 던져서 3보다 작은 눈이 나오면 점 P를 x축에 대하여 대칭이동하고, 3 이상의 눈이 나오면 y축에 대하여 대칭이동한다. 주사위를 6번 던져 점 P가 다시 제자리에 올 확률이 $\frac{n}{3^6}$일 때, n의 값을 구하여라.

평가원기출

20 어느 질병에 대한 치료법으로 1단계 치료를 하고, 1단계 치료에 성공한 환자만 2단계 치료를 하여 2단계 치료까지 성공한 환자는 완치된 것으로 판단한다. 1단계 치료 결과와 2단계 치료 결과는 서로 독립이며, 1단계 치료와 2단계 치료에 성공할 확률은 각각 $\frac{1}{2}$과 $\frac{2}{3}$이다. 4명의 환자를 대상으로 이 치료법을 적용하였을 때, 완치된 것으로 판단될 환자가 2명일 확률은?

① $\frac{13}{34}$ ② $\frac{8}{27}$ ③ $\frac{19}{54}$ ④ $\frac{11}{27}$ ⑤ $\frac{25}{54}$

Ⅲ 통계

07

확률분포

우리는 복권을 사면서 1등에 당첨되기를 기대한다. 그러나 수십만 장의 복권 중 고작 몇십 장을 제외한 나머지는 모두 등수 외로, 복권을 추첨한 후에는 휴지 조각이 되어 버린다.
한 장의 복권을 샀을 때, 과연 우리가 기대할 수 있는 금액은 얼마나 될까?

이 단원에서는 어떤 시행의 결과와 그 확률을 대응시키는 확률변수에 대하여 알아보고, 확률변수의 기댓값과 분산 및 표준편차를 구해 보자.

● 한눈에 보는 개념 & 유형 map

소단원 & 학습목표

17 이산확률변수

- 이산확률변수와 확률질량함수의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

18 이산확률변수의 기댓값, 분산, 표준편차

- 이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차를 구할 수 있다.

19 이항분포

- 이항분포의 뜻을 알고, 평균, 분산, 표준편차를 구할 수 있다.

개념 & 특강 **대표유형 & 유제**

- **038** 확률변수와 확률분포
- **039** 이산확률변수와 확률질량함수
  - **056** 확률분포와 확률질량함수
- **040** 확률질량함수의 성질
  - **057** 확률질량함수의 성질
  - **058** 확률질량함수의 응용

- **041** 이산확률변수의 기댓값 (평균)
- **042** 이산확률변수의 분산, 표준편차
- 특강 **043** 도수분포와 확률분포
- **044** 이산확률변수의 분산의 계산
  - **059** 이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차 (1)
  - **060** 이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차 (2)
- **045** 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차
  - **061** 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

- **046** 이항분포
- **047** 이항분포의 평균, 분산, 표준편차
  - **062** 이항분포의 평균, 분산, 표준편차 (1)
  - **063** 이항분포의 평균, 분산, 표준편차 (2)
  - **064** 이항분포의 평균, 분산의 활용
- **048** 큰 수의 법칙

개념 038 확률변수와 확률분포

1 확률변수

어느 시행에서 표본공간의 각 원소에 하나의 실수 값이 대응되는 함수를 **확률변수**라 하고, 확률변수 X가 어떤 값 x를 가질 확률을 기호로 $\mathbf{P(X=x)}$와 같이 나타낸다.

2 확률분포

확률변수 X가 갖는 값과 X가 이 값을 가질 확률의 대응 관계를 X의 **확률분포**라 한다.

개념 Approach

한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 표본공간 S는

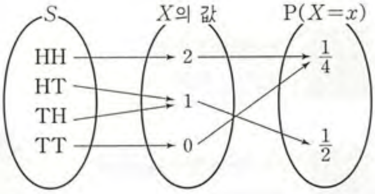
$$S=\{\text{HH, HT, TH, TT}\}$$

이다. 이때 동전의 앞면이 나오는 횟수를 X라 하면

TT ➡ $X=0$

HT, TH ➡ $X=1$

HH ➡ $X=2$



즉 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 각 값을 가질 확률은 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$이므로 이것을 기호로

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}$$

과 같이 나타낸다.

이와 같이 어느 시행에서 변수가 가질 수 있는 값과 그 확률이 각각 정해지는 변수를 확률변수라 한다. 확률변수는 보통 X, Y, Z 등으로 나타내고, 확률변수가 가질 수 있는 값은 x, y, z 등으로 나타낸다.

Remark 확률변수는 표본공간을 정의역으로 하고 실수 전체의 집합을 공역으로 하는 함수이나, 변수의 역할을 하므로 확률변수라 한다.

개념 Check

두 개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수의 합을 확률변수 X라 할 때, X가 가질 수 있는 값을 구하여라.

답 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

개념 039 이산확률변수와 확률질량함수

1 이산확률변수

확률변수 X가 가질 수 있는 값을 셀 수 있을 때, X를 **이산확률변수**라 한다.

Remark 일반적으로 셀 수 있다는 것은 대상이 유한개이거나 자연수 전체의 집합과 일대일 대응된다는 뜻이다.

2 확률질량함수

이산확률변수 X가 가질 수 있는 모든 값 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n에 이 값을 가질 확률 p_1, p_2, p_3, $\cdots$, p_n이 대응되는 함수

$$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i \ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

를 이산확률변수 X의 **확률질량함수**라 한다.

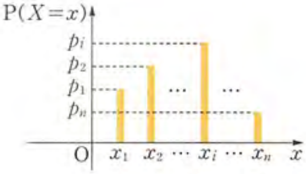
개념 Approach

146쪽 **개념 Approach**에서 확률변수 X가 가질 수 있는 값을 셀 수 있으므로 X는 이산확률변수이고, X의 확률질량함수는 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(X=x)={}_2\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}=\frac{{}_2\mathrm{C}_x}{4} \ (x=0,\ 1,\ 2)$$

한편 이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i \ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$일 때, X의 확률분포는 다음과 같이 표와 그래프로 나타낼 수 있다.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n	1



개념 Check

한 개의 동전을 세 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 할 때, X의 확률분포를 표로 나타내어라.

풀이 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 표본공간 S는

$$S=\{\mathrm{HHH},\ \mathrm{HHT},\ \mathrm{HTH},\ \mathrm{THH},\ \mathrm{HTT},\ \mathrm{THT},\ \mathrm{TTH},\ \mathrm{TTT}\}$$

이므로 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 각각의 확률은

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{8},\ \mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{8},\ \mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{8},\ \mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{8}$$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

답 풀이 참조

대표유형 056 확률분포와 확률질량함수

• 개념 039

10개의 제품 중에 불량품 3개가 들어 있다. 이 중에서 3개의 제품을 택할 때, 나오는 불량품의 개수를 확률변수 X라 하자. 다음에 답하여라.

(1) X의 확률질량함수를 구하여라.

(2) X의 확률분포를 표로 나타내어라.

유형 Guide 확률변수 X의 확률분포는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 확률변수 X가 가질 수 있는 값을 조사한다.
(ii) 각각의 X의 값에 대한 확률을 구한다.
(iii) (ii)의 대응 관계를 식 또는 표로 나타낸다.

유형 SSEN **확률분포 ○ 확률변수 X가 가질 수 있는 모든 값에 대한 확률을 구한다.**

풀이 (1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.
10개의 제품 중에서 3개의 제품을 택하는 방법의 수는 ${}_{10}C_3$이고, 택한 제품 중 불량품이 x개인 경우의 수는 ${}_3C_x \cdot {}_7C_{3-x}$이므로 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\frac{{}_3C_x \cdot {}_7C_{3-x}}{{}_{10}C_3}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

(2) 확률변수 X가 0, 1, 2, 3일 때의 확률은

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0 \cdot {}_7C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{7}{24},\quad P(X=1)=\frac{{}_3C_1 \cdot {}_7C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{21}{40},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2 \cdot {}_7C_1}{{}_{10}C_3}=\frac{7}{40},\quad P(X=3)=\frac{{}_3C_3 \cdot {}_7C_0}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{120}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$	1

답 풀이 참조

정답 및 풀이 • 47쪽

유제 056-1 두 개의 주사위를 동시에 던지는 시행에서 나오는 두 눈의 수의 차를 확률변수 X라 할 때, X의 확률분포를 표로 나타내어라.

개념 040

확률질량함수의 성질

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $P(X=x_i)=p_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$일 때, 확률의 기본 성질에 의하여 다음이 성립한다.

① $0 \le p_i \le 1$ ⬅ 확률은 0 이상 1 이하이다.

② $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ ⬅ 모든 확률의 합은 1이다.

③ $P(x_i \le X \le x_j)=\sum_{k=i}^{j} P(X=x_k)=\sum_{k=i}^{j} p_k$ (단, $j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ i \le j$)

Remark
- $P(X=x_i$ 또는 $X=x_j)=P(X=x_i)+P(X=x_j)$ (단, $i \ne j$)
- $P(x_i \le X \le x_j)$는 X가 x_i 이상 x_j 이하의 값을 가질 확률을 나타낸다.

개념 Approach

한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 동전의 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X의 확률질량함수는 다음과 같다.

$$P(X=0)=\frac{1}{4},\quad P(X=1)=\frac{1}{2},\quad P(X=2)=\frac{1}{4}$$

① $0 \le P(X=x) \le 1$

② $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1$

따라서 주어진 확률질량함수가 위의 성질 ①, ②를 만족시킴을 확인할 수 있다.

개념 Check

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같을 때, 다음을 구하여라.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	a	$\frac{1}{6}$	1

(1) 상수 a의 값

(2) $P(X=1$ 또는 $X=3)$

(3) $P(X<2)$

풀이 (1) $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+a+\frac{1}{6}=1$이므로 $a=\frac{1}{3}$

(2) $P(X=1$ 또는 $X=3)=P(X=1)+P(X=3)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

(3) $P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$

대표유형 057 확률질량함수의 성질

• 개념 040

확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x)=\frac{x}{k}$ $(x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 상수 k의 값 (2) $\mathrm{P}(2\le X\le 4)$

유형 Guide (1) 확률변수 X의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$에 대하여 p_i의 일부를 모르거나 함수식에 미정계수가 있을 때는

$$\sum_{i=1}^{n} p_i=p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n=1$$

임을 이용한다.

(2) $2\le X\le 4$를 만족시키는 X의 값은 $X=2$ 또는 $X=3$ 또는 $X=4$이므로 $\mathrm{P}(X=2)$, $\mathrm{P}(X=3)$, $\mathrm{P}(X=4)$의 값을 각각 구한 후 더한다.

유형 SSEN 확률질량함수의 식에 미정계수가 있으면 ➲ 확률의 총합이 1임을 이용

풀이 (1) 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{k}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{3}{k}$	$\frac{4}{k}$	$\frac{5}{k}$	1

이때 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\frac{3}{k}+\frac{4}{k}+\frac{5}{k}=1$$

$$\frac{15}{k}=1 \qquad \therefore k=15$$

(2) $$\mathrm{P}(2\le X\le 4)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$$
$$=\frac{2}{15}+\frac{3}{15}+\frac{4}{15}=\frac{3}{5}$$

답 (1) 15 (2) $\frac{3}{5}$

➲ 정답 및 풀이 • 47쪽

유제 057-1 확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x)=kx^2$ $(x=1,\ 2,\ 3,\ 4)$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 상수 k의 값 (2) $\mathrm{P}(X\le 3)$

Plus 유제 057-2 확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} \frac{k}{6}x & (x=1,\ 2) \\ k-\frac{x}{3} & (x=3) \end{cases}$ 일 때,

$\mathrm{P}(X^2-6X+8\le 0)$을 구하여라. (단, k는 상수이다.)

대표유형 058 확률질량함수의 응용

• 개념 040

남학생 4명, 여학생 3명 중에서 3명의 학생을 뽑을 때, 뽑힌 남학생의 수를 확률변수 X라 하자. 다음을 구하여라.

(1) X의 확률질량함수

(2) $\mathrm{P}(X\geq 1)$

유형 Guide (1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값을 먼저 조사한 후 조합을 이용하여 확률변수 X의 확률질량함수를 구한다.

(2) 확률변수 X가 가질 수 있는 값이 0, 1, 2, 3이므로 $\mathrm{P}(X\geq 1)=1-\mathrm{P}(X=0)$임을 이용하면 계산이 편리하다.

유형 SSEN $\mathrm{P}(a\leq X\leq b)$ ○ **먼저 확률질량함수를 구한다.**

풀이 (1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

7명의 학생 중에서 3명의 학생을 뽑는 방법의 수는 ${}_7\mathrm{C}_3$이고, 뽑힌 학생 중에서 남학생이 x명인 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_x\cdot{}_3\mathrm{C}_{3-x}$이므로 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_4\mathrm{C}_x\cdot{}_3\mathrm{C}_{3-x}}{{}_7\mathrm{C}_3}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

(2)
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq 1)&=1-\mathrm{P}(X<1)=1-\mathrm{P}(X=0)\\&=1-\frac{{}_4\mathrm{C}_0\cdot{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}\\&=1-\frac{1}{35}=\frac{34}{35}\end{aligned}$$

답 풀이 참조

다른 풀이 (2)
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq 1)&=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)\\&=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}+\frac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}+\frac{{}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_3\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_3}\\&=\frac{12}{35}+\frac{18}{35}+\frac{4}{35}=\frac{34}{35}\end{aligned}$$

정답 및 풀이 • 47쪽

유제 058-1 흰 공 5개, 빨간 공 5개가 들어 있는 주머니에서 3개의 공을 꺼낼 때, 나오는 빨간 공의 개수를 확률변수 X라 하자. 다음을 구하여라.

(1) X의 확률질량함수

(2) $\mathrm{P}(X\leq 2)$

개념 041 이산확률변수의 기댓값(평균)

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$일 때,

$$x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$$

를 확률변수 X의 **기댓값** 또는 **평균**이라 하고, 이것을 기호로 $\mathbf{E}(X)$와 같이 나타낸다.

$$\boxed{\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i}$$

Remark $\mathrm{E}(X)$의 E는 기댓값을 뜻하는 expectation의 첫 글자이다. 또 $\mathrm{E}(X)$는 평균을 뜻하는 mean의 첫 글자 m으로 나타내기도 한다.

개념 Approach

상금 (원)	제비 수 (개)
0	4
1000	3
5000	2
10000	1

상금이 오른쪽 표와 같은 제비 10개에 대하여 제비 한 개에 대한 상금을 확률변수 X라 할 때, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은

$0,\ 1000,\ 5000,\ 10000$

이고, 확률변수 X가 각 값을 가질 확률은 각각

$\frac{4}{10},\ \frac{3}{10},\ \frac{2}{10},\ \frac{1}{10}$

이다. 따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1000	5000	10000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

한편 제비 한 개에 대한 상금의 평균은

$$\begin{aligned}\frac{0\cdot4+1000\cdot3+5000\cdot2+10000\cdot1}{10}&=0\cdot\frac{4}{10}+1000\cdot\frac{3}{10}+5000\cdot\frac{2}{10}+10000\cdot\frac{1}{10}\\&=2300(\text{원})\end{aligned}$$

이때 상금의 평균, 즉 기댓값은 확률변수 X의 각 값과 그에 대응하는 확률을 곱하여 더한 것과 같음을 알 수 있다.

개념 Check

확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때, X의 기댓값을 구하여라.

X	2	4	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	1

풀이 $\mathrm{E}(X)=2\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{2}+8\cdot\frac{3}{8}=\frac{21}{4}$

답 $\frac{21}{4}$

개념 042 이산확률변수의 분산, 표준편차

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $P(X=x_i)=p_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$이고 $E(X)=m$이라 할 때, X의 분산과 표준편차는 다음과 같다.

(1) **분산**: 편차 $X-m$의 제곱의 평균을 확률변수 X의 **분산**이라 하고, 이것을 기호로 **$V(X)$**와 같이 나타낸다.

$$V(X)=E((X-m)^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$$

(2) **표준편차**: 분산 $V(X)$의 양의 제곱근 $\sqrt{V(X)}$를 확률변수 X의 **표준편차**라 하고, 이것을 기호로 **$\sigma(X)$**와 같이 나타낸다.

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

Remark $V(X)$의 V는 분산을 뜻하는 variance의 첫 글자이고, $\sigma(X)$의 σ는 표준편차를 뜻하는 standard deviation의 첫 글자 s에 해당하는 그리스 문자로 '시그마'라 읽는다.

개념 Approach

분산과 표준편차는 자료가 평균으로부터 떨어져 있는 정도를 수치로 나타낸 것으로, 분산과 표준편차가 클수록 자료가 평균을 중심으로 흩어져 있는 정도가 크다는 것을 의미한다.

예를 들어 한 개의 동전을 세 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 할 때, X의 분산과 표준편차를 구해 보자.

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같으므로 X의 평균은 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$$

이때 $E(X)=m$이라 하고, $X-m$의 값을 구하여 표로 나타내면 오른쪽과 같으므로 X의 분산 $V(X)$와 표준편차 $\sigma(X)$는 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$X-m$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$\begin{aligned}V(X)&=\left(-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{8}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{8}\\&\quad+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{8}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{8}\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

특강 043

도수분포와 확률분포

중학교에서 배운 도수분포에서의 평균, 분산과 확률분포에서의 평균, 분산을 비교해 보자.

변량	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
도수	f_1	f_2	f_3	$\cdots$	f_n	N

오른쪽 표와 같이 변량 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n에 대응하는 도수가 각각 f_1, f_2, f_3, $\cdots$, f_n이고 $\sum_{i=1}^{n} f_i=N$인 도수분포에서의 평균 m과 분산 σ^2은 다음과 같다.

$$m=\frac{x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+\cdots+x_nf_n}{f_1+f_2+f_3+\cdots+f_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_if_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_if_i$$

$$\sigma^2=\frac{(x_1-m)^2f_1+(x_2-m)^2f_2+(x_3-m)^2f_3+\cdots+(x_n-m)^2f_n}{f_1+f_2+f_3+\cdots+f_n}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2f_i$$

위의 도수분포에서 변량을 확률변수 X로 보면 X가 각 값을 가질 확률은 각각의 도수를 도수의 총합 N으로 나눈 것이고, 이것은 각 변량의 상대도수와 같으므로 X에 대한 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{f_1}{N}=p_1$	$\frac{f_2}{N}=p_2$	$\frac{f_3}{N}=p_3$	$\cdots$	$\frac{f_n}{N}=p_n$	1

$$\therefore \mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i=\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\frac{f_i}{N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_if_i=m$$

$$\mathrm{V}(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2\cdot\frac{f_i}{N}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2f_i=\sigma^2$$

즉 $\mathrm{E}(X)=m$이고 $\mathrm{V}(X)=\sigma^2$이므로 확률분포에서의 평균, 분산은 도수분포에서의 평균, 분산과 같은 개념임을 알 수 있다.

개념 SSEN

$$\begin{tikzcd} \text{도수분포} \arrow[r] & m=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_if_i \arrow[r] & \sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2f_i \\ \text{확률분포} \arrow[r] & \mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i \arrow[r] & \mathrm{V}(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i \end{tikzcd}$$

개념 044 이산확률변수의 분산의 계산

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$이고 $\mathrm{E}(X)=m$이라 할 때, X의 분산 $\mathrm{V}(X)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\mathrm{V}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-m^2=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

개념 Approach

확률변수 X의 분산을 구할 때, **개념 042**의 정의를 이용하는 것보다 위의 등식을 이용하는 것이 편리할 때가 많다.

위의 식을 증명하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2mx_i+m^2)p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2m\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+m^2\sum_{i=1}^{n}p_i \quad \Leftarrow \sum_{i=1}^{n}x_ip_i=m,\ \sum_{i=1}^{n}p_i=1\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2m\cdot m+m^2\cdot 1\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-m^2\\&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\end{aligned}$$

개념 SSEN 분산 ⟶ (제곱의 평균) − (평균의 제곱)

개념 Check

확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때, 다음을 구하여라.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

(1) $\mathrm{E}(X)$

(2) $\mathrm{E}(X^2)$

(3) $\mathrm{V}(X)$

풀이 (1) $\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{3}=\frac{13}{6}$

(2) $\mathrm{E}(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{2}+3^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{31}{6}$

(3) $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{31}{6}-\left(\frac{13}{6}\right)^2=\frac{17}{36}$

답 (1) $\frac{13}{6}$ (2) $\frac{31}{6}$ (3) $\frac{17}{36}$

대표유형 059 이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차 (1)

• 개념 **041, 042, 044**

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. X의 평균이 1일 때, 다음에 답하여라.

X	-1	1	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	$\frac{1}{3}$	1

(1) 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

(2) X의 분산을 구하여라.

유형 Guide (1) 확률의 총합이 1이고 평균이 1임을 이용하여 a, b에 대한 연립방정식을 세운다.
(2) 주어진 표를 이용하여 $\mathrm{E}(X^2)$을 구한 후 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$임을 이용한다.

유형 SSEN

- **평균** ○ $\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$
- **분산** ○ $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

풀이 (1) 확률의 총합은 1이므로

$$a+b+\frac{1}{3}=1 \qquad \therefore a+b=\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\mathrm{E}(X)=1$이므로

$$-1\cdot a+1\cdot b+4\cdot\frac{1}{3}=1 \qquad \therefore a-b=\frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{6}$

(2) $\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\cdot\frac{1}{2}+1^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{3}=6$이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=6-1^2=5$$

답 (1) $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{6}$ (2) 5

정답 및 풀이 • 47쪽

유제 059-1 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. X의 평균이 $\frac{5}{4}$, 분산이 $\frac{11}{16}$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a-b+c$의 값을 구하여라.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	1

유제 059-2 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. X의 평균이 2일 때, X의 표준편차를 구하여라. (단, a, b는 상수이다.)

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{5}$	b	1

대표유형 060 이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차 (2)

• 개념 **041, 042, 044**

한 개의 동전을 세 번 던져서 앞면이 나올 때마다 4점, 뒷면이 나올 때마다 2점의 점수를 받는다고 한다. 이 시행에서 얻은 점수를 확률변수 X라 할 때, X의 평균과 표준편차를 구하여라.

유형 Guide 먼저 확률변수 X가 가질 수 있는 값에 대하여 그 각각의 확률을 구하여 확률분포를 표로 나타낸 후, 다음을 이용한다.

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i,\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2,\ \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

유형 55EN **이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차 ○ 확률분포를 표로 나타낸다.**

풀이 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 동전을 세 번 던졌을 때 받을 수 있는 점수는

HHH일 때, $4\cdot3=12$
HHT, HTH, THH일 때, $4\cdot2+2\cdot1=10$
HTT, THT, TTH일 때, $4\cdot1+2\cdot2=8$
TTT일 때, $2\cdot3=6$

따라서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 6, 8, 10, 12이고, 그 각각의 확률은 $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

X	6	8	10	12	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$\therefore\ \mathrm{E}(X)=6\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{3}{8}+10\cdot\frac{3}{8}+12\cdot\frac{1}{8}=9$$

$$\mathrm{V}(X)=6^2\cdot\frac{1}{8}+8^2\cdot\frac{3}{8}+10^2\cdot\frac{3}{8}+12^2\cdot\frac{1}{8}-9^2=3$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{3}$$

즉 X의 평균은 9, 표준편차는 $\sqrt{3}$이다.

답 평균: 9, 표준편차: $\sqrt{3}$

정답 및 풀이 • 48쪽

유제 060-1 100원짜리 동전 1개와 10원짜리 동전 2개를 던져서 앞면이 나온 동전을 상금으로 받기로 하였다. 받는 상금을 확률변수 X라 할 때, X의 평균과 표준편차를 구하여라.

유제 060-2 검은 공 3개, 흰 공 1개, 빨간 공 2개가 들어 있는 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공 중에서 빨간 공의 개수를 확률변수 X라 하자. 이때 X의 평균과 표준편차를 구하여라.

개념 045

이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

이산확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$, 분산 $\mathrm{V}(X)$, 표준편차 $\sigma(X)$와 확률변수 $aX+b$에 대하여 다음이 성립한다. (단, a, b는 상수이다.)

① **평균:** $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$
② **분산:** $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\,\mathrm{V}(X)$
③ **표준편차:** $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

Remark 위의 성질은 이산확률변수뿐만 아니라 일반적으로 모든 확률변수에 대해서도 성립한다.

개념 Approach

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$이면

$$\mathrm{E}(X)=m=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i,\ \mathrm{V}(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i,\ \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

이다. 이때 위의 성질이 성립함을 확인해 보자.

① $\mathrm{E}(aX+b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i=a\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+b\sum_{i=1}^{n}p_i \Leftarrow \sum_{i=1}^{n}p_i=1$

$=a\mathrm{E}(X)+b$

② $\mathrm{V}(aX+b)=\sum_{i=1}^{n}\{(ax_i+b)-(am+b)\}^2p_i$

$=a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$

$=a^2\,\mathrm{V}(X)$

③ $\sigma(aX+b)=\sqrt{\mathrm{V}(aX+b)}=\sqrt{a^2\mathrm{V}(X)}$

$=|a|\sigma(X)$

개념 Check

이산확률변수 X의 평균이 5, 분산이 3일 때, 확률변수 $-2X+3$의 평균, 분산, 표준편차를 구하여라.

풀이 $\mathrm{E}(X)=5,\ \mathrm{V}(X)=3,\ \sigma(X)=\sqrt{3}$이므로

$\mathrm{E}(-2X+3)=-2\mathrm{E}(X)+3=(-2)\cdot5+3=-7$

$\mathrm{V}(-2X+3)=(-2)^2\,\mathrm{V}(X)=4\cdot3=12$

$\sigma(-2X+3)=|-2|\sigma(X)=2\sqrt{3}$

답 평균: -7, 분산: 12, 표준편차: $2\sqrt{3}$

대표유형 061 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

• 개념 045

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같을 때, 다음을 구하여라.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

(1) $\mathrm{E}(3X-1)$ (2) $\mathrm{V}(2X+3)$

(3) $\sigma(-2X+1)$

유형 Guide 확률변수 X에 대한 확률분포가 표로 주어지면 $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$를 구한 후, 다음을 이용하여 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차를 구한다. (단, a, b는 상수이다.)

$$\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b,\ \mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X),\ \sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$$

유형 SSEN **확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차 ➔ X의 평균, 분산, 표준편차 이용**

풀이 확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차는

$$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}=2$$

$$\mathrm{V}(X)=1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{2}+3^2\cdot\frac{1}{4}-2^2=\frac{1}{2}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(1) $\mathrm{E}(3X-1)=3\mathrm{E}(X)-1=3\cdot2-1=5$

(2) $\mathrm{V}(2X+3)=2^2\mathrm{V}(X)=4\cdot\frac{1}{2}=2$

(3) $\sigma(-2X+1)=|-2|\sigma(X)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

답 (1) 5 (2) 2 (3) $\sqrt{2}$

정답 및 풀이 • 48쪽

유제 061-1 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같을 때, 다음을 구하여라.

X	-2	0	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

(1) $\mathrm{E}(2X-3)$

(2) $\mathrm{V}(-3X+5)$

(3) $\sigma(9X+2)$

Plus 유제 061-2 10원짜리 동전 5개와 100원짜리 동전 3개 중에서 2개를 택하는 시행을 할 때, 택한 두 동전의 금액의 합을 확률변수 X라 하자. 이때 $\mathrm{E}(2X-25)$를 구하여라.

개념 046 이항분포

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X의 확률질량함수는

$$\mathbf{P(X=x)={}_{n}C_{x}\,p^{x}q^{n-x}}\ \ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ q=1-p)$$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	$\cdots$	n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	${}_{n}C_{0}\,p^{0}q^{n}$	${}_{n}C_{1}\,p^{1}q^{n-1}$	${}_{n}C_{2}\,p^{2}q^{n-2}$	$\cdots$	${}_{n}C_{n}\,p^{n}q^{0}$	1

이와 같은 확률분포를 **이항분포**라 하고, 이것을 기호로 $\mathbf{B(n,\ p)}$와 같이 나타낸다.

Remark
- $\mathrm{B}(n,\ p)$의 B는 이항분포를 뜻하는 binomial distribution의 첫 글자이다.
- $p+q=1$이므로 이항정리에 의하여 $\displaystyle\sum_{x=0}^{n}{}_{n}C_{x}p^{x}q^{n-x}=(p+q)^{n}=1$

개념 Approach

135쪽 **개념 037**에서 동일한 시행을 여러 번 반복할 때, 각 시행에서 일어나는 사건이 서로 독립인 경우를 독립시행이라 함을 배웠다. 이러한 독립시행에서 사건이 일어나는 횟수를 확률변수로 하는 이항분포에 대하여 알아보자.

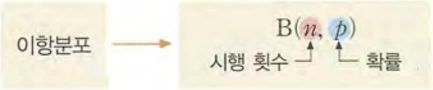
예를 들어 한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, X가 각 값을 가질 확률은 독립시행의 확률에 의하여

$${}_{3}C_{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{3},\ \ {}_{3}C_{1}\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{2},\ \ {}_{3}C_{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{1},\ \ {}_{3}C_{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{0}$$

이므로 확률변수 X의 확률질량함수는 $\mathrm{P}(X=x)={}_{3}C_{x}\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\left(\frac{5}{6}\right)^{3-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(3,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

개념 SSEN



개념 Check

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(5,\ \frac{1}{3}\right)$을 따를 때, 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(X=1)$

(2) $\mathrm{P}(X=3)$

풀이 (1) $\mathrm{P}(X=1)={}_{5}C_{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{4}=\frac{80}{243}$ (2) $\mathrm{P}(X=3)={}_{5}C_{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=\frac{40}{243}$

답 (1) $\frac{80}{243}$ (2) $\frac{40}{243}$

개념 047 이항분포의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, X의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

$$\mathbf{E}(X)=np,\ \mathbf{V}(X)=npq,\ \sigma(X)=\sqrt{npq}\ \ (\text{단, } q=1-p)$$

개념 Approach

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, 확률질량함수

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\, p^x q^{n-x}\ \ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ q=1-p)$$

을 이용하여 X의 평균과 분산 및 표준편차를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X)&=1\cdot{}_n\mathrm{C}_1\, p^1q^{n-1}+2\cdot{}_n\mathrm{C}_2\, p^2q^{n-2}+\cdots+n\cdot{}_n\mathrm{C}_n\, p^n \Leftarrow {}_n\mathrm{C}_k=\frac{n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}}{k}\\
&=np({}_{n-1}\mathrm{C}_0\, q^{n-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_1\, pq^{n-2}+\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}\, p^{n-1})\\
&=np(p+q)^{n-1} \Leftarrow p+q=1\\
&=np
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\mathrm{E}(X^2-X+X)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\
&=\mathrm{E}(X^2-X)+\mathrm{E}(X)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\
&=\mathrm{E}(X(X-1))+\mathrm{E}(X)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\
&=1\cdot0\cdot{}_n\mathrm{C}_1\, p^1q^{n-1}+2\cdot1\cdot{}_n\mathrm{C}_2\, p^2q^{n-2}+3\cdot2\cdot{}_n\mathrm{C}_3\, p^3q^{n-3}+\cdots+n\cdot(n-1)\,{}_n\mathrm{C}_n\, p^n\\
&\quad+np-(np)^2 \Leftarrow {}_n\mathrm{C}_k=\frac{n(n-1)\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}}{k(k-1)}\ (k\neq1)\\
&=n(n-1)p^2({}_{n-2}\mathrm{C}_0\, q^{n-2}+{}_{n-2}\mathrm{C}_1\, p^1q^{n-3}+\cdots+{}_{n-2}\mathrm{C}_{n-2}\, p^{n-2})+np-(np)^2\\
&=n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}+np-(np)^2 \Leftarrow p+q=1\\
&=np(1-p)\\
&=npq
\end{aligned}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{npq}$$

개념 Check

확률변수 X가 다음 이항분포를 따를 때, X의 평균과 분산을 구하여라.

(1) $\mathrm{B}\left(16,\ \frac{1}{4}\right)$ (2) $\mathrm{B}\left(720,\ \frac{1}{6}\right)$

풀이 (1) $\mathrm{E}(X)=16\cdot\frac{1}{4}=4,\ \mathrm{V}(X)=16\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=3$

(2) $\mathrm{E}(X)=720\cdot\frac{1}{6}=120,\ \mathrm{V}(X)=720\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=100$

답 (1) 평균: 4, 분산: 3 (2) 평균: 120, 분산: 100

대표유형 062 이항분포의 평균, 분산, 표준편차 (1)

• 개념 047

발아율이 90 %인 씨앗을 100개 심었을 때, 발아되는 씨앗의 개수를 확률변수 X 라 하자. 다음에 답하여라.

(1) X의 평균과 분산을 구하여라.

(2) X^2의 평균을 구하여라.

유형 Guide 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따른다.
주어진 문제에서 시행 횟수 n과 한 번의 시행에서 씨앗이 발아될 확률 p를 구하여 $\mathrm{B}(n,\ p)$로 나타낸 후, $\mathrm{E}(X)=np$, $\mathrm{V}(X)=np(1-p)$임을 이용한다.

유형 SSEN **독립시행에서 사건이 일어나는 횟수를 X라 하면 ⊙ X는 이항분포를 따른다.**

풀이 (1) 씨앗 1개가 발아될 확률은 0.9이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.9)$를 따른다.

$$\therefore \mathrm{E}(X)=100\times0.9=90$$
$$\mathrm{V}(X)=100\times0.9\times0.1=9$$

따라서 X의 평균은 90, 분산은 9이다.

(2) $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=9+90^2$$
$$=8109$$

따라서 X^2의 평균은 8109이다.

답 (1) 평균: 90, 분산: 9 (2) 8109

정답 및 풀이 • 49쪽

유제 062-1 한 개의 동전을 20번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. X의 평균과 표준편차를 구하여라.

유제 062-2 흰 공 3개, 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼내어 색깔을 확인하고 다시 넣는 일을 100번 반복한다. 흰 공이 나오는 횟수를 확률변수 X라 할 때, X의 평균과 표준편차를 구하여라.

대표유형 063 이항분포의 평균, 분산, 표준편차 (2)

• 개념 047

다음에 답하여라.

(1) 한 개의 주사위를 n번 던질 때, 홀수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. X의 표준편차가 4일 때, n의 값을 구하여라.

(2) 이항분포 $B(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X가 있다. X의 평균이 6, 표준편차가 2일 때, n, p의 값을 구하여라.

유형 Guide 이항분포 $B(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X의 평균, 표준편차가 주어지면

$E(X)=np,\ \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

임을 이용하여 식을 세운 후 미지수의 값을 구한다.

유형 SSEN **확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따를 때 ○ $E(X)=np,\ \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$**

풀이 (1) 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

이때 $\sigma(X)=4$이므로 $\sqrt{n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=4,\quad \frac{1}{4}n=16$

$\therefore n=64$

(2) $E(X)=6,\ \sigma(X)=2$이므로

$np=6$ ...... ㉠

$\sqrt{np(1-p)}=2$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\sqrt{6(1-p)}=2,\quad 6(1-p)=4\quad \therefore p=\frac{1}{3}$

$p=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면 $n=18$

답 (1) 64 (2) $n=18,\ p=\frac{1}{3}$

정답 및 풀이 • 49쪽

유제 063-1 n개의 동전을 동시에 던질 때, 앞면이 나오는 개수를 확률변수 X라 하자. X의 평균이 35일 때, n의 값을 구하여라.

유제 063-2 이항분포 $B(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X의 평균이 10, 표준편차가 $2\sqrt{2}$이다. 이때 n, p의 값을 구하여라.

대표유형 064 이항분포의 평균, 분산의 활용

• 개념 047

치료율이 60 %인 약을 n명의 환자에게 투여하였을 때, 치료된 환자의 수를 확률변수 X라 하면 $\mathrm{E}(X)=48$이다. 다음을 구하여라.

(1) n의 값

(2) $\mathrm{E}(5X+1)$, $\mathrm{V}(5X+1)$

유형 Guide (1) 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, $\mathrm{E}(X)=np$임을 이용한다.

(2) 상수 a, b에 대하여 $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$, $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$임을 이용한다.

유형 SSEN $\mathbf{E}(aX+b)$, $\mathbf{V}(aX+b)$ ⊙ $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{V}(X)$ **이용**

풀이 (1) 약을 투여한 환자 한 명이 치료될 확률은 0.6이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ 0.6)$을 따른다.

이때 $\mathrm{E}(X)=48$이므로

$$0.6n=48 \qquad \therefore n=80$$

(2) 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(80,\ 0.6)$을 따르므로

$$\mathrm{V}(X)=80\times0.6\times0.4=19.2$$

$$\therefore \mathrm{E}(5X+1)=5\mathrm{E}(X)+1=5\times48+1=241$$

$$\mathrm{V}(5X+1)=5^2\mathrm{V}(X)=25\times19.2=480$$

답 (1) 80 (2) $\mathrm{E}(5X+1)=241$, $\mathrm{V}(5X+1)=480$

정답 및 풀이 • 49쪽

유제 064-1 두 개의 동전을 동시에 던지는 시행을 30회 반복할 때, 둘 다 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. 확률변수 $Y=8X+3$이라 할 때, $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{V}(Y)$를 구하여라.

Plus 유제 064-2 어느 공장에서 생산되는 제품은 불량품일 확률이 p이다. 이 공장에서 생산된 n개의 제품 중 불량품의 개수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(10X)=280$, $\mathrm{V}(10X)=2660$이다. $100p+n$의 값을 구하여라.

개념 048
큰 수의 법칙

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라 하면 임의의 양수 h에 대하여 n의 값이 한없이 커질수록 확률 $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<h\right)$는 1에 가까워진다. 이것을 **큰 수의 법칙**이라 한다.

개념 Approach

주사위 한 개를 n번 던져서 1의 눈이 나오는 횟수를 X라 하면 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{n-x} \quad (\text{단, } x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

따라서 $n=10$, 30, 50일 때의 확률은 오른쪽 표와 같으므로 이것을 이용하여 확률 $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.1\right)$을 구하면 다음과 같다.

n X	10	30	50
0	0.162	0.004	0.000
1	0.323	0.025	0.001
2	0.291	0.073	0.005
3	0.155	0.137	0.017
4	0.054	0.185	0.040
5	0.013	0.192	0.075
6	0.002	0.160	0.112
7	0.000	0.110	0.140
8	⋯	0.063	0.151
9	⋯	0.031	0.141
10	⋯	0.013	0.116
11	⋯	0.005	0.084
12	⋯	0.001	0.055
13	⋯	0.000	0.032

(i) $n=10$일 때,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{10}-\frac{1}{6}\right|<0.1\right)&=\mathrm{P}(0.66\cdots<X<2.66\cdots)\\&=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\\&=0.614\end{aligned}$$

(ii) $n=30$일 때,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{30}-\frac{1}{6}\right|<0.1\right)&=\mathrm{P}(2<X<8)\\&=\mathrm{P}(X=3)+\cdots+\mathrm{P}(X=7)\\&=0.784\end{aligned}$$

(iii) $n=50$일 때,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{50}-\frac{1}{6}\right|<0.1\right)&=\mathrm{P}(3.33\cdots<X<13.33\cdots)\\&=\mathrm{P}(X=4)+\cdots+\mathrm{P}(X=13)=0.946\end{aligned}$$

이상에서 n의 값이 커질 때 확률 $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.1\right)$은 1에 가까워짐을 알 수 있다. 또 이것은 0.1뿐만 아니라 0.01, 0.001, ⋯일 때도 성립한다. 즉 주사위를 던지는 횟수 n의 값이 커질수록 1의 눈이 나올 상대도수 $\frac{X}{n}$는 1의 눈이 나올 수학적 확률 $\frac{1}{6}$에 가까워짐을 알 수 있다.

이와 같이 시행 횟수가 충분히 클 때, 상대도수가 수학적 확률에 가까워지는 성질을 큰 수의 법칙이라 한다. 이때 시행 횟수가 충분히 크면 상대도수가 통계적 확률에 가까워지므로 큰 수의 법칙에 의하여 시행 횟수가 충분히 클 때 통계적 확률이 수학적 확률에 가까워짐을 알 수 있다. 따라서 자연 현상이나 사회 현상과 같이 수학적 확률을 구하기 어려운 경우에는 큰 수의 법칙에 의하여 통계적 확률을 대신 사용할 수 있다.

중단원 연습 문제

STEP 1 유형 Training

01 확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x)=\frac{a-x}{35}$ $(x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

서술형

02 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. $\mathrm{E}(X)=\frac{1}{2}$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

X	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{4}$	b	1

03 안타를 칠 확률이 $\frac{1}{4}$인 타자가 두 번의 타석에서 안타를 친 횟수를 확률변수 X라 할 때, X의 표준편차를 구하여라.

수능기출

04 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. $\mathrm{E}(4X+10)$의 값은?

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	a	$2a$	1

① 11　② 12　③ 13
④ 14　⑤ 15

05 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(360,\ \frac{1}{6}\right)$을 따를 때, $\mathrm{E}(X^2)$을 구하여라.

수능기출

06 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(9,\ p)$를 따르고 $\{\mathrm{E}(X)\}^2=\mathrm{V}(X)$일 때, p의 값은?

(단, $0<p<1$)

① $\frac{1}{13}$　② $\frac{1}{12}$　③ $\frac{1}{11}$　④ $\frac{1}{10}$　⑤ $\frac{1}{9}$

07 두 개의 주사위를 동시에 던지는 시행을 n회 반복할 때, 나오는 두 눈의 수가 모두 짝수인 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X^2)=\frac{11}{2}$일 때, n의 값은?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

평가원기출

08 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르고 $\mathrm{E}(2X+5)=13$일 때, n의 값은?

① 6　② 9　③ 12　④ 15　⑤ 18

STEP 2 실전 Application

서술형

09 확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{a}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\ (x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 35)$$

일 때, $\mathrm{P}(X=9)+\mathrm{P}(X=10)+\mathrm{P}(X=11)+\cdots+\mathrm{P}(X=35)$의 값을 구하여라.

(단, a는 상수이다.)

서술형

10 확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2, 3이고, $\mathrm{P}(X\geq k)=1-\frac{k^2}{20}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$일 때, X의 표준편차를 구하여라.

수능기출

11 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3-a}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3+a}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$\mathrm{P}(0\leq X\leq 2)=\frac{7}{8}$일 때, 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

교육청기출

12 그림과 같이 숫자 1, 2, 3이 각각 하나씩 적혀 있는 흰 공 3개와 검은 공 3개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자의 최솟값을 확률변수 X라 하자. X의 평균이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

13 흰 공 3개, 빨간 공 2개가 들어 있는 주머니에서 두 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 같은 색의 공을 꺼내면 3000원, 다른 색의 공을 꺼내면 2000원의 상금을 받는 게임이 있다. 2500원을 내고 이 게임을 한 번 할 때, 얼마의 이익 또는 손해가 기대되는가?

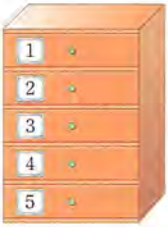
① 100원 손해 ② 100원 이익 ③ 200원 손해
④ 200원 이익 ⑤ 300원 손해

14 10장의 카드에 1, 2, 3 중 하나의 숫자가 적혀 있다. 이 10장의 카드에서 한 장의 카드를 임의로 뽑을 때, 뽑힌 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하면 $\mathrm{E}(X)=1.9$, $\mathrm{V}(X)=0.49$이다. 이때 1, 2, 3이 적힌 카드의 개수를 차례대로 구한 것은?

① 1, 4, 5 ② 3, 4, 3 ③ 3, 2, 5 ④ 3, 5, 2 ⑤ 4, 1, 5

수능기출

15 1부터 5까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 5개의 서랍이 있다. 5개의 서랍 중 영희에게 임의로 2개를 배정해 주려고 한다. 영희에게 배정되는 서랍에 적혀 있는 자연수 중 작은 수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(10X)$의 값을 구하여라.



서술형

16 두 개의 주사위를 동시에 던져 나온 두 눈의 수 중 작지 않은 수를 확률변수 X라 할 때, 확률변수 $Y=\frac{36X+39}{50}$의 평균을 구하여라.

17 두 사람 A, B가 다음 규칙에 따라 게임을 하려고 한다.

> 1부터 10까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 10개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때 꺼낸 공에 적힌 수가 3의 배수이면 A가 50점을 얻고 그 외의 수가 적힌 공이 나오면 B가 20점을 얻는다.

이 시행을 100번 반복하여 A가 얻은 점수에서 B가 얻은 점수를 뺀 값을 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(X)$를 구하여라. (단, 꺼낸 공은 다시 넣는다.)

18 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X에 대하여 X의 평균이 300, 표준편차가 10이면 $\frac{\mathrm{P}(X=3)}{\mathrm{P}(X=2)}=\frac{b}{a}$이다. 이때 $a+b$의 값을 구하여라.

(단, a, b는 서로소인 자연수이다.)

서술형

19 흰 공 a개, 빨간 공 4개가 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼내어 색깔을 확인하고 다시 넣는 시행을 n번 반복할 때, 흰 공이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 $X-10$의 평균은 2이고, 분산은 3이다. 이때 $a+n$의 값을 구하여라.

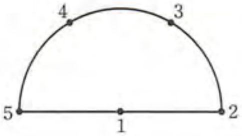
STEP 3 심화 Forwarding

20 어떤 상자에 1, 3, 5, ⋯, $2n-1$이 하나씩 적힌 카드가 각각 1, 2, 3, ⋯, n장씩 들어 있다. 이 상자에서 임의로 한 장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적힌 수를 확률변수 X라 하자. X의 평균이 13일 때, n의 값은?

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

서술형

21 반원의 중심, 지름의 양 끝 점, 호를 삼등분한 점에 각각 1부터 5까지의 번호를 오른쪽 그림과 같이 부여하였다. 이 5개의 점 중에서 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 만들 때, 확률변수 X를 다음과 같이 정의하자.



(가) 예각삼각형이면 세 꼭짓점에 적힌 수 중 가장 작은 수를 확률변수 X라 한다.
(나) 직각삼각형이면 세 꼭짓점에 적힌 수 중 두 번째로 큰 수를 확률변수 X라 한다.
(다) 둔각삼각형이면 세 꼭짓점에 적힌 수 중 가장 큰 수를 확률변수 X라 한다.

이때 $\mathrm{E}(9X+3)$을 구하여라. (단, 삼각형이 만들어지지 않는 경우는 제외한다.)

22 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p^3	$6p^2q$	$12pq^2$	$8q^3$	1

이때 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은? (단, $pq\neq0$)

보기

ㄱ. $p+q=1$

ㄴ. $\mathrm{E}(X)=1$이면 $q=\frac{1}{6}$이다.

ㄷ. $p<q$이고 $\mathrm{V}(X)=\frac{5}{12}$이면 $\mathrm{E}(X)=\frac{5}{2}$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1984년 도쿄 국제 마라톤 대회에서 우승한 야마다 모토이치
선수의 인터뷰입니다.

한 단계 한 단계 목표를 성취하다 보면 어느새 원하는 꿈에
도달해 있는 나를 발견하게 될 것입니다.

www.Jonnytaro.com
카툰/ 조니타로

08

정규분포

우리는 앞 단원에서 하나하나 떨어져 있어서 셀 수 있는 이산확률변수와 그에 대한 여러 가지 성질을 배웠다.
그렇다면 연속되어 셀 수 없는 값을 갖는 확률변수도 있을까?
시간이나 무게, 길이, 온도 등은 측정 기구의 한계로 인하여 이산확률변수로 생각될 수도 있지만, 본질적으로는 어떤 구간의 모든 실수 값을 갖는다. 이와 같이 연속적인 값을 갖는 확률변수가 존재한다면 자연 현상이나 사회 현상을 보다 정확하게 분석할 수 있을 것이다.

이 단원에서는 연속확률변수의 확률밀도함수 중 하나인 정규분포와 표준정규분포에 대하여 알아보자.

●한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

20 연속확률변수

- 연속확률변수의 뜻을 안다.

21 정규분포

- 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
- 표준정규분포의 뜻을 알고, 정규분포를 표준화하여 확률을 구할 수 있다.

22 이항분포와 정규분포의 관계

- 이항분포와 정규분포 사이의 관계를 이해한다.

개념 & 특강	대표유형 & 유제
049 연속확률변수와 확률밀도함수	065 확률밀도함수
050 정규분포	
051 정규분포 곡선의 성질	
052 표준정규분포	066 정규분포에서 확률 구하기 — 067 정규분포의 활용 (1) — 068 정규분포의 활용 (2)
053 정규분포의 표준화	
054 이항분포와 정규분포의 관계	069 이항분포와 정규분포

개념 049

연속확률변수와 확률밀도함수

1 연속확률변수

확률변수 X가 어떤 범위에 속하는 모든 실수 값을 가질 때, X를 **연속확률변수**라 한다.

2 확률밀도함수

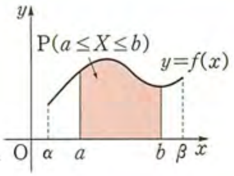
$\alpha \le X \le \beta$에서 모든 실수 값을 가질 수 있는 연속확률변수 X에 대하여 $\alpha \le x \le \beta$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 세 가지 성질을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$를 확률변수 X의 **확률밀도함수**라 한다.

① $f(x) \ge 0$

② $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이다.

③ $\mathrm{P}(a \le X \le b)$는 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

(단, $\alpha \le a \le b \le \beta$)



Remark 연속확률변수 X가 특정한 값을 가질 확률은 0이므로 다음이 성립한다.

① $\mathrm{P}(X=a)=0$

② $\mathrm{P}(a \le X \le b)=\mathrm{P}(a \le X < b)=\mathrm{P}(a < X \le b)=\mathrm{P}(a < X < b)$

개념 Approach

147쪽 **개념 039**에서 확률변수가 가질 수 있는 값이 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n과 같이 하나하나 떨어져 셀 수 있는 이산확률변수에 대하여 학습하였다.
여기서는 시간, 온도, 체중 등과 같이 어떤 범위에 속하는 모든 실수 값을 갖는 확률변수에 대하여 알아보자.

예를 들어 2시와 2시 10분 사이의 임의의 시각에 도착하는 버스를 2시부터 기다릴 때, 버스를 기다리는 시간을 X분이라 하면 확률변수 X는 0 이상 10 이하의 모든 값을 가질 수 있으므로 연속확률변수이고 버스를 기다리는 시간이 a분과 b분 사이일 확률은

$$\mathrm{P}(a \le X \le b)=\frac{b-a}{10} \ (0 \le a \le b \le 10)$$

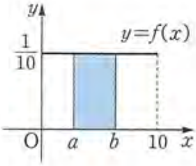
이다.

따라서 $f(x)=\frac{1}{10}$ $(0\le x\le 10)$이라 하면 다음이 성립한다.

① $f(x)\ge 0$

② 함수 $f(x)=\frac{1}{10}$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=10$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$10\cdot\frac{1}{10}=1$$



③ 함수 $f(x)=\frac{1}{10}$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$|b-a|\cdot\frac{1}{10}=\frac{b-a}{10}=\mathrm{P}(a\le x\le b)$$

이상에서 함수 $f(x)$는 확률변수 X의 확률밀도함수이다.

개념 SSEN

이산확률변수 → 확률질량함수

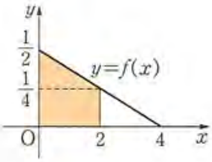
연속확률변수 → 확률밀도함수

개념 Check

연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}x$ $(0\le x\le 4)$일 때, $\mathrm{P}(0\le X\le 2)$를 구하여라.

풀이 $\mathrm{P}(0\le X\le 2)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$\mathrm{P}(0\le X\le 2)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot 2$$
$$=\frac{3}{4}$$



답 $\frac{3}{4}$

다른 풀이 $\mathrm{P}(0\le X\le 2)=1-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

대표유형 065 확률밀도함수

• 개념 049

연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=kx\ (0\le x\le 2)$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 상수 k의 값

(2) $\mathrm{P}(0\le X\le 1)$

유형 Guide (1) 함수 $f(x)$가 확률밀도함수이면 주어진 범위에서 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1임을 이용한다.

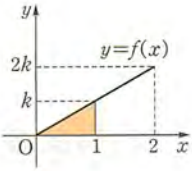
(2) 연속확률변수 X가 어떤 범위에 속할 확률은 그 범위에서 확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같음을 이용한다.

유형 SSEN **연속확률변수 X의 확률 ➔ 확률밀도함수의 그래프를 그린다.**

풀이 (1) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2k=1$$

$$\therefore k=\frac{1}{2}$$



(2) $\mathrm{P}(0\le X\le 1)$은 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{4}$

정답 및 풀이 • 56쪽

유제 065-1 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=k\ (1\le x\le 5)$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 상수 k의 값

(2) $\mathrm{P}(2\le X\le 4)$

유제 065-2 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=\begin{cases} ax & (0\le x\le 1) \\ a & (1\le x\le 3) \end{cases}$ 일 때, 다음을 구하여라.

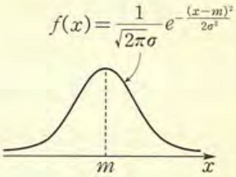
(1) 상수 a의 값

(2) $\mathrm{P}\left(X\ge\frac{1}{2}\right)$

개념 050 정규분포

(1) 실수 전체의 집합에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 두 상수 m, σ $(\sigma>0)$에 대하여

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



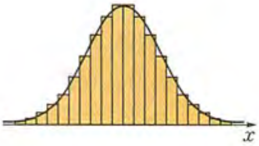
일 때, X의 확률분포를 **정규분포**라 하고, $f(x)$의 그래프를 **정규분포 곡선**이라 한다.

이때 e는 2.71828⋯인 무리수이고, $\mathrm{E}(X)=m$, $\mathrm{V}(X)=\sigma^2$임이 알려져 있다.

(2) 평균이 m, 분산이 σ^2인 정규분포를 기호로 $\mathbf{N}(m,\ \sigma^2)$과 같이 나타낸다.

Remark $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$에서 N은 정규분포를 뜻하는 normal distribution의 첫 글자이다.

개념 Approach



강우량, 시험 점수, 신생아의 체중 등과 같은 자연 현상이나 사회 현상을 관찰하여 얻은 자료의 상대도수를 계급의 크기를 작게 하여 히스토그램으로 나타내면, 자료의 개수가 많아질수록 오른쪽 그림과 같이 정규분포 곡선에 가까워진다. 이러한 자연 현상이나 사회 현상은 일반적으로 정규분포를 따름이 알려져 있다.

한편 평균이 m, 분산이 σ^2인 정규분포를 기호로 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$과 같이 나타내고, 확률변수가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다고 한다.

예를 들어 신생아의 체중이 평균 3.3 kg, 분산 1인 정규분포를 따를 때, 신생아의 체중은 정규분포 $\mathrm{N}(3.3,\ 1)$을 따른다고 한다.

개념 SSEN 정규분포 → $\mathrm{N}(\underset{\text{평균}}{m},\ \underset{\text{분산}}{\sigma^2})$

개념 051

정규분포 곡선의 성질

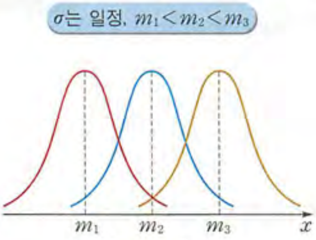
정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포 곡선에는 다음과 같은 성질이 있다.

① 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이다.
② 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.
③ σ의 값이 일정할 때, m의 값이 달라지면 대칭축의 위치는 바뀌지만 모양은 변하지 않는다.
④ m의 값이 일정할 때, σ의 값이 클수록 가운데 부분의 높이는 낮아지고 옆으로 퍼진 모양이 된다.

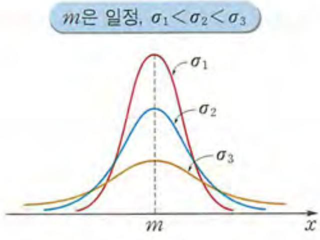
Remark 정규분포 곡선의 점근선은 x축이다.

개념 Approach

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포 곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양이다. 이때 평균 m과 표준편차 σ의 값에 따른 정규분포 곡선의 개형은 다음과 같다.



[그림 1]

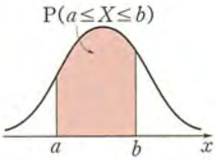


[그림 2]

[그림 1]에서 표준편차가 일정할 때는 평균이 클수록 대칭축이 오른쪽으로 이동하고, 평균이 작을수록 대칭축이 왼쪽으로 이동하지만 곡선의 모양은 모두 같음을 알 수 있다.

또한 [그림 2]에서 평균이 일정할 때는 표준편차가 클수록 곡선의 가운데 부분의 높이는 낮아지고 모양은 옆으로 퍼지며, 표준편차가 작을수록 곡선의 가운데 부분의 높이는 높아지고 모양은 옆으로 좁아짐을 알 수 있다.

한편 정규분포는 연속확률변수의 확률분포 중 하나이므로 정규분포를 따르는 확률변수 X의 정규분포 곡선이 오른쪽 그림과 같을 때, 확률 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$는 색칠한 부분의 넓이와 같다.



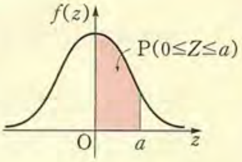
Remark 정규분포 곡선의 가운데 부분의 높이가 높을수록 표준편차 σ가 작은 것이므로 자료가 고르다고 할 수 있다.

개념 052

표준정규분포

평균이 0, 분산이 1인 정규분포 **N(0, 1)**을 **표준정규분포**라 한다. 확률변수 Z가 표준정규분포 N(0, 1)을 따를 때, Z의 확률밀도함수는

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$



이고, $f(z)$의 그래프는 위의 그림과 같다. 따라서 양수 a에 대하여 확률 $P(0\le Z\le a)$는 색칠한 부분의 넓이와 같다.

개념 Approach

표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여 $P(0\le Z\le z)$는 219쪽 표준정규분포표에서 찾을 수 있다. 예를 들어 오른쪽 표준정규분포에서

$$P(0\le Z\le 2.52)=0.4941$$

임을 알 수 있다.

z	0.00	0.01	0.02	⋯
⋮				
2.5			0.4941	
⋮				

한편 확률변수 Z의 정규분포 곡선은 직선 $z=0$에 대하여 대칭이므로 다음이 성립한다.

(단, $0<a<b$)

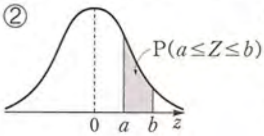
① $P(0\le Z\le a)=P(-a\le Z\le 0)$

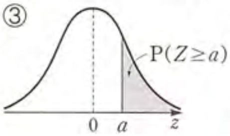
② $P(a\le Z\le b)=P(0\le Z\le b)-P(0\le Z\le a)$

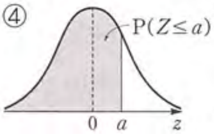
③ $P(Z\ge a)=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le a)=0.5-P(0\le Z\le a)$

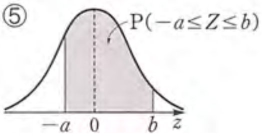
④ $P(Z\le a)=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le a)=0.5+P(0\le Z\le a)$

⑤ $P(-a\le Z\le b)=P(-a\le Z\le 0)+P(0\le Z\le b)=P(0\le Z\le a)+P(0\le Z\le b)$

②


③


④


⑤


개념 Check

확률변수 Z가 표준정규분포 N(0, 1)을 따를 때, 219쪽의 표준정규분포표를 이용하여 다음 확률을 구하여라.

(1) $P(-1\le Z\le 2)$

(2) $P(Z\ge 2.58)$

풀이 (1) $P(-1\le Z\le 2)=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 2)$
$=0.3413+0.4772=0.8185$

(2) $P(Z\ge 2.58)=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2.58)=0.5-0.4951=0.0049$

답 (1) 0.8185 (2) 0.0049

개념 053

정규분포의 표준화

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 이와 같이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X를 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수 Z로 바꾸는 것을 **표준화**라 한다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(a\le X\le b)=\mathrm{P}\left(\frac{a-m}{\sigma}\le Z\le\frac{b-m}{\sigma}\right)$$

Remark 확률변수 X를 표준화하면 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구할 수 있다.

개념 Approach

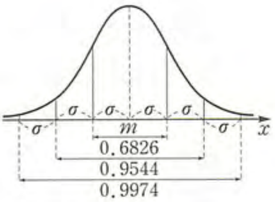
정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$이라 하면

$$\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}\{\mathrm{E}(X)-m\}=\frac{1}{\sigma}(m-m)=0 \quad \Leftarrow \mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$$

$$\mathrm{V}(Z)=\mathrm{V}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma^2}\mathrm{V}(X)=\frac{\sigma^2}{\sigma^2}=1 \quad \Leftarrow \mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$$

이므로 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 다음이 성립한다.



$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|X-m|\le\sigma)&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.6826\\\mathrm{P}(|X-m|\le 2\sigma)&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.9544\\\mathrm{P}(|X-m|\le 3\sigma)&=\mathrm{P}(-3\le Z\le 3)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 3)=0.9974\end{aligned}$$

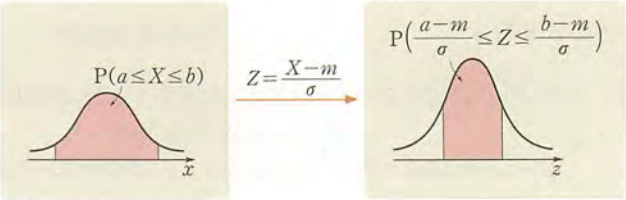
즉 확률변수 X가 평균에서 σ, 2σ, 3σ 범위 내에 있을 확률이 각각 0.6826, 0.9544, 0.9974이다.

Remark X가 이산확률변수일 때와 마찬가지로 X가 연속확률변수일 때도 확률변수 $Y=aX+b$ (a, b는 상수)에 대하여

$$\mathrm{E}(Y)=a\mathrm{E}(X)+b,\ \mathrm{V}(Y)=a^2\mathrm{V}(X)$$

가 성립한다.

개념 SSEN



대표유형 066 정규분포에서 확률 구하기

• 개념 052, 053

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(65,\ 4^2)$을 따를 때, 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 다음 확률을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(X \le 67)$

(2) $\mathrm{P}(61 \le X \le 71)$

(3) $\mathrm{P}(X \ge 73)$

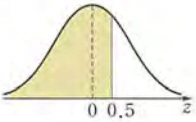
z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

유형 Guide 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대한 확률은 X를 표준화한 후 표준정규분포표를 이용하여 구할 수 있다. 이때 확률변수 Z의 정규분포 곡선은 직선 $z=0$에 대하여 좌우 대칭임을 이용한다.

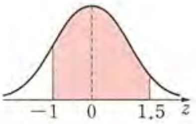
유형 SSEN 정규분포를 따르는 확률변수 ⊙ 표준화한다.

풀이 $Z=\dfrac{X-65}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

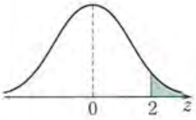
$$\begin{aligned}(1)\ \mathrm{P}(X\le 67)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{67-65}{4}\right)=\mathrm{P}(Z\le 0.5)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)\\&=0.5+0.1915=0.6915\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}(2)\ \mathrm{P}(61\le X\le 71)&=\mathrm{P}\left(\frac{61-65}{4}\le Z\le\frac{71-65}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.3413+0.4332=0.7745\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}(3)\ \mathrm{P}(X\ge 73)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{73-65}{4}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$



답 (1) 0.6915 (2) 0.7745 (3) 0.0228

정답 및 풀이 • 56쪽

유제 066-1 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 6^2)$을 따를 때, 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 다음 확률을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(55 \le X \le 58)$

(2) $\mathrm{P}(52 \le X \le 82)$

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

대표유형 067 정규분포의 활용 (1)

• 개념 052, 053

어느 고등학교 학생 500명의 키는 평균 170 cm, 표준편차 5 cm인 정규분포를 따른다고 한다. 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 키가 167.5 cm 이하인 학생은 전체의 몇 %인지 구하여라.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332

유형 Guide 주어진 상황에서 정규분포를 따르는 확률변수 X를 먼저 정하고, X를 표준화하여 X가 특정한 범위에 포함될 확률을 구한다.

유형 SSEN **정규분포를 따르는 확률변수 ➲ 표준화한다.**

풀이 학생들의 키를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(170,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-170}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(X \le 167.5) &= \mathrm{P}\left(Z \le \frac{167.5-170}{5}\right)\\ &= \mathrm{P}(Z \le -0.5) = \mathrm{P}(Z \ge 0.5)\\ &= \mathrm{P}(Z \ge 0) - \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)\\ &= 0.5 - 0.1915 = 0.3085\end{aligned}$$

따라서 키가 167.5 cm 이하인 학생은 전체의 30.85 %이다.

답 30.85 %

정답 및 풀이 • 57쪽

유제 067-1 어느 전국 모의고사 점수가 평균 270점, 표준편차 40점인 정규분포를 따른다고 할 때, 성적이 290점 이상 370점 이하인 학생은 전체의 몇 %인지 구하여라. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)=0.19$, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.5)=0.49$로 계산한다.)

Plus 유제 067-2 어느 고등학교 여학생 400명의 몸무게는 평균 52 kg, 표준편차 4 kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이때 몸무게가 56 kg 이상인 여학생은 몇 명인지 구하여라.

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)=0.34$로 계산한다.)

대표유형 068 정규분포의 활용 (2)

• 개념 052, 053

어느 회사에서 350명의 신입 사원을 선발하기 위하여 입사 시험을 실시하였다. 응시자 5000명의 성적이 평균 630점, 표준편차 70점인 정규분포를 따른다고 할 때, 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 합격자의 최저 점수를 구하여라.

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48

유형 Guide $\frac{350}{5000}=0.07$이므로 합격자 350명은 전체 응시자의 7 %이다. 따라서 이 문제는 '상위 7 % 이내에 들기 위해서는 적어도 몇 점을 받아야 하는가' 라는 문제와 같다. 확률을 알 때 확률변수가 속하는 범위를 구하는 문제이므로 표준정규분포표를 이용하여 확률 $\mathrm{P}(X\ge k)=0.07$을 만족시키는 k의 값을 구한다.

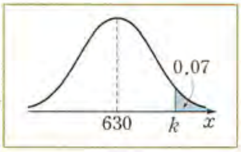
유형 SSEN **상위 a % 이내에 속하는 X의 최솟값 k ○ $\mathrm{P}(X\ge k)=\frac{a}{100}$**

풀이 응시자의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(630,\ 70^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-630}{70}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 k라 하면

$$\mathrm{P}(X\ge k)=\frac{350}{5000}=0.07,\quad \mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k-630}{70}\right)=0.07$$



$$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-630}{70}\right)=0.07$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-630}{70}\right)=0.07\qquad \therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-630}{70}\right)=0.43$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.43$이므로 $\frac{k-630}{70}=1.5\qquad \therefore k=735$

따라서 합격자의 최저 점수는 735점이다.

답 735점

정답 및 풀이 • 57쪽

유제 068-1 어느 학교 학생들의 수학 시험 성적이 평균 65점, 표준편차 10점인 정규분포를 따른다고 할 때, 상위 16 % 이내에 들기 위해서는 적어도 몇 점을 받아야 하는지 구하여라.

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.34$로 계산한다.)

유제 068-2 어느 맛집 평가 사이트에 등록된 음식점들의 평점이 평균 76점, 표준편차 6점인 정규분포를 따른다고 한다. 평점이 상위 2 % 이내에 드는 음식점을 추천 음식점으로 선정한다고 할 때, 추천 음식점이 되기 위한 최저 평점을 구하여라.

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.48$로 계산한다.)

개념 054

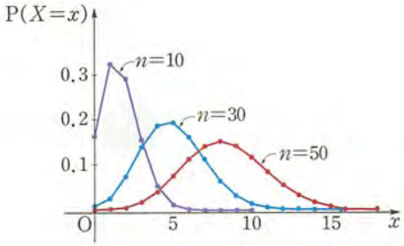
이항분포와 정규분포의 관계

이항분포와 정규분포 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따른다. (단, $q=1-p$)

Remark n이 충분히 크다는 것은 일반적으로 $np\geq5$, $nq\geq5$일 때를 뜻한다.

개념 Approach



한 개의 주사위를 n번 던질 때 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로 시행 횟수가 $n=10,\ 30,\ 50$일 때의 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$을 각각 그래프로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

즉 n의 값이 커질수록 이항분포의 그래프가 정규분포 곡선에 가까워짐을 알 수 있다. 이때 X의 평균과 분산을 구하면

$$\mathrm{E}(X)=n\cdot\frac{1}{6}=\frac{n}{6},\ \mathrm{V}(X)=n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{36}n$$

161쪽 • 개념 047

이므로 n이 충분히 크면 X가 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{n}{6},\ \frac{5}{36}n\right)$을 따름을 알 수 있다.

일반적으로 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n의 값이 충분히 크면 X가 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따른다. (단, $q=1-p$)

따라서 확률변수 X를 $Z=\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$로 표준화하여 확률을 구할 수 있다.

개념 SSEN

$$\mathrm{B}(n,\ p)\xrightarrow{n\text{이 충분히 크면}}\mathrm{N}(np,\ np(1-p))$$

개념 Check

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(400,\ 0.2)$를 따를 때, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(a,\ b^2)$을 따른다. 이때 상수 a, b의 값을 구하여라. (단, $b>0$)

풀이 $\mathrm{E}(X)=400\times0.2=80,\ \mathrm{V}(X)=400\times0.2\times0.8=64$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 8^2)$을 따른다.

$\therefore a=80,\ b=8$

답 $a=80,\ b=8$

대표유형 069 이항분포와 정규분포

• 개념 054

한 개의 주사위를 450회 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$

(2) $\mathrm{P}(140 \le X \le 175)$

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

유형 Guide 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n의 값이 크면 그 확률을 계산하기 복잡하므로 정규분포를 이용한다. 즉 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따르므로 $Z=\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$로 표준화하여 확률을 구한다.

(단, $q=1-p$)

유형 SSEN 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$에서 n이 충분히 크면 ➲ 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ np(1-p))$를 따른다.

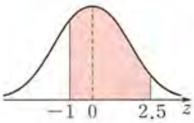
풀이 (1) 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=450\cdot\frac{1}{3}=150,\ \mathrm{V}(X)=450\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=100$$

(2) 450은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-150}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(140 \le X \le 175)&=\mathrm{P}\left(\frac{140-150}{10} \le Z \le \frac{175-150}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 2.5)\\&=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.5)\\&=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.5)\\&=0.3413+0.4938=0.8351\end{aligned}$$



답 (1) $\mathrm{E}(X)=150$, $\mathrm{V}(X)=100$ (2) 0.8351

정답 및 풀이 • 57쪽

유제 069-1 어느 회사의 제품의 불량률은 2 %이다. 이 회사의 제품 10000개 중 불량품이 221개 이상일 확률을 위의 표준정규분포표를 이용하여 구하여라.

유제 069-2 당첨될 확률이 10 %인 이벤트가 있다. 이 이벤트에 400번 응모할 때, 당첨되는 횟수가 37번 이상 52번 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하여라.

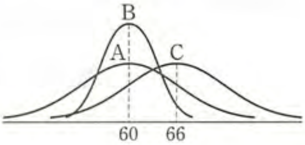
z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
2.0	0.4772

중단원 연습 문제

STEP 1 유형 Training

01 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=|x|\ (-1\leq x\leq 1)$일 때, $P(|X|\leq 0.5)$를 구하여라.

02 2학년 학생 수가 각각 500명인 세 고등학교 A, B, C의 2학년 학생들의 수학 성적이 각각 정규분포를 따른다. 세 정규분포 곡선이 오른쪽 그림과 같을 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. 성적이 66점 이상인 학생들은 B고등학교보다 A고등학교에 더 많다.
ㄴ. B고등학교 학생들은 평균적으로 A고등학교 학생들보다 성적이 더 우수하다.
ㄷ. C고등학교 학생들보다 B고등학교 학생들의 성적이 더 고른 편이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

서술형

03 확률변수 X가 정규분포 $N(5,\ 1^2)$을 따를 때,

$$a=P(5\leq X\leq 6),\ b=P(|X-5|\geq 1),$$
$$c=2P(6\leq X\leq 8)$$

이라 하자. 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 세 수 a, b, c의 대소 관계를 나타내어라.

z	$P(0\leq Z\leq z)$
1.0	0.3413
2.0	0.4772
3.0	0.4987

04 어느 고등학교 학생 500명의 영어 시험 점수가 평균 70점, 표준편차 12점인 정규분포를 따를 때, 점수가 82점 이상인 학생은 몇 명인가?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0\leq Z\leq 1)=0.34$로 계산한다.)

① 75명 ② 80명 ③ 85명 ④ 90명 ⑤ 95명

05 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 2^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(X \geq k)=0.86$을 만족시키는 상수 k의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하여라.

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.1	0.36
1.2	0.38
1.3	0.40

서술형

06 어느 농구 선수의 자유투 성공률은 60 %라 한다. 이 선수가 150번의 자유투를 시도할 때, 105번 이상 성공할 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하여라.

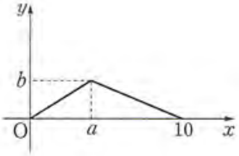
z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

STEP 2 실전 Application

교육청기출

07 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq 10$이고, X의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.

$\mathrm{P}(0 \leq X \leq a)=\frac{2}{5}$일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?



① $\frac{21}{5}$ ② $\frac{22}{5}$ ③ $\frac{23}{5}$ ④ $\frac{24}{5}$ ⑤ 5

평가원기출

08 양의 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수 $H(t)$는 평균 20, 표준편차 t인 정규분포를 따르는 확률변수 X에 대하여

$$H(t)=\mathrm{P}(X \leq 15)$$

이다. 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)=0.3413$, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)=0.4772$로 계산한다.)

보 기

ㄱ. $H(2.5)=\mathrm{P}(Z \geq 2)$ ㄴ. $H(2)<H(2.5)$ ㄷ. $H(5)<5H(2)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

수능기출

09 어느 공장에서 생산되는 병의 내압강도는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고, 내압강도가 40보다 작은 병은 불량품으로 분류한다. 이 공장의 공정능력을 평가하는 공정능력지수 G는

$$G=\frac{m-40}{3\sigma}$$

으로 계산한다. $G=0.8$일 때, 임의로 추출한 한 개의 병이 불량품일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
2.2	0.4861
2.3	0.4893
2.4	0.4918
2.5	0.4938

① 0.0139　② 0.0107　③ 0.0082　④ 0.0062　⑤ 0.0038

서술형

10 두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 4^2)$, $\mathrm{N}(20,\ 2^2)$을 따른다. $\mathrm{P}(X>k)=0.05$일 때, 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 $\mathrm{P}(Y<k)$를 구하여라. (단, k는 상수이다.)

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.64	0.450
1.69	0.455
1.72	0.457
1.75	0.460

서술형

11 어느 대학교에서 통계학 강의를 수강하는 학생들의 점수는 평균 64점, 표준편차 8점인 정규분포를 따른다고 한다. 성적이 상위 10 % 이내인 학생에게 A학점을 준다고 할 때, A학점을 받은 학생의 최저 점수는 몇 점인지 구하여라.
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.29)=0.4$로 계산한다.)

12 어느 항공사에서 승객 정원이 340명인 비행기의 예약을 400명을 받았다. 승객이 예약을 취소할 확률이 20 %라 할 때, 탑승객이 정원을 초과하지 않을 확률을 구하여라.
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)=0.4938$로 계산한다.)

평가원기출

13 어느 공장에서 생산되는 제품 A의 무게는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 1)$을 따르고, 제품 B의 무게는 정규분포 $\mathrm{N}(2m,\ 4)$를 따른다. 이 공장에서 생산된 제품 A와 제품 B에서 임의로 제품을 1개씩 선택할 때, 선택된 제품 A의 무게가 k 이상일 확률과 선택된 제품 B의 무게가 k 이하일 확률이 같다. $\frac{k}{m}$의 값은?

① $\frac{11}{9}$　② $\frac{5}{4}$　③ $\frac{23}{18}$　④ $\frac{47}{36}$　⑤ $\frac{4}{3}$

14 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 다음 식의 값을 구하여라.

$$ {}_{490}\mathrm{C}_{340}\left(\frac{5}{7}\right)^{340}\left(\frac{2}{7}\right)^{150}+{}_{490}\mathrm{C}_{341}\left(\frac{5}{7}\right)^{341}\left(\frac{2}{7}\right)^{149} $$
$$ +{}_{490}\mathrm{C}_{342}\left(\frac{5}{7}\right)^{342}\left(\frac{2}{7}\right)^{148}+\cdots+{}_{490}\mathrm{C}_{375}\left(\frac{5}{7}\right)^{375}\left(\frac{2}{7}\right)^{115} $$

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

서술형

15 어느 게임에서는 주사위를 던져서 6의 약수의 눈이 나오면 2점을 얻고, 6의 약수가 아닌 눈이 나오면 4점을 얻는다. 주사위를 450번 던져서 얻은 점수가 1160점 이상일 확률을 구하여라.
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$로 계산한다.)

서술형

16 어느 자격증 시험에서 응시자들의 점수는 평균 56점, 표준편차 12점인 정규분포를 따르고, 점수가 80점 이상이면 합격한다고 한다. 이 시험에 10000명이 응시하였을 때, 합격자가 214명 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하여라.

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.19
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48

STEP 3 심화 Forwarding

17 평균이 12, 표준편차가 5인 정규분포를 따르는 확률변수 X에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=\mathrm{P}(x-4\le X\le x)$로 정의할 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(21)=f(7)$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=14$일 때 최댓값을 갖는다.

ㄷ. 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=f(14-x)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$와 정규분포를 따르는 확률변수 Y의 확률밀도함수 $g(x)$가 임의의 실수 x에 대하여

$$f(20+x)=f(20-x),\ g(x)=f(x-20)$$

을 만족시킨다. 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수 Z에 대하여

$$\mathrm{P}(m\le X\le m+2)=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$

이 성립할 때, 위의 표준정규분포표를 이용하여 $\mathrm{P}(35\le Y\le 42)$를 구하여라.

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

수능기출

19 어느 재래시장을 이용하는 고객의 집에서 시장까지의 거리는 평균이 1740 m, 표준편차가 500 m인 정규분포를 따른다고 한다. 집에서 시장까지의 거리가 2000 m 이상인 고객 중에서 15 %, 2000 m 미만인 고객 중에서 5 %는 자가용을 이용하여 시장에 온다고 한다. 자가용을 이용하여 시장에 온 고객 중에서 임의로 1명을 선택할 때, 이 고객의 집에서 시장까지의 거리가 2000 m 미만일 확률은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.52)=0.2$로 계산한다.)

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{7}{16}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

저는요, 진짜 시간을 돌릴 수 있으면 좋겠어요.
지난 기말고사를 엄청 망쳤거든요. 진짜 그렇게 망치면
안 되는 거였는데 망쳐가지고 자꾸 생각이 나요. ㅠㅠ
정말 유치하지만, 기말고사 전으로 돌아간다면
진짜 잘할 수 있을 것 같아요.

ㅎㅎ 귀여운 서현이. ^^ 쌤도 그런 생각 자주 해. 그런데 시간을 정말 돌릴 수 있을까? 아니, 돌릴 수 있다면 정말 잘할 수가 있을까?

〈어바웃 타임〉이라는 영화가 있어. 거기에 팀이라는 남자가 나오는데, 팀이 성인이 되었을 때 아버지가 아주 큰 비밀을 알려 주지. 그 집안의 남자들은 아주 특별한 능력이 있다는 거야. 그 능력은, 혼자만의 공간에 들어가서 다시 돌아가고 싶은 시점을 상상하면 그 시점으로 진짜 돌아갈 수 있는 초능력이었어. 정말 믿을 수 없는 능력이지? 팀도 처음에는 믿을 수 없었지만 곧 그 능력이 무척 좋아졌어. 실수를 하더라도 되돌릴 수 있었고, 행복했던 순간을 또 한 번 겪을 수 있었으니까.

그런데 말이야, 점점 그 능력이 좋은 것만은 아니라는 걸 알게 돼. 팀은 메리라는 여자에게 반하게 되는데, 함께 사는 연출가를 돕기 위해 과거로 돌아갔더니 메리를 만난 사실이 없어져 버린 거야. 팀은 알게 되었지. 어떤 문제 때문에 시간을 되돌린다면 그 문제는 해결할 수 있지만, 또 다른 문제가 생길 수 있다는 것을.

그러고 나서 팀은 두 번 더 과거로 돌아가. 한 번은 돌아가신 아버지와 마지막으로 탁구 시합을 했던 날이야. 팀은 일부러 시합을 져 주고, 아버지에게 돌아가고 싶은 순간이 있냐고 물어. 아버지는 아들의 어린 시절로 돌아가 함께 산책을 하고 싶다고 말하지. 팀은 아버지의 바람대로 자신의 어린 시절로 돌아가 함께 바닷가를 산책해. 그것을 끝으로 과거로 돌아가지 않아. 대신 그 순간에 집중하며 행복을 느끼지.

서현아, 쌤도 정말 돌아가고 싶은 순간이 있었어. 그런데 다시 돌아가고 싶은 순간조차 추억할 수 있게 된 지금이 더 좋아. 딱 한 번 돌아갈 수 있다면, 하늘로 떠난 엄마에게 사랑한다 말할 수 있었으면 좋겠어. 하지만 그건 불가능한 일이니까 지금 이 순간에 만족하며 살고 싶어. 자꾸 뒤만 돌아보며 후회하기보다는 앞을 보며 걸어가자. 앞으로 다가올 시험에서는 조금 덜 후회할 수 있도록 조금 더 열심히 해 보자. 그 영화에서 말이야, 이런 말이 나와. "인생은 모두가 함께 하는 시간 여행이다. 매일매일 사는 동안, 우리가 할 수 있는 최선을 다해 이 멋진 여행을 만끽하는 것이다. 매일매일 열심히 사는 것, 마치 그 날이 내 특별한 삶의 마지막인 듯이……." 오늘 하루가 내 삶의 마지막이라고 생각한다면 과거에 연연하며 후회할 시간은 아마 없을 거야. 쌤과 함께 오늘 하루를 만끽해 보자!

– 써나쌤

* 오선화 작가는 청소년들에게
감성멘토 '써나쌤'으로 알려져 있으며,
지은 책으로는 〈힐링멘토〉와
〈눈물 가득 희망 다이어리〉가 있습니다.

09

통계적 추정

시청률은 프로그램에 대한 인기의 척도가 되어 방송국의 매체 가치를 결정하는 중요한 요소이다. 따라서 시청률 조사는 공정하고 정확하게 이루어져야 한다. 그렇다면 전국 모든 가정에 있는 TV를 24시간 조사해야 할까? 그러기에는 조사를 위해 소요해야 하는 시간과 비용이 너무 크다.

우리나라의 시청률 조사는 2000여 가구를 대상으로 시행되는데, 실제의 시청률에 가장 근사할 수 있도록 전 지역에서 전 연령대가 골고루 포함되도록 표본을 추출하여 이루어지고 있다.

이 단원에서는 알고자 하는 대상 전체인 모집단과 실제로 조사를 위해 뽑은 표본에 대하여 알아보고, 표본평균으로 모평균을 추정하는 방법과 표본비율로 모비율을 추정하는 방법에 대하여 알아보자.

●한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

23 모집단과 표본

- 모집단과 표본의 뜻을 알고, 표본평균과 모평균 사이의 관계를 이해한다.

24 모평균의 추정

- 모평균을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.

25 모비율과 표본비율

- 모비율과 표본비율 사이의 관계를 이해한다.

26 모비율의 추정

- 모비율을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.

개념 & 특강	대표유형 & 유제
055 모집단과 표본	
056 모평균과 표본평균	
057 표본평균의 평균, 분산, 표준편차	070 표본평균의 평균과 분산
058 표본평균의 분포	071 표본평균의 분포
059 모평균의 추정	072 모평균의 추정
060 모평균의 신뢰구간의 길이	073 신뢰구간의 길이와 표본의 크기
061 모비율과 표본비율	
062 표본비율의 평균, 분산, 표준편차	
063 표본비율의 분포	074 표본비율의 분포
064 모비율의 추정	075 모비율의 추정
065 모비율의 신뢰구간의 길이	

개념 055 모집단과 표본

1 모집단과 표본

통계 조사에서 조사하고자 하는 대상 전체를 **모집단**이라 하고, 조사하기 위하여 뽑은 모집단의 일부분을 **표본**이라 한다.

2 전수조사와 표본조사

통계 조사에서 모집단 전체를 조사하는 것을 **전수조사**라 하고, 모집단의 일부분, 즉 표본을 조사하는 것을 **표본조사**라 한다. 또 표본조사에서 뽑은 표본의 개수를 **표본의 크기**라 한다.

3 추출

모집단에 속하는 각 대상이 같은 확률로 추출되도록 하는 방법을 **임의추출**이라 한다. 또 한 개의 자료를 추출한 후 되돌려 놓고 다시 추출하는 것을 **복원추출**, 되돌려 놓지 않고 다시 추출하는 것을 **비복원추출**이라 한다.

Remark
- 특별한 언급이 없으면 임의추출은 복원추출로 생각한다.
- 모집단의 크기가 충분히 큰 경우에는 비복원추출도 복원추출로 볼 수 있다.

개념 Approach

통계 조사에는 전수조사와 표본조사가 있다.

5년마다 전 국민을 대상으로 실시하는 인구 주택 총조사는 전수조사의 대표적인 예이다. 전수조사는 모집단에 대한 정확한 정보를 얻을 수 있지만 모집단의 크기에 따라 시간이 오래 걸리고 비용이 많이 드는 단점이 있다. 또 전구의 수명이나 신약의 임상 시험과 같이 전수조사가 불가능한 경우도 있다.

따라서 통계 조사에서는 표본조사를 하고, 그 결과를 이용하여 모집단에 대하여 추측하는 경우가 많다.

예를 들어 우리나라 고등학생의 키를 조사하기 위하여 A고등학교 전체 학생 500명의 키를 조사한다고 하면 이 조사는 표본조사이다. 이때 모집단은 우리나라 고등학생이고, 표본은 A고등학교 학생이며 표본의 크기는 500이다.

한편 표본조사를 할 때, 모집단의 특성을 잘 나타낼 수 있도록 표본을 추출하려면 표본이 모집단의 어느 한쪽으로 편중되지 않도록 임의추출해야 한다. 임의추출을 할 때는 제비뽑기, 난수 주사위, 난수표 등을 사용하지만, 최근에는 컴퓨터의 난수 프로그램, 공학용 계산기 등을 많이 이용한다.

Remark 난수 주사위는 정이십면체의 각 면에 0부터 9까지의 숫자를 각각 두 번씩 새긴 것이다.

개념 056 모평균과 표본평균

1 모평균, 모분산, 모표준편차

어느 모집단에서 조사하고자 하는 특성을 나타내는 확률변수를 X라 할 때, X의 평균, 분산, 표준편차를 각각 **모평균**, **모분산**, **모표준편차**라 하고, 이것을 기호로 각각 $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{\sigma^2}$, $\boldsymbol{\sigma}$와 같이 나타낸다.

2 표본평균, 표본분산, 표본표준편차

모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본에서 각 대상을 X_1, X_2, $\cdots$, X_n이라 할 때, 이들의 평균, 분산, 표준편차를 각각 **표본평균**, **표본분산**, **표본표준편차**라 하고, 이것을 기호로 각각 $\boldsymbol{\overline{X}}$, $\boldsymbol{S^2}$, $\boldsymbol{S}$와 같이 나타낸다. 이때 $\overline{X}$, S^2, S는 다음과 같이 구한다.

① $\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

② $S^2=\frac{1}{n-1}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2\}$

$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

③ $S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$

Remark ② 표본분산은 모분산과의 차를 줄이기 위하여 편차의 제곱의 합을 $n-1$로 나눈다.

개념 Approach

1, 2, 3, 4의 숫자가 각각 하나씩 적힌 4개의 공에 대하여 공에 적힌 숫자를 확률변수라 하자. 4개의 공 중에서 크기가 3인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$, 표본분산 S^2, 표본표준편차 S를 구해 보자.

(i) 표본이 1, 1, 4일 때,

$$\overline{X}=\frac{1}{3}(1+1+4)=2,\ S^2=\frac{1}{3-1}\{(1-2)^2+(1-2)^2+(4-2)^2\}=3,\ S=\sqrt{3}$$

(ii) 표본이 2, 3, 4일 때,

$$\overline{X}=\frac{1}{3}(2+3+4)=3,\ S^2=\frac{1}{3-1}\{(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2\}=1,\ S=1$$

(i), (ii)에서 표본평균, 표본분산, 표본표준편차는 표본에 따라 그 값이 달라짐을 알 수 있다. 즉 m, σ^2, σ는 상수이지만 $\overline{X}$, S^2, S는 추출된 표본에 따라 여러 가지의 값을 가질 수 있는 확률변수이다.

개념

057

표본평균의 평균, 분산, 표준편차

모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m,\quad \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},\quad \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

개념 Approach

모집단의 평균, 분산, 표준편차와 표본평균의 평균, 분산, 표준편차의 관계에 대하여 알아보자.
예를 들어 1, 2, 3, 4의 숫자가 각각 하나씩 적힌 4개의 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하자.
이때 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

위의 표에서 X의 평균 m, 분산 σ^2, 표준편차 σ를 구하면 다음과 같다.

$$m=\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$$

$$\sigma^2=\mathrm{V}(X)=1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{4}+4^2\cdot\frac{1}{4}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

$$\sigma=\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

이때 X의 평균, 분산, 표준편차가 각각 모평균, 모분산, 모표준편차이다.

한편 표본평균 $\overline{X}$는 추출된 표본에 따라 여러 가지 값을 가질 수 있는 확률변수이므로 $\overline{X}$의 확률분포, 평균, 분산, 표준편차를 구할 수 있다.

예를 들어 위의 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본에서 각 대상을 X_1, X_2라 하면 표본평균 $\overline{X}$는

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$$

이고, 그 값은 오른쪽 표와 같다.

X_1 X_2	1	2	3	4
1	1	1.5	2	2.5
2	1.5	2	2.5	3
3	2	2.5	3	3.5
4	2.5	3	3.5	4

이때 각 경우가 일어날 확률이 $\frac{1}{16}$이므로 표본평균 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

위의 표에서 $\overline{X}$의 평균 $\mathrm{E}(\overline{X})$, 분산 $\mathrm{V}(\overline{X})$, 표준편차 $\sigma(\overline{X})$를 구하면 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(\overline{X})=1\times\frac{1}{16}+1.5\times\frac{2}{16}+\cdots+4\times\frac{1}{16}=\frac{5}{2}$$

$$\mathrm{V}(\overline{X})=1^2\times\frac{1}{16}+1.5^2\times\frac{2}{16}+\cdots+4^2\times\frac{1}{16}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{8}$$

$$\sigma(\overline{X})=\sqrt{\mathrm{V}(\overline{X})}=\sqrt{\frac{5}{8}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

이때 표본평균 $\overline{X}$의 평균, 분산, 표준편차를 모평균, 모분산, 모표준편차와 비교하면 $\overline{X}$의 평균 $\frac{5}{2}$는 모평균과 같고, $\overline{X}$의 분산 $\frac{5}{8}$는 모분산을 표본의 크기 2로 나눈 것이다. 또 $\overline{X}$의 표준편차 $\frac{\sqrt{10}}{4}$은 모표준편차를 $\sqrt{2}$로 나눈 것임을 알 수 있다.

즉 표본의 크기 $n=2$에 대하여

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

가 성립한다.

Remark '표본평균 $\overline{X}$'와 '표본평균의 평균 $\mathrm{E}(\overline{X})$'를 혼동하지 않도록 주의한다.

개념 SSEN

모집단 ⟶ $\mathrm{E}(X)=m,\ \mathrm{V}(X)=\sigma^2,\ \sigma(X)=\sigma$

표본평균 ⟶ $\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

개념 Check

모평균이 10, 모분산이 9인 모집단에서 임의추출한 크기가 100인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 평균, 분산, 표준편차를 구하여라.

풀이 $\mathrm{E}(\overline{X})=10,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{9}{100},\ \sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{9}{100}}=\frac{3}{10}$

답 평균: 10, 분산: $\frac{9}{100}$, 표준편차: $\frac{3}{10}$

대표유형 070 표본평균의 평균과 분산

• 개념 057

모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	10	20	30	40	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

이 모집단에서 크기가 5인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산을 구하여라.

유형 Guide 주어진 표를 이용하여 모평균 m과 모분산 σ^2을 구한 후, $\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{5}$임을 이용한다.

유형 SSEN 표본평균의 평균, 분산 ⊙ 모평균, 모분산 이용

풀이 주어진 X의 확률분포에서

$$\mathrm{E}(X)=10\cdot\frac{1}{4}+20\cdot\frac{1}{4}+30\cdot\frac{1}{4}+40\cdot\frac{1}{4}=25$$

$$\mathrm{V}(X)=10^2\cdot\frac{1}{4}+20^2\cdot\frac{1}{4}+30^2\cdot\frac{1}{4}+40^2\cdot\frac{1}{4}-25^2=125$$

이때 표본의 크기가 5이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=25,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{125}{5}=25$$

답 평균: 25, 분산: 25

정답 및 풀이 • 63쪽

유제 070-1 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적힌 공이 각각 4개, 3개, 2개, 1개 들어 있는 상자에서 4개의 공을 임의추출할 때, 공에 적힌 숫자의 평균을 $\overline{X}$라 하자. 이때 $\mathrm{E}(\overline{X})$와 $\mathrm{V}(\overline{X})$를 구하여라.

유제 070-2 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 64)$를 따르는 모집단에서 크기가 100인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $\mathrm{E}(\overline{X})$와 $\sigma(\overline{X})$를 구하여라.

개념 058

표본평균의 분포

모평균이 m, 모분산이 σ^2인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 다음이 성립한다.

① 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

② 모집단의 분포가 정규분포가 아닐 때도 표본의 크기 n이 충분히 크면 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

개념 Approach

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균을 $\overline{X}_1$이라 하면

$$\mathrm{E}(\overline{X}_1)=m,\ \mathrm{V}(\overline{X}_1)=\frac{\sigma^2}{n},\ \sigma(\overline{X}_1)=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이므로 $\overline{X}_1$은 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

또 모평균이 m, 모분산이 σ^2인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균을 $\overline{X}_2$라 하자. 이때 n이 충분히 크면 모집단이 정규분포를 따르지 않더라도 $\overline{X}_2$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

이와 같이 표본평균 $\overline{X}$가 정규분포를 따르면 $\overline{X}$를 표준화하여 확률을 구할 수 있다.

개념 Check

정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 40^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 100인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 다음을 구하여라.

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$으로 계산한다.)

(1) $\mathrm{E}(\overline{X}),\ \mathrm{V}(\overline{X})$　　(2) $\mathrm{P}(196\le \overline{X}\le 204)$

풀이 (1) $\mathrm{E}(\overline{X})=200,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{40^2}{100}=16$

(2) 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{\overline{X}-200}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore \mathrm{P}(196\le \overline{X}\le 204)=\mathrm{P}\left(\frac{196-200}{4}\le Z\le \frac{204-200}{4}\right)=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)$$
$$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=2\times 0.3413=0.6826$$

답 (1) $\mathrm{E}(\overline{X})=200,\ \mathrm{V}(\overline{X})=16$　(2) 0.6826

대표유형 071 표본평균의 분포

• 개념 058

어느 회사에서 생산하는 핸드크림의 무게는 평균이 50 g, 표준편차가 16 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산되는 핸드크림 중 임의추출한 제품 64개의 무게의 평균이 48 g 이상 54 g 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하여라.

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

유형 Guide 모집단이 정규분포를 따르므로 표본평균도 정규분포를 따른다. 따라서 표본평균의 평균과 표준편차를 구한 후, 표준화하여 확률을 구한다.

유형 SSEN **모집단이 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르면 ➡ 표본평균은 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.**

풀이 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 16^2)$을 따르고, 표본의 크기가 64이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(50,\ \frac{16^2}{64}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(50,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-50}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(48\le\overline{X}\le 54)&=\mathrm{P}\left(\frac{48-50}{2}\le Z\le\frac{54-50}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.3413+0.4772=0.8185\end{aligned}$$

답 0.8185

정답 및 풀이 • 63쪽

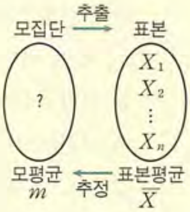
유제 071-1 어느 휴대전화 AS 센터를 이용하는 고객의 대기 시간은 평균이 40분, 표준편차가 10분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 AS 센터를 이용한 고객 25명의 대기 시간의 평균이 45분 이상일 확률을 위의 표준정규분포표를 이용하여 구하여라.

Plus
유제 071-2 어느 회사에서 생산하는 빵 1개의 무게는 평균이 150 g, 표준편차가 12 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서는 빵 9개를 한 상자에 넣어 판매하는데, 빵 한 상자의 무게가 1296 g 이하이면 불량품으로 판정한다. 빵 한 상자가 불량품일 확률을 위의 표준정규분포표를 이용하여 구하여라. (단, 상자의 무게는 무시한다.)

개념 059 모평균의 추정

1 추정

모평균, 모표준편차와 같이 모집단의 특성을 나타내는 값을 표본을 이용하여 추측하는 것을 **추정**이라 한다.



2 모평균의 신뢰구간

정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$이면 **신뢰도**에 따른 모평균 m의 **신뢰구간**은 다음과 같다.

① 신뢰도 95 %의 신뢰구간: $\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

② 신뢰도 99 %의 신뢰구간: $\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

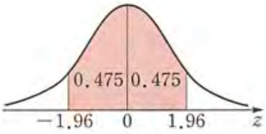
Remark $P(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$일 때, 모평균 m의 신뢰도 α %의 신뢰구간: $\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

개념 Approach

표본평균을 이용하여 모평균을 추정하는 방법에 대하여 알아보자.

정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$ $(\sigma>0)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따르므로 $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이때 $P(-1.96\le Z\le 1.96)=0.95$이므로



$$P\left(-1.96\le\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le 1.96\right)=0.95$$

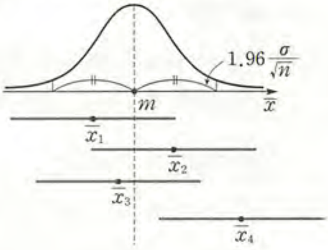
$$\therefore P\left(\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$

이것은 $\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이상 $\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이하인 범위에 모평균 m이 포함될 확률이 0.95라는 뜻이다. 여기서 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 할 때, $\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$를 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간이라 한다.

같은 방법으로 $P(-2.58\le Z\le 2.58)=0.99$임을 이용하면 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 알 수 있다.

모평균의 추정에서 신뢰도 95 %가 뜻하는 것이 무엇인지 자세히 알아보자.

표본평균 $\overline{X}$는 확률변수이므로 추출하는 표본에 따라 $\overline{x}$가 달라지고 신뢰구간도 달라진다.



오른쪽 그림과 같이 표본평균 $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$, $\overline{x}_4$로 추정한 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 각각 나타내면 표본평균 $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$에 대한 신뢰구간에는 m이 속하고, 표본평균 $\overline{x}_4$에 대한 신뢰구간에는 m이 속하지 않음을 알 수 있다.

즉 신뢰구간에 모평균 m이 속할 수도 있고 속하지 않을 수도 있는데, 이때 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간이란 표본에 따라 달라지는 신뢰구간 중에서 95 %에 모평균 m이 속한다는 뜻이다.

마찬가지로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간이란 표본에 따라 달라지는 신뢰구간 중에서 99 %에 모평균 m이 속한다는 뜻이다.

한편 정규분포를 따르는 모집단의 모평균에 대한 신뢰구간을 구하려면 모표준편차 σ를 알아야 하지만 실제로 σ를 알 수 없는 경우가 대부분이다. 이와 같은 경우, 표본의 크기 n이 충분히 크면 표본표준편차 S의 값 s는 모표준편차 σ와 거의 같아지므로 σ 대신 s를 이용하여 신뢰구간을 구할 수 있다.

Remark $\overline{X}$는 여러 가지 값을 가지는 확률변수이고, $\overline{x}$는 $\overline{X}$가 갖는 어느 하나의 값이다.

개념 Check

표준편차가 4인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 64인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 32일 때, 모평균 m의 신뢰도 95 %와 99 %의 신뢰구간을 각각 구하여라. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\leq 1.96)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z|\leq 2.58)=0.99$로 계산한다.)

풀이 표본의 크기는 64, 표본평균은 32, 모표준편차는 4이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$32-1.96\frac{4}{\sqrt{64}}\leq m\leq 32+1.96\frac{4}{\sqrt{64}}, \qquad 32-0.98\leq m\leq 32+0.98$$

$$\therefore 31.02\leq m\leq 32.98$$

신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$32-2.58\frac{4}{\sqrt{64}}\leq m\leq 32+2.58\frac{4}{\sqrt{64}}, \qquad 32-1.29\leq m\leq 32+1.29$$

$$\therefore 30.71\leq m\leq 33.29$$

답 풀이 참조

대표유형 072 모평균의 추정

• 개념 059

대학수학능력시험 수학영역 B형에 응시한 수험생의 점수는 평균이 m점이고 표준편차가 15점인 정규분포를 따른다고 한다. 이 시험을 본 수험생 중에서 2500명을 임의추출하여 점수를 조사하였더니 평균이 65점이었을 때, 모평균 m에 대하여 다음을 구하여라. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58)=0.99$로 계산한다.)

(1) 신뢰도 95 %의 신뢰구간 (2) 신뢰도 99 %의 신뢰구간

유형 Guide 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m의 신뢰도 95 %와 99 %의 신뢰구간은 각각 다음과 같다.

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

유형 5SEN **모평균 m의 신뢰구간 ⊙ $\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$**

풀이 표본의 크기는 2500, 표본평균은 65점, 모표준편차는 15점이다.

(1) $65-1.96\frac{15}{\sqrt{2500}} \le m \le 65+1.96\frac{15}{\sqrt{2500}}$, $65-0.588 \le m \le 65+0.588$

$\therefore 64.412 \le m \le 65.588$

(2) $65-2.58\frac{15}{\sqrt{2500}} \le m \le 65+2.58\frac{15}{\sqrt{2500}}$, $65-0.774 \le m \le 65+0.774$

$\therefore 64.226 \le m \le 65.774$

답 (1) $64.412 \le m \le 65.588$ (2) $64.226 \le m \le 65.774$

정답 및 풀이 • 64쪽

유제 072-1 어느 산부인과에서 출생한 신생아의 체중은 평균이 m kg이고 표준편차가 0.5 kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 병원에서 태어난 신생아 중에서 100명을 임의추출하여 체중을 조사하였더니 평균이 3.5 kg이었을 때, 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하여라.

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.)

Plus
유제 072-2 직장인 900명을 임의추출하여 출근 소요 시간을 조사하였더니 평균이 45분, 표준편차가 12분이었다. 우리나라 전체 직장인의 출근 소요 시간의 평균을 m분이라 하고, 출근 소요 시간이 정규분포를 따른다고 할 때, 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구하여라.

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58)=0.99$로 계산한다.)

개념 060 모평균의 신뢰구간의 길이

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$ $(\sigma>0)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 모평균 m의 신뢰구간의 길이는 다음과 같다.

① 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이: $2\times1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

② 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이: $2\times2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Remark
- 표본의 크기가 일정할 때, 신뢰도가 높아지면 신뢰구간의 길이는 커진다.
- 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 커지면 신뢰구간의 길이는 작아진다.

개념 Approach

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$ $(\sigma>0)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$이면 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이므로 신뢰구간의 길이는 다음과 같다.

$$\left(\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)-\left(\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\times1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

같은 방법으로 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\left(\overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)-\left(\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\times2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

한편 신뢰구간의 길이는 신뢰도와 표본의 크기에 따라 달라진다.

예를 들어 모표준편차가 2이고 표본의 크기가 64로 일정할 때, 신뢰도 95 %, 99 %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는 각각

$$2\times1.96\frac{2}{\sqrt{64}}=0.98,\ 2\times2.58\frac{2}{\sqrt{64}}=1.29$$

이다. 즉 표본의 크기가 일정할 때, 신뢰도가 높아지면 신뢰구간의 길이는 커짐을 알 수 있다.

또 모표준편차가 2이고 표본의 크기가 각각 64, 256일 때, 신뢰도 95 %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는 각각

$$2\times1.96\frac{2}{\sqrt{64}}=0.98,\ 2\times1.96\frac{2}{\sqrt{256}}=0.49$$

이다. 즉 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 커지면 신뢰구간의 길이는 작아짐을 알 수 있다.

개념 SSEN

신뢰구간 : $\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ⟶ 신뢰구간의 길이: $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

대표유형 073 신뢰구간의 길이와 표본의 크기

• 개념 060

표준편차가 15인 정규분포를 따르는 모집단에서 표본을 임의추출하여 모평균을 신뢰도 95 %로 추정할 때, 신뢰구간의 길이가 2 이하가 되도록 하는 표본의 크기의 최솟값을 구하여라.

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.)

유형 Guide 모표준편차가 σ인 모집단에서 n개의 표본을 추출하여 모평균을 추정할 때, 모평균 m의 신뢰구간 $\overline{x} - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x} + k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (k는 상수)에 대하여 신뢰구간의 길이는

$$\left(\overline{x} + k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\overline{x} - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

임을 이용한다.

유형 SSEN **신뢰구간 $\overline{x} - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x} + k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 길이 ⇨ $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$**

풀이 표본의 크기를 n이라 하면 신뢰도 95 %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이가 2 이하가 되어야 하므로

$$2 \times 1.96\frac{15}{\sqrt{n}} \le 2, \qquad \sqrt{n} \ge 29.4$$

$$\therefore n \ge 864.36$$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 865이다.

답 865

정답 및 풀이 • 64쪽

유제 073-1 어느 공장에서 생산하는 제품의 무게는 표준편차가 5 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 제품의 무게의 평균을 신뢰도 99 %로 추정할 때, 신뢰구간의 길이가 0.6 g 이하가 되도록 하려면 적어도 몇 개의 제품을 임의추출하여 조사해야 하는지 구하여라.

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.)

Plus
유제 073-2 정규분포를 따르는 어느 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 모평균을 신뢰도 α %로 추정하였더니 신뢰구간의 길이가 2이었다. 동일한 신뢰도로 추정한 신뢰구간의 길이가 0.5가 되도록 하려면 표본의 크기를 얼마로 해야 하는지 구하여라.

개념 061 모비율과 표본비율

1 모비율

모집단에서 어떤 사건에 대한 비율을 고려할 때, 그 비율을 그 사건에 대한 **모비율**이라 하고, 이것을 기호로 p와 같이 나타낸다.

2 표본비율

모집단에서 임의추출한 표본에서의 비율을 그 사건에 대한 **표본비율**이라 하고, 이것을 기호로 $\hat{p}$과 같이 나타낸다. 일반적으로 크기가 n인 표본에서 어떤 사건이 일어나는 횟수를 확률변수 X라 할 때, 그 사건에 대한 표본비율 $\hat{p}$은 다음과 같다.

$$\boxed{\hat{p}=\frac{X}{n}}$$

Remark
- p는 비율을 뜻하는 proportion의 첫 글자이고, $\hat{p}$은 'p-hat(피햇)'이라 읽는다.
- $\hat{p}=\frac{X}{n}$에서 X가 확률변수이므로 $\hat{p}$도 확률변수이다.

개념 Approach

모집단에서의 평균을 모평균, 표본에서의 평균을 표본평균이라 하듯이 모집단에서 사건의 비율을 모비율, 표본에서 사건의 비율을 표본비율이라 한다.

예를 들어 어느 고등학교 전체 학생 1000명 중에서 안경을 쓴 학생이 750명일 때, 모집단에서 안경을 쓴 학생의 비율이 모비율 p이고, 그 값은 다음과 같다.

$$p=\frac{750}{1000}=0.75$$

또 이 고등학교에서 학생 200명을 임의추출하였을 때, 이 중에서 안경을 쓴 학생이 160명이면 표본에서 안경을 쓴 학생의 비율이 표본비율 $\hat{p}$이고, 그 값은 다음과 같다.

$$\hat{p}=\frac{160}{200}=0.8$$

개념 Check

전국의 성인 남녀 500명을 임의추출하여 정당 지지도를 조사한 결과, A정당을 지지하는 사람이 80명이었을 때, A정당을 지지하는 사람의 표본비율을 구하여라.

풀이 $\hat{p}=\frac{80}{500}=0.16$

답 0.16

개념
062

표본비율의 평균, 분산, 표준편차

모집단에서 어떤 사건에 대한 모비율이 p일 때, 크기가 n인 표본을 임의추출하면 표본비율 $\hat{p}$의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(\hat{p})=p,\quad \mathrm{V}(\hat{p})=\frac{pq}{n},\quad \sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{pq}{n}}\ (\text{단, } q=1-p)$$

개념 Approach

표본비율은 선택되는 표본에 따라 그 값이 변하므로 확률변수이다. 확률변수의 평균, 분산, 표준편차의 성질을 이용하여 위의 내용을 증명해 보자.

모집단에서 사건 A에 대한 모비율을 p라 할 때, 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률은 p이다. 또 임의추출한 크기가 n인 표본에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, $\cdots$, n이다. 즉 확률변수 X는 사건 A가 일어날 확률이 p인 시행을 n번 독립시행할 때 그 사건이 일어난 횟수이므로 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따른다. 160쪽 · 개념 048

따라서 확률변수 X의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq\ (\text{단, } q=1-p)$$

이때 표본비율 $\hat{p}$은 $\hat{p}=\frac{X}{n}$이므로 표본비율 $\hat{p}$의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(\hat{p})=\mathrm{E}\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n}\mathrm{E}(X)=\frac{1}{n}\cdot np=p$$

$$\mathrm{V}(\hat{p})=\mathrm{V}\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\mathrm{V}(X)=\frac{1}{n^2}\cdot npq=\frac{pq}{n}$$

$$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\mathrm{V}(\hat{p})}=\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

개념 Check

어느 공장에서 생산하는 제품의 불량률이 10%라 한다. 이 공장에서 생산되는 제품 중에서 100개를 임의추출할 때, 표본의 불량률 $\hat{p}$의 평균, 분산, 표준편차를 각각 구하여라.

풀이 모비율이 0.1, 표본의 크기가 100이므로

$$\mathrm{E}(\hat{p})=0.1,\ \mathrm{V}(\hat{p})=\frac{0.1\times0.9}{100}=0.0009,\ \sigma(\hat{p})=\sqrt{0.0009}=0.03$$

답 평균: 0.1, 분산: 0.0009, 표준편차: 0.03

개념 063

표본비율의 분포

모비율이 p인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본의 크기 n이 충분히 크면 다음이 성립한다.

표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \dfrac{pq}{n}\right)$를 따르므로 확률변수 $Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. (단, $q=1-p$)

Remark n이 충분히 크다는 것은 일반적으로 $np\geq5$, $nq\geq5$일 때를 뜻한다.

개념 Approach

모비율이 p인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본비율 $\hat{p}$에 대하여

$$\mathrm{E}(\hat{p})=p,\ \mathrm{V}(\hat{p})=\frac{pq}{n},\ \sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{pq}{n}}\ (q=1-p)$$

이다. 이때 n이 충분히 크면 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \dfrac{pq}{n}\right)$를 따른다는 것이 알려져 있으므로 $Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$로 놓으면

$$\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}\left(\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right)=\sqrt{\frac{n}{pq}}\{\mathrm{E}(\hat{p})-p\}=0,\ \mathrm{V}(Z)=\mathrm{V}\left(\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right)=\frac{n}{pq}\mathrm{V}(\hat{p})=1$$

⇐ $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b,\ \mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

따라서 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 표본평균과 마찬가지로 표준화하여 표본비율에 대한 확률을 구할 수 있다.

개념 Check

어떤 사건에 대한 모비율이 0.4인 모집단에서 크기가 600인 표본을 임의추출할 때, 표본비율 $\hat{p}$에 대하여 $\mathrm{P}(\hat{p}\geq0.42)$를 구하여라.

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)=0.3413$으로 계산한다.)

풀이 $\mathrm{E}(\hat{p})=0.4,\ \mathrm{V}(\hat{p})=\dfrac{0.4\times0.6}{600}=0.0004$이고, 표본의 크기 600이 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(0.4,\ 0.02^2)$을 따른다. 따라서 $Z=\dfrac{\hat{p}-0.4}{0.02}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore \mathrm{P}(\hat{p}\geq0.42)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{0.42-0.4}{0.02}\right)=\mathrm{P}(Z\geq1)=\mathrm{P}(Z\geq0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)$$
$$=0.5-0.3413=0.1587$$

답 0.1587

대표유형 074 표본비율의 분포

• 개념 063

어느 조사에 의하면 우리나라 고등학생의 20 %는 걸어서 통학을 한다고 한다. 임의로 선택한 100명의 고등학생 중에서 걸어서 통학하는 학생의 비율이 16 % 이상 30 % 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하여라.

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

유형 Guide 모비율이 p일 때, 표본의 크기 n이 충분히 크면 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \frac{pq}{n}\right)$를 따른다. 따라서 $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$로 표준화하여 표본비율에 대한 확률을 구한다. (단, $q=1-p$)

유형 SSEN **표본의 크기 n이 충분히 크면 ⊙ 표본비율 $\hat{p}$을 표준화한다.**

풀이 100명 중에서 걸어서 통학하는 학생의 비율을 표본비율 $\hat{p}$이라 하면

$$\mathrm{E}(\hat{p})=0.2,\ \mathrm{V}(\hat{p})=\frac{0.2\times0.8}{100}=0.0016$$

이때 표본의 크기 100이 충분히 크므로 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(0.2,\ 0.04^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-0.2}{0.04}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(0.16\le\hat{p}\le0.3)&=\mathrm{P}\left(\frac{0.16-0.2}{0.04}\le Z\le\frac{0.3-0.2}{0.04}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le2.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)\\&=0.3413+0.4938=0.8351\end{aligned}$$

답 0.8351

정답 및 풀이 • 64쪽

유제 074-1 어느 지역의 자치 단체에서 세운 복지 정책에 대한 주민의 지지율이 80 %라 한다. 이 지역에 사는 주민 400명을 임의추출하여 여론 조사를 하였을 때, 지지율이 83 % 이상일 확률을 위의 표준정규분포표를 이용하여 구하여라.

Plus 유제 074-2 어느 공장에서 생산하는 컵의 불량률이 10 %라 한다. 이 공장에서 생산되는 컵 중에서 100개를 임의추출하여 조사하였을 때, 불량품이 7개 이상 13개 이하일 확률을 위의 표준정규분포표를 이용하여 구하여라.

개념 064 모비율의 추정

모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본비율을 $\hat{p}$이라 할 때, 표본의 크기 n이 충분히 크면 모비율 p의 신뢰구간은 다음과 같다. (단, $\hat{q}=1-\hat{p}$)

① 신뢰도 95 %의 신뢰구간: $\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le p \le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

② 신뢰도 99 %의 신뢰구간: $\hat{p}-2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le p \le \hat{p}+2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

Remark n이 충분히 크다는 것은 일반적으로 $n\hat{p}\ge5$, $n\hat{q}\ge5$일 때를 뜻한다.

개념 Approach

표본평균을 이용하여 모평균을 추정할 수 있듯이 표본비율을 이용하여 모비율을 추정할 수 있다.

모비율이 p인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, n이 충분히 크면 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \frac{pq}{n}\right)$를 따르므로 $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. (단, $q=1-p$)

또 표본의 크기 n이 충분히 클 때 $\hat{p}$의 표준편차 $\sqrt{\frac{pq}{n}}$에서 모비율 p 대신 표본비율 $\hat{p}$을 사용한 $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}$도 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다는 사실이 알려져 있다. (단, $\hat{q}=1-\hat{p}$)

이때 $\mathrm{P}(-1.96\le Z\le 1.96)=0.95$이므로

$$\mathrm{P}\left(-1.96\le \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}\le 1.96\right)=0.95$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)=0.95$$

이것은 $\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ 이상 $\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ 이하인 범위에 모비율 p가 포함될 확률이 0.95라는 뜻이므로

$$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

을 모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간이라 한다.

같은 방법으로 $\mathrm{P}(-2.58\leq Z\leq 2.58)=0.99$임을 이용하면 모비율 p의 신뢰도 99%의 신뢰구간이

$$\hat{p}-2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\leq p\leq \hat{p}+2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

임을 알 수 있다.

개념 SSEN

모평균 m의 신뢰구간 $\longrightarrow$ $\overline{x}-k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq m\leq \overline{x}+k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

모비율 p의 신뢰구간 $\longrightarrow$ $\hat{p}-k\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\leq p\leq \hat{p}+k\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

개념 Check

어느 모집단에서 크기가 600인 표본을 임의추출하여 구한 표본비율이 0.4일 때, 모비율 p의 신뢰도 95%와 99%의 신뢰구간을 각각 구하여라. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\leq 1.96)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z|\leq 2.58)=0.99$로 계산한다.)

풀이 표본비율은 0.4이고 표본의 크기 600이 충분히 크므로 모비율 p의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$0.4-1.96\sqrt{\frac{0.4\times 0.6}{600}}\leq p\leq 0.4+1.96\sqrt{\frac{0.4\times 0.6}{600}}$$

$$0.4-0.0392\leq p\leq 0.4+0.0392$$

$$\therefore\ 0.3608\leq p\leq 0.4392$$

신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$0.4-2.58\sqrt{\frac{0.4\times 0.6}{600}}\leq p\leq 0.4+2.58\sqrt{\frac{0.4\times 0.6}{600}}$$

$$0.4-0.0516\leq p\leq 0.4+0.0516$$

$$\therefore\ 0.3484\leq p\leq 0.4516$$

답 풀이 참조

개념
065

모비율의 신뢰구간의 길이

모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본비율을 $\hat{p}$이라 할 때, 표본의 크기 n이 충분히 크면 모비율 p의 신뢰구간의 길이는 다음과 같다. (단, $\hat{q}=1-\hat{p}$)

① 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이: $2\times1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

② 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이: $2\times2.58\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

개념 Approach

모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $\hat{p}-1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$이므로 신뢰구간의 길이는

$$\left(\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)-\left(\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)=2\times1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

이다. 같은 방법으로 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$\left(\hat{p}+2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)-\left(\hat{p}-2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)=2\times2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

이다.

개념 SSEN

신뢰구간: $\hat{p}-k\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+k\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ → 신뢰구간의 길이: $2k\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

개념 Check

어느 모집단에서 크기가 100인 표본을 임의추출하여 구한 표본비율이 0.8일 때, 모비율 p의 신뢰도 95 %와 99 %의 신뢰구간의 길이를 각각 구하여라. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le1.96)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z|\le2.58)=0.99$로 계산한다.)

풀이 표본비율은 0.8이고, 표본의 크기 100이 충분히 크므로 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{100}}=2\times0.0784=0.1568$$

신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times2.58\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{100}}=2\times0.1032=0.2064$$

답 풀이 참조

대표유형 075 모비율의 추정

• 개념 064, 065

어느 여론 조사 기관에서 20세 이상 남녀 900명을 대상으로 새 교육 정책에 대한 여론 조사를 실시하였더니 찬성 64 %, 반대 12 %, 무응답 24 %로 나타났다. 이때 새 교육 정책을 찬성하는 20세 이상 국민 전체의 비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간과 신뢰구간의 길이를 구하여라.
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$로 계산한다.)

유형 Guide 표본의 크기가 n이고 표본비율이 $\hat{p}$일 때, 모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

이므로 신뢰구간의 길이는 $2\times 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

임을 이용한다. (단, $\hat{q}=1-\hat{p}$)

유형 SSEN

- **모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간** ○ $\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$
- **모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이** ○ $2\times 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

풀이 표본비율은 0.64이고, 표본의 크기 900이 충분히 크므로 모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.64-1.96\sqrt{\frac{0.64\times 0.36}{900}}\le p\le 0.64+1.96\sqrt{\frac{0.64\times 0.36}{900}}$$

$$0.64-0.03136\le p\le 0.64+0.03136$$

$$\therefore\ 0.60864\le p\le 0.67136$$

또 신뢰구간의 길이는

$$2\times 1.96\sqrt{\frac{0.64\times 0.36}{900}}=2\times 0.03136=0.06272$$

답 신뢰구간: $0.60864\le p\le 0.67136$, 신뢰구간의 길이: 0.06272

정답 및 풀이 • 65쪽

유제 075-1 어느 노트북 회사에서 신제품 출시에 앞서 대학생 400명을 임의추출하여 제품의 선호도를 조사하였더니 A노트북을 선호하는 학생이 256명이었다. 이때 전체 대학생 중 A노트북을 선호하는 학생의 비율 p의 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구하여라.
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)=0.99$로 계산한다.)

중단원 연습 문제

STEP 1 유형 Training

서술형

01 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 분산이 $\frac{1}{16}$이다. 이때 n의 값을 구하여라.

X	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

평가원기출

02 어느 전화 상담원 A가 지난해 받은 상담 전화의 상담 시간은 평균이 20분, 표준편차가 5분인 정규분포를 따른다고 한다. 전화 상담원 A가 지난해 받은 상담 전화를 대상으로 크기가 16인 표본을 임의추출할 때, 상담 시간의 표본평균이 19분 이상이고 22분 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.8	0.2881
1.2	0.3849
1.6	0.4452
2.0	0.4772

① 0.6730 ② 0.7333 ③ 0.7653 ④ 0.8301 ⑤ 0.9224

03 A 도시에 거주하는 고등학교 2학년 학생 중에서 400명을 임의추출하여 몸무게를 조사하였더니 평균이 55 kg, 표준편차가 10 kg이었다. A 도시에 거주하는 고등학교 2학년 학생 전체의 몸무게의 평균이 m kg이고 몸무게가 정규분포를 따른다고 할 때, 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하여라.
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le1.96)=0.95$로 계산한다.)

04 어느 고등학교 학생의 키는 표준편차가 4 cm인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고등학교 학생 중에서 표본을 임의추출하여 전체 학생의 키의 평균을 신뢰도 95 %로 추정할 때, 신뢰구간의 길이가 0.8 이하가 되도록 하는 표본의 크기의 최솟값을 구하여라.
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le1.96)=0.95$로 계산한다.)

05 어느 조사 기관에서 2012년 올림픽 기간에 전체 고등학생의 50 %가 거리 응원에 나섰다고 발표했다. 어느 고등학교 학생 중에서 임의로 100명을 뽑았을 때, 올림픽 당시에 거리 응원에 참여한 학생이 45명 이상 60명 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.7745　② 0.8185　③ 0.8351
④ 0.9104　⑤ 0.9270

평가원기출

06 어느 도시에서 시립 도서관 개방 시간 연장을 희망하는 주민들의 비율을 알아보기 위하여 이 도시의 주민 중 100명을 임의추출하여 조사한 결과 90명이 개방 시간 연장을 희망하였다. 이 결과를 이용하여 구한 이 도시 주민 전체의 시립 도서관 개방 시간 연장을 희망하는 비율에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $\hat{p}-c \le p \le \hat{p}+c$일 때, c의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96)=0.475$로 계산한다.)

① 0.0431　② 0.0588　③ 0.0645　④ 0.0759　⑤ 0.0816

STEP 2 실전 Application

서술형

07 주머니 안에 1, 2, 2, 3, 3, 3의 숫자가 각각 하나씩 적힌 6개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 3개의 공을 임의추출할 때, 공에 적힌 숫자의 평균을 $\overline{X}$라 하자. 이때 $\mathrm{E}(\overline{X}^2)$을 구하여라.

수능기출

08 어느 도시에서 공용 자전거의 1회 이용 시간은 평균이 60분, 표준편차가 10분인 정규분포를 따른다고 한다. 공용 자전거를 이용한 25회를 임의추출하여 조사할 때, 25회 이용 시간의 총합이 1450분 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8351　② 0.8413　③ 0.9332
④ 0.9772　⑤ 0.9938

서술형

09 어느 공장에서 생산하는 빨대의 길이는 평균이 60.5 mm, 표준편차가 5 mm인 정규분포를 따른다고 한다. 이 중에서 임의추출한 100개의 빨대의 평균 길이를 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X} \geq a)=0.1587$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하여라.
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)=0.3413$으로 계산한다.)

10 어느 출판사에서 생산하는 책 한 권의 무게는 평균이 mg, 표준편차가 32 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산된 책 중에서 임의추출한 n권의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(m-4 \leq \overline{X} \leq m+4)=0.9876$을 만족시키는 n의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하여라.

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

서술형

11 어느 양계장에서 생산하는 달걀 한 개의 무게는 평균이 64 g, 표준편차가 $\sqrt{10}$ g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 양계장에서는 달걀을 10개씩 묶은 한 꾸러미의 무게가 620 g 미만이면 불량품으로 판정한다. A, B 두 사람이 이 양계장에서 생산된 달걀 한 꾸러미를 각각 독립적으로 택하였을 때, 두 꾸러미가 모두 불량품일 확률은 p이다. 이때 $10000p$의 값을 구하여라.
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)=0.48$로 계산한다.)

수능기출

12 어느 회사에서 생산하는 음료수 1병에 들어 있는 칼슘 함유량은 모평균이 m, 모표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 음료수 16병을 임의추출하여 칼슘 함유량을 측정한 결과 표본평균이 12.34이었다. 이 회사에서 생산한 음료수 1병에 들어 있는 칼슘 함유량의 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $11.36 \leq m \leq a$일 때, $a+\sigma$의 값은? (단, 칼슘 함유량의 단위는 mg이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \leq 1.96)=0.95$로 계산한다.)

① 14.32　② 14.82　③ 15.32　④ 15.82　⑤ 16.32

13 어느 회사에서 생산하는 휴대전화 배터리 중에서 표본을 임의추출하여 완전히 충전한 후 사용할 수 있는 시간을 조사하였더니 평균이 100시간, 표준편차가 5시간이었다. 배터리를 사용할 수 있는 시간이 정규분포를 따른다고 할 때, 신뢰도 99 %로 추정한 모평균과 표본평균의 차가 30분 이하가 되도록 하려면 표본의 크기를 얼마 이상으로 해야 하는가? (단, 표본의 크기는 충분히 크고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)=0.99$로 계산한다.)

① 660 ② 662 ③ 664 ④ 666 ⑤ 668

14 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$을 따르는 모집단에서 표본을 임의추출하여 모평균 m을 추정하려고 한다. m의 신뢰구간에 대하여 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 신뢰도를 높이면서 표본의 크기를 크게 하면 신뢰구간의 길이는 항상 커진다.
ㄴ. 신뢰도를 낮추면서 표본의 크기를 크게 하면 신뢰구간의 길이는 항상 작아진다.
ㄷ. 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 4배가 되면 신뢰구간의 길이는 2배가 된다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

15 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$ $(\sigma>0)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 모평균 m을 추정하려고 한다. 신뢰도가 70 %인 신뢰구간의 길이가 l일 때, 길이가 $2l$인 신뢰구간의 신뢰도를 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하여라.

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.04	0.35
1.42	0.42
1.68	0.45
2.08	0.48

수능기출

16 어느 도시의 중앙공원을 이용한 경험이 있는 주민의 비율을 알아보기 위하여 이 도시의 주민 중 n명을 임의추출하여 조사한 결과 80 %가 이 중앙공원을 이용한 경험이 있다고 답하였다. 이 결과를 이용하여 구한 이 도시 주민 전체의 중앙공원을 이용한 경험이 있는 주민의 비율에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a\le p\le b$이다.
$b-a=0.098$일 때, n의 값을 구하여라.
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$로 계산한다.)

17 K방송사에서 어느 드라마에 대한 시청률을 조사하려고 한다. 크기가 n인 표본을 임의추출하여 이 드라마에 대한 시청률을 신뢰도 95 %로 추정할 때, 신뢰구간의 길이의 최댓값이 0.02 이하가 되도록 하려면 표본의 크기 n은 얼마 이상으로 해야 하는지 구하여라.

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$로 계산한다.)

STEP 3 심화 Forwarding

서술형

18 모집단의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출할 때, 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

X	-2	0	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	a	b	1

$$\mathrm{P}(\overline{X}=-1)+\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\frac{3}{8}$$

이다. 이때 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라.

수능기출

19 어느 공장에서 생산되는 제품의 길이 X는 평균이 m이고, 표준편차가 4인 정규분포를 따른다고 한다.

$\mathrm{P}(m\le X\le a)=0.3413$일 때, 이 공장에서 생산된 제품 중에서 임의추출한 제품 16개의 길이의 표본평균이 $a-2$ 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

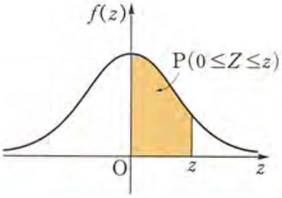
(단, a는 상수이고, 길이의 단위는 cm이다.)

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.0919 ④ 0.1359 ⑤ 0.1587

서술형

20 어느 모집단에서 크기가 64인 표본을 임의추출하여 구한 표본비율이 0.2이고, 이로부터 신뢰도 α %로 추정한 모비율 p의 신뢰구간이 $a\le p\le b$이다. 또한 이 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본비율이 0.25이고, 이로부터 신뢰도 α %로 추정한 모비율 p의 신뢰구간이 $c\le p\le d$이다. $b-a=\frac{7}{5}(d-c)$가 성립할 때, n의 값을 구하여라.

표준정규분포표



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998

찾아보기

찾아보기

1

1 나누기 2는 2

1 나누기 4는 4

틀린 답 같나요?

마음을 나누면 그 결과는 나누기(÷)가 아닌 곱하기(X)가 된답니다.

*

MEMO

SINSAGO BOOK LIST

*은 새 교육과정에 따른 도서입니다.

전과목 시리즈

우공비(우리들의 공부 비법) 시리즈

이해팍팍! 술술 이해되는 개념 기본서
신개념 학습법으로 내신과 수능의 고득점 완성!

국어 문학 Ⅰ 교과서평가문제집,
문학 Ⅱ 교과서평가문제집
수학 *수학 Ⅰ, *수학 Ⅱ,
수학 Ⅰ
사회 *한국사, *고등 사회,
한국사, 한국지리, 사회·문화
과학 고등 과학,
물리 Ⅰ, 화학 Ⅰ, 생명과학 Ⅰ, 지구과학 Ⅰ

개념
기본서

신사고V수능 시리즈

체계적인 수능 대비서
기본부터 실전까지 체계적인 수능 준비

국어영역 기본편, 종합편 A형, 종합편 B형
영어영역 기본영어, 종합편

체계적
수능
대비서

수능다큐 시리즈

수능 유형별 다제 문제집
수능이 원하는 모든 문제, 한 권에 다 담았다!

국어영역 종합편 A형, 종합편 B형
영어영역 어법어휘편, 독해편
수학영역 수학 Ⅰ, 미적분과 통계 기본,
수학 Ⅱ, 적분과 통계, 기하와 벡터
사회탐구 한국사, 한국지리, 사회·문화
과학탐구 물리 Ⅰ, 화학 Ⅰ, 생명과학 Ⅰ, 지구과학 Ⅰ

수능
다제
문제집

일품 시리즈

내신 1등급의 품격
최고 내신을 완성하는 천하일품 문제집

수학 *수학 Ⅰ, *수학 Ⅱ,
수학 Ⅰ, 미적분과 통계 기본,
수학 Ⅱ, 적분과 통계, 기하와 벡터
사회 한국사, 한국지리, 사회·문화
과학 고등 과학

내신
1등급
문제집

수학 전문 시리즈

개념쎈 수학 시리즈

수학의 쎈 힘을 키우는 사전식 개념 기본서
수학의 힘을 꽉 잡는다!

*수학 Ⅰ, *수학 Ⅱ, *확률과 통계, *미적분 Ⅰ,
수학 Ⅰ, 미적분과 통계 기본, 수학 Ⅱ, 적분과 통계,
기하와 벡터

사전식
개념
기본서

쎈 수학 시리즈

베스트셀러 문제 기본서
수학의 모든 유형을 다 잡는다!

*수학 Ⅰ, *수학 Ⅱ, *확률과 통계, *미적분 Ⅰ,
수학 Ⅰ, 미적분과 통계 기본, 수학 Ⅱ, 적분과 통계,
기하와 벡터

문제
기본서

알수학 시리즈

수학의 알맹이만 쏙~
쉽고 알차게 학교 시험을 준비한다.

*수학 Ⅰ, *수학 Ⅱ

내신
대비서

단기공략 시리즈

단기간에 빠르게 공략하는 특강서
수학을 단숨에 마스터한다.

*수학 Ⅰ, *수학 Ⅱ

단기
특강서

교과서 관련 시리즈

자습서 시리즈

교과서 꼼꼼 분석, 자기 주도 학습서
수업 준비에서 학교 시험까지 한 권으로 완성한다.

국어 *국어 Ⅰ, *국어 Ⅱ
수학 *수학 Ⅰ, *수학 Ⅱ,
수학 Ⅰ, 미적분과 통계 기본, 수학 Ⅱ, 적분과 통계, 기하와 벡터

교과서
자습서

평가문제집 시리즈

내신 대비 실전 문제집
단계별로 최다, 최고의 문제를 빠짐없이 짚어 준다.

국어 *국어 Ⅰ, *국어 Ⅱ, *문학

교과서
평가집

똑똑한 신사고 BOOK SYSTEM

01 영역별, 수준별로 내신과 수능을 대비할 수 있는 다양한 도서가 있다.
02 교재의 난이도 및 성취 수준을 나타내는 학습지수 SSI가 있다.
03 내 마음을 콕 알아주며 용기를 주는 '나를 바꾸는 힘'이 있다.

국어 전문 시리즈

신오감도 시리즈

국어영역의 오감 학습서
장르별, 영역별 최고의 베스트셀러

비문학·독서편 A형, 비문학·독서편 B형
문학편 A형, 문학편 B형
화법·작문·문법편 A형, 화법·작문·문법편 B형

수능 완벽 대비서

국어의 기술 시리즈

국어영역의 실력 향상 필독서
기술자군의 국어의 기술

국어의 기술 0
국어의 기술 국어 A형 1, 국어의 기술 국어 A형 2
국어의 기술 국어 B형 1, 국어의 기술 국어 B형 2

실력 향상 필독서

국어가 쉬워지는 원리 시리즈

원리로 풀어 가는 국어 기본서
감상 및 독해 원리를 완벽히 분석하고
작품(제재)에 적용한다.

현대시가 쉬워지는 감상 원리,
고전시가가 쉬워지는 감상 원리,
비문학·독서가 쉬워지는 독해 원리

원리 중심 기본서

꿀특강 시리즈

단기간에 빠르게 공략하는 특강서
수능 국어영역을 단숨에 마스터한다.

개념 종합편, 현대문학편, 고전문학편

수능 단기 특강서

영어 전문 시리즈

컨셉(Concept) 영어 시리즈

영어 개념 학습 전문서
영어 실력을 컨셉 학습법으로 올린다.

독해 독해 BASIC, 구문독해, 어법어휘
유형독해, 실전독해, 영어독해 모의고사
독해와 어휘〈표준편〉, 독해와 어휘〈발전편〉
듣기 듣기 BASIC
수능듣기 기본모의고사 30회
수능듣기 유형모의고사 25회
수능듣기 종합모의고사 22회
수능듣기 실전모의고사 33회

수능 영어 대비서

다트 시리즈

짧은 기간에 수능을 빠르게 공략하는
단기완성 맞춤 교재

독해 유형독해〈기본편〉, 유형독해〈실전편〉
구문독해〈기본편〉, 구문독해〈실전편〉
어법어휘, 수능독해 3점문항
듣기 수능듣기〈유형편〉, 수능듣기〈실전편〉

수능 영어 단기 완성

진짜 잘 이해되는 영문법 시리즈
진짜 잘 외워지는 영단어

똑똑한 시스템으로 공부하니까
문법도 단어도 자신만만!

문법 진짜 잘 이해되는 고교 영문법 1
진짜 잘 이해되는 고교 영문법 2
어휘 진짜 잘 외워지는 고교 영단어

문법/어휘 기본서

과학 전문 시리즈

i-science

그림으로 이해하는 사전식 과학 기본서
한눈에 과학 개념을 꽉 잡는다!

고등 과학

사전식 해설서

Q-science 시리즈

쉽고 빠른 핵심공략 문제집
핵심공략으로 내신과 수능을 꽉 잡는다!

물리 I, 화학 I, 생명과학 I, 지구과학 I

핵심공략 문제집

사회 전문 시리즈

한국사 바로가기 시리즈

한국사 스토리텔링 개념 기본서
연표와 스토리로 한국사의 흐름과
개념을 완벽히 이해한다.

(상) 전근대편, (하) 근·현대편

개념 기본서

좋은책 신사고

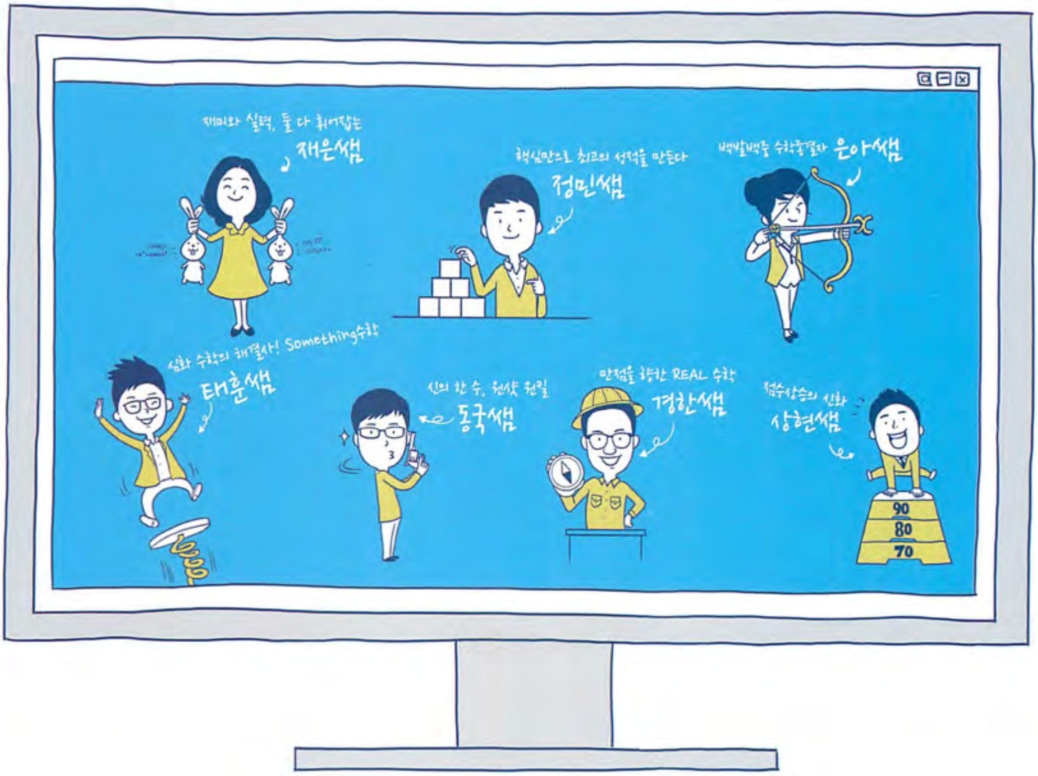
대한민국 1등 교육 브랜드 기업

한국산업의 브랜드파워 교육서비스 부문 1위 4회 수상
학부모가 뽑은 교육브랜드대상 참고서/문제집 부문 7회 수상
대한민국 교육기업대상 중·고등참고서 부문 6회 수상
한국교육산업대상 출판물 분야 참고서 부문 6회 수상
대한민국 교육브랜드대상 참고서/문제집 부문 5회 수상

개념쎈 확률과 통계

발행일 2014년 4월(1판1쇄)

PD	신동미
PM	이선옥
개발	김혜정, 이재현, 김하랑
BI	김선자, 탁애란, 황가람
표지디자인	신사고 디자인실
제작책임	이철원, 김보경
펴낸이	홍범준
펴낸곳	(주)좋은책신사고
등록번호	제16-1156호
주소	서울시 서초구 동작대로 212 (방배동 764-30)
대표전화	1661-5590
팩스	(02) 3481-5762
ISBN	978-89-283-1019-7 53410


재미와 실력, 둘 다 휘어잡는
재은쌤
핵심만으로 최고의 성적을 만든다
정민쌤
백발백중 수학종결자 은아쌤
심화 수학의 해결사! Something수학
태훈쌤
신의 한 수, 원샷 원킬
동국쌤
만점을 향한 REAL 수학
경한쌤
점수상승의 신화
상현쌤
90
80
70

나를 바꾸는 힘 신사고 | S I N S A G O |

수학의 **쎈** 힘을 키우는 사전식 **개념 기본서**

개념 SSEN

확률과 통계

AWARDS

대한민국 1등 교육 브랜드, 좋은책신사고

한국산업의 브랜드파워 1위 4년 연속 수상
2011 ~ 2014

2014 대한민국 교육기업대상

edu 2014 학부모가 뽑은 교육브랜드 大賞

2011 大賞

대한민국 교육기업대상
6회 수상

학부모가 뽑은 교육브랜드대상
7회 수상

한국교육산업대상
6회 수상

좋은책신사고는 자기주도학습 No.1 Content Company 비전을 실현하기 위해 오늘도 열심히 달리고 있습니다. 언제나 고객의 입장에서 생각하며, 고객에게 사랑받는 좋은 책, 좋은 서비스를 만들 것을 약속드립니다.

T.E.S.S.

Total Educational Service System

씽씽씽(新辛信)시스템
(新) 나날이 새로워지는 좋은책신사고의 고객 서비스는
(辛) 고객의 매서운 충고를 감사히 받아들이고
(信) 믿을 수 있는 도서를 만들기 위한 노력입니다.

- 무결점 도서를 위한 노력
도서 오류에 대한 고객의 매서운 충고는 홈페이지에서 전할 수 있습니다. (홈페이지 〉 고객센터 〉 오류신고하기)
- SMS 실시간 알리미
홈페이지에 문의하신 사항에 대한 A/S 답변이 끝나면 문자 메시지가 발송됩니다.
- 도서제안하기
원하는 도서는 홈페이지에서 언제든지 제안할 수 있습니다.

SINSAGO WINDOW | **Internet** | www.sinsago.co.kr
mail | 우137-828. 서울시 서초구 동작대로 212 (방배동 764-30)
tel | 1661-5590
fax | 02-3481-5762