신사고
SINSAGO

수학의 쎈 힘을 키우는 사전식 개념 기본서

개념 SSEN

수학 I

새교육과정

홍범준 | 신사고수학콘텐츠연구회

Best Choice for Math
수학 개념 기본서
개념 쎈

좋은책 신사고

▣ 기획 및 집필 **홍범준** (주)좋은책신사고 대표이사 | 서울대학교 수학과 | 신사고 쎈 수학 시리즈, 일품 수학 시리즈
신사고수학콘텐츠연구회 대한민국 수학 교육의 리더 좋은책신사고의 수학 전문 콘텐츠 연구회

개념 SSEN

꿈을 이룬 내일을 상상합니다. Dreams come true

이 책을 공부할 ____________ 에게,

모바일로 만나는 우리의 꿈, 행복, 자유.
내 마음을 콕 알아 주는
mobile 나를 바꾸는 힘

좋은책 신사고
간절해지는 순간,
불가능은 가능이 됩니다.
수학인강은 신사고피클
수학 진도 팍팍 나가게 해주세요
공공의 미적분을 해치워주세요
수학 시간이 두렵지 않게 해주세요
수학만큼은 제가 이기게 해주세요
최고의 수학 교재와 실력파 EBS 강사진이 뭉쳤습니다.
신사고피클과 함께하면 수학 공부가 쉬워집니다.
신의 한 수, 원샷 원킬 수학
고동국 선생님
現 신사고피클 고등 수학 강사
現 EBSi 고등 수학영역 강사
만점을 향한 REAL 수학
김경한 선생님
現 신사고피클 고등 수학 강사
現 EBSi 고등 수학영역 강사
現 강남구청 인터넷 수능방송 강사
쉽지만 강하게 수학을 휘어잡는
김재은 선생님
現 신사고피클 고등 수학 강사
現 개념SSEN 검토위원
검색 신사고피클
고등
www.sinsago.co.kr | 고객센터 1644-5590
신사고 피클 Fun & True

머리말

수학은 논리적이고 체계적인 학문입니다. 수학을 공부함으로써 합리적, 추상적, 통합적, 창의적 사고력을 기르고 이를 바탕으로 종합적인 문제 해결 능력을 키울 수 있습니다. 이러한 능력은 이공 계열 관련 학문뿐 아니라 인문·사회·예체능 계열과 같이 수학과 무관해 보이는 분야에 진출한 사람에게도 요구되는 것으로, 수학을 배워야 하는 가장 중요한 이유입니다.

이에 필자는 여러분들이 수학의 힘을 키울 수 있도록 개념기본서 **개념쎈**을 집필하였고, 다음과 같은 교재가 되도록 정성을 기울였습니다.

1. 수학적 논리에 엄밀하게 부합하는 교재
2. 고등 교육 과정 내용을 충실히 담은 교재
3. 추상적인 개념을 구체적으로 쉽게 설명한 교재
4. 스스로 문제 해결력을 기를 수 있는 교재
5. 내신과 수능을 모두 대비할 수 있는 교재

개념쎈은 필자가 강의를 하며, 많은 교재를 집필하며 체득한 노하우를 그대로 담았습니다. 수학의 절대 진리가 가지고 있는 간결한 추상 요소들을 사전처럼 잘게 쪼개고 구체적으로 풀어서 각 개념에 맞는 최적의 설명 방법을 찾아 쉽고 자세하게 설명하였습니다.

사전식 개념 기본서 개념쎈으로 수학의 힘을 크게 키우고, 수학 그 자체의 아름다움을 즐길 수 있기를 바랍니다.

저자 홍범준

구성과 특장

STRUCTURE

개념 익힘 학습

● **개념 정리**

교육 과정의 개념을 총망라하고 사전식으로 잘게 나누어 체계적으로 정리하였습니다.

개념 Approach

개념 정리 내용을 예를 통해 구체적으로 확인하고, 공식과 성질을 자세하게 설명하여 개념에 대한 완전 학습이 이루어지도록 하였습니다.

개념 SSEN 중요 핵심 사항을 도식화하여 제시

개념 Check

공식과 성질을 이용하여 개념을 확인할 수 있는 문제입니다.

활용의 기술 ❶ **개념 학습은 수학 공부의 기본이다. 개념을 이해한 후 공식과 성질을 꼭 암기하여 실전에 활용할 수 있도록 하자.**

개념 003 다항식의 덧셈과 뺄셈

1 $-A$와 kA의 계산

다항식 A와 실수 k에 대하여 $-A$와 kA를 다음과 같이 계산한다.

(1) $-A$: A의 각 항의 부호를 바꾼다.

(2) kA : A의 각 항에 k를 곱한다.

2 다항식의 덧셈과 뺄셈

다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 때에는 다음 순서로 한다.

(i) 괄호가 있는 경우 괄호를 푼다.

(ii) 각 다항식을 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

(iii) 동류항끼리 모아서 간단히 한다.

개념 Approach

두 다항식 $A=x^2-4x+3$, $B=5x^2+x-3$에 대하여 $-3A$, $A+B$, $A-B$는 다음과 같이 계산한다.

① $-3A=-3(x^2-4x+3)=-3x^2+12x-9$

② $A+B=(x^2-4x+3)+(5x^2+x-3)$
$=x^2-4x+3+5x^2+x-3$ (i)
$=x^2+5x^2-4x+x+3-3$ (ii)
$=6x^2-3x$ (iii)

③ $A-B=(x^2-4x+3)-(5x^2+x-3)$
$=x^2-4x+3-5x^2-x+3$ (i)
$=x^2-5x^2-4x-x+3+3$ (ii)
$=-4x^2-5x+6$ (iii)

개념 SSEN 다항식의 덧셈과 뺄셈 → 동류항 정리

개념 Check

두 다항식 $A=a^2-3ab+b^2$, $B=2a^2+2ab-3b^2$에 대하여 다음을 계산하여라.

(1) $A+B$ (2) $B-A$ (3) $-A+2B$

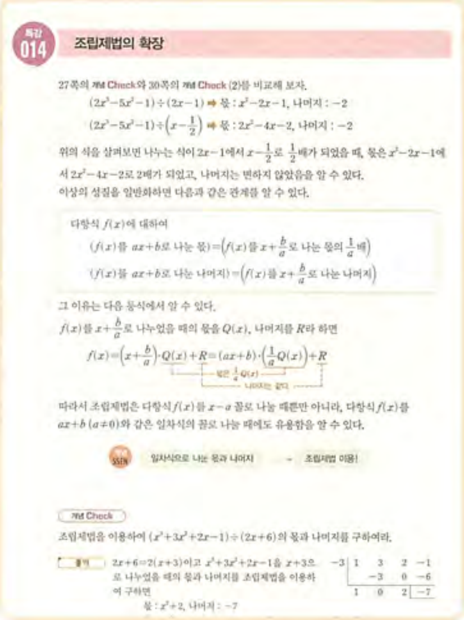
풀이 (1) $A+B=(a^2-3ab+b^2)+(2a^2+2ab-3b^2)=3a^2-ab-2b^2$

(2) $B-A=(2a^2+2ab-3b^2)-(a^2-3ab+b^2)$
$=2a^2+2ab-3b^2-a^2+3ab-b^2=a^2+5ab-4b^2$

개념 특강 학습

● **특강**

교과서에서 다루지는 않지만 실전에 꼭 필요한 개념, 이미 알고 있는 것이지만 문제에 적용하기 어려운 개념을 별도로 구성하였습니다. 또 개념을 바로 확인할 수 있는 개념 Check 문제를 구성하였습니다.



특강 014 조립제법의 확장

27쪽의 개념 Check와 30쪽의 개념 Check (2)를 비교해 보자.

$(2x^3-5x^2-1)\div(2x-1)$ ➡ 몫 : x^2-2x-1, 나머지 : -2

$(2x^3-5x^2-1)\div\left(x-\frac{1}{2}\right)$ ➡ 몫 : $2x^2-4x-2$, 나머지 : -2

위의 식을 살펴보면 나누는 식이 $2x-1$에서 $x-\frac{1}{2}$로 $\frac{1}{2}$배가 되었을 때, 몫은 x^2-2x-1에서 $2x^2-4x-2$로 2배가 되었고, 나머지는 변하지 않았음을 알 수 있다.

이상의 성질을 일반화하면 다음과 같은 관계를 알 수 있다.

다항식 $f(x)$에 대하여

($f(x)$를 $ax+b$로 나눈 몫)$=\left(f(x)\text{를 } x+\frac{b}{a}\text{로 나눈 몫의 } \frac{1}{a}\text{배}\right)$

($f(x)$를 $ax+b$로 나눈 나머지)$=\left(f(x)\text{를 } x+\frac{b}{a}\text{로 나눈 나머지}\right)$

그 이유는 다음 등식에서 알 수 있다.

$f(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$f(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)\cdot Q(x)+R=(ax+b)\cdot\left(\frac{1}{a}Q(x)\right)+R$$

몫은 $\frac{1}{a}Q(x)$

나머지는 같다

따라서 조립제법은 다항식 $f(x)$를 $x-a$ 꼴로 나눌 때뿐만 아니라, 다항식 $f(x)$를 $ax+b$ $(a\neq0)$와 같은 일차식의 꼴로 나눌 때에도 유용함을 알 수 있다.

개념 SSEN 일차식으로 나눈 몫과 나머지 → 조립제법 이용!

개념 Check

조립제법을 이용하여 $(x^3+3x^2+2x-1)\div(2x+6)$의 몫과 나머지를 구하여라.

풀이 $2x+6=2(x+3)$이고 x^3+3x^2+2x-1을 $x+3$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ & & -3 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & \boxed{-7} \end{array}$$

몫 : x^2+2, 나머지 : -7

활용의 기술 ❷ **교과서에 나오지 않는다고 대충 넘어가지 않는다. 다른 교재에서 다시 학습할 수 없으니 더 꼼꼼하게 이해하고 숙지하자. 그 효과는 실전에서 확인할 수 있다.**

유형 학습

● 대표유형

실전에 자주 출제되는 문제로, 해결 과정을 꼭 알아 두어야 하는 유형들을 엄선하였습니다.

유형 Guide 대표유형의 해결 원리를 자세하게 설명

유형 SSEN 대표유형을 해결하는 핵심 원리를 도식화하여 제시

● 유제

대표유형과 닮은꼴 문제를 구성하여 유형을 반복 학습할 수 있도록 하였습니다. **Plus 유제**를 구성하여 실전에 적용할 수 있도록 하였습니다.

활용의 기술 ③ 유형 Guide에서 주어진 유형의 구체적인 해결 방법을 익히고, 유형 SSEN의 유형 해결 핵심 방법을 기억하자.


대표유형 007 곱셈 공식의 변형

다음을 구하여라.

(1) $x+y=6$, $x^2+y^2=28$일 때, x^3+y^3의 값

(2) $x^2+\frac{1}{x^2}=23$일 때, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값 (단, $x>0$)

(3) $x+y+z=5$, $x^2+y^2+z^2=13$, $xyz=\frac{1}{3}$일 때, $x^3+y^3+z^3$의 값

유형 Guide (1) x^3+y^3의 값을 구하려면 $x+y$, xy의 값을 알아야 하는데 $x+y$의 값이 주어져 있으므로 먼저 x^2+y^2의 값을 이용하여 xy의 값을 구한다.
(2) $x\cdot\frac{1}{x}=1$이므로 $x^2+\frac{1}{x^2}$의 값을 이용하여 $x+\frac{1}{x}$의 값을 구한다.
(3) (1)과 같은 방법으로 먼저 $xy+yz+zx$의 값을 구한다.

유형 SSEN x, y에 대한 식의 값 ○ 조건을 이용할 수 있도록 식을 변형!

풀이 (1) $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$에서 $6^2=28+2xy$ $\therefore xy=4$
$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=6^3-3\cdot4\cdot6=144$
(2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=23+2=25$이므로 $x+\frac{1}{x}=5$ ($\because x>0$)
$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=5^3-3\cdot5=110$
(3) $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에서
$5^2=13+2(xy+yz+zx)$ $\therefore xy+yz+zx=6$
$\therefore x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$
$=5\cdot(13-6)+3\cdot\frac{1}{3}=36$

답 (1) 144 (2) 110 (3) 36

정답 및 풀이 • 3쪽

유제 007-1 다음을 구하여라.

(1) $x^2+y^2=14$, $xy=5$일 때, x^3-y^3의 값 (단, $x>y$)

(2) $x+y+z=-9$, $xy+yz+zx=-33$, $xyz=-3$일 때, $\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}$의 값

(3) $x+y+z=6$, $x^2+y^2+z^2=52$, $x^3+y^3+z^3=324$일 때, xyz의 값

Plus 유제 007-2 $x-y=2+\sqrt{7}$, $y-z=2-\sqrt{7}$일 때, $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$의 값을 구하여라.

마무리 학습

● 중단원 연습 문제

중단원 학습을 마무리할 수 있도록 3단계로 구성하였습니다.

STEP 1 유형 Training

STEP 2 실전 Application

STEP 3 심화 Forwarding

활용의 기술 ④ 다양한 유형의 문제와 기출 문제를 풀어 봄으로써 문제 해결력을 기르고 수능에 대한 자신감을 키우자.


중단원 연습 문제 01 다항식의 연산

정답 및 풀이 • 5쪽

STEP 1 유형 Training

01 x에 대한 다항식 $(3x^2+x-4)(x^2+2x+k)$의 전개식에서 x의 계수가 8일 때, x^2의 계수는? (단, k는 상수이다.)

① 42 ② 46 ③ 50 ④ 54 ⑤ 58

02 $x^4=40$일 때, $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$의 값을 구하여라.

03 $(x+1)(x+2)(x+4)(x+8)$의 전개식에서 모든 항의 계수와 상수항의 합은?

① 45 ② 90 ③ 180 ④ 270 ⑤ 360

04 $x+y=-1$, $x^3+y^3=-7$일 때, x^2+y^2의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

05 다항식 $3x^3+4x^2-x-2$를 x^2+x-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하자. 이때 $Q(1)+R(2)$의 값을 구하여라.

차례

CONTENT

I 다항식

01

다항식의 연산

중학교에 올라가서 처음 공부한 단원이 '수와 연산'이다. 수의 개념을 자연수에서 정수와 유리수로 확장하고, 사칙계산과 연산법칙, 그리고 대소 관계에 대하여 배웠다. 이 과정에서 우리는 '수'를 단순히 숫자로 바라보는 것에서 벗어나 하나의 '체계'로 인식할 수 있게 되었다.
다항식도 수와 유사한 법칙과 구조를 갖추고 있다. 즉 다항식에서도 사칙계산이 성립하고, 덧셈과 곱셈에 대한 연산법칙이 성립한다.

이 단원에서는 다항식에서의 연산에 대하여 알아보고, 복잡한 다항식을 쉽게 전개할 수 있는 곱셈 공식에 대하여 공부해 보자.

● 한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

01 다항식의 덧셈과 뺄셈

- 다항식을 한 문자에 대하여 내림차순 또는 오름차순으로 정리할 수 있다.
- 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.

02 다항식의 곱셈과 곱셈 공식

- 다항식의 곱셈을 할 수 있다.
- 곱셈 공식을 이용하여 다항식을 전개할 수 있다.

03 다항식의 나눗셈

- 다항식의 나눗셈을 할 수 있다.
- 조립제법을 알고, 이를 이용하여 다항식의 나눗셈의 몫과 나머지를 구할 수 있다.

개념 & 특강	대표유형 & 유제
001 다항식에 대한 용어	
002 다항식의 정리 방법	
003 다항식의 덧셈과 뺄셈	001 다항식의 덧셈과 뺄셈
004 다항식의 덧셈에 대한 연산법칙	001 다항식의 덧셈과 뺄셈
005 지수법칙	
006 식의 전개	002 다항식의 전개식에서 계수 구하기 — 003 다항식의 곱셈
007 다항식의 곱셈에 대한 연산법칙	002 다항식의 전개식에서 계수 구하기 — 003 다항식의 곱셈
008 곱셈 공식	004 곱셈 공식 — 005 복잡한 다항식의 곱셈 — 006 곱셈 공식의 활용
009 곱셈 공식의 변형	007 곱셈 공식의 변형
010 (다항식)÷(단항식)의 계산	
011 (다항식)÷(다항식)의 계산	008 다항식의 나눗셈
012 다항식의 나눗셈에 대한 등식	008 다항식의 나눗셈
013 조립제법	009 조립제법의 활용
특강 014 조립제법의 확장	009 조립제법의 활용

개념 001 다항식에 대한 용어

1 단항식과 다항식

(1) 단항식 : 몇 개의 문자와 수의 곱 또는 몇 개의 문자와 문자의 곱으로 이루어진 식

(2) 다항식 : 단항식 또는 몇 개의 단항식의 합으로 이루어진 식

2 다항식에 대한 용어

(1) 항 : 다항식을 이루고 있는 각각의 단항식

(2) 차수

① 항의 차수 : 항에서 특정한 문자가 곱해진 개수

② 다항식의 차수 : 특정한 문자에 대하여 각 항의 차수 중에서 가장 높은 것

(3) 계수 : 항에서 특정한 문자를 제외한 나머지 부분

(4) 상수항 : 특정한 문자를 포함하지 않는 항

(5) 동류항 : 특정한 문자에 대한 차수가 같은 항

x^2의 계수 차수 동류항 상수항

$$3x^2+8x+x+5$$

항

개념 Approach

1 단항식과 다항식

$10,\ 2x,\ x^2y,\ \alpha\beta,\ -\frac{3}{2}ab^3,\ \cdots$과 같은 식은 단항식이고, $3,\ 2x+x^2y,\ x+y-3,\ \alpha-\beta^2,\ a^3-b+1,$ $-5a,\ \cdots$와 같이 단항식 또는 단항식의 합으로 이루어진 식은 다항식이다.

이때 10, 3과 같이 수만 있어도 단항식이며, 단항식은 다항식의 한 종류이다.

Remark ① $\alpha-\beta^2$과 같은 뺄셈은 $\alpha+(-\beta^2)$과 같이 α와 $-\beta^2$의 합으로 본다.

② $\frac{1}{x}$, $x^2y+2\sqrt{x}$와 같이 문자가 분모에 있거나 근호($\sqrt{\ }$) 안에 있으면 다항식이 아니다.

2 다항식에 대한 용어

① 단항식의 차수

여러 가지 문자가 포함된 단항식에서 특정한 문자를 기준으로 할 때, 이 문자를 제외한 나머지 문자는 모두 계수로 본다. 즉 '~에 대한' 또는 '~의'에서 '~'에 해당하는 문자에 주목하여 차수를 결정하고, 나머지는 계수로 본다.

이때 특정한 문자가 곱해진 개수를 그 단항식의 **차수**라 하고, 차수가 n인 단항식을 **n차식**이라 한다. 즉 단항식의 차수가 1이면 일차식, 차수가 2이면 이차식, 차수가 3이면 삼차식이다.

예를 들어 단항식 $-2a^2bx^3$은

$$\begin{cases} a\text{에 대한 이차식이고, 계수는 } -2bx^3\text{이다.} \\ b\text{에 대한 일차식이고, 계수는 } -2a^2x^3\text{이다.} \\ x\text{에 대한 삼차식이고, 계수는 } -2a^2b\text{이다.} \\ a,\ b,\ x\text{에 대한 육차식이고, 계수는 } -2\text{이다.} \end{cases}$$

② 다항식의 차수와 상수항

다항식의 차수는 다항식을 이루는 각 단항식 중에서 특정한 문자에 대하여 차수가 가장 높은 것에 주목하여 결정한다.

이때 특정한 문자가 포함되지 않는 항을 상수항이라 하고, 특정한 문자에 대한 차수가 같은 항을 동류항이라 한다.

예를 들어 다항식 $3x^2y-2xy+2x-1$은

$$\begin{cases} x\text{에 대한 이차식이고, 상수항은 } -1\text{이다.} \\ y\text{에 대한 일차식이고, 상수항은 } 2x-1\text{이다.} \\ x,\ y\text{에 대한 삼차식이고, 상수항은 } -1\text{이다.} \\ x\text{에 대한 동류항은 } -2xy,\ 2x\text{이고, } y\text{에 대한 동류항은 } 3x^2y,\ -2xy\text{이다.} \end{cases}$$

Remark 동류항은 분배법칙을 이용하여 하나의 항으로 나타낼 수 있다. 즉 위의 예에서
$-2xy+2x=(-2y+2)x,\ 3x^2y-2xy=(3x^2-2x)y$

개념 Check 1

다음 단항식의 [ ] 안의 문자에 대한 차수와 계수를 차례로 말하여라.

(1) $-x^3y^2$ [x]　　(2) $3x^3yz^2$ [z]

(3) abc [c]　　(4) $2ax^2y$ [y]

답 (1) 차수 : 3, 계수 : $-y^2$　(2) 차수 : 2, 계수 : $3x^3y$
(3) 차수 : 1, 계수 : ab　(4) 차수 : 1, 계수 : $2ax^2$

개념 Check 2

다항식 $2x^3-x^2y-3y^3-1$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) x에 대한 이차항　　(2) x에 대한 삼차항의 계수

(3) y에 대한 이 다항식의 차수　　(4) y에 대한 상수항

답 (1) $-x^2y$　(2) 2　(3) 3　(4) $2x^3-1$

개념 002 다항식의 정리 방법

다항식은 동류항끼리 모아서 정리하면 간단히 나타낼 수 있다. 이때 다음 두 가지 정리법이 주로 쓰인다.

(1) 내림차순 : 한 문자에 대하여 차수가 높은 항부터 낮은 항의 순서로 나타내는 것을 **내림차순**으로 정리한다고 한다.

(2) 오름차순 : 한 문자에 대하여 차수가 낮은 항부터 높은 항의 순서로 나타내는 것을 **오름차순**으로 정리한다고 한다.

Remark 보통 특별한 언급이 없으면 다항식을 내림차순으로 정리한다.

개념 Approach

다항식을 내림차순이나 오름차순으로 정리할 때에는 기준이 되는 문자를 정하고, 기준이 되는 문자를 제외한 나머지 문자는 모두 상수로 생각한다.

예를 들어 다항식 $P=3x-1+5x^2-x^3$을

내림차순으로 정리하면 $P=-x^3+5x^2+3x-1$

오름차순으로 정리하면 $P=-1+3x+5x^2-x^3$

또 다항식 $Q=x^2+3xy+2y^2-x+y+7$을 x에 대하여

내림차순으로 정리하면 $Q=x^2+(3y-1)x+2y^2+y+7$

오름차순으로 정리하면 $Q=2y^2+y+7+(3y-1)x+x^2$

x에 대한 내림차순 정리와 오름차순 정리의 일반적인 꼴은 다음과 같다.

내림차순	오름차순
일차식 : $ax+b$	일차식 : $b+ax$
이차식 : ax^2+bx+c	이차식 : $c+bx+ax^2$
삼차식 : ax^3+bx^2+cx+d	삼차식 : $d+cx+bx^2+ax^3$
(단, $a\neq0$)	(단, $a\neq0$)

이렇게 내림차순이나 오름차순으로 식을 정리하는 것은 마치 사람들이 예쁘게 꾸미거나 옷을 단정하게 입는 것처럼 식을 보기 좋게 하여, 식의 활용도를 높이려는 의도이다.

개념 Check

다음 다항식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하여라.

(1) $3-2x+x^2+x-2-4x^2$　　(2) $ax^2-bxy+czx^2+x^3y+7$

풀이 (1) $3-2x+x^2+x-2-4x^2=(x^2-4x^2)+(-2x+x)+(3-2)=-3x^2-x+1$

(2) $ax^2-bxy+czx^2+x^3y+7=yx^3+(ax^2+czx^2)-byx+7$

$=yx^3+(a+cz)x^2-byx+7$

답 (1) $-3x^2-x+1$　(2) $yx^3+(a+cz)x^2-byx+7$

개념 003

다항식의 덧셈과 뺄셈

1 $-A$와 kA의 계산

다항식 A와 실수 k에 대하여 $-A$와 kA를 다음과 같이 계산한다.

(1) $-A$: A의 각 항의 부호를 바꾼다.

(2) kA : A의 각 항에 k를 곱한다.

2 다항식의 덧셈과 뺄셈

다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 때에는 다음 순서로 한다.

(i) 괄호가 있는 경우 괄호를 푼다.

(ii) 각 다항식을 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

(iii) 동류항끼리 모아서 간단히 한다.

개념 Approach

두 다항식 $A=x^2-4x+3$, $B=5x^2+x-3$에 대하여 $-3A$, $A+B$, $A-B$는 다음과 같이 계산한다.

① $-3A=-3(x^2-4x+3)=-3x^2+12x-9$

② $A+B=(x^2-4x+3)+(5x^2+x-3)$ (i)
$=x^2-4x+3+5x^2+x-3$ (ii)
$=x^2+5x^2-4x+x+3-3$ (iii)
$=6x^2-3x$

③ $A-B=(x^2-4x+3)-(5x^2+x-3)$ (i)
$=x^2-4x+3-5x^2-x+3$ (ii)
$=x^2-5x^2-4x-x+3+3$ (iii)
$=-4x^2-5x+6$

개념 SSEN: 다항식의 덧셈과 뺄셈 → 동류항 정리

개념 Check

두 다항식 $A=a^2-3ab+b^2$, $B=2a^2+2ab-3b^2$에 대하여 다음을 계산하여라.

(1) $A+B$ (2) $B-A$ (3) $-A+2B$

풀이 (1) $A+B=(a^2-3ab+b^2)+(2a^2+2ab-3b^2)=3a^2-ab-2b^2$

(2) $B-A=(2a^2+2ab-3b^2)-(a^2-3ab+b^2)$
$=2a^2+2ab-3b^2-a^2+3ab-b^2=a^2+5ab-4b^2$

(3) $-A+2B=-(a^2-3ab+b^2)+2(2a^2+2ab-3b^2)$
$=-a^2+3ab-b^2+4a^2+4ab-6b^2=3a^2+7ab-7b^2$

답 (1) $3a^2-ab-2b^2$ (2) $a^2+5ab-4b^2$ (3) $3a^2+7ab-7b^2$

개념 004

다항식의 덧셈에 대한 연산법칙

수에서와 마찬가지로 다항식 A, B, C에 대하여 다음 법칙이 성립한다.

① 교환법칙 : $A+B=B+A$

② 결합법칙 : $(A+B)+C=A+(B+C)$

Remark 다항식의 덧셈에 대한 결합법칙이 성립하므로 괄호를 생략하여 $A+B+C$로 나타내기도 한다.

개념 Approach

수의 덧셈에 대한 교환법칙과 결합법칙이 성립하듯이 다항식에서도 덧셈에 대한 교환법칙과 결합법칙이 성립한다.

예를 들어 세 다항식 $A=2x^2-5x+3$, $B=x^2-2$, $C=-x^2+x$에 대하여

① $A+B=(2x^2-5x+3)+(x^2-2)=3x^2-5x+1$

$B+A=(x^2-2)+(2x^2-5x+3)=3x^2-5x+1$

이므로

$$A+B=B+A$$

② $(A+B)+C=(3x^2-5x+1)+(-x^2+x)=2x^2-4x+1$

$A+(B+C)=(2x^2-5x+3)+(x-2)=2x^2-4x+1$

이므로

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

개념 Check

다음은 $(3x^3+4x^2+6)+(x^2-2)$를 계산하는 과정이다.

$$\begin{aligned}
&(3x^3+4x^2+6)+(x^2-2) \\
&=3x^3+4x^2+(6+x^2)-2 && \boxed{\text{(ㄱ)}}\text{ 법칙} \\
&=3x^3+4x^2+(x^2+6)-2 && \boxed{\text{(ㄴ)}}\text{ 법칙} \\
&=3x^3+(4x^2+x^2)+6-2 && \boxed{\text{(ㄷ)}}\text{ 법칙} \\
&=3x^3+5x^2+4
\end{aligned}$$

위의 과정에서 (ㄱ)~(ㄷ)에 알맞은 연산법칙을 적어라.

답 (ㄱ) 결합 (ㄴ) 교환 (ㄷ) 결합

대표유형 001 다항식의 덧셈과 뺄셈

• 개념 003, 004

세 다항식 $f(x)=x^3+7x-1$, $g(x)=-x^2+3x+5$, $h(x)=-x+4$에 대하여 $2g(x)-3f(x)-(h(x)-2f(x))$를 계산하여라.

유형 Guide 다항식은 A, B, C, …와 같이 주로 알파벳 대문자로 나타내지만 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 등을 이용하여 나타내기도 한다. 다항식이 어떠한 형태로 주어지더라도 당황할 필요는 없다. 구하려는 식이 복잡한 경우 구하려는 식을 먼저 간단히 한 후, 주어진 다항식을 대입하여 동류항끼리 계산한다는 사실만 기억하고 있으면 된다.

유형 SSEN 다항식의 덧셈과 뺄셈 ➔ 동류항 정리

풀이

$$\begin{aligned}2g(x)-3f(x)-(h(x)-2f(x))&=2g(x)-3f(x)-h(x)+2f(x)\\&=2g(x)-f(x)-h(x)\\&=2(-x^2+3x+5)-(x^3+7x-1)-(-x+4)\\&=-2x^2+6x+10-x^3-7x+1+x-4\\&=-x^3-2x^2+7\end{aligned}$$

답 $-x^3-2x^2+7$

정답 및 풀이 • 2쪽

유제 001-1 세 다항식 $A=x^3-3x+2$, $B=-x^3+x^2+x+1$, $C=2x^3-2x-5$에 대하여 다음을 계산하여라.

(1) $A-B+C$ (2) $2A-(B+C)$

(3) $-A+B-2(C-2A)$ (4) $3(2B-C)+2(A-4B)$

유제 001-2 두 다항식 $A=-2x^2+8xy+y^2$, $B=\frac{1}{2}x^2-6xy-\frac{1}{4}y^2$에 대하여 $2X+B=A-3B$를 만족시키는 다항식 X를 구하여라.

Plus 유제 001-3 $A+B=4x^3-2x^2-12x+6$, $A-B=-2x^3-2x^2-2x+18$을 만족시키는 두 다항식 A, B를 구하여라.

개념 005 지수법칙

a, b는 실수, m, n은 자연수일 때, 다음 법칙이 성립한다.

① $a^m \times a^n = a^{m+n}$

② $a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & (m>n\text{일 때}) \\ 1 & (m=n\text{일 때}) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n\text{일 때}) \end{cases}$ (단, $a \neq 0$)

③ $(a^m)^n = a^{mn}$

④ $(ab)^n = a^n b^n$

⑤ $\left(\dfrac{b}{a}\right)^n = \dfrac{b^n}{a^n}$ (단, $a \neq 0$)

Remark $a^0=1$, $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$로 정하면 m, n의 대소에 관계없이 $a^m \div a^n = a^{m-n}$이 성립한다.

개념 Approach

지수법칙은 다음과 같이 생각하면 좀 더 이해하기 쉽다.

a, b는 실수, m, n은 자연수일 때

① $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ➡ 밑이 같은 거듭제곱의 곱은 지수끼리 더한다.

② $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (단, $a \neq 0$, $m>n$) ➡ 밑이 같은 거듭제곱의 나눗셈은 지수끼리 뺀다.

③ $(a^m)^n = a^{mn}$ ➡ 거듭제곱의 거듭제곱은 지수끼리 곱한다.

④ $(ab)^n = a^n b^n$

⑤ $\left(\dfrac{b}{a}\right)^n = \dfrac{b^n}{a^n}$ (단, $a \neq 0$)

➡ 곱의 거듭제곱은 지수를 분배한다.

Remark $a^3 \cdot a^4 \neq a^{3\times 4}$ ➡ $a^3 \cdot a^4 = a^{3+4} = a^7$, $(a^2)^3 \neq a^{2^3}$ ➡ $(a^2)^3 = a^{2\times 3} = a^6$

$a^8 \div a^4 \neq a^{\frac{8}{4}}$ ➡ $a^8 \div a^4 = a^{8-4} = a^4$, $(-2a)^2 \neq -2a^2$ ➡ $(-2a)^2 = (-2)^2 a^2 = 4a^2$

개념 Check

다음 식을 간단히 하여라.

(1) $-ab^3 \times 2a^2b^2$

(2) $(-x^2y)^3 \times (-3x^3)$

(3) $3x^3y^2 \times 2yz^2 \div (-x^2z)$

(4) $\left(\dfrac{a}{b^2}\right)^2 \times \left(-\dfrac{b}{a^2}\right)^3$

풀이 (1) $-ab^3 \times 2a^2b^2 = -2a^3b^5$

(2) $(-x^2y)^3 \times (-3x^3) = -x^6y^3 \times (-3x^3) = 3x^9y^3$

(3) $3x^3y^2 \times 2yz^2 \div (-x^2z) = 6x^3y^3z^2 \div (-x^2z) = -6xy^3z$

(4) $\left(\dfrac{a}{b^2}\right)^2 \times \left(-\dfrac{b}{a^2}\right)^3 = \dfrac{a^2}{b^4} \times \left(-\dfrac{b^3}{a^6}\right) = -\dfrac{1}{a^4b}$

답 (1) $-2a^3b^5$ (2) $3x^9y^3$ (3) $-6xy^3z$ (4) $-\dfrac{1}{a^4b}$

개념 006 식의 전개

1 전개

몇 개의 다항식의 곱을 하나의 다항식으로 나타내는 것을 **전개**라 하고, 전개하여 얻은 다항식을 **전개식**이라 한다.

2 식의 전개 방법

① (단항식)×(다항식) : m을 단항식, $x+y$를 다항식이라 할 때, 다음을 이용하여 전개한다.

[분배법칙] $m(x+y)=mx+my$, $(x+y)m=xm+ym$

② (다항식)×(다항식) : $a+b$, $x+y$를 다항식이라 할 때, 다음과 같은 방법으로 전개한다.

$$(a+b)(x+y)=\underset{①}{\underline{ax}}+\underset{②}{\underline{ay}}+\underset{③}{\underline{bx}}+\underset{④}{\underline{by}}$$

개념 Approach

(단항식)×(다항식), (다항식)×(다항식)과 같은 곱셈 꼴을 합(차)의 꼴, 즉 하나의 다항식으로 나타내는 것을 전개한다고 한다.

항의 개수가 많으면 전개할 때 항을 빠뜨리거나 중복하여 계산하기 쉬우므로 다음과 같이 순서를 정하여 전개한 후, 동류항끼리 모아서 간단히 한다.

$$(x+1)(2x^2+3x)=\underset{①}{\underline{2x^3}}+\underset{②}{\underline{3x^2}}+\underset{③}{\underline{2x^2}}+\underset{④}{\underline{3x}}$$ ← 분배법칙을 이용한다.

$$=2x^3+5x^2+3x$$ ← 동류항끼리 모아서 간단히 한다.

개념 Check

다음 식을 전개하여라.

(1) $3xy(x^2-2xy-5y^2)$ (2) $(x-3)(x+2)$

(3) $(2x+3)(3x-2)$ (4) $(x^2+2xy-y)(2x+3y)$

풀이

(1) $3xy(x^2-2xy-5y^2)=3x^3y-6x^2y^2-15xy^3$

(2) $(x-3)(x+2)=x^2+2x-3x-6=x^2-x-6$

(3) $(2x+3)(3x-2)=6x^2-4x+9x-6=6x^2+5x-6$

(4) $(x^2+2xy-y)(2x+3y)=2x^3+3x^2y+4x^2y+6xy^2-2xy-3y^2$

$=2x^3+7x^2y+6xy^2-2xy-3y^2$

답 (1) $3x^3y-6x^2y^2-15xy^3$ (2) x^2-x-6

(3) $6x^2+5x-6$ (4) $2x^3+7x^2y+6xy^2-2xy-3y^2$

개념 007

다항식의 곱셈에 대한 연산법칙

수에서와 마찬가지로 다항식 A, B, C에 대하여 다음 법칙이 성립한다.

① 교환법칙 : $AB=BA$ ② 결합법칙 : $(AB)C=A(BC)$

③ 분배법칙 : $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

Remark 다항식의 곱셈에 대한 결합법칙이 성립하므로 괄호를 생략하여 ABC와 같이 나타내기도 한다.

개념 Approach

수의 곱셈에 대한 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립하듯이 다항식에서도 곱셈에 대한 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립한다.

예를 들어 세 다항식 $A=x+1$, $B=2x-1$, $C=x^2$에 대하여

① $AB=(x+1)(2x-1)=2x^2-x+2x-1=2x^2+x-1$

$BA=(2x-1)(x+1)=2x^2+2x-x-1=2x^2+x-1$

이므로 $AB=BA$

② $(AB)C=(2x^2+x-1)x^2=2x^4+x^3-x^2$

$A(BC)=(x+1)(2x^3-x^2)=2x^4-x^3+2x^3-x^2=2x^4+x^3-x^2$

이므로 $(AB)C=A(BC)$

③ $A(B+C)=(x+1)(2x-1+x^2)=2x^2-x+x^3+2x-1+x^2=x^3+3x^2+x-1$

$AB+AC=(2x^2+x-1)+(x+1)x^2=2x^2+x-1+x^3+x^2=x^3+3x^2+x-1$

이므로 $A(B+C)=AB+AC$

$(A+B)C=(x+1+2x-1)x^2=x^3+x^2+2x^3-x^2=3x^3$

$AC+BC=(x^3+x^2)+(2x-1)x^2=x^3+x^2+2x^3-x^2=3x^3$

이므로 $(A+B)C=AC+BC$

개념 Check

다음은 $(x+a)(x+b)$를 전개하는 과정이다.

$$\begin{aligned}
&(x+a)(x+b) && \\
&=x(x+b)+a(x+b) && \boxed{(ㄱ)}\text{ 법칙}\\
&=(x^2+xb)+(ax+ab) && \boxed{(ㄴ)}\text{ 법칙}\\
&=x^2+(xb+ax)+ab && \boxed{(ㄷ)}\text{ 법칙}\\
&=x^2+(ax+bx)+ab && \boxed{(ㄹ)}\text{ 법칙}\\
&=x^2+(a+b)x+ab && \boxed{(ㅁ)}\text{ 법칙}
\end{aligned}$$

위의 과정에서 (ㄱ)~(ㅁ)에 알맞은 연산법칙을 적어라.

답 (ㄱ) 분배 (ㄴ) 분배 (ㄷ) 결합 (ㄹ) 교환 (ㅁ) 분배

대표유형 002 다항식의 전개식에서 계수 구하기

• 개념 006, 007

$(x^4-3x^3+x^2-x+1)(x^3-2x^2+3x-2)$를 전개한 식에서 x^3의 계수를 구하여라.

유형 Guide 주어진 다항식을 전개할 때 삼차항이 되는 경우는

(삼차항)×(상수항), (이차항)×(일차항), (일차항)×(이차항), (상수항)×(삼차항)

의 네 가지이므로 주어진 다항식을 모두 전개하지 말고 삼차항이 되는 경우만 전개한다.

유형 SSEN **전개식에서 특정한 항의 계수 ⊙ 그 항이 되는 경우만 전개!**

풀이 $(x^4-3x^3+x^2-x+1)(x^3-2x^2+3x-2)$의 전개식에서 삼차항은

$$-3x^3\cdot(-2),\ x^2\cdot 3x,\ (-x)\cdot(-2x^2),\ 1\cdot x^3$$

의 네 가지 경우에서 생기므로

$$6x^3+3x^3+2x^3+x^3=12x^3$$

따라서 x^3의 계수는 12이다.

답 12

정답 및 풀이 • 2쪽

유제 002-1 두 다항식

$$A=(x^2+x)(2x^3-x^2+3),\ B=(3x^4+2x^2-6)(x^2-x+5)$$

의 전개식에서 x^4의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

유제 002-2 다항식 $(x^2+8x+a)(x^2-3x+4)$의 전개식에서 x^2의 계수가 -15일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

대표유형 003 다항식의 곱셈

• 개념 006, 007

임의의 두 실수 x, y에 대하여 연산 $\circ$을

$$x \circ y=(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$$

이라 할 때, $(a \circ b)+(b \circ c)+(c \circ a)$를 간단히 하여라. (단, a, b, c는 실수이다.)

유형 Guide 주어진 연산에 그대로 대입하여 식을 전개하면 매우 복잡해진다. 연산 $\circ$의 식의 우변은 x와 y에 대한 다항식의 곱셈으로 이루어졌는데, 우변을 전개하여 동류항을 정리하면 연산 $\circ$를 간단한 모양으로 바꿀 수 있다. 이와 같이 조건이나 구하는 식이 복잡한 경우, 간단한 모양으로 바꾸어 이용한다.

유형 SSEN 주어진 식이 복잡하면 ○ 전개한 후 동류항 정리

풀이 연산 $\circ$의 식에서 우변을 정리하면

$$\begin{aligned} x \circ y&=(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3) \\ &=x(x^3+x^2y+xy^2+y^3)-y(x^3+x^2y+xy^2+y^3) \\ &=(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3)-(x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4) \\ &=x^4-y^4 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} (a \circ b)+(b \circ c)+(c \circ a)&=(a^4-b^4)+(b^4-c^4)+(c^4-a^4) \\ &=0 \end{aligned}$$

답 0

Remark $n\geq2$인 자연수 n에 대하여 $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n$

① $n=2$일 때 : $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

② $n=3$일 때 : $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

③ $n=4$일 때 : $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4$

정답 및 풀이 • 2쪽

유제 003-1 $A+B=x^2+x$, $2A-B=2x^2-x+3$일 때, AB를 x에 대한 다항식으로 나타내어라.

유제 003-2 임의의 두 실수 x, y에 대하여 연산 $\triangle$을

$$x \triangle y=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$$

이라 할 때, $(a \triangle b)+(b \triangle c)=a \triangle c$임을 보여라. (단, a, b, c는 실수이다.)

개념 008

곱셈 공식

다항식의 곱셈 중에서 기본적인 꼴을 정리한 것이 곱셈 공식이다. 곱셈 공식을 익혀 두면 복잡한 전개 과정을 거치지 않고도 빠르고 정확하게 다항식의 곱셈을 할 수 있다.

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
② $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
③ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
④ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$
⑤ $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$
⑥ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
⑦ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
⑧ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
⑨ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$
⑩ $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

Remark ⑥과 같이 식을 정리할 때에는 $ab+bc+ca$와 같이 윤환의 꼴로 하는 것이 편리할 때가 많다.

개념 Approach

위의 ①~④의 공식은 이미 중학교에서 공부한 것이므로 분배법칙을 이용하여 각자 확인해 보기 바란다. 여기서는 복잡한 ⑤~⑩의 공식을 유도해 보자.

⑤ $(x+a)(x+b)(x+c)=\{x^2+(a+b)x+ab\}(x+c)$ ← 곱셈 공식 ③
$=x^3+cx^2+(a+b)x^2+(a+b)cx+abx+abc$
$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

⑥ $(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$ ← 곱셈 공식 ①
$=(a^2+2ab+b^2)+2ac+2bc+c^2$ ← 곱셈 공식 ①
$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

⑦ $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$ ← 곱셈 공식 ①
$=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a-b)^3=\{a+(-b)\}^3=a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

⑧ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3$
$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3$

⑨ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=a^3+ab^2+ac^2-a^2b-abc-a^2c+a^2b+b^3+bc^2-ab^2-b^2c-abc+a^2c+b^2c+c^3-abc-bc^2-ac^2$
$=a^3+b^3+c^3-3abc$

⑩ $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=\{(a^2+b^2)+ab\}\{(a^2+b^2)-ab\}$

$$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2 \quad \text{⬅ 곱셈 공식 ②}$$
$$=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2 \quad \text{⬅ 곱셈 공식 ①}$$
$$=a^4+a^2b^2+b^4$$

Remark 곱셈 공식은 눈으로 쉽게 기억되는 것이 있고, 소리내어 말하면 더 잘 기억되는 것이 있다. 공식마다 어느 쪽이 편한지 생각하고 좀 더 쉬운 방법으로 기억하자.

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$만 확실히 기억하면 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$은 b 대신에 $-b$를 대입한 것이므로 $(a-b)^2$에 관한 공식은 저절로 기억된다. ⑦, ⑧도 마찬가지이다.

② (합)(차)=(제곱 차)라고 입으로 소리내어 기억하자. "합 · 차는 제곱 차"

③ x에 대한 내림차순으로 정리된 식으로, 오른쪽과 같은 모양을 사진을 찍듯이 눈으로 기억하자.

$$\underbrace{1}_{\text{최고차항의 계수 1}}\cdot x^2+(\underbrace{a+b}_{\text{두 문자의 합}})x+\underbrace{ab}_{\text{두 문자의 곱}}$$

④ 외우지 말고, 차라리 '일일이 전개한다.' 고 마음먹는 것이 편하다.

⑤ ③과 마찬가지로 사진을 찍듯이 눈으로 '찰칵' !

$$\underbrace{1}_{\text{최고차항의 계수 1}}\cdot x^3+(\underbrace{a+b+c}_{\text{세 문자의 합}})x^2+(\underbrace{ab+bc+ca}_{\text{두 문자씩의 곱의 합}})x+\underbrace{abc}_{\text{세 문자의 곱}}$$

⑥, ⑨, ⑩은 눈으로 기억하길 바란다.

개념 Check

곱셈 공식을 이용하여 다음 식을 전개하여라.

(1) $(x+1)^2$ (2) $(2x-3y)^2$

(3) $(3x+y)(3x-y)$ (4) $(x+7y)(x-5y)$

(5) $(2x+5)(4x-1)$ (6) $(a+b-2c)^2$

(7) $(x+1)^3$ (8) $(x-2)^3$

(9) $(x-1)(x^2+x+1)$ (10) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

풀이

(1) $(x+1)^2=x^2+2x+1$

(2) $(2x-3y)^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2=4x^2-12xy+9y^2$

(3) $(3x+y)(3x-y)=(3x)^2-y^2=9x^2-y^2$

(4) $(x+7y)(x-5y)=x^2+(7y-5y)x+7y\cdot(-5y)=x^2+2xy-35y^2$

(5) $(2x+5)(4x-1)=2\cdot 4x^2+\{2\cdot(-1)+5\cdot 4\}x+5\cdot(-1)=8x^2+18x-5$

(6) $(a+b-2c)^2=a^2+b^2+(-2c)^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot b\cdot(-2c)+2\cdot(-2c)\cdot a$
$=a^2+b^2+4c^2+2ab-4bc-4ca$

(7) $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$

(8) $(x-2)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2-2^3=x^3-6x^2+12x-8$

(9) $(x-1)(x^2+x+1)=(x-1)(x^2+x\cdot 1+1^2)=x^3-1^3=x^3-1$

(10) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)=(x^2+x\cdot 1+1^2)(x^2-x\cdot 1+1^2)$
$=x^4+x^2\cdot 1^2+1^4=x^4+x^2+1$

답 풀이 참조

대표유형 004 곱셈 공식

• 개념 008

다음 식을 전개하여라.

(1) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$
(2) $(x+3)(x-2)(x+1)$
(3) $(2x+y-3z)^2$
(4) $(4x^2+2xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)$

유형 Guide 다항식을 전개하는 기본적인 방법은 분배법칙을 이용하는 것이다. 그러나 항이 많은 다항식을 일일이 전개하다 보면 시간이 오래 걸릴 뿐만 아니라 계산 실수도 하기 쉽다.
따라서 다항식의 곱셈을 계산할 때에는 먼저 곱셈 공식을 이용할 수 있는지 생각해 본 후, 곱셈 공식을 이용하는 것이 쉽지 않을 때에는 분배법칙을 이용한다.

유형 SSEN **다항식의 곱셈 ○ 곱셈 공식이나 분배법칙 이용!**

풀이

(1) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)=(2x+3y)\{(2x)^2-2x\cdot3y+(3y)^2\}$
$=(2x)^3+(3y)^3=8x^3+27y^3$

(2) $(x+3)(x-2)(x+1)=x^3+\{3+(-2)+1\}x^2+\{3\cdot(-2)+(-2)\cdot1+1\cdot3\}x$
$+3\cdot(-2)\cdot1$
$=x^3+2x^2-5x-6$

(3) $(2x+y-3z)^2=(2x)^2+y^2+(-3z)^2+2\cdot2x\cdot y+2\cdot y\cdot(-3z)+2\cdot(-3z)\cdot2x$
$=4x^2+y^2+9z^2+4xy-6yz-12zx$

(4) $(4x^2+2xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)=\{(2x)^2+2x\cdot y+y^2\}\{(2x)^2-2x\cdot y+y^2\}$
$=(2x)^4+(2x)^2y^2+y^4=16x^4+4x^2y^2+y^4$

답 풀이 참조

정답 및 풀이 • 3쪽

유제 004-1 다음 식을 전개하여라.

(1) $(x+2y)^3$
(2) $(3x-2y)^3$
(3) $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$
(4) $(x-1)(x-2)(x-4)$
(5) $(x-3y+2z)^2$
(6) $(x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+9y^2)$
(7) $(x-y+1)(x^2+y^2+xy-x+y+1)$

대표유형 005 복잡한 다항식의 곱셈

• 개념 008

다음 식을 전개하여라.

(1) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$　　(2) $(x^2-3x+1)(x^2-3x-5)$

(3) $(x^2+x-2)(x^2-x-2)$　　(4) $(x+1)(x-2)(x+3)(x+6)$

유형 Guide 주어진 식을 보고 자연스럽게 가장 적합한 곱셈 공식을 떠올릴 수 있도록 많은 문제를 직접 풀면서 연습하도록 하자.

(1) 곱셈 공식을 반복하여 사용하는 문제이다.

(2), (3) 공통부분을 한 문자로 생각하고 곱셈 공식을 이용한다.

(4) 공통부분이 나오도록 곱셈의 순서를 바꾼 후 곱셈 공식을 이용한다.

유형 SSEN 공통부분 ⊙ 한 문자로 생각!

풀이

(1) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)=(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$
$=(a^4-b^4)(a^4+b^4)=a^8-b^8$

(2) $x^2-3x=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^2-3x+1)(x^2-3x-5)&=(X+1)(X-5)=X^2-4X-5\\&=(x^2-3x)^2-4(x^2-3x)-5\\&=x^4-6x^3+9x^2-4x^2+12x-5\\&=x^4-6x^3+5x^2+12x-5\end{aligned}$$

(3) $(x^2+x-2)(x^2-x-2)=\{(x^2-2)+x\}\{(x^2-2)-x\}=(x^2-2)^2-x^2$
$=x^4-4x^2+4-x^2=x^4-5x^2+4$

(4) $(x+1)(x-2)(x+3)(x+6)=\{(x+1)(x+3)\}\{(x-2)(x+6)\}$
$=(x^2+4x+3)(x^2+4x-12)$

$x^2+4x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X+3)(X-12)=X^2-9X-36=(x^2+4x)^2-9(x^2+4x)-36$
$=x^4+8x^3+16x^2-9x^2-36x-36$
$=x^4+8x^3+7x^2-36x-36$

답 풀이 참조

정답 및 풀이 • 3쪽

유제 005-1 다음 식을 전개하여라.

(1) $(a-1)^3(a^2+a+1)^3$

(2) $(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

(3) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$

(4) $(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)$

(5) $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

대표유형 006 곱셈 공식의 활용

• 개념 008

0.998^3을 계산하였을 때, 소수점 아래 첫째 자리의 숫자를 x, 둘째 자리의 숫자를 y, 셋째 자리의 숫자를 z라 하자. 이때 $x+y+z$의 값을 구하여라.

유형 Guide 0.998을 직접 곱하여 문제를 해결하는 것은 어리석은 방법일 뿐만 아니라 서술형의 경우 점수를 제대로 받을 수 없다. 큰 수의 계산이나 복잡한 수의 계산은 곱셈 공식을 이용하면 간단히 해결할 수 있는 경우가 많다.

유형 SSEN 복잡한 수의 계산 ➡ 곱셈 공식 이용!

풀이

$$\begin{aligned}0.998^3&=(1-0.002)^3\\&=1^3-3\times1^2\times0.002+\underline{3\times1\times0.002^2-0.002^3}\\&=1-0.006+\cdots\\&=0.994\cdots\end{aligned}$$

소수점 아래 첫째, 둘째, 셋째 자리의 숫자에 영향을 미치지 못한다.

따라서 $x=9$, $y=9$, $z=4$이므로

$x+y+z=22$

답 22

정답 및 풀이 • 3쪽

유제 006-1 1.002^3을 계산하였을 때, 소수점 아래 셋째 자리의 숫자를 구하여라.

유제 006-2 $(5+4)(5^2+4^2)(5^4+4^4)$을 간단히 하면?

① 5^6+4^6　② 5^8-4^8　③ 5^8+4^8　④ $5^{16}-4^{16}$　⑤ $5^{16}+4^{16}$

개념 009

곱셈 공식의 변형

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$, $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

② $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

③ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

④ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

⑤ $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

⑥ $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

Remark ①~⑥의 각 우변을 전개하거나 정리하여 좌변이 되는지를 각자 확인해보기 바란다.

개념 Approach

$f(x,\ y)=x-y^2$에서 x, y를 서로 바꾸어 대입하면 $f(y,\ x)=y-x^2$이다. 이렇게 일반적으로는 $f(x,\ y)\neq f(y,\ x)$이다. 그런데 특별히 $f(x,\ y)=f(y,\ x)$가 성립하는 식 $f(x,\ y)$를 x, y에 대한 **대칭식**이라 한다. 예를 들어 다항식 a^2+b^2에서 문자 a, b를 서로 바꾸어 대입하면 b^2+a^2이므로 처음의 식과 같다. 이와 같이 대칭식은 문자를 서로 바꾸어 대입해도 변하지 않는 식이다.

보통 대칭식은

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

와 같이 두 문자의 합과 곱, 즉 $a+b$와 ab를 이용하여 나타낼 수 있으므로 합과 곱의 값을 알면 대칭식의 값을 구할 수 있다. 이때 위의 '곱셈 공식의 변형'이 많이 이용된다.

Remark $f(x,\ y)$는 x, y를 포함하는 식으로 생각하면 된다.

개념 SSEN 대칭식의 값 ⟶ 합과 곱의 값을 이용!

개념 Check

다음에 답하여라.

(1) $a+b=6$, $ab=5$일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.

(2) $x+y=2$, $xy=-2$일 때, x^2+y^2, x^3+y^3의 값을 차례로 구하여라.

(3) $a+b+c=2$, $ab+bc+ca=-1$일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

풀이 (1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=6^2-2\cdot5=26$

(2) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=2^2-2\cdot(-2)=8$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=2^3-3\cdot(-2)\cdot2=20$

(3) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=2^2-2\cdot(-1)=6$

답 (1) 26 (2) 8, 20 (3) 6

대표유형 007 곱셈 공식의 변형

• 개념 009

다음을 구하여라.

(1) $x+y=6$, $x^2+y^2=28$일 때, x^3+y^3의 값

(2) $x^2+\frac{1}{x^2}=23$일 때, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값 (단, $x>0$)

(3) $x+y+z=5$, $x^2+y^2+z^2=13$, $xyz=\frac{1}{3}$일 때, $x^3+y^3+z^3$의 값

유형 Guide (1) x^3+y^3의 값을 구하려면 $x+y$, xy의 값을 알아야 하는데 $x+y$의 값이 주어져 있으므로 먼저 x^2+y^2의 값을 이용하여 xy의 값을 구한다.

(2) $x\cdot\frac{1}{x}=1$이므로 $x^2+\frac{1}{x^2}$의 값을 이용하여 $x+\frac{1}{x}$의 값을 구한다.

(3) (1)과 같은 방법으로 먼저 $xy+yz+zx$의 값을 구한다.

유형 SSEN x, y에 대한 식의 값 ○ 조건을 이용할 수 있도록 식을 변형!

풀이 (1) $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$에서 $\quad 6^2=28+2xy \quad \therefore xy=4$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=6^3-3\cdot4\cdot6=144$

(2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=23+2=25$이므로 $\quad x+\frac{1}{x}=5\ (\because x>0)$

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=5^3-3\cdot5=110$

(3) $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에서

$5^2=13+2(xy+yz+zx) \quad \therefore xy+yz+zx=6$

$\therefore x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$=5\cdot(13-6)+3\cdot\frac{1}{3}=36$

답 (1) 144 (2) 110 (3) 36

정답 및 풀이 • 3쪽

유제 007-1 다음을 구하여라.

(1) $x^2+y^2=14$, $xy=5$일 때, x^3-y^3의 값 (단, $x>y$)

(2) $x+y+z=-9$, $xy+yz+zx=-33$, $xyz=-3$일 때, $\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}$의 값

(3) $x+y+z=6$, $x^2+y^2+z^2=52$, $x^3+y^3+z^3=324$일 때, xyz의 값

Plus 유제 007-2 $x-y=2+\sqrt{7}$, $y-z=2-\sqrt{7}$일 때, $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$의 값을 구하여라.

개념 010 (다항식)÷(단항식)의 계산

$a+b$를 다항식, $m\,(m\neq0)$을 단항식이라 할 때, (다항식)÷(단항식)은 다음과 같은 방법으로 계산한다.

$$(a+b)\div m=(a+b)\times\frac{1}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}$$

개념 Approach

(다항식)÷(단항식)의 계산은 나누는 식의 역수를 곱하여 계산한다. 이때 다음의 지수법칙을 이용하는 경우가 많다.

$a\neq0$이고, m, n이 자연수일 때,

$$a^m\div a^n=\begin{cases} a^{m-n} & (m>n\text{일 때})\\ 1 & (m=n\text{일 때})\\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n\text{일 때})\end{cases}$$

개념 Check

다음 식을 계산하여라.

(1) $(6x^2yz^2-7xy^7z^5)\div(3xyz^2)$ (2) $(3ab^4c^4-2ab^3c+ab^2c^2)\div(ab^2c)$

풀이 (1) $(6x^2yz^2-7xy^7z^5)\div(3xyz^2)=\dfrac{6x^2yz^2}{3xyz^2}-\dfrac{7xy^7z^5}{3xyz^2}$

$=2x-\dfrac{7}{3}y^6z^3$

(2) $(3ab^4c^4-2ab^3c+ab^2c^2)\div(ab^2c)=\dfrac{3ab^4c^4}{ab^2c}-\dfrac{2ab^3c}{ab^2c}+\dfrac{ab^2c^2}{ab^2c}$

$=3b^2c^3-2b+c$

답 (1) $2x-\dfrac{7}{3}y^6z^3$ (2) $3b^2c^3-2b+c$

개념 011 (다항식)÷(다항식)의 계산

(다항식)÷(다항식)은 먼저 주어진 다항식을 내림차순으로 정리한 후 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.
예를 들어 $(2x^2+9x+7)\div(x+3)$을 계산하면 다음과 같다.

계수만 쓰면

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x+3 \quad \Leftarrow \text{몫} : 2x+3 \\
\hline
x+3 & 2x^2+9x+7 \\
 & 2x^2+6x \quad \Leftarrow (x+3)\times 2x \\
\hline
 & \quad\ \ 3x+7 \\
 & \quad\ \ 3x+9 \quad \Leftarrow (x+3)\times 3 \\
\hline
 & \qquad\ \ -2 \quad \Leftarrow \text{나머지} : -2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrr}
 & 2 & 3 & \quad \Leftarrow \text{몫} : 2x+3 \\
\hline
1\ \ 3 & 2 & 9 & 7 \\
 & 2 & 6 & \\
\hline
 & & 3 & 7 \\
 & & 3 & 9 \\
\hline
 & & & -2 \quad \Leftarrow \text{나머지} : -2
\end{array}$$

Remark 다항식의 나눗셈은 자연수의 나눗셈과 다르게 나머지가 음의 상수인 경우도 있다.

개념 Approach

자연수의 나눗셈에서 자릿수를 맞춰서 계산하듯이 다항식의 나눗셈에서는 다항식을 내림차순으로 정리한 후, 차수를 맞춰서 계산해야 한다. 이때 항이 없는 차수는 그 자리를 비워 두고 계산하고, 계수만 이용하여 나누는 경우에는 그 자리에 0을 적고 계산한다.
또 자연수의 나눗셈에서 나머지가 나누는 수보다 작듯이 다항식의 나눗셈에서는 나머지의 차수가 나누는 식의 차수보다 작아야 한다. 따라서 나머지의 차수가 나누는 식의 차수보다 작을 때까지 나눈다.

개념 Check

다항식 $2x^3-5x^2-1$을 $2x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하여라.

풀이

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-2x-1 \\
\hline
2x-1 & 2x^3-5x^2 \qquad -1 \\
 & 2x^3-\ x^2 \\
\hline
 & \quad -4x^2 \\
 & \quad -4x^2+2x \\
\hline
 & \qquad\quad -2x-1 \\
 & \qquad\quad -2x+1 \\
\hline
 & \qquad\qquad\ \ -2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -1 & \\
\hline
2\ \ -1 & 2 & -5 & 0 & -1 \\
 & 2 & -1 & & \\
\hline
 & & -4 & 0 & \\
 & & -4 & 2 & \\
\hline
 & & & -2 & -1 \\
 & & & -2 & 1 \\
\hline
 & & & & -2
\end{array}$$

답 몫 : x^2-2x-1, 나머지 : -2

개념 012 다항식의 나눗셈에 대한 등식

다항식 A를 다항식 $B\,(B\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 다음 등식이 성립한다.

$$\begin{array}{r|l} & Q \\ \hline B) & A \\ & BQ \\ \hline & A-BQ=R \end{array}$$

$$\boldsymbol{A=BQ+R} \text{ (단, (}R\text{의 차수)}<\text{(}B\text{의 차수))}$$

특히 $R=0$이면 A는 B로 나누어떨어진다고 한다.

Remark Q, R는 각각 몫과 나머지를 뜻하는 영어 quotient와 remainder의 첫 글자를 따온 것이다.

개념 Approach

자연수 a를 자연수 b로 나누었을 때의 몫을 q, 나머지를 r라 하면 다음 등식이 성립한다.

$$\begin{array}{r|l} & q \\ \hline b) & a \\ & bq \\ \hline & a-bq=r \end{array}$$

$$a=bq+r \text{ (단, } 0\leq r<b)$$

특히 $r=0$이면 a는 b로 나누어떨어진다고 한다.

다항식의 나눗셈에서도 이와 같은 등식이 성립한다.

개념 011에서 다항식 $2x^2+9x+7$을 $x+3$으로 나누었을 때의 몫이 $2x+3$, 나머지가 -2이므로

$$2x^2+9x+7=(x+3)(2x+3)-2$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이 등식의 우변을 정리하면 좌변이 됨은 확인하기 바란다.

다항식의 나눗셈에 대한 등식을 세울 때, 나머지를 모르는 경우에는 나누는 식의 차수에 따라 나머지를 다른 꼴로 놓아야 한다. 즉 나머지의 차수는 나누는 식의 차수보다 작아야 하므로 x에 대한 다항식을 x에 대한 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 $ax+b$ (a, b는 상수) 꼴로 놓고, x에 대한 삼차식으로 나누었을 때의 나머지는 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수) 꼴로 놓는다.

Remark x에 대한 다항식을 x에 대한 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 x에 대한 일차식 또는 상수이다. 즉 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면
(i) $a\neq 0$ ➡ 나머지는 일차식
(ii) $a=0$ ➡ 나머지는 상수

개념 Check

다항식 $f(x)$를 $2x-3$으로 나누었을 때의 몫이 x^2+x-1이고 나머지가 3일 때, $f(x)$를 구하여라.

풀이 다항식 $f(x)$를 $2x-3$으로 나누었을 때의 몫이 x^2+x-1, 나머지가 3이므로

$$\begin{aligned} f(x)&=(2x-3)(x^2+x-1)+3 \\ &=2x^3+2x^2-2x-3x^2-3x+3+3 \\ &=2x^3-x^2-5x+6 \end{aligned}$$

답 $2x^3-x^2-5x+6$

대표유형 008 다항식의 나눗셈 • 개념 011, 012

다항식 x^3+x^2-6x+3을 다항식 A로 나누었을 때의 몫이 $x-2$이고 나머지가 $2x-1$일 때, A를 구하여라.

유형 Guide 다항식의 나눗셈에서 출제되는 대부분의 문제는 다항식의 나눗셈에 대한 등식을 이용하면 해결할 수 있다. 즉 다항식 A를 다항식 $B(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$A=BQ+R$ (단, (R의 차수)<(B의 차수))

가 성립함을 이용한다.

유형 SSEN **$A\div B$의 몫이 Q, 나머지가 R ⊙ $A=BQ+R$**

풀이 다항식 x^3+x^2-6x+3을 다항식 A로 나누었을 때의 몫이 $x-2$, 나머지가 $2x-1$이므로

$x^3+x^2-6x+3=A(x-2)+2x-1$

$A(x-2)=x^3+x^2-6x+3-(2x-1)$

$=x^3+x^2-8x+4$

$\therefore A=(x^3+x^2-8x+4)\div(x-2)$

$=x^2+3x-2$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+3x-2 \\ \hline
x-2 & x^3+x^2-8x+4 \\
 & x^3-2x^2 \\ \hline
 & 3x^2-8x \\
 & 3x^2-6x \\ \hline
 & -2x+4 \\
 & -2x+4 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

답 x^2+3x-2

정답 및 풀이 • 4쪽

유제 008-1 다항식 $2x^3-3x^2-4x-4$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$이고 나머지가 -3일 때, $Q(-1)$의 값을 구하여라.

유제 008-2 다항식 x^3-4x^2+5x+1을 다항식 A로 나누었을 때의 몫이 $x+1$이고 나머지가 $10x+1$일 때, A를 구하여라.

Plus 유제 008-3 다항식 A를 x^2+2로 나누었을 때의 몫이 $5x-2$이고 나머지가 $-6x+5$일 때, 다항식 A를 x^2-2로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하여라.

개념 013 조립제법

다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$ 꼴의 일차식으로 나눌 때에는 나눗셈을 직접하지 않고 계수만을 사용하여 몫과 나머지를 구할 수 있는데, 이 방법을 **조립제법**이라 한다.

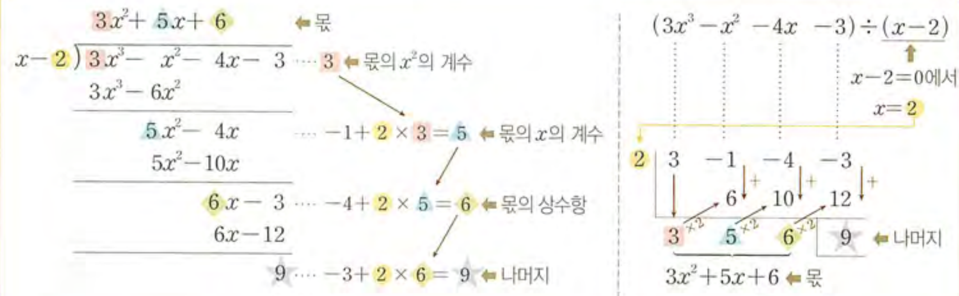
조립제법을 이용하여 $(3x^3-x^2-4x-3)\div(x-2)$의 몫과 나머지를 구해 보자.

(i) 다항식 $3x^3-x^2-4x-3$의 계수를 첫째 줄에 차례로 적는다.

(ii) $x-2=0$을 만족시키는 x의 값 2를 맨 왼쪽에 적고 $3x^3-x^2-4x-3$의 최고차항의 계수 3을 셋째 줄에 내려 적는다.

(iii) (ii)에서 적은 두 수 2와 3의 곱 6을 첫째 줄의 -1 아래에 적고, -1과 6의 합 5를 6 아래에 적는다.

(iv) (iii)과 같은 과정을 계속할 때, 셋째 줄에 적힌 수 중 맨 오른쪽에 있는 수가 나머지이고, 그 수를 제외한 나머지 수가 몫의 계수이다.



개념 Approach

위에서 나눗셈을 직접할 때에는 윗식에서 아랫식을 뺐다. 그러나 조립제법에서는 나누는 식 $x-2$의 상수항의 부호를 -2에서 2로 바꾸었으므로 위의 수와 아래의 수를 더한다.

Remark 나누어지는 다항식의 계수를 나열할 때, 항이 없는 차수는 그 자리에 0을 적는다.

개념 Check

조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하여라.

(1) $(x^3-4x^2+2x-1)\div(x-3)$ (2) $(2x^3-5x^2-1)\div\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

풀이 (1)
$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -4 & 2 & -1 \\ & & 3 & -3 & -3 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & \boxed{-4} \end{array}$$
$\therefore$ 몫 : x^2-x-1, 나머지 : -4

(2)
$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & -5 & 0 & -1 \\ & & 1 & -2 & -1 \\ \hline & 2 & -4 & -2 & \boxed{-2} \end{array}$$
$\therefore$ 몫 : $2x^2-4x-2$, 나머지 : -2

답 풀이 참조

특강 014

조립제법의 확장

27쪽의 개념 **Check**와 30쪽의 개념 **Check** (2)를 비교해 보자.

$(2x^3-5x^2-1)\div(2x-1)$ ➡ 몫 : x^2-2x-1, 나머지 : -2

$(2x^3-5x^2-1)\div\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ ➡ 몫 : $2x^2-4x-2$, 나머지 : -2

위의 식을 살펴보면 나누는 식이 $2x-1$에서 $x-\dfrac{1}{2}$로 $\dfrac{1}{2}$배가 되었을 때, 몫은 x^2-2x-1에서 $2x^2-4x-2$로 2배가 되었고, 나머지는 변하지 않았음을 알 수 있다.

이상의 성질을 일반화하면 다음과 같은 관계를 알 수 있다.

> 다항식 $f(x)$에 대하여
>
> ($f(x)$를 $ax+b$로 나눈 몫)$=\left(f(x)\text{를 } x+\dfrac{b}{a}\text{로 나눈 몫의 } \dfrac{1}{a}\text{배}\right)$
>
> ($f(x)$를 $ax+b$로 나눈 나머지)$=\left(f(x)\text{를 } x+\dfrac{b}{a}\text{로 나눈 나머지}\right)$

그 이유는 다음 등식에서 알 수 있다.

$f(x)$를 $x+\dfrac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$f(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)\cdot Q(x)+R=(ax+b)\cdot\left(\frac{1}{a}Q(x)\right)+R$$

몫은 $\frac{1}{a}Q(x)$

나머지는 같다.

따라서 조립제법은 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$ 꼴로 나눌 때뿐만 아니라, 다항식 $f(x)$를 $ax+b$ $(a\neq0)$와 같은 일차식의 꼴로 나눌 때에도 유용함을 알 수 있다.

개념 SSEN | 일차식으로 나눈 몫과 나머지 ⟶ 조립제법 이용!

개념 Check

조립제법을 이용하여 $(x^3+3x^2+2x-1)\div(2x+6)$의 몫과 나머지를 구하여라.

풀이 $2x+6=2(x+3)$이고 x^3+3x^2+2x-1을 $x+3$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ & & -3 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & \boxed{-7} \end{array}$$

몫 : x^2+2, 나머지 : -7

따라서 x^3+3x^2+2x-1을 $2x+6$으로 나누었을 때의 몫과 나머지는

몫 : $\dfrac{1}{2}x^2+1$, 나머지 : -7

답 풀이 참조

대표유형 009 조립제법의 활용

• 개념 013 • 특강 014

다항식 $f(x)=2x^3+x^2-1$에 대하여 다음에 답하여라.

(1) $f(x)$를 $a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 꼴로 나타내었을 때, 상수 a, b, c, d의 값을 구하여라.

(2) (1)의 결과를 이용하여 $f(-0.9)$의 값을 구하여라.

유형 Guide 다항식 $f(x)$를 $f(x)=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 꼴로 나타내는 것을 $x+1$에 대하여 내림차순으로 정리한다고 한다.
a, b, c, d의 값은 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x+1$로 계속 나누어 가면서 구할 수 있다.

유형 SSEN $x+a$에 대하여 내림차순으로 정리 ○ 조립제법을 반복하여 이용!

풀이

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\
 & & -2 & 1 & -1 \\ \hline
-1 & 2 & -1 & 1 & \boxed{-2}\ \cdots ① \\
 & & -2 & 3 & \\ \hline
-1 & 2 & -3 & \boxed{4}\ \cdots ② & \\
 & & -2 & & \\ \hline
 & 2 & \boxed{-5}\ \cdots ③ & &
\end{array}$$

(1) ①에서 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2-x+1$, 나머지는 -2이므로

$f(x)=(x+1)(2x^2-x+1)-2$ $\cdots$ ㉠

②에서 $2x^2-x+1$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 $2x-3$, 나머지는 4이므로

$2x^2-x+1=(x+1)(2x-3)+4$

이것을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x+1)\{(x+1)(2x-3)+4\}-2$

$=(x+1)^2(2x-3)+4(x+1)-2$ $\cdots$ ㉡

③에서 $2x-3$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 2, 나머지는 -5이므로

$2x-3=2(x+1)-5$

이것을 ㉡에 대입하면

$f(x)=(x+1)^2\{2(x+1)-5\}+4(x+1)-2$

$=2(x+1)^3-5(x+1)^2+4(x+1)-2$

$\therefore a=2,\ b=-5,\ c=4,\ d=-2$

(2) $f(x)=2(x+1)^3-5(x+1)^2+4(x+1)-2$이므로

$f(-0.9)=2\times0.1^3-5\times0.1^2+4\times0.1-2$

$=0.002-0.05+0.4-2=-1.648$

답 (1) $a=2,\ b=-5,\ c=4,\ d=-2$ (2) -1.648

정답 및 풀이 • 5쪽

유제 009-1 다항식 $f(x)=x^3-3x^2-4x+1$에 대하여 다음에 답하여라.

(1) $f(x)$를 $a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$ 꼴로 나타내었을 때, 상수 a, b, c, d의 값을 구하여라.

(2) (1)의 결과를 이용하여 $f(1.9)$의 값을 구하여라.

중단원 연습 문제

정답 및 풀이 • 5쪽

STEP 1 유형 Training

01 x에 대한 다항식 $(3x^2+x-4)(x^2+2x+k)$의 전개식에서 x의 계수가 8일 때, x^2의 계수는? (단, k는 상수이다.)

① 42 ② 46 ③ 50 ④ 54 ⑤ 58

02 $x^8=40$일 때, $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$의 값을 구하여라.

03 $(x+1)(x+2)(x+4)(x+8)$의 전개식에서 모든 항의 계수와 상수항의 합은?

① 45 ② 90 ③ 180 ④ 270 ⑤ 360

04 $x+y=-1$, $x^3+y^3=-7$일 때, x^2+y^2의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

05 다항식 $3x^3+4x^2-x-2$를 x^2+x-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하자. 이때 $Q(1)+R(2)$의 값을 구하여라.

서술형

06 다항식 $12x^3+47x^2+10x-60$을 다항식 A로 나누었을 때의 몫이 $4x+9$, 나머지가 $-3x+12$일 때, 다항식 A에서 x의 계수를 구하여라.

STEP 2 실전 Application

07 두 다항식 A, B에 대하여

$$A+B=3x^2-2xy+y^2,\ A-B=x^2-4xy+3y^2$$

일 때, $A-3B$를 x, y에 대한 식으로 나타내어라.

평가원기출

08 세 다항식 A, B, C에 대하여

$$A+B=3a^2-ab-b^2,\ B+C=2a^2+3ab+2b^2,\ C+A=a^2-6ab+3b^2$$

일 때, 세 다항식의 합 $A+B+C$는?

① $-3a^2+4ab+b^2$　② $-a^2-5ab+2b^2$　③ $a^2+3ab+4b^2$
④ $3a^2-2ab+2b^2$　⑤ $5a^2+ab+4b^2$

09 $(2-1)(2^9+2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1)$의 전개식을 이용하여 $2^9+2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1$을 계산하면?

① 1023　② 1024　③ 1026　④ 2046　⑤ 2048

교육청기출

10 두 다항식 $A=x^3+x+4$, $B=x+4$에 대하여 A^3-B^3의 전개식에서 x^3의 계수를 구하여라.

서술형

11 x에 대한 두 다항식

$$f(x)=a(x-2)^3+b(x-2)^2+a(x-2)+b,\ g(x)=ab(x-3)^3+1$$

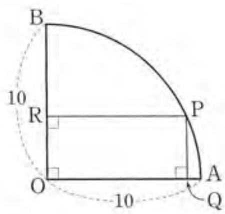
의 전개식에서 $f(x)$, $g(x)$의 모든 항의 계수와 상수항의 합이 각각 6, 9일 때, x에 대한 다항식 $h(x)=a^3x-b^3+1$의 x의 계수와 상수항의 합을 구하여라.

12 $(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)=\dfrac{3^n-1}{m}$을 만족시키는 자연수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은? (단, $1\leq m\leq 9$)

① 18　② 21　③ 24　④ 27　⑤ 30

서술형

13 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 10이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 OAB의 호 AB 위의 한 점 P에서 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하자. $\overline{PQ}\cdot\overline{PR}=22$일 때, $\overline{PQ}+\overline{PR}$의 값을 구하여라.



서술형

14 $a+b+c=7$, $a^2+b^2+c^2=45$일 때, $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$의 값을 구하여라.

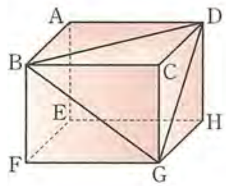
15 $x+y+z=6$, $x^2+y^2+z^2=12$일 때,

$$(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)$$

의 값을 구하여라.

서술형

16 오른쪽 그림과 같이 겉넓이가 22인 직육면체에서 △BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합이 28일 때, 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합을 구하여라.



17 $x+y=2+\sqrt{3}$, $y+z=2-\sqrt{3}$일 때, $x^2+y^2+z^2+xy+yz-zx$의 값은?

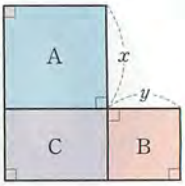
① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

18 $x^2-x-1=0$일 때, $4x^4+2x^3-8x^2-8x-5$의 값을 구하여라.

정답 및 풀이 • 7쪽

STEP 3 심화 Forwarding

19 오른쪽 그림은 서로 연결되어 있는 세 건물 A, B, C의 평면도이다. 평면도에서 두 건물 A, B는 한 변의 길이가 각각 x, y인 정사각형 모양이고, 건물 C는 가로, 세로의 길이가 각각 x, y인 직사각형 모양이다. 평면도에서 건물 C는 둘레의 길이가 20이고, 세 건물의 넓이의 합이 80일 때, 정육면체 모양의 두 건물 A, B의 부피의 합을 구하여라.



서술형

20 다음과 같은 규칙에 의하여 다항식을 좌표평면 위의 점에 대응시키려고 한다.

> 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지가 $ax+b$이면 다항식 $f(x)$를 좌표평면 위의 점 $(a,\ b)$에 대응시킨다.

예를 들어 다항식 x^2+2를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지가 1이므로 x^2+2는 점 $(0,\ 1)$에 대응된다. 이 규칙에 의하여 네 다항식

$$A=x^2-x+1,\ B=x^2+2x+1,\ C=x^3+x+3,\ D=x^3+2x+3$$

을 좌표평면 위에 대응시킨 점을 각각 P, Q, R, S라 할 때, 사각형 PQRS의 넓이를 구하여라.

평가원기출

21 다음은 삼차다항식 P를 $x-2$로 나누어 몫과 나머지를 구하고, 몫을 다시 $x-2$로 나누는 과정을 되풀이한 것을 조립제법으로 나타낸 것이다.
이 과정을 이용하여 다항식 P를 아래와 같이 나타낼 때, $a+b+c+d$의 값은? (단, a, b, c, d는 상수이다.)

$$\begin{aligned} P&=(x-2)(x^2+\boxed{a}x)+5 \\ &=(x-2)\{(x-2)(x+\boxed{b})+\boxed{c}\}+5 \\ &=(x-2)[(x-2)\{(x-2)+\boxed{d}\}+\boxed{c}]+5 \end{aligned}$$

2	1	$\square$	2	$\square$
		2	$\square$	0
2	1	$\square$	0	5
		2	$\square$	
2	1	$\square$	$\square$	
		2		
	1	$\square$		

① -5 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 5

02

항등식과 나머지정리

항등식은 주어진 식의 문자에 어떤 값을 대입해도 항상 성립하는 등식이다. 항등식이라는 용어를 사용하지 않았지만 앞 단원에서 곱셈 공식을 이용하여 다항식을 전개하면서 우리는 이미 많은 항등식을 다루었다.
항등식을 이용하면 다항식의 나눗셈을 하지 않고도 몫과 나머지를 쉽게 구할 수 있다.

이 단원에서는 항등식의 성질을 이용하여 미정계수를 결정하고, 다항식의 나눗셈에 대한 문제를 쉽게 해결하는 방법에 대하여 알아보자.

● 한눈에 보는 개념 & 유형 map

소단원 & 학습목표

04 항등식

- 항등식의 뜻을 이해하고, 그 성질을 이용하여 미정계수를 결정할 수 있다.

05 나머지정리

- 나머지정리와 인수정리를 이해하고, 이를 문제 해결에 활용할 수 있다.

개념 & 특강	대표유형 & 유제		
015 항등식과 방정식	010 항등식의 뜻과 성질		
016 항등식의 성질	010 항등식의 뜻과 성질		
017 미정계수법	011 미정계수법	012 다항식의 나눗셈과 항등식	
018 나머지정리	013 나머지정리	014 나머지정리의 활용(1)	015 나머지정리의 활용(2)
019 인수정리	016 인수정리		

개념 015 항등식과 방정식

등호(=)를 사용하여 수나 식이 서로 같음을 나타낸 식을 **등식**이라 한다. 등식에는 항등식과 방정식이 있다.

(1) **항등식** : 문자를 포함한 등식으로, 식에 포함된 문자가 어떤 값을 가지더라도 항상 성립하는 등식

(2) **방정식** : 문자를 포함한 등식으로, 식에 포함된 문자가 특별한 값을 가질 때에만 성립하는 등식

등식 [항등식 / 방정식

개념 Approach

$2x+3x=5x$, $x^2-1=(x+1)(x-1)$, $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, …과 같이 항상 성립하는 등식을 항등식이라 하고, $2x=3$, $x^2-3x=0$, $x+y=5$, …와 같이 가끔 성립하는 등식을 방정식이라 한다.

직접 '항등식'이라는 말이 없어도 항등식임을 나타내는 여러 가지 표현이 있다. 다음 표현은 모두 주어진 등식이 x에 대한 항등식임을 나타낸다. 한 번씩 음미해 두면 억지로 외우지 않아도 문제에서 적용할 수 있다.

모든 x에 대하여 성립 + 등식
임의의 x에 대하여 성립 + 등식
x의 값에 관계없이 항상 성립 + 등식
어떤 x의 값에 대해서도 성립 + 등식
➡ x에 대한 항등식

Remark 어떤 등식이 항등식인지 방정식인지 알아볼 때에는 먼저 식을 간단히 정리한다.

개념 SSEN
항등식 ⟶ 항상 성립하는 등식
방정식 ⟶ 가끔 성립하는 등식

개념 Check

다음 등식을 항등식과 방정식으로 구분하여 말하여라.

(1) $x-4=-x+4$ (2) $(x-1)(x+3)=x^2+2x-3$

풀이 (1) 주어진 식을 정리하면 $2x=8$
이 등식은 $x=4$일 때에만 성립하므로 방정식이다.
(2) 주어진 식을 정리하면 $x^2+2x-3=x^2+2x-3$
이 등식은 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하므로 항등식이다.

답 (1) 방정식 (2) 항등식

개념 016

항등식의 성질

(1) $\begin{cases} ax+b=0\text{이 } x\text{에 대한 항등식} \Longleftrightarrow a=0,\ b=0 \\ ax+b=a'x+b'\text{이 } x\text{에 대한 항등식} \Longleftrightarrow a=a',\ b=b' \end{cases}$

(2) $\begin{cases} ax^2+bx+c=0\text{이 } x\text{에 대한 항등식} \Longleftrightarrow a=0,\ b=0,\ c=0 \\ ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'\text{이 } x\text{에 대한 항등식} \Longleftrightarrow a=a',\ b=b',\ c=c' \end{cases}$

(3) $\begin{cases} ax+by+c=0\text{이 } x,\ y\text{에 대한 항등식} \Longleftrightarrow a=0,\ b=0,\ c=0 \\ ax+by+c=a'x+b'y+c'\text{이 } x,\ y\text{에 대한 항등식} \Longleftrightarrow a=a',\ b=b',\ c=c' \end{cases}$

Remark 기호 $\Longleftrightarrow$는 서로 같은 뜻임을 나타낸다.

개념 Approach

항등식의 성질 (1)을 확인해 보자.

① (i) $ax+b=0$이 x에 대한 항등식이면 x에 어떤 값을 대입하여도 등식이 성립한다.

$x=0$을 대입하면 $\quad a\cdot 0+b=0 \quad \therefore b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$x=1$을 대입하면 $\quad a+b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a=0,\ b=0$

(ii) 거꾸로 $a=0$, $b=0$이면 모든 x에 대하여 $ax+b=0$이 성립한다.

(i), (ii)에서 $\quad ax+b=0$이 x에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow a=0,\ b=0$

② (i) $ax+b=a'x+b'$에서 $\quad (a-a')x+(b-b')=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이 되기 위한 조건은 위의 ①에서

$a-a'=0,\ b-b'=0 \quad \therefore a=a',\ b=b'$

(ii) 거꾸로 $a=a'$, $b=b'$이면 모든 x에 대하여 $ax+b=a'x+b'$이 성립한다.

(i), (ii)에서 $\quad ax+b=a'x+b'$이 x에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow a=a',\ b=b'$

항등식의 성질 (2), (3)은 각자 확인해 보기 바란다.

Remark 항등식의 성질을 외울 필요는 없다. 간단히 '항등식은 좌 · 우변의 식이 일치' 라고 생각하면 OK!

개념 Check

다음에 답하여라.

(1) 등식 $(a+2)x^2-(3-b)x+2-c=0$이 x에 대한 항등식일 때, 상수, a, b, c의 값을 구하여라.

(2) 임의의 실수 x, y에 대하여 등식 $ax-2y+c=3x+by+1$이 성립할 때, 상수 a, b, c의 값을 구하여라.

풀이 (1) $a+2=0,\ 3-b=0,\ 2-c=0 \quad \therefore a=-2,\ b=3,\ c=2$

(2) 주어진 등식이 x, y에 대한 항등식이므로 $\quad a=3,\ b=-2,\ c=1$

답 (1) $a=-2,\ b=3,\ c=2$ (2) $a=3,\ b=-2,\ c=1$

대표유형 010 항등식의 뜻과 성질

• 개념 015, 016

등식 $ax-kx+a+k+2=0$에 대하여 다음에 답하여라.

(1) 주어진 등식이 임의의 x에 대하여 성립할 때, 상수 a, k의 값을 구하여라.

(2) 주어진 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 a, x의 값을 구하여라.

유형 Guide 주어진 등식이 임의의 x에 대하여 성립하면 x에 대한 항등식이므로 $\square x+\square=0$ 꼴로 정리하고, 임의의 k에 대하여 성립하면 k에 대한 항등식이므로 $\square k+\square=0$ 꼴로 정리한다.

유형 SSEN x에 대한 항등식 ⊙ $\square x+\square=0$ 꼴로 정리!

풀이 (1) 주어진 등식이 임의의 x에 대하여 성립하므로 x에 대한 항등식이다.

등식을 x에 대하여 정리하면

$$(a-k)x+a+k+2=0$$

위의 등식이 x에 대한 항등식이 되기 위한 조건은

$$a-k=0,\ a+k+2=0$$

이므로 두 식을 연립하여 풀면

$$a=-1,\ k=-1$$

(2) 주어진 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로 k에 대한 항등식이다.

등식을 k에 대하여 정리하면

$$(1-x)k+ax+a+2=0$$

위의 등식이 k에 대한 항등식이 되기 위한 조건은

$$1-x=0,\ ax+a+2=0$$

이므로 두 식을 연립하여 풀면

$$a=-1,\ x=1$$

답 (1) $a=-1$, $k=-1$ (2) $a=-1$, $x=1$

정답 및 풀이 • 9쪽

유제 010-1 임의의 실수 x에 대하여 등식

$$a(x-1)+b(x+1)=2x$$

가 성립하도록 하는 상수 a, b의 값을 구하여라.

유제 010-2 모든 실수 x, y에 대하여 등식

$$a(x-2y+1)+b(-2x+3y-1)-c=3x-5y+4$$

가 성립하도록 하는 상수 a, b, c의 값을 구하여라.

개념 017 미정계수법

항등식의 뜻이나 성질을 써서 등식에 포함된 미지의 계수를 정하는 방법을 **미정계수법**이라 한다. 미정계수법에는 **계수 비교법**과 **수치 대입법**의 2가지가 있다.

미정계수법 ┌ 계수 비교법
　　　　　 └ 수치 대입법

(1) **계수 비교법** : 항등식의 양변의 동류항의 계수는 서로 같다는 항등식의 성질을 이용하여 양변의 동류항의 계수를 비교하여 미정계수를 구한다.

(2) **수치 대입법** : 항등식은 문자에 어떤 값을 대입하여도 성립한다는 항등식의 뜻을 이용하여 미지의 계수의 개수만큼 적당한 수를 대입하여 미정계수를 구한다.

Remark 수치 대입법을 사용할 때에는 미정계수의 개수만큼 x의 값을 대입한다. 이때 계산이 간단한 식을 얻을 수 있는 x의 값을 택한다.

개념 Approach

'미정(未定)계수'란 아직 값이 정해지지 않은 계수를 뜻한다. 등식 $2x+a=bx-1$이 x에 대한 항등식일 때, 미정계수 a, b를 구하는 방법을 계수 비교법과 수치 대입법으로 알아보자.

(1) **계수 비교법** : 항등식의 성질에 의하여 양변의 동류항의 계수, 즉 x의 계수와 상수항이 각각 같아야 하므로　　$2=b$, $a=-1$　　$\therefore a=-1$, $b=2$

(2) **수치 대입법** : 항등식의 뜻에 의하여 x에 어떤 값을 대입하여도 등식은 성립하므로 양변에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면　　$a=-1$, $2+a=b-1$　　$\therefore a=-1$, $b=2$

Remark 'x에 대한 항등식'이면 x만 문자로 본다.

개념 SSEN

계수 비교법의 원리	⟶	양변의 동류항의 계수가 같다.
수치 대입법의 원리	⟶	문자에 어떤 수를 대입해도 등식이 성립한다.

개념 Check

등식 $a(x-2)+b(x+1)=x-5$가 x의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 a, b의 값을 계수 비교법과 수치 대입법으로 각각 구하여라.

풀이 (i) 계수 비교법 : 주어진 등식의 좌변을 정리하면

$$(a+b)x-2a+b=x-5$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$$a+b=1,\ -2a+b=-5$$

두 식을 연립하여 풀면　　$a=2$, $b=-1$

(ii) 수치 대입법 : 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=-1$을 대입하면　　$-3a=-6$　　$\therefore a=2$

양변에 $x=2$를 대입하면　　$3b=-3$　　$\therefore b=-1$

답 풀이 참조

대표유형 011 미정계수법

• 개념 017

등식 $2x^2-3x-2=ax(x+2)+bx(x-1)+c(x-1)(x+2)$가 x의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하여라.

유형 Guide '항등식'이라는 직접적인 표현이 없어도 주어진 등식이 x의 값에 관계없이 항상 성립하므로 x에 대한 항등식임을 알아챌 수 있다. 항등식의 미정계수를 결정할 때에는 계수 비교법과 수치 대입법 중 계산이 더 간단한 방법을 이용하면 되는데, 이 문제에서는 양변에 $x=0$, $x=1$, $x=-2$를 각각 대입하면 x, $x-1$, $x+2$를 포함한 항이 각각 없어지므로 수치 대입법이 좀 더 편리하다.

유형 SSEN 미정계수의 결정 ⭘ 계수 비교법과 수치 대입법 중 편리한 방법으로!

풀이 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입하여도 등식이 성립한다.

양변에 $x=0$을 대입하면 $-2=-2c$ $\therefore c=1$

양변에 $x=1$을 대입하면 $-3=3a$ $\therefore a=-1$

양변에 $x=-2$를 대입하면 $12=6b$ $\therefore b=2$

$\therefore abc=-2$

답 -2

다른풀이 주어진 등식의 우변을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$2x^2-3x-2=(a+b+c)x^2+(2a-b+c)x-2c$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$2=a+b+c,\ -3=2a-b+c,\ -2=-2c$$

세 식을 연립하여 풀면

$$a=-1,\ b=2,\ c=1$$

$$\therefore abc=-2$$

정답 및 풀이 • 9쪽

유제 011-1 모든 실수 x에 대하여 등식 $ax^3+bx^2-x+4=(x^2+x+1)(cx+4)$가 성립할 때, 상수 a, b, c의 값을 구하여라.

유제 011-2 다항식 $f(x)$에 대하여 등식 $(x+1)(x-3)f(x)=x^3+ax^2+3x+b$가 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

대표유형 012 다항식의 나눗셈과 항등식

• 개념 017

다음에 답하여라.

(1) 다항식 x^3+ax^2+bx+c를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫이 $x+1$, 나머지가 $-5x$가 되도록 하는 상수 a, b, c의 값을 구하여라.

(2) 다항식 x^3-2x^2+4x-3을 $(x-1)(x+3)$으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

유형 Guide 다항식의 나눗셈에 대한 등식 $A=BQ+R$는 항등식이므로 수치 대입법이나 계수 비교법을 이용하여 미정계수를 구할 수 있다.
이때 나누는 이차식이 (1)과 같은 경우에는 양변을 각각 x에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 계수 비교법을 이용하면 편리하고, (2)와 같은 경우에는 수치 대입법을 이용하면 편리하다.

유형 SSEN 다항식의 나눗셈에 대한 등식 ⊙ 항등식

풀이 (1) x^3+ax^2+bx+c를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫이 $x+1$, 나머지가 $-5x$이므로

$$x^3+ax^2+bx+c=(x^2+x+1)(x+1)-5x$$

우변을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^3+ax^2+bx+c=x^3+2x^2-3x+1$$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$a=2,\ b=-3,\ c=1$$

(2) x^3-2x^2+4x-3을 $(x-1)(x+3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$x^3-2x^2+4x-3=(x-1)(x+3)Q(x)+ax+b$$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=1$을 대입하면 $1-2+4-3=a+b$

$\therefore a+b=0$ ...... ㉠

양변에 $x=-3$을 대입하면 $-27-18-12-3=-3a+b$

$\therefore 3a-b=60$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=15$, $b=-15$

따라서 구하는 나머지는 $15x-15$이다.

답 (1) $a=2$, $b=-3$, $c=1$ (2) $15x-15$

정답 및 풀이 • 9쪽

유제 012-1 다항식 x^3+ax^2+bx+6이 $(x+1)(x-2)$로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

유제 012-2 다항식 x^3+ax^2-x+1을 x^2+1로 나누었을 때의 몫이 $x-1$일 때, 상수 a의 값과 나머지를 구하여라.

개념 018

나머지정리

다항식을 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구할 때, 직접 나눗셈을 하지 않고 다음 성질을 이용하여 구할 수 있는데, 이 성질을 **나머지정리**라 한다.

① x에 대한 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$이다.

② x에 대한 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지는 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$이다.

Remark $f(\alpha)=k$이면 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지가 k이다.

개념 Approach

나머지정리를 확인해 보자.

① x에 대한 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$f(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=\alpha$를 대입하면

$$f(\alpha)=(\alpha-\alpha)Q(\alpha)+R=0\cdot Q(\alpha)+R=R \qquad \therefore R=f(\alpha)$$

따라서 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$이다.

② x에 대한 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$f(x)=(ax+b)Q(x)+R$$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-\frac{b}{a}$를 대입하면

$$f\left(-\frac{b}{a}\right)=\left\{a\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right\}Q\left(-\frac{b}{a}\right)+R=0\cdot Q\left(-\frac{b}{a}\right)+R=R \qquad \therefore R=f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

따라서 $f(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지는 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$이다.

Remark 다항식을 일차식으로 나누었을 때의 나머지는 상수이므로 R로 놓을 수 있다.

개념 SSEN 일차식으로 나눈 나머지 → 나머지정리 이용!

개념 Check

x에 대한 다항식 $2x^3-x^2+3x-1$을 다음 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

(1) $x+2$ (2) $2x-1$

풀이 $f(x)=2x^3-x^2+3x-1$로 놓으면 나머지정리에 의하여 구하는 나머지는

(1) $f(-2)=-16-4-6-1=-27$

(2) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

답 (1) -27 (2) $\frac{1}{2}$

대표유형 013 나머지정리

• 개념 018

다음에 답하여라.

(1) x에 대한 다항식 x^3+3x^2+ax+1을 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 9일 때, 이 다항식을 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

(2) x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 1이고, $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 9일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

유형 Guide 다항식의 나눗셈에서 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하거나 나머지가 주어진 경우, 이제 직접 나눗셈을 할 필요가 없다. 나머지정리라는 강력한 무기를 이용하면 간단히 해결할 수 있다.

유형 SSEN **다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지 ⊙ $f(a)$**

풀이 (1) $f(x)=x^3+3x^2+ax+1$로 놓으면 나머지정리에 의하여 $f(-2)=9$이므로

$-8+12-2a+1=9 \qquad \therefore a=-2$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-2x+1$이므로 $f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(-3)=-27+27+6+1=7$

(2) $f(x)=x^3+ax^2+bx+3$으로 놓으면 나머지정리에 의하여 $f(-1)=1$, $f(3)=9$이므로

$-1+a-b+3=1$, $27+9a+3b+3=9$

$\therefore a-b=-1$, $3a+b=-7$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=-1$

답 (1) 7 (2) $a=-2$, $b=-1$

정답 및 풀이 • 10쪽

유제 013-1 x에 대한 다항식 $x^4-2ax^3+ax^2-3x-7$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 15일 때, 이 다항식을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

유제 013-2 x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx-5를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 -1, $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 1일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

대표유형 014 나머지정리의 활용 (1)

• 개념 018

다항식 $f(x)$를 $x+4$로 나누었을 때의 나머지가 -7이고, $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 7이다. 다항식 $f(x)$를 $(x+4)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

유형 Guide 다항식 $f(x)$를 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 일차 이하의 다항식이다. 따라서 $f(x)$를 $(x+4)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓은 다음 나머지정리를 적용한다.

유형 SSEN 다항식 $f(x)$를 이차식으로 나누었을 때의 나머지 ⊙ $ax+b$로 놓는다.

풀이 $f(x)$를 $(x+4)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$f(x)=(x+4)(x-3)Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots ㉠$$

다항식 $f(x)$를 $x+4$로 나누면 나머지가 -7이고, $x-3$으로 나누면 나머지가 7이므로 나머지정리에 의하여

$$f(-4)=-7,\ f(3)=7$$

㉠의 양변에 $x=-4$, $x=3$을 각각 대입하면

$$f(-4)=-4a+b,\ f(3)=3a+b$$

$$\therefore\ -4a+b=-7,\ 3a+b=7$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=2,\ b=1$$

따라서 구하는 나머지는 $2x+1$이다.

답 $2x+1$

정답 및 풀이 • 10쪽

유제 014-1 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 12이고, $x-4$로 나누었을 때의 나머지가 -3이다. 다항식 $f(x)$를 $(x+1)(x-4)$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

유제 014-2 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 -8, $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 4이고, x^2+x-2로 나누었을 때의 몫은 x^2+2x-5라고 한다. 이때 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

대표유형 015 나머지정리의 활용 (2)

• 개념 018

다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 3일 때, 다항식 $xf(x-2)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

유형 Guide $g(x)=xf(x-2)$로 놓으면 구하는 나머지는 나머지정리에 의하여 $g(4)$이다.
주어진 조건에서 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지, 즉 $f(2)$가 3임을 이용하면

$$g(4)=4f(4-2)=4f(2)$$

의 값을 구할 수 있다.

유형 SSEN 다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지가 k ⊙ $f(a)=k$

풀이 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 나머지정리에 의하여

$$f(2)=3$$

한편 $xf(x-2)$를 $x-4$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$xf(x-2)=(x-4)Q(x)+R$$

양변에 $x=4$를 대입하면

$$R=4f(2)=4\cdot3=12$$

따라서 구하는 나머지는 12이다.

답 12

정답 및 풀이 • 11쪽

유제 015-1 다항식 $f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 -3일 때, 다항식 $f(x+3)$을 $x+6$으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

유제 015-2 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 각각 -2, 3일 때, 다항식 $3f(x)-2g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

Plus 유제 015-3 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -3이고, 다항식 $Q(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 1일 때, $f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

개념 019 인수정리

나머지정리에 의하여 다음과 같은 **인수정리**가 성립한다.

x에 대한 다항식 $f(x)$에 대하여
① $f(x)$가 일차식 $x-a$로 나누어떨어지면 $f(a)=0$이다.
② $f(a)=0$이면 $f(x)$는 $x-a$로 나누어떨어진다.

Remark 다음은 모두 $f(a)=0$임을 나타낸다.
- 다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지가 0이다.
- 다항식 $f(x)$가 $x-a$로 나누어떨어진다.
- 다항식 $f(x)$는 $x-a$를 인수로 갖는다.
- $f(x)=(x-a)Q(x)$

개념 Approach

나머지정리에 의하여 다항식 $f(x)$가 일차식 $x-a$로 나누어떨어지면 $f(a)=0$이고, 거꾸로 $f(a)=0$이면 $f(x)$는 일차식 $x-a$로 나누어떨어진다. 따라서 위와 같은 인수정리를 얻을 수 있다.
인수정리를 이용하면 직접 나눗셈을 하지 않고도 다항식이 어떤 일차식으로 나누어떨어지는지를 쉽게 알 수 있다.
예를 들어 다항식 $f(x)=x^2-x-2$에서

$$f(2)=4-2-2=0$$

이므로 인수정리에 의하여 $f(x)$는 $x-2$로 나누어떨어진다. 즉 $f(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.
또한 $f(-1)=0$이므로 $x+1$도 $f(x)$의 인수이다.
따라서 $f(x)=(x-2)(x+1)$로 인수분해된다.

Remark $A=BQ$(A, B, Q는 다항식)와 같이 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것을 **인수분해**라 하고, 이때 곱을 이루는 각 다항식을 원래 다항식의 **인수**라 한다.
다항식 $f(x)$가 $x-a$로 나누어떨어진다는 것은 $f(x)$가 $f(x)=(x-a)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식)로 표현된다는 것으로, $f(x)$가 $x-a$를 인수로 가짐을 의미한다.
따라서 인수정리는 다항식을 인수분해할 때 사용하면 편리하다.

개념 SSEN 다항식 $f(x)$가 $x-a$를 인수로 갖는다. $\Longleftrightarrow$ $f(a)=0$

개념 Check

다항식 $f(x)=x^3+4x^2-6x+a$가 $x-1$로 나누어떨어지도록 상수 a의 값을 정하여라.

풀이 인수정리에 의하여 $f(1)=0$이어야 하므로

$$1+4-6+a=0 \qquad \therefore a=1$$

답 1

대표유형 016 인수정리

• 개념 019

x에 대한 다항식 $2x^3+5x^2+ax+b$가 $(x+1)(x+3)$을 인수로 가질 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

유형 Guide 다항식 $f(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어지면, 즉 $x-\alpha$를 인수로 가지면 인수정리에 의하여 $f(\alpha)=0$이다. 문제에서 주어진 인수가 일차식의 곱의 꼴이므로 각 일차식에 대하여 인수정리를 이용할 수 있다.

유형 SSEN **다항식 $f(x)$가 $(x-\alpha)(x-\beta)$를 인수로 갖는다. ➡ $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$**

풀이 $f(x)=2x^3+5x^2+ax+b$로 놓으면 $f(x)$는 $(x+1)(x+3)$을 인수로 갖는다.
따라서 $f(x)$는 $x+1$, $x+3$으로 각각 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(-1)=0$, $f(-3)=0$

$f(-1)=0$에서 $-2+5-a+b=0$

$\therefore a-b=3$ ...... ㉠

$f(-3)=0$에서 $-54+45-3a+b=0$

$\therefore 3a-b=-9$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-6$, $b=-9$

답 $a=-6$, $b=-9$

정답 및 풀이 • 11쪽

유제 016-1 x에 대한 다항식 $3x^3+ax^2+bx+6$이 $x+2$, $x-3$으로 각각 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

유제 016-2 다항식 $f(x)=x^3-x^2+ax+3$에 대하여 $f(x-1)$이 $x+2$로 나누어떨어질 때, 상수 a의 값을 구하여라.

중단원 연습 문제

STEP 1 유형 Training

01 등식 $(k+3)x+3k-x+a=0$이 k의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 a의 값은?

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

02 모든 실수 x에 대하여 등식 $x^3+ax^2-24=(x+b)(x^2+cx-6)$이 성립할 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

03 x에 대한 다항식 $x^{100}+ax^{10}+bx$를 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 나머지가 $x+2$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

04 x에 대한 다항식 x^3-ax^2+3x-2를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지와 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 서로 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

서술형

05 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는 5이고, $x-1$로 나눈 나머지는 3이다. $f(x)$를 x^2-1로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(5)$의 값을 구하여라.

06 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지가 $4x+3$일 때, $f(2x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는?

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

STEP 2 실전 Application

07 임의의 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^2=f(x^2)-2f(x)$를 만족시키는 일차식 $f(x)$를 구하여라.

08 $x+y=2$를 만족시키는 임의의 실수 x, y에 대하여 등식 $axy+bx+cy+1=0$이 성립할 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a-b-c$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

서술형

09 x에 대한 이차방정식 $x^2+(k+2)x+(k-1)p+q-1=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 $x=1$을 근으로 가질 때, 상수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하여라.

서술형

10 $x\neq\dfrac{3}{2}$일 때, $\dfrac{a+4x}{3-2x}$의 값은 x의 값에 관계없이 항상 일정하다. 이때 상수 a의 값을 구하여라.

교육청기출

11 자연수 n에 대하여 n차 다항식 $P_n(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n)$이라 할 때, $2x^3-3x^2+1=a+bP_1(x)+cP_2(x)+dP_3(x)$는 x에 대한 항등식이다. 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

12 다항식 $f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3이고, $Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 2이다. $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는?

① -15　② -5　③ 5　④ 10　⑤ 15

13 다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $x+1$이고, $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 15이다. $f(x)$를 $(x-2)^2(x+2)$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

14 다음은 다항식 $f(x)=2x^{33}+4x^{66}$을 이용하여 $2^{100}+2^{200}$을 7로 나누었을 때의 나머지를 구하는 과정이다.

> $f(x)=2x^{33}+4x^{66}$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면
>
> $R=\boxed{(가)}$
>
> 이므로
>
> $f(x)=(x-1)Q(x)+\boxed{(가)}$
>
> 이 식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=\boxed{(나)}$을 대입하면
>
> $f(\boxed{(나)})=2^{100}+2^{200}$
>
> $=7Q(\boxed{(나)})+\boxed{(가)}$
>
> 따라서 $2^{100}+2^{200}$을 7로 나누었을 때의 나머지는 $\boxed{(가)}$이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 값을 각각 p, q라 할 때, p^2+q^2의 값을 구하여라.

교육청기출

15 다항식 $f(x)$를 $x^2-8x+12$로 나누었을 때의 나머지가 $2x+1$이고, $(x^2+1)f(x+3)$을 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 나머지가 $R(x)$일 때, $R(1)$의 값을 구하여라.

16 다항식 $f(x)+x$가 $x+1$, $x-2$로 각각 나누어떨어질 때, $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지는?

① $-x-1$ ② $-x$ ③ x ④ $x+1$ ⑤ $2x$

서술형

17 다항식 $f(x)=x^2-6x-10$에 대하여 서로 다른 두 실수 a, b가 $f(a)=0$, $f(b)=0$을 만족시킬 때, $f(a+b)$의 값을 구하여라.

교육청기출

18 최고차항의 계수가 1인 x에 대한 삼차다항식 $P(x)$가 서로 다른 세 자연수 a, b, c에 대하여 $P(a)=P(b)=P(c)=0$, $P(0)=-6$을 만족시킬 때, 다항식 $P(x)$를 $x-6$으로 나눈 나머지는?

① 30 ② 40 ③ 50 ④ 60 ⑤ 70

STEP 3 심화 Forwarding

19 다항식 $f(x)$에 대하여 등식 $f(x^2+x-2)=(x^2+x-4)f(x)+7$이 모든 실수 x에 대하여 성립할 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

교육청기출

20 삼차다항식 $f(x)$에 대하여 $f(x)$는 x^2+x+1로 나누어떨어지고, $f(x)+12$는 x^2+2로 나누어떨어진다. $f(0)=4$일 때, $f(1)$의 값을 구하여라.

21 다항식 $x^{10}-1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(10)$의 값은?

① 9 ② 11 ③ 81 ④ 90 ⑤ 99

22 x에 대한 다항식 x^3+3x^2+ax+b가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

서술형

23 다음 조건을 모두 만족시키는 삼차다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

(가) $f(-2)+2=f(-1)+1=f(1)-1$ (나) $f(0)=-6$, $f(2)=24$

03

인수분해

자연수를 소수의 곱으로 나타내는 것을 소인수분해라 하는 것과 같이, 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것을 인수분해라 한다.
자연수를 소인수분해하면 소인수가 갖고 있는 성질을 바탕으로 그 수의 특성을 찾아낼 수 있다. 마찬가지로 다항식도 인수분해하여 차수가 낮은 다항식의 곱으로 나타내면 그 특성을 찾아내는 데 도움이 될 뿐만 아니라 방정식의 해를 찾는 데에도 매우 유용하다.

이 단원에서는 중학교에서 배운 인수분해 공식을 포함하여 여러 가지 다항식을 인수분해하는 방법을 알아 보자.

● 한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

06 인수분해

- 인수분해 공식을 이해하고, 이를 이용하여 다항식을 인수분해할 수 있다.

07 복잡한 식의 인수분해

- 식의 변형, 치환, 인수정리, 조립제법 등을 이용하여 복잡한 다항식을 인수분해할 수 있다.

개념 & 특강 | 대표유형 & 유제

020 인수분해

021 인수분해 공식

017 다항식의 인수분해

022 인수분해의 활용

022 공통부분이 있는 식의 인수분해

018 공통부분이 있는 다항식의 인수분해

023 복이차식의 인수분해

019 복이차식의 인수분해

024 여러 개의 문자를 포함하고 있는 식의 인수분해

020 여러 개의 문자를 포함하고 있는 식의 인수분해

025 인수정리를 이용한 인수분해

021 인수정리를 이용한 인수분해

특강 026 인수분해 방법의 흐름도

개념 020

인수분해

하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것을 다항식의 **인수분해**라 한다. 이때 곱을 이루는 각 다항식을 원래 다항식의 **인수**라 한다.

Remark $x^2+2x-3=x(x+2)-3$과 같이 나타내는 것은 인수분해라 하지 않는다. 우변이 다항식의 곱으로만 표현될 때 인수분해되었다고 한다.

$$\underbrace{x^2+3x+2}_{\text{[합·차의 꼴]}} \xrightarrow{\text{인수분해}} \underbrace{(x+1)(x+2)}_{\text{[곱의 꼴]}}, \quad (x+1)(x+2) \xrightarrow{\text{전개}} x^2+3x+2$$

개념 Approach

인수분해는 전개의 역 과정이다. 즉 다항식의 곱을 하나의 다항식으로 나타내는 것이 전개이고, 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것이 인수분해이다.

인수분해, 즉 합의 꼴로 주어진 식 $A+B+C$를 XY와 같이 곱의 꼴로 변형하는 것이 중요한 이유를 알아보자.

예를 들어 $x^2-5x-14=0$을 만족시키는 x의 값을 직접 구하는 것은 다소 번거롭다.

그러나 $x^2-5x-14$를 인수분해하면 $x^2-5x-14=(x+2)(x-7)$이므로

$$(x+2)(x-7)=0, \qquad x+2=0 \text{ 또는 } x-7=0 \qquad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=7$$

이와 같이 이차 이상의 방정식을 풀 때, 인수분해는 중요한 역할을 한다. 뿐만 아니라 앞으로 배울 이차부등식과 이차함수에서도 인수분해는 문제 해결의 중요한 열쇠가 된다. 인수분해는 수학 과정을 모두 마칠 때까지 따라다니므로 이번 기회에 철저히 익혀 두어야 인생이 잘 (^^) 풀린다.

개념 SSEN

$$\text{합·차의 꼴} \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} \text{곱의 꼴}$$

Remark 인수분해의 가장 기본은 $ma+mb-mc=m(a+b-c)$와 같이 분배법칙을 이용하여 공통인수 m을 찾아내어 묶는 것이다. 다음 개념 **Check**에서 이를 연습하기 바란다.

개념 Check

다음 식을 인수분해하여라.

(1) $2x^2-4x$ (2) $a^2(x-y)+a(y-x)$

(3) $1-x+y-xy$ (4) $(x-2y)^2-2x+4y$

풀이 (1) $2x^2-4x=2x(x-2)$

(2) $a^2(x-y)+a(y-x)=a^2(x-y)-a(x-y)=(a^2-a)(x-y)=a(a-1)(x-y)$

(3) $1-x+y-xy=(1-x)+y(1-x)=(1-x)(1+y)$

(4) $(x-2y)^2-2x+4y=(x-2y)^2-2(x-2y)=(x-2y)(x-2y-2)$

답 풀이 참조

개념 021 인수분해 공식

19쪽 **개념 008**의 곱셈 공식의 좌변과 우변을 바꾸면 다음과 같은 인수분해 공식을 얻는다.

① $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

② $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

③ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

④ $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

⑤ $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

⑥ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

⑦ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

⑧ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

⑨ $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

Remark 계수가 유리수인 다항식을 인수분해할 때, 특별한 언급이 없으면 계수의 범위를 유리수로 한정하여 생각하고, 더 이상 인수분해할 수 없을 때까지 인수분해한다.

개념 Approach

⑧에서 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$는 곱셈 공식의 좌변과 우변을 바꾼 것이다. 이때 이 식의 우변에 있는 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$를 변형하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca &= \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca) \\ &= \frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\} \\ &= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \end{aligned}$$

$$\therefore a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

인수분해 공식은 문제를 해결하는 과정에서 중요하게 사용되므로 정확히 익혀서 언제든지 활용할 수 있도록 하자.

공식을 적용할 때에는 식 전체를 한눈에 살펴보고 가장 적합한 인수분해 공식을 찾는 것이 중요하다. 예를 들어 $(2x+1)^2-(x-3)^2$을 인수분해할 때, 주어진 식을 전개한 후 다시 인수분해하는 것보다 주어진 식이 $■^2-▲^2$, 즉 '제곱 차' 임을 알면 ■와 ▲의 합과 차로 다음과 같이 쉽게 인수분해할 수 있다.

$$\begin{aligned}(2x+1)^2-(x-3)^2&=\{(2x+1)+(x-3)\}\{(2x+1)-(x-3)\}\\&=(3x-2)(x+4)\end{aligned}$$

개념 Check

다음 식을 인수분해하여라.

(1) $4x^2+4xy+y^2$

(2) $(a+b)^2-(b-c)^2$

(3) $x^2+7x+10$

(4) $10x^2+19xy-15y^2$

(5) $a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ca$

(6) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

(7) a^3+8b^3

(8) $a^3+b^3-3ab+1$

(9) x^4+x^2+1

풀이

(1) $$\begin{aligned}4x^2+4xy+y^2&=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot y+y^2\\&=(2x+y)^2\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}(a+b)^2-(b-c)^2&=\{(a+b)+(b-c)\}\{(a+b)-(b-c)\}\\&=(a+2b-c)(a+c)\end{aligned}$$

(3) $x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$

(4) $10x^2+19xy-15y^2=(2x+5y)(5x-3y)$

(5) $$\begin{aligned}&a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ca\\&=a^2+(-b)^2+(2c)^2+2\cdot a\cdot(-b)+2\cdot(-b)\cdot 2c+2\cdot 2c\cdot a\\&=(a-b+2c)^2\end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned}8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3&=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot y+3\cdot 2x\cdot y^2-y^3\\&=(2x-y)^3\end{aligned}$$

(7) $$\begin{aligned}a^3+8b^3&=a^3+(2b)^3\\&=(a+2b)\{a^2-a\cdot 2b+(2b)^2\}\\&=(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)\end{aligned}$$

(8) $$\begin{aligned}a^3+b^3-3ab+1&=a^3+b^3+1^3-3\cdot a\cdot b\cdot 1\\&=(a+b+1)(a^2+b^2+1^2-ab-b\cdot 1-1\cdot a)\\&=(a+b+1)(a^2+b^2-ab-a-b+1)\end{aligned}$$

(9) $$\begin{aligned}x^4+x^2+1&=(x^2)^2+x^2\cdot 1^2+(1^2)^2\\&=(x^2+x+1)(x^2-x+1)\end{aligned}$$

답 풀이 참조

대표유형 017 다항식의 인수분해

• 개념 020, 021

다음 식을 인수분해하여라.

(1) $a^3-b^3+ab(a-b)$　　(2) a^6-b^6

(3) $(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2$　　(4) $a^2+b^2-3c^2+2bc+2ca+2ab$

유형 Guide (1), (4)와 같이 인수분해 공식을 바로 이용할 수 없는 경우에는 인수분해가 가능하도록 주어진 식을 변형한다.
(2), (3)은 인수분해 공식을 반복하여 사용한다.

유형 SSEN **인수분해 공식을 바로 이용할 수 없으면 ➔ 식을 변형!**

풀이

(1) $a^3-b^3+ab(a-b)=(a-b)(a^2+ab+b^2)+ab(a-b)$
$=(a-b)(a^2+2ab+b^2)$
$=(a-b)(a+b)^2$

(2) $a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(3) $(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2=(a^2+b^2-c^2)^2-(2ab)^2$
$=(a^2+b^2-c^2+2ab)(a^2+b^2-c^2-2ab)$
$=\{(a+b)^2-c^2\}\{(a-b)^2-c^2\}$
$=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$

(4) $a^2+b^2-3c^2+2bc+2ca+2ab=(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)-4c^2$
$=(a+b+c)^2-(2c)^2$
$=(a+b+c+2c)(a+b+c-2c)$
$=(a+b+3c)(a+b-c)$

답 풀이 참조

다른풀이 (2) $a^6-b^6=(a^2)^3-(b^2)^3=(a^2-b^2)\{(a^2)^2+a^2b^2+(b^2)^2\}$
$=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

정답 및 풀이 • 17쪽

유제 017-1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $x^2+4y^2-z^2+4xy$　　(2) $x^3y-xy^3+x^2y+xy^2$

(3) $x^2y+x^2-xy^2-y^2$　　(4) $x^2(x-y)+y^2(y-x)$

(5) x^8-y^8　　(6) $(x+y)^4-(x-y)^4$

개념 022 공통부분이 있는 식의 인수분해

공통부분이 있는 식을 인수분해할 때에는 치환을 이용하여 다음과 같이 인수분해한다.

(i) 공통부분을 X로 치환하여 주어진 식을 X에 대한 식으로 나타낸다.

(ii) (i)에서 얻은 식을 인수분해한다.

(iii) X에 원래의 공통부분을 대입하여 다시 인수분해한다.

개념 Approach

공통부분이 있는 식을 인수분해할 때에는 치환을 이용하면 식이 간단해지거나 차수가 낮아져서 인수분해 공식을 쉽게 적용할 수 있다.

예를 들어 다항식 $(x+2y)^2+2(x+2y)-3$을 인수분해해 보자.

주어진 다항식에서 공통부분인 $x+2y$를 X로 치환하면

$$\begin{aligned}(x+2y)^2+2(x+2y)-3&=X^2+2X-3 && \Leftarrow x+2y=X\text{로 치환}\\&=(X+3)(X-1) && \Leftarrow \text{인수분해}\\&=(x+2y+3)(x+2y-1) && \Leftarrow X\text{ 대신 }x+2y\text{ 대입}\end{aligned}$$

Remark 공통부분이 있는 식을 인수분해할 때 공통부분을 반드시 치환할 필요는 없다. 공통부분이 복잡하지 않을 때에는 머릿속으로 공통부분을 한 문자로 생각하여 치환하는 과정을 생략하는 것이 좋다.

개념 SSEN

공통부분 $\xrightarrow{\text{복잡하면}}$ 치환

공통부분 $\xrightarrow{\text{복잡하지 않으면}}$ 한 문자로 생각

개념 Check

$(x^2-4x)(x^2-4x-8)+12$를 인수분해하여라.

풀이 $x^2-4x=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^2-4x)(x^2-4x-8)+12&=X(X-8)+12\\&=X^2-8X+12\\&=(X-2)(X-6)\\&=(x^2-4x-2)(x^2-4x-6)\end{aligned}$$

답 $(x^2-4x-2)(x^2-4x-6)$

대표유형 018 공통부분이 있는 다항식의 인수분해

• 개념 022

다음 식을 인수분해하여라.

(1) $(x^2+x)^2+2x^2+2x-8$

(2) $x(x+1)(x+2)(x+3)-24$

유형 Guide (1) 공통부분을 X로 치환하여 X에 대한 식을 인수분해한다.

(2) $x(x+1)(x+2)(x+3)$을 그냥 전개하면 복잡하다. $\underline{x(x+3)}\cdot\underline{(x+1)(x+2)}$와 같이 짝을 지어 각각 전개하면 $(x^2+3x)(x^2+3x+2)$가 되어 공통부분 x^2+3x가 나타난다. 따라서 (1)과 같이 공통부분을 치환하여 인수분해할 수 있다.

유형 SSEN 공통부분 ⊙ 치환한다.

풀이 (1) $(x^2+x)^2+2x^2+2x-8=(x^2+x)^2+2(x^2+x)-8$

$x^2+x=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=X^2+2X-8\\&=(X-2)(X+4)\\&=(x^2+x-2)(x^2+x+4)\\&=(x+2)(x-1)(x^2+x+4)\end{aligned}$$

(2) $x(x+1)(x+2)(x+3)-24=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}-24$
$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)-24$

$x^2+3x=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=X(X+2)-24\\&=X^2+2X-24\\&=(X-4)(X+6)\\&=(x^2+3x-4)(x^2+3x+6)\\&=(x+4)(x-1)(x^2+3x+6)\end{aligned}$$

답 (1) $(x+2)(x-1)(x^2+x+4)$ (2) $(x+4)(x-1)(x^2+3x+6)$

정답 및 풀이 • 17쪽

유제 018-1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $(x^2+2x+4)(x^2-3x+4)+4x^2$

(2) $(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)+9$

개념 023

복이차식의 인수분해

x^4+ax^2+b (a, b는 상수)와 같이 차수가 짝수인 항과 상수항으로만 이루어진 다항식을 **복이차식**이라 한다.

복이차식 x^4+ax^2+b는 일반적으로 다음 두 가지의 방법으로 인수분해한다.

(1) $x^2=X$로 치환하여 X^2+aX+b를 인수분해한다.

(2) 이차항 ax^2을 적당히 분리하여 $(x^2+A)^2-(Bx)^2$ 꼴로 변형한 후 인수분해한다.

개념 Approach

예를 들어 두 다항식 x^4-5x^2+4, x^4+2x^2+9를 각각 인수분해해 보자.

(1) $x^2=X$로 치환하는 경우

x^4-5x^2+4에서 $x^2=X$로 놓으면 $\quad X^2-5X+4$

이차식 X^2-5X+4가 인수분해되므로 다음과 같이 인수분해한 후 다시 X에 x^2을 대입하여 정리하면 된다.

$$\begin{aligned} x^4-5x^2+4 &= X^2-5X+4 && \leftarrow x^2=X\text{로 치환} \\ &=(X-1)(X-4) && \leftarrow \text{인수분해} \\ &=(x^2-1)(x^2-4) && \leftarrow X\text{ 대신 }x^2\text{ 대입} \\ &=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2) && \leftarrow \text{더 이상 인수분해되지 않을 때까지 인수분해한다.} \end{aligned}$$

(2) $(x^2+A)^2-(Bx)^2$ 꼴로 변형하는 경우

x^4+2x^2+9에서 $x^2=X$로 놓으면 $\quad X^2+2X+9$

그런데 이차식 X^2+2X+9는 인수분해되지 않는다. 이럴 때에는 다음과 같이 x^4+2x^2+9의 이차항 $2x^2$을 적당히 분리하여 $(x^2+A)^2-(Bx)^2$ 꼴이 되도록 변형한 후, '제곱 차는 합 · 차' 임을 이용하여 인수분해한다.

$$\begin{aligned} x^4+2x^2+9 &= x^4+6x^2-4x^2+9 && \leftarrow 2x^2=6x^2-4x^2\text{으로 분리} \\ &=(x^4+6x^2+9)-4x^2 && \\ &=(x^2+3)^2-(2x)^2 && \leftarrow (x^2+A)^2-(Bx)^2\text{ 꼴로 변형} \\ &=\{(x^2+3)+2x\}\{(x^2+3)-2x\} && \leftarrow \text{인수분해} \\ &=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3) && \leftarrow \text{더 이상 인수분해되지 않는 꼴이다.} \end{aligned}$$

개념 SSEN

복이차식 x^4+ax^2+b의 인수분해	→ $x^2=X$로 치환
	→ $(x^2+A)^2-(Bx)^2$ 꼴로 변형

대표유형 019 복이차식의 인수분해

• 개념 023

다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^4+5x^2-6　　(2) x^4-10x^2+9

(3) x^4-13x^2+4　　(4) x^4-14x^2+1

유형 Guide (1), (2) $x^2=X$로 치환하여 X^2+aX+b를 인수분해한다.
(3), (4) x^4+ax^2+b의 이차항 ax^2을 적당히 분리하여 $(x^2+A)^2-(Bx)^2$ 꼴로 변형한다.

유형 SSEN 복이차식의 인수분해 ○ $x^2=X$로 치환하거나 $(x^2+A)^2-(Bx)^2$ 꼴로 변형

풀이 (1) $x^2=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}x^4+5x^2-6&=X^2+5X-6=(X-1)(X+6)\\&=(x^2-1)(x^2+6)\\&=(x+1)(x-1)(x^2+6)\end{aligned}$$

(2) $x^2=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}x^4-10x^2+9&=X^2-10X+9=(X-1)(X-9)\\&=(x^2-1)(x^2-9)\\&=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}x^4-13x^2+4&=x^4-4x^2+4-9x^2=(x^2-2)^2-(3x)^2\\&=(x^2+3x-2)(x^2-3x-2)\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}x^4-14x^2+1&=x^4+2x^2+1-16x^2=(x^2+1)^2-(4x)^2\\&=(x^2+4x+1)(x^2-4x+1)\end{aligned}$$

답 풀이 참조

다른풀이 (2) $$\begin{aligned}x^4-10x^2+9&=(x^4-6x^2+9)-4x^2=(x^2-3)^2-(2x)^2\\&=(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)\\&=(x-1)(x+3)(x-3)(x+1)\\&=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)\end{aligned}$$

정답 및 풀이 • 17쪽

유제 019-1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^4-18x^2+32　　(2) $4x^4-15x^2-4$

(3) x^4-6x^2+1　　(4) x^4+64

(5) $x^4-7x^2y^2+y^4$

개념 024 여러 개의 문자를 포함하고 있는 식의 인수분해

여러 개의 문자를 포함하고 있는 식을 인수분해할 때에는 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 공통인수로 묶어 내거나 인수분해 공식을 적용한다.
문자의 차수가 모두 같을 때에는 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

개념 Approach

여러 개의 문자를 포함하고 있는 식을 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리하면 항의 개수가 적어지고 다른 문자는 모두 상수로 생각할 수 있다. 따라서 공통인수를 찾거나 인수분해 공식을 적용하기 쉬워지므로 인수분해하기 용이하다.

예를 들어 다항식 $x^3+x^2z-xy^2-y^2z$는

x에 대하여 3차, y에 대하여 2차, z에 대하여 1차

이므로 차수가 가장 낮은 문자 z에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x^3+x^2z-xy^2-y^2z &= (x^2-y^2)z+x^3-xy^2 \\ &= (x^2-y^2)z+x(x^2-y^2) \\ &= (x^2-y^2)(z+x) \\ &= (x+y)(x-y)(x+z) \end{aligned}$$

또 다항식 $x^2y-xy^2+y^2z-yz^2+xz^2-x^2z$는

x에 대하여 2차, y에 대하여 2차, z에 대하여 2차

이므로 x, y, z 중 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리해도 된다.

주어진 다항식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x^2y-xy^2+y^2z-yz^2+xz^2-x^2z &= (y-z)x^2-(y^2-z^2)x+y^2z-yz^2 \\ &= (y-z)x^2-(y+z)(y-z)x+yz(y-z) \\ &= (y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\} \\ &= (y-z)(x-y)(x-z) \\ &= -(x-y)(y-z)(z-x) \end{aligned}$$

Remark 위와 같은 식은 보통, 보기 좋게 윤환의 꼴로 고쳐서 답한다.

개념 SSEN

여러 개의 문자를 포함하는 다항식
- 차수가 다르면 → 차수가 낮은 문자에 대하여
- 차수가 같으면 → 어느 한 문자에 대하여

내림차순으로 정리

대표유형 020 여러 개의 문자를 포함하고 있는 식의 인수분해

• 개념 024

다음 식을 인수분해하여라.

(1) $x^2y-x^3z+yz-xz^2$

(2) $2x^2+2y^2-5xy+5x-7y+3$

(3) $x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)+2xyz$

유형 Guide (1) x에 대한 3차식, y에 대한 1차식, z에 대한 2차식이므로 차수가 가장 낮은 y에 대하여 내림차순으로 정리한다.

(2) x에 대한 2차식, y에 대한 2차식이므로 x, y 중 어느 문자에 대하여 내림차순으로 정리해도 된다.

유형 SSEN 여러 개의 문자를 포함하는 다항식 ➊ 차수가 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리

풀이 (1) 주어진 다항식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}x^2y-x^3z+yz-xz^2&=(x^2+z)y-x^3z-xz^2\\&=(x^2+z)y-xz(x^2+z)\\&=(x^2+z)(y-xz)\end{aligned}$$

(2) 주어진 다항식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&2x^2+2y^2-5xy+5x-7y+3\\&=2x^2-5(y-1)x+2y^2-7y+3\\&=2x^2-5(y-1)x+(2y-1)(y-3)\\&=\{x-(2y-1)\}\{2x-(y-3)\}\\&=(x-2y+1)(2x-y+3)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{곱} & & \text{합}\\ 1 & \searrow\!\!\!\nearrow & -(2y-1) & \longrightarrow & -4y+2\\ 2 & \nearrow\!\!\!\searrow & -(y-3) & \longrightarrow & -y+3\\ \hline 2 & & (2y-1)(y-3) & & -5(y-1)\end{array}$$

(3) 주어진 다항식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)+2xyz\\&=(y+z)x^2+(y^2+2yz+z^2)x+yz^2+zy^2\\&=(y+z)x^2+(y+z)^2x+yz(y+z)\\&=(y+z)\{x^2+(y+z)x+yz\}\\&=(y+z)(x+y)(x+z)\\&=(x+y)(y+z)(z+x)\end{aligned}$$

답 풀이 참조

정답 및 풀이 • 17쪽

유제 020-1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $a^2b-b^2c-b^3+ca^2$

(2) $3a^2-2b^2+5ab-2a+3b-1$

(3) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

(4) $a^3+a^2c+ac^2-b^3-b^2c-bc^2$

개념 025

인수정리를 이용한 인수분해

삼차 이상의 다항식 $f(x)$는 인수정리를 이용하여 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

(i) $f(\alpha)=0$을 만족시키는 상수 α의 값을 구한다.

(ii) 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$를 구하여 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$로 나타낸다.

(iii) 인수분해 공식을 이용하거나 (i), (ii)의 과정을 반복하여 $Q(x)$가 더 이상 인수분해되지 않을 때까지 인수분해한다.

Remark 인수정리를 이용하여 삼차 이상의 다항식 $f(x)$를 인수분해할 때, $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값은

$$\pm\frac{(f(x)\text{의 상수항의 양의 약수})}{(f(x)\text{의 최고차항의 계수의 양의 약수})}$$

중에서 찾을 수 있다.

개념 **Approach**

앞에서 인수분해를 하는 여러 가지 방법에 대하여 공부하였다. 이제 인수분해를 하는 마지막 방법으로 인수정리를 이용하는 방법에 대하여 알아보자.

예를 들어 x^3-2x^2-5x+6을 인수분해해 보자.

$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$으로 놓으면

$$f(1)=1-2-5+6=0$$

이므로 인수정리에 의하여 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다.

따라서 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 구하면 x^2-x-6이므로 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^3-2x^2-5x+6&=(x-1)(x^2-x-6) \\ &=(x-1)(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

Remark 위의 $f(x)$에서 상수항인 6의 양의 약수는 1, 2, 3, 6이므로 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값은 ±1, ±2, ±3, ±6 중에서 찾을 수 있다.
예를 들어 $f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 구하여 인수분해해도 된다.

개념 SSEN 삼차 이상의 다항식 $f(x)$ $\xrightarrow[f(\alpha)=0]{\text{인수정리}}$ $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ 꼴로 인수분해

대표유형 021 인수정리를 이용한 인수분해 • 개념 025

다음 식을 인수분해하여라.

(1) $2x^3+5x^2-6x-9$ (2) $2x^4-x^3-19x^2-6x+24$

유형 Guide 삼차 이상의 다항식 $f(x)$를 인수분해할 때에는 먼저 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값을 구한 후, 조립제법을 이용하여 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ 꼴로 나타낸다.

유형 SSEN 삼차 이상의 다항식의 인수분해 ◎ 인수정리 이용

풀이 (1) $f(x)=2x^3+5x^2-6x-9$로 놓으면

$$f(-1)=-2+5+6-9=0$$

이므로 $x+1$은 $f(x)$의 인수이다.

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 구하면 $2x^2+3x-9$이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 5 & -6 & -9 \\ & & -2 & -3 & 9 \\ \hline & 2 & 3 & -9 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x^3+5x^2-6x-9 &= (x+1)(2x^2+3x-9) \\ &= (x+1)(x+3)(2x-3) \end{aligned}$$

(2) $f(x)=2x^4-x^3-19x^2-6x+24$로 놓으면

$$f(1)=2-1-19-6+24=0,\quad f(-2)=32+8-76+12+24=0$$

이므로 $x-1$, $x+2$는 $f(x)$의 인수이다.

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 구하면 $2x^3+x^2-18x-24$이고, 다시 이 몫을 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 구하면 $2x^2-3x-12$이므로

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & -1 & -19 & -6 & 24 \\ & & 2 & 1 & -18 & -24 \\ \hline -2 & 2 & 1 & -18 & -24 & \boxed{0} \\ & & -4 & 6 & 24 & \\ \hline & 2 & -3 & -12 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} &2x^4-x^3-19x^2-6x+24 \\ &=(x-1)(x+2)(2x^2-3x-12) \end{aligned}$$

답 풀이 참조

정답 및 풀이 • 18쪽

유제 021-1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $x^3-6x^2+13x-10$ (2) $3x^3-4x^2-17x+6$

(3) $2x^4+3x^3-3x^2+4$ (4) $6x^4-13x^3-2x^2+7x+2$

Plus 유제 021-2 다항식 $x^3-(a-3)x^2-(2a+1)x+3a-3$을 인수분해하여라.

대표유형 022 인수분해의 활용

• 개념 020, 021

다음에 답하여라.

(1) $x=4+\sqrt{15}$, $y=4-\sqrt{15}$일 때, $2x^2y-3x+2xy^2-3y$의 값을 구하여라.

(2) $\dfrac{2014^3+1}{2013\cdot2014+1}$의 값을 구하여라.

유형 Guide 인수분해는 수학 전반에 걸쳐 다양하게 이용된다. 특히 복잡한 식의 값을 구할 때 구하는 식을 인수분해를 이용하여 간단하게 정리하면, 복잡한 계산을 거치지 않고 식의 값을 구할 수도 있다.

(1) x, y가 $x=a+\sqrt{b}$, $y=a-\sqrt{b}$ 꼴이면 $x+y$, xy는 근호가 없는 간단한 꼴이 된다. 따라서 구하는 식을 인수분해하여 $x+y$, xy에 대한 식으로 변형한 후 식의 값을 구한다.

(2) 큰 수로 이루어진 식의 값을 구할 때에는 큰 수를 문자로 치환하고 인수분해를 이용한다. 주어진 식에서 큰 수가 2013과 2014이므로 2014를 x로 치환하면 2013은 $x-1$로 나타낼 수 있다.

유형 SSEN

- **$x=a+\sqrt{b}$, $y=a-\sqrt{b}$ ➡ $x+y$, xy의 값 이용**
- **큰 수의 계산 ➡ 큰 수를 문자로 치환한 후 인수분해를 이용**

풀이 (1) 주어진 식을 인수분해하면

$$\begin{aligned}2x^2y-3x+2xy^2-3y&=2xy(x+y)-3(x+y)\\&=(2xy-3)(x+y)\end{aligned}$$

이때

$$x+y=(4+\sqrt{15})+(4-\sqrt{15})=8,\ xy=(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})=16-15=1$$

이므로 (주어진 식) $=(2\cdot1-3)\cdot8=-8$

(2) $2014=x$로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{2014^3+1}{2013\cdot2014+1}&=\frac{x^3+1}{(x-1)x+1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}\\&=x+1=2014+1=2015\end{aligned}$$

답 (1) -8 (2) 2015

정답 및 풀이 • 19쪽

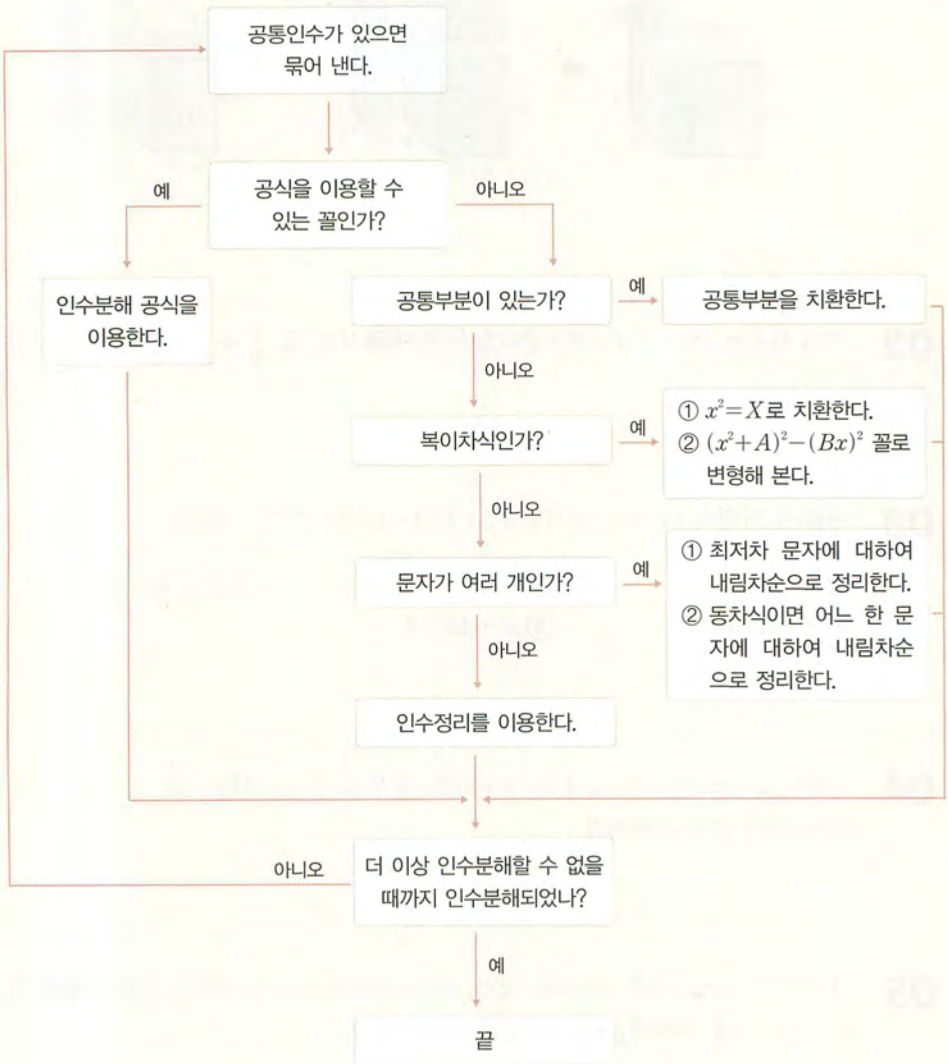
유제 022-1 다음에 답하여라.

(1) $a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$, $b=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$일 때, $a^3+a^2b-ab^2-b^3$의 값을 구하여라.

(2) $\dfrac{18^4+18^2+1}{18\cdot17+1}$의 값을 구하여라.

특강 026 인수분해 방법의 흐름도

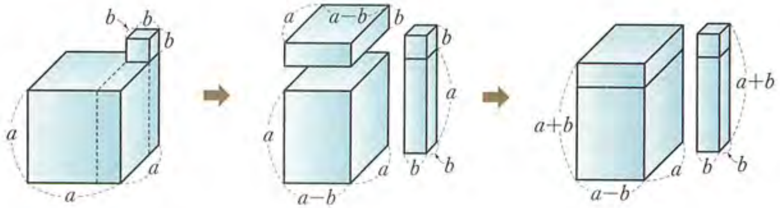
주어진 다항식을 보자마자 어떤 방법으로 인수분해해야 하는지 바로 떠올리기는 쉽지 않다. 인수분해해야 하는 다양한 문제에서 그 해결 방법의 실마리를 찾을 수 있도록 앞에서 공부한 방법을 다음과 같이 정리하였다. 실전 문제에 적용해 보고 자기 것으로 소화하길 바란다.



중단원 연습 문제

STEP 1 유형 Training

01 다음 그림이 나타내는 인수분해 공식을 구하여라.



서술형

02 양의 실수 a, b, c가 $a^3+b^3+c^3=3abc$를 만족시킬 때, $\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}-\dfrac{a}{c}$의 값을 구하여라.

03 다음 중 다항식 $(x^2+x+2)(x^2+2x+2)-6x^2$의 인수인 것은?

① x^2+x+2　② x^2-x-2　③ x^2+4x+2
④ x^2-4x+2　⑤ x^2+4x-2

04 다항식 x^4-6x^2+5가 $(x+1)(x+a)(x^2+b)$로 인수분해될 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라.

05 다항식 $x^2-xy-6y^2-x+8y-2$가 $(x+ay+b)(x+cy+1)$로 인수분해될 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

서술형

06 다항식 x^3+6x^2+x-14가 $(x+a)(x^2+bx+c)$로 인수분해될 때, 정수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하여라.

07 $\sqrt{28\cdot29\cdot30\cdot31+1}$의 값을 구하여라.

STEP 2 실전 Application

평가원기출

08 다항식 $(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3$을 인수분해한 식이 $(x+a)^2(x+b)(x+c)$일 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

09 $a+2b=1$일 때, 다음 중 다항식 $1-a^2+4ab-4b^2$과 같은 것은?

① $-8ab$ ② $-4ab$ ③ $2ab$ ④ $4ab$ ⑤ $8ab$

서술형

10 계수가 모두 실수이고 x^2의 계수가 같은 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)g(x)=4x^4+3x^2+1$일 때, $f(x)+g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

11 삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c일 때,

$$\frac{a^2}{(c+a)(a+b)}-\frac{b^2}{(a+b)(b+c)}+\frac{c^2}{(b+c)(c+a)}=\frac{2bc^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

이 성립한다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $a=b$인 이등변삼각형
③ $b=c$인 이등변삼각형
④ 빗변의 길이가 a인 직각삼각형
⑤ 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

12 $x=1-\sqrt{2}$, $y=1+\sqrt{2}$일 때, $x^2+y^2-6x^2y^2+x^2y+xy^2+2xy$의 값을 구하여라.

서술형

13 다항식 x^3+ax^2+x+6을 인수분해하였더니 $(x-2)(x+b)(x+c)$이었다. 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

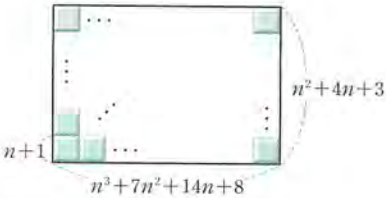
교육청기출

14 부피가 $(x^3+x^2-5x+3)\pi$인 직원기둥이 있다. 이 직원기둥의 높이와 밑면의 반지름의 길이가 각각 최고차항의 계수가 1인 x에 대한 일차식으로 나타내어질 때, 이 직원기둥의 겉넓이는? (단 $x>1$)

① $4(x^2-x)\pi$ ② $4(x^2-1)\pi$ ③ $4x^2\pi$
④ $4(x^2+1)\pi$ ⑤ $4(x^2+x)\pi$

교육청기출

15 자연수 n에 대하여 가로의 길이가 $n^3+7n^2+14n+8$, 세로의 길이가 n^2+4n+3인 직사각형 모양의 바닥이 있다. 한 변의 길이가 $n+1$인 정사각형 모양의 타일로 이 바닥 전체를 겹치지 않게 빈틈없이 깔려고 한다. 이때 필요한 타일의 개수는?



① $(n+2)(n+3)$ ② $(n+3)(n+4)$
③ $(n+1)(n+2)(n+3)$ ④ $(n+1)(n+2)(n+4)$
⑤ $(n+2)(n+3)(n+4)$

16 1보다 큰 자연수 n에 대하여 항상 짝수인 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. n^2-1 ㄴ. n^2+n
ㄷ. $(n+1)(2n+1)$ ㄹ. n^2+3n+2

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ ④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

17 사차식 x^4-nx^2+16의 한 인수가 이차식 x^2+mx-4가 되도록 하는 두 자리 자연수 n의 개수를 구하여라. (단, m은 자연수이다.)

서술형

18 x^2의 계수가 1인 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$f(x)g(x)=x^4+8x^3+5x^2-50x,\ xf(x)=(x-2)g(x)$$

가 성립할 때, $f(3)+g(3)$의 값을 구하여라.

19 다항식 $f(x)=x^3-7x+6$을 x^2-1로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 하자. $f(x)$와 $R(x)$의 공통인수를 $G(x)$라 할 때, $G(10)$의 값은?

(단, $G(x)$는 x의 계수가 1인 일차식이다.)

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 11

교육청기출

20 1이 아닌 두 자연수 a, b에 대하여

$$3587=15^3+15^2-15+2=a\times b$$

로 나타낼 때, $a+b$의 값을 구하여라.

21 $\dfrac{10^6-1}{99}$이 n자리 자연수일 때, n의 값을 구하여라.

03 인수분해

나를 바꾸는 힘

나에 대한 사람들의 평가는
내가 스스로를 어떻게 평가하느냐에 좌우된다.

– E. M. 헤밍웨이

자신을 아끼며 스스로 가치 있다고 생각한다면,
이런 생각은 행동으로 자연스럽게 나타나게 될 것입니다.
그리고 사람들에게 '자신감 있고 가치 있는 사람'이라는 평가를 받을 수 있겠죠.

여러분은 자신 스스로 어떻게 평가하고 있나요?
사람들이 나를 어떻게 평가할지는 '나'에게 달려있습니다.

Ⅱ 방정식

04

복소수

임의의 실수를 제곱하면 0 또는 양수가 되는 성질이 있다. 따라서 이차방정식 $x^2=-1$의 해는 존재하지 않는다고 배웠다.
만일 제곱하여 음수가 되는 수가 존재한다면 어떨까? 그런 수가 있다면 방정식 $x^2=-1$의 해도 구할 수 있을 것이다.

이 단원에서는 제곱하여 -1이 되는 허수단위에 대하여 알아보고, 이를 바탕으로 수의 세계를 복소수까지 확장해 보자. 또 복소수의 사칙계산과 그 성질에 대하여 공부해 보자.

●한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

08 복소수

- 복소수의 뜻을 알고, 실수와 허수를 구분할 수 있다.

09 복소수의 연산

- 복소수의 사칙계산을 알고, 복소수가 서로 같을 조건을 활용할 수 있다.

10 i^n의 계산과 켤레복소수의 성질

- 복소수의 거듭제곱을 계산하고, 켤레복소수의 성질을 이해한다.

11 음수의 제곱근

- 음수의 제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

개념 & 특강 | 대표유형 & 유제

027 여러 가지 수의 뜻

028 실수의 분류

029 허수단위 i와 복소수

030 복소수의 분류

031 복소수가 서로 같을 조건

032 켤레복소수

023 켤레복소수와 복소수의 분류

033 복소수의 덧셈과 뺄셈

034 복소수의 곱셈

035 복소수의 나눗셈

024 복소수의 연산과 분류

025 복소수의 연산과 서로 같을 조건

026 복소수에 대한 식의 값

036 i^n의 계산

037 켤레복소수의 성질

027 복소수의 거듭제곱

028 켤레복소수를 포함한 식의 값

029 켤레복소수에 대한 식의 값

030 등식을 만족시키는 복소수

038 음수의 제곱근

039 음수의 제곱근의 성질

031 음수의 제곱근의 계산

032 음수의 제곱근의 성질

개념 027

여러 가지 수의 뜻

여러 가지 수의 뜻은 다음과 같다.

① 유리수 : $\dfrac{(\text{정수})}{(0\text{이 아닌 정수})}$ 꼴의 분수로 나타내어지는 수

② 유한소수 : 유리수 중 소수로 나타내었을 때, 소수 부분이 유한개의 자릿수로 구성된 수

③ 순환소수 : 유리수 중 소수로 나타내었을 때, 소수 부분이 무한개의 자릿수로 구성된 수

④ 무리수 : • 순환하지 않는 무한소수

• $\dfrac{(\text{정수})}{(0\text{이 아닌 정수})}$ 꼴의 분수로 나타내어질 수 없는 실수

⑤ 실수 : 유리수와 무리수를 통틀어서 일컫는 말

개념 Approach

$\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$와 같이 분자와 분모가 정수인 분수 꼴로 나타낼 수 있는 수를 유리수라 하고, $\sqrt{2}$, π와 같이 분수 꼴로 나타낼 수 없는 수를 무리수라 하며, 이러한 유리수와 무리수를 통틀어 실수라 한다.

한편 $\frac{1}{2}$과 $-\frac{2}{3}$를 소수로 나타내면

$$\frac{1}{2}=0.5,\ -\frac{2}{3}=-0.666\cdots=-0.\dot{6}$$

이와 같이 유리수를 소수로 나타내면 0.5와 같이 소수점 아래의 0이 아닌 숫자가 유한개인 유한소수로 나타내어지거나, $-0.\dot{6}$과 같이 소수점 아래의 어떤 자리에서부터 일정한 숫자의 배열이 한없이 되풀이되는 순환소수로 나타내어진다.

또 $\sqrt{2}$와 π를 소수로 나타내면

$$\sqrt{2}=1.414213\cdots,\ \pi=3.141592\cdots$$

즉 무리수는 순환하지 않는 무한소수로 나타내어진다.

Remark • 분수와 유리수는 같은 뜻으로 쓰인다. 그러나 책에 따라서는 정수를 제외한 유리수만 분수로 보는 견해도 있다.

• 분모의 소인수가 2 또는 5로만 구성된 유리수는 유한소수로 나타낼 수 있고, 분모에 2와 5 이외의 소인수가 있는 유리수는 순환소수로 나타내어진다.

개념 Check

다음에서 무리수의 개수를 구하여라.

$$3.14,\quad -\frac{7}{11},\quad -\sqrt{3},\quad 1.0\dot{1},\quad \sqrt{49},\quad 5-\pi$$

풀이 무리수는 $-\sqrt{3}$, $5-\pi$의 2개이다.

답 2

개념 028 실수의 분류

실수를 분류하면 다음과 같다.

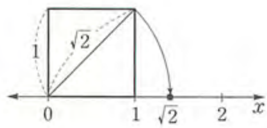
- 실수
  - 유리수
    - 정수
      - 양의 정수(자연수) : $1,\ 2,\ 3,\ \cdots$
      - 0
      - 음의 정수 : $-1,\ -2,\ -3,\ \cdots$
    - 정수가 아닌 유리수
      - 유한소수 : $\frac{1}{2},\ -\frac{3}{5},\ -0.71,\ \cdots$
      - 순환소수 : $0.\dot{2},\ 2.\dot{4}\dot{5},\ -\frac{1}{3},\ \cdots$
  - 무리수(순환하지 않는 무한소수) : $\sqrt{2},\ \pi,\ \sin 10°,\ -\sqrt{3},\ \cdots$

개념 Approach

수직선 위에서 임의의 서로 다른 두 유리수에 대응하는 두 점을 잡으면 두 점 사이에는 유리수에 대응하는 무수히 많은 점이 존재하므로 두 유리수 사이에는 무수히 많은 유리수가 존재한다. 이를 **유리수의 조밀성**이라 한다. 마찬가지로 무리수도 조밀성을 갖는다.

그러나 유리수가 아무리 조밀하다고 해도 유리수만으로 수직선을 완전히 채울 수는 없다. 두 유리수 사이에는 유리수에 대응하지 않는 점들이 있기 때문이다.

예를 들어 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이 $\sqrt{2}$는 수직선 위의 두 유리수 1과 2 사이에 있다. 즉 유리수는 조밀하기는 해도 임의의 두 유리수 사이에는 무수히 많은 무리수가 존재한다. 따라서 모든 유리수와 무리수에 대응하는 점을 수직선 위에 모두 나타내면 비로소 수직선은 빈틈없이 메워져서 연속이 된다. 이를 **실수의 연속성**이라 한다.



개념 SSEN 유리수의 조밀성 + 무리수의 조밀성 → 실수의 연속성

개념 Check

다음 중 옳지 않은 것은?

① 수직선 위에는 π에 대응하는 점이 있다.

② -2와 4 사이에는 5개의 정수가 있다.

③ $\frac{1}{5}$과 $\frac{1}{2}$ 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.

④ $-\sqrt{3}$과 1 사이에는 무수히 많은 무리수가 있다.

⑤ 수직선은 무리수에 대응하는 점만으로 완전히 메울 수 있다.

풀이 ⑤ 수직선은 유리수와 무리수, 즉 실수에 대응하는 점으로 완전히 메울 수 있다. 답 ⑤

개념 029

허수단위 i와 복소수

1 허수단위 i

제곱하여 -1이 되는 새로운 수 하나를 $\boldsymbol{i}$로 나타내기로 한다. 이때 i를 **허수단위**라 하고, 제곱하여 -1이 된다는 뜻에서 $i=\sqrt{-1}$과 같이 나타내기로 한다. 즉

$$i=\sqrt{-1},\ i^2=-1$$

Remark 허수단위 i는 허수단위를 뜻하는 imaginary unit의 첫 글자를 따온 것으로 스위스의 수학자 오일러(Euler, L. ; 1707~1783)가 처음 사용하였다.

2 복소수

a, b가 실수일 때, $\boldsymbol{a+bi}$ 꼴로 나타낸 수를 **복소수**라 한다. 이때 a를 **실수부분**, b를 **허수부분**이라 한다.

복소수 $\underbrace{a}_{\text{실수부분}} + \underbrace{b}_{\text{허수부분}} i$

Remark 복소수 $a+bi$에서 허수부분은 bi가 아니라 b이다. 즉 허수부분은 실수임에 주의한다.

개념 Approach

임의의 실수 a에 대하여 $a^2\ge 0$이므로, 즉 실수의 제곱은 음수가 될 수 없으므로 이차방정식 $x^2=-1$이 해를 갖게 하기 위해서는 수의 범위를 실수보다 확장시킬 필요가 있다.

여기서 제곱하여 -1이 되는 새로운 수 하나를 i로 나타내기로 하고, i를 허수단위라 한다. 즉

$$i^2=-1\ (i=\sqrt{-1})$$

따라서 방정식 $x^2=-1$의 근을 허수단위를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$x=\sqrt{-1}=i \text{ 또는 } x=-\sqrt{-1}=-i$$

또 a, b가 실수일 때 허수단위 i를 사용하여 $a+bi$와 같이 나타낸 수를 복소수라 하는데, 복소수는 수학자의 상상력이 만들어 낸 수이다. 수학자의 상상력은 어디로 튈 지 모르지만 무모순의 원칙을 지킨다.

개념 Check

다음 복소수의 실수부분과 허수부분을 구하여라.

(1) $-3-5i$

(2) $4i$

(3) $i-\sqrt{2}$

(4) 10

풀이 (1) $-3-5i$의 실수부분은 -3, 허수부분은 -5이다.

(2) $4i=0+4i$이므로 $4i$의 실수부분은 0, 허수부분은 4이다.

(3) $i-\sqrt{2}=-\sqrt{2}+1\cdot i$이므로 $i-\sqrt{2}$의 실수부분은 $-\sqrt{2}$, 허수부분은 1이다.

(4) $10=10+0\cdot i$이므로 10의 실수부분은 10, 허수부분은 0이다.

답 풀이 참조

개념 030 복소수의 분류

1 허수와 순허수

실수가 아닌 복소수 $a+bi\,(b\neq0)$를 **허수**라 하고, 실수부분이 0인 허수 $bi\,(b\neq0)$를 **순허수**라 한다.

2 복소수의 분류

임의의 실수 a, b에 대하여 복소수 $a+bi$를 분류하면 다음과 같다.

$$\text{복소수 } a+bi \begin{cases} b=0\text{일 때 : 실수 } a \\ b\neq0\text{일 때 : 허수 } a+bi \begin{cases} b\neq0,\ a=0\text{일 때 : 순허수 } bi \\ b\neq0,\ a\neq0\text{일 때 : 순허수가 아닌 허수 } a+bi \end{cases} \end{cases}$$

개념 Approach

복소수는 실수와 허수로 분류되고, 허수는 순허수와 순허수가 아닌 허수로 분류된다.

예를 들어 실수, 순허수, 순허수가 아닌 허수는 다음과 같다.

실수 ➡ $0,\ 1,\ -\frac{1}{3},\ \sqrt{3},\ \cdots$ 순허수 ➡ $i,\ -2i,\ \sqrt{3}i,\ \cdots$

순허수가 아닌 허수 ➡ $2-i,\ -1+\sqrt{3}i,\ 1-\sqrt{2}i,\ \cdots$

허수의 큰 특징 중 하나는 실수와 달리 그 크기와 순서를 정할 수 없다는 것이다.

만약 실수와 허수, 허수와 허수 사이에 대소 관계가 존재한다면 허수단위 i에 대하여 $i>0$, $i=0$, $i<0$ 중 어느 하나가 성립해야 한다. 그러나

(i) $i>0$이면 $i\cdot i>i\cdot0$ $\therefore -1>0$ ➡ 모순

(ii) $i=0$이면 $i\cdot i=i\cdot0$ $\therefore -1=0$ ➡ 모순

(iii) $i<0$이면 $i\cdot i>i\cdot0$ $\therefore -1>0$ ➡ 모순

이므로 i는 양수도 아니고, 음수도 아니고, 0도 아니다.

따라서 실수와 허수, 허수와 허수 사이에는 대소 관계가 존재하지 않는다.

Remark 허수에서는 대소 관계가 존재하지 않으므로 허수는 수직선 위에 나타낼 수 없다. 대신 복소수는 복소평면 위에 나타낼 수 있다.

개념 Check

다음 중 순허수가 아닌 허수는?

① $1-\sqrt{2}$ ② $7+i$ ③ 0 ④ $-5i$ ⑤ $\sqrt{3}i$

풀이 ①, ③ 실수 ④, ⑤ 순허수

답 ②

개념 031

복소수가 서로 같을 조건

실수 a, b, c, d에 대하여 두 복소수 $a+bi$, $c+di$는 $a=c$이고 $b=d$일 때 서로 같다고 하며 등호를 사용하여 $a+bi=c+di$로 나타낸다.

실수 a, b, c, d에 대하여

① $a+bi=c+di \Longleftrightarrow a=c,\ b=d$

② $a+bi=0 \Longleftrightarrow a=b=0$

Remark ②에서 $0=0+0\cdot i$로 생각할 수 있으므로 $a+bi=0$(a, b는 실수)이면 $a+bi=0+0\cdot i$이다. 따라서 ①에 의하여 $a=b=0$이다.

개념 Approach

두 복소수에서 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 서로 같으면 두 복소수는 서로 같다고 한다. 예를 들어 실수 a, b에 대하여 $a+bi=3-5i$이면 $a=3$, $b=-5$이다.

이렇게 복소수가 서로 같을 조건을 활용하려면 문제에 등장하는 문자가 '실수'라는 전제 조건이 반드시 필요하다. 예를 들어 $a+bi=0$에서 a, b가 실수라는 조건이 없다면

$$a=i,\ b=-1\text{일 때},\quad a=2i,\ b=-2\text{일 때},\quad \cdots$$

와 같이 무수히 많은 a, b에 대하여 등식이 성립하기 때문이다.

따라서 다음을 기억하면 복소수 문제 해결의 실마리를 잡는 데 도움이 된다.

개념 SSEN 실수 조건 + 복소수를 포함한 등식 → '복소수가 서로 같을 조건' 이용!

Remark a, b, c, d가 유리수이고 $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$이 무리수일 때, 다음이 성립하고, 이것을 **무리수가 서로 같을 조건**이라 한다.

① $a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m} \Longleftrightarrow a=c,\ b=d$

② $a+b\sqrt{m}=0 \Longleftrightarrow a=0,\ b=0$

③ $a+\sqrt{m}=b+\sqrt{n} \Longleftrightarrow a=b,\ m=n$

개념 Check

다음 등식이 성립하도록 실수 x, y의 값을 정하여라.

(1) $x-yi=2+3i$

(2) $(x+1)+(4-y)i=0$

(3) $(x-y)-6i=2+yi$

(4) $(x-y)+(x+y)i=5-i$

풀이 두 복소수가 서로 같으려면 실수부분과 허수부분이 각각 같아야 하므로

(1) $x=2,\ -y=3 \quad \therefore x=2,\ y=-3$

(2) $x+1=0,\ 4-y=0 \quad \therefore x=-1,\ y=4$

(3) $x-y=2,\ -6=y \quad \therefore x=-4,\ y=-6$

(4) $x-y=5,\ x+y=-1 \quad \therefore x=2,\ y=-3$

답 풀이 참조

개념 032 켤레복소수

복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 허수부분의 부호를 바꾼 복소수 $a-bi$를 $a+bi$의 **켤레복소수**라 하고, 이것을 기호로 $\overline{a+bi}$와 같이 나타낸다. 즉

$$\overline{a+bi}=a-bi,\quad \overline{a-bi}=a+bi$$

Remark 복소수 z의 켤레복소수를 $\bar{z}$로 나타내고 이를 'z bar'라 읽는다.

개념 Approach

복소수 $2+3i$에서 허수부분의 부호를 바꾸면 $2-3i$이므로 $2+3i$의 켤레복소수는 $2-3i$이다.

즉 $\overline{2+3i}=2-3i$이다.

또 복소수 $2-3i$에서 허수부분의 부호를 바꾸면 $2+3i$이므로 $2-3i$의 켤레복소수는 $2+3i$이다.

즉 $\overline{2-3i}=2+3i$이다.

따라서 두 복소수 $2+3i$, $2-3i$는 서로 켤레복소수이다.

이와 같이 실수부분은 서로 같고 허수부분의 부호만 다른 두 복소수는 서로 켤레복소수이다.

개념 SSEN $a+bi \xleftrightarrow{\text{켤레복소수}} a-bi$

개념 Check

다음 복소수의 켤레복소수를 구하여라.

(1) $2+i$　　(2) $\frac{3}{2}-\frac{2}{3}i$

(3) $1+\sqrt{2}$　　(4) $-i$

풀이 (1) $\overline{2+i}=2-i$

(2) $\overline{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}i}=\frac{3}{2}+\frac{2}{3}i$

(3) $1+\sqrt{2}=1+\sqrt{2}+0\cdot i$이므로 $\overline{1+\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$

(4) $-i=0-i$이므로 $\overline{-i}=i$

답 (1) $2-i$ (2) $\frac{3}{2}+\frac{2}{3}i$ (3) $1+\sqrt{2}$ (4) i

대표유형 023 켤레복소수와 복소수의 분류

• 개념 030 ~ 032

복소수 z가 **보기**와 같이 주어질 때, $\overline{z}=-z$를 만족시키는 복소수 z의 개수를 구하여라. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

보기

ㄱ. $-\sqrt{3}i+1$　　ㄴ. $\sqrt{3}i$　　ㄷ. $(1-\sqrt{3})i$

ㄹ. $\sqrt{3}-1$　　ㅁ. $-i$

유형 Guide z가 복소수이므로 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고, 조건을 만족시키는 a, b의 값을 구한다.

유형 SSEN z가 복소수이면 ➡ $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓는다.

풀이 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면　$\overline{z}=a-bi$

$\overline{z}=-z$에서　$a-bi=-(a+bi)$

$a-bi=-a-bi$

a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여　$a=-a$

$2a=0$　$\therefore a=0$

$\therefore z=bi$

(i) $b\neq0$이면 z는 순허수이다.

(ii) $b=0$이면　$z=0$

(i), (ii)에서 $\overline{z}=-z$를 만족시키는 복소수 z는 순허수 또는 0이다.

따라서 보기에서 ㄴ, ㄷ, ㅁ의 3개이다.

답 3

정답 및 풀이 • 23쪽

유제 023-1 복소수 $z=a+bi$(a, b는 실수)가 $a^2+b^2=1$을 만족시킬 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

보기

ㄱ. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$는 z가 될 수 있다.

ㄴ. $\overline{z}=c+di$(c, d는 실수)이면 $c^2+d^2=1$이다.

ㄷ. 순허수인 z는 2개이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

개념 033 복소수의 덧셈과 뺄셈

1 복소수의 덧셈과 뺄셈

a, b, c, d가 실수일 때, 복소수의 덧셈과 뺄셈은 다음과 같이 한다.

① 덧셈 : $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

② 뺄셈 : $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

2 복소수의 덧셈에 대한 연산법칙

세 복소수 z_1, z_2, z_3에 대하여 다음 연산법칙이 성립한다.

① 교환법칙 : $z_1+z_2=z_2+z_1$

② 결합법칙 : $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$

Remark 복소수에서 덧셈에 대한 결합법칙이 성립하므로 괄호를 생략하여 $z_1+z_2+z_3$으로 나타내기도 한다.

개념 Approach

1 복소수의 덧셈과 뺄셈

복소수의 덧셈과 뺄셈은 허수단위 i를 문자처럼 생각하고 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 계산하여 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 정리한다.

2 복소수의 덧셈에 대한 연산법칙

$z_1=a+bi$, $z_2=c+di$(a, b, c, d는 실수)라 하면

$$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$z_2+z_1=(c+di)+(a+bi)=(c+a)+(d+b)i=(a+c)+(b+d)i$$

이므로 $z_1+z_2=z_2+z_1$이다. 즉 덧셈에 대한 교환법칙이 성립한다.

마찬가지 방법으로 덧셈에 대한 결합법칙이 성립함을 보일 수 있다.

개념 Check

다음을 계산하여라.

(1) $2i+(4-3i)$　　(2) $(3-i)+(2+4i)$

(3) $4i-(1-i)$　　(4) $(2-3i)-(-1+5i)$

풀이

(1) $2i+(4-3i)=(0+4)+(2-3)i=4-i$

(2) $(3-i)+(2+4i)=(3+2)+(-1+4)i=5+3i$

(3) $4i-(1-i)=(0-1)+(4+1)i=-1+5i$

(4) $(2-3i)-(-1+5i)=(2+1)+(-3-5)i=3-8i$

답 (1) $4-i$　(2) $5+3i$　(3) $-1+5i$　(4) $3-8i$

개념 034

복소수의 곱셈

1 복소수의 곱셈

a, b, c, d가 실수일 때, 복소수의 곱셈은 다음과 같이 한다.

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

2 복소수의 곱셈에 대한 연산법칙

세 복소수 z_1, z_2, z_3에 대하여 다음 연산법칙이 성립한다.

① 교환법칙 : $z_1z_2=z_2z_1$

② 결합법칙 : $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$

③ 분배법칙 : $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$, $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$

Remark 복소수에서 곱셈에 대한 결합법칙이 성립하므로 괄호를 생략하여 $z_1z_2z_3$으로 나타내기도 한다.

개념 Approach

1 복소수의 곱셈

위의 내용을 외우지 말고 다음과 같이 허수단위 i를 문자처럼 생각하여 전개한 다음, $i^2=-1$임을 이용하여 계산한다.

$$(a+bi)(c+di)\overset{\text{전개}}{=}ac+adi+bci+bdi^2\overset{i^2=-1}{=}ac+adi+bci-bd\overset{\text{정리}}{=}(ac-bd)+(ad+bc)i$$

2 복소수의 곱셈에 대한 연산법칙

$z_1=a+bi$, $z_2=c+di$(a, b, c, d는 실수)라 하면

$$z_1z_2=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$
$$z_2z_1=(c+di)(a+bi)=(ca-db)+(cb+da)i=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

이므로 $z_1z_2=z_2z_1$이다. 즉 곱셈에 대한 교환법칙이 성립한다.

마찬가지 방법으로 곱셈에 대한 결합법칙과 덧셈, 곱셈에 대한 분배법칙이 성립함을 보일 수 있다.

개념 Check

다음을 계산하여라.

(1) $(1+i)(2-3i)$　　(2) $(-1+2i)(5-6i)$

(3) $(2+i)^2$　　(4) $(\sqrt{5}+2i)(\sqrt{5}-2i)$

풀이 (1) $(1+i)(2-3i)=2-3i+2i-3i^2=2-3i+2i+3=5-i$

(2) $(-1+2i)(5-6i)=-5+6i+10i-12i^2=-5+6i+10i+12=7+16i$

(3) $(2+i)^2=2^2+2\cdot2\cdot i+i^2=4+4i-1=3+4i$

(4) $(\sqrt{5}+2i)(\sqrt{5}-2i)=(\sqrt{5}\,)^2-(2i)^2=5-4i^2=5+4=9$

답 (1) $5-i$ (2) $7+16i$ (3) $3+4i$ (4) 9

개념 035

복소수의 나눗셈

a, b, c, d가 실수이고 $c+di\neq0$일 때, 복소수의 나눗셈은 다음과 같이 한다.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

개념 Approach

위의 식을 직접 외우기는 너무 복잡하므로 다음과 같이 이해해 보자.

a, b, c, d가 실수이고 $c+di\neq0$일 때,

방법 1 분모, 분자에 분모의 켤레복소수를 곱하여 정리한다.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

방법 2 $\frac{a+bi}{c+di}$는 $a+bi$와 $\frac{1}{c+di}$의 곱과 같다.

$$\frac{a+bi}{c+di}=(a+bi)\cdot\frac{1}{c+di}=(a+bi)\cdot\frac{c-di}{(c+di)(c-di)}$$

$$=(a+bi)\cdot\left(\frac{c}{c^2+d^2}-\frac{d}{c^2+d^2}i\right)=\frac{ac+bci}{c^2+d^2}-\frac{adi-bd}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

복소수의 연산법칙을 일일이 외울 필요는 없다. 훌륭하게도 복소수의 사칙계산의 결과는 항상 복소수이고, 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 모두 성립하므로 실수에서와 같이 모든 계산이 자연스레 가능하다고 이해하면 된다.

개념 SSEN 복소수의 계산 → 실수에서와 같이 자유롭게 계산하라!

개념 Check

다음을 계산하여라.

(1) $\frac{1}{3-2i}$ (2) $\frac{3-i}{1+2i}$

풀이 (1) $\frac{1}{3-2i}=\frac{3+2i}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{3+2i}{3^2-(2i)^2}=\frac{3+2i}{13}=\frac{3}{13}+\frac{2}{13}i$

(2) $\frac{3-i}{1+2i}=\frac{(3-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{3-6i-i+2i^2}{1^2-(2i)^2}=\frac{1-7i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i$

답 (1) $\frac{3}{13}+\frac{2}{13}i$ (2) $\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i$

대표유형 024 복소수의 연산과 분류

• 개념 030, 033, 034

다음에 답하여라.

(1) 복소수 $z=(1+2i)(x+4i)$가 실수일 때, 실수 x의 값을 구하여라.

(2) 두 복소수 $z_1=(3+i)x^2+(i-2)x+5+i$, $z_2=x^2-(1+i)x-6-2i$에 대하여 z_1+z_2가 순허수일 때, 실수 x의 값을 구하여라.

유형 Guide 복소수를 각각 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 정리한 후, 실수이면 (허수부분)=0이고, 순허수이면 (실수부분)=0, (허수부분)$\neq$0임을 이용한다.

유형 SSEN 복소수 $a+bi$가 ┌ 실수이면 ◯ $b=0$ └ 순허수이면 ◯ $a=0$, $b\neq 0$

풀이 (1) $z=(1+2i)(x+4i)=x+4i+2xi-8=(x-8)+(2x+4)i$

z가 실수이므로 $\quad 2x+4=0$

$\therefore x=-2$

(2) $z_1=(3+i)x^2+(i-2)x+5+i=(3x^2-2x+5)+(x^2+x+1)i$

$z_2=x^2-(1+i)x-6-2i=(x^2-x-6)-(x+2)i$

$\therefore z_1+z_2=(4x^2-3x-1)+(x^2-1)i$

z_1+z_2가 순허수이므로 $\quad 4x^2-3x-1=0$, $x^2-1\neq 0$

(i) $4x^2-3x-1=0$에서 $\quad (4x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{4}$ 또는 $x=1$

(ii) $x^2-1\neq 0$에서 $\quad (x+1)(x-1)\neq 0$

$\therefore x\neq -1$이고 $x\neq 1$

(i), (ii)에서 $\quad x=-\frac{1}{4}$

답 (1) -2 (2) $-\frac{1}{4}$

정답 및 풀이 • 23쪽

유제 024-1 다음에 답하여라.

(1) 두 복소수 $z_1=(2+3i)x^2-4x+5-i$, $z_2=(1+2i)x^2+x+3$에 대하여 z_1-z_2가 실수일 때, 양수 x의 값을 구하여라.

(2) 복소수 $z=(1-i)(1+i)a^2+(4-3i)a-6i$에 대하여 z가 실수일 때의 실수 a의 값을 x, z가 순허수일 때의 실수 a의 값을 y라 하자. 이때 x^2+y^2의 값을 구하여라.

대표유형 025 복소수의 연산과 서로 같을 조건

• 개념 031, 033, 034

다음 등식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하여라.

(1) $(1+i)x+(-2+i)y+1+i=0$

(2) $(x-2i)(5+i)=(1-i)y+10$

유형 Guide 복소수를 포함한 등식에서 실수인 미지수의 값을 구할 때에는 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 정리하여 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

유형 SSEN 실수 조건 + 복소수를 포함한 등식 ➡ 복소수가 서로 같을 조건

풀이 (1) 주어진 등식의 좌변을 전개하면

$x+xi-2y+yi+1+i=0$

$(x-2y+1)+(x+y+1)i=0$

$x-2y+1$, $x+y+1$이 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x-2y+1=0$, $x+y+1=0$

두 식을 연립하여 풀면

$x=-1$, $y=0$

(2) 주어진 등식의 양변을 각각 전개하면

$5x+xi-10i+2=y-yi+10$

$(5x+2)+(x-10)i=(y+10)-yi$

$5x+2$, $x-10$, $y+10$, $-y$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$5x+2=y+10$, $x-10=-y$

$5x-y=8$, $x+y=10$

두 식을 연립하여 풀면

$x=3$, $y=7$

답 (1) $x=-1$, $y=0$ (2) $x=3$, $y=7$

정답 및 풀이 • 23쪽

유제 025-1 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하여라.

(1) $x(2+i)^2+y(1-i)^2=6+2i$ (2) $\dfrac{x}{1-i}+\dfrac{y}{1+i}=2+i$

대표유형 026 복소수에 대한 식의 값

• 개념 033~035

다음에 답하여라.

(1) $x=3-i$일 때, $x^3-6x^2+10x+7$의 값을 구하여라.

(2) $x=\dfrac{1-5i}{1+i}$일 때, $x^3+4x^2+14x+5$의 값을 구하여라.

유형 Guide x의 값을 주어진 식에 직접 대입하면 계산이 복잡하므로 다음의 방법으로 간단하게 구해 보자.

(1) 복소수 x에 대한 삼차 이상의 다항식의 값을 구하는 경우, 우변의 실수 3을 좌변으로 이항한 식 $x-3=-i$의 양변을 제곱하여 x에 대한 이차방정식을 만들어 본다. 이 이차방정식을 이용하면 우리가 구하는 삼차 이상의 다항식을 간단히 나타내어 쉽게 계산할 수 있다.

(2) 분모에 복소수가 있는 경우에는 분모의 유리화와 비슷한 방법으로 분모, 분자에 분모의 켤레복소수를 곱하여 분모를 실수화한 후, (1)과 같은 방법으로 식의 값을 구한다.

유형 SSEN $x=a+bi$(a, b는 실수) ○ $x-a=bi$ ○ $(x-a)^2=-b^2$

풀이 (1) $x=3-i$에서 $\quad x-3=-i$

양변을 제곱하면 $\quad x^2-6x+9=-1$

$\therefore x^2-6x+10=0$

$$\begin{aligned}\therefore x^3-6x^2+10x+7&=x(x^2-6x+10)+7\\&=x\cdot 0+7=7\end{aligned}$$

(2) $x=\dfrac{1-5i}{1+i}=\dfrac{(1-5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-4-6i}{2}=-2-3i$

$\therefore x+2=-3i$

양변을 제곱하면 $\quad x^2+4x+4=-9$

$\therefore x^2+4x+13=0$

$$\begin{aligned}\therefore x^3+4x^2+14x+5&=x(x^2+4x+13)+x+5\\&=x\cdot 0+x+5=x+5\\&=(-2-3i)+5\\&=3-3i\end{aligned}$$

답 (1) 7 (2) $3-3i$

정답 및 풀이 • 24쪽

유제 026-1 다음에 답하여라.

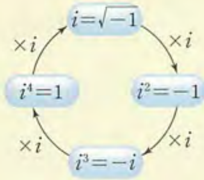
(1) $x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$일 때, $2x^3-2x^2+1$의 값을 구하여라.

(2) $x=\dfrac{10}{2+i}$일 때, $x^3-8x^2+19x+1$의 값을 구하여라.

개념 036

i^n의 계산

i^n (n은 자연수)은 i, -1, $-i$, 1이 반복되어 나타나므로 다음과 같은 규칙성을 찾을 수 있다.



$$i^{4k}=1,\quad i^{4k+1}=i,\quad i^{4k+2}=i^2=-1,\quad i^{4k+3}=i^3=-i$$

(단, k는 자연수)

개념 Approach

i의 거듭제곱을 차례로 구하면 다음과 같다.

$i=i$ $\quad$ $i^2=-1$ $\quad$ $i^3=i^2\cdot i=-i$ $\quad$ $i^4=i^3\cdot i=-i^2=1$

$i^5=i^4\cdot i=i$ $\quad$ $i^6=i^4\cdot i^2=i^2=-1$ $\quad$ $i^7=i^4\cdot i^3=i^3=-i$ $\quad$ $i^8=(i^4)^2=1$

$\vdots$

이와 같이 i의 거듭제곱은 4개의 값 i, -1, $-i$, 1이 반복되어 나타나므로 i^n (n은 자연수)의 값은 n을 4로 나누었을 때의 나머지가 같으면 그 값이 같다.

즉 자연수 k에 대하여

$n=4k$이면 $\quad i^{4k}=(i^4)^k=1$

$n=4k+1$이면 $\quad i^{4k+1}=(i^4)^k\cdot i=i$

$n=4k+2$이면 $\quad i^{4k+2}=(i^4)^k\cdot i^2=i^2=-1$

$n=4k+3$이면 $\quad i^{4k+3}=(i^4)^k\cdot i^3=i^3=-i$

위와 같은 규칙성을 이용하면 i의 거듭제곱을 간단히 구할 수 있다.

개념 Check

다음을 계산하여라.

(1) i^{999} $\qquad$ (2) $(-\sqrt{2}i)^5$ $\qquad$ (3) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}$

풀이 (1) $i^{999}=(i^4)^{249}\cdot i^3=i^3=-i$

(2) $(-\sqrt{2}i)^5=(-\sqrt{2})^5\cdot i^5=-4\sqrt{2}\cdot i^4\cdot i=-4\sqrt{2}i$

(3) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}=\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}+1=0$

답 (1) $-i$ (2) $-4\sqrt{2}i$ (3) 0

대표유형 027 복소수의 거듭제곱

• 개념 036

다음을 계산하여라.

(1) $i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{99}$ (2) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$ (3) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2020}$

유형 Guide 복소수 z^n (n은 자연수)의 값을 구할 때에는 우선 z를 간단히 한 후, $i^{4m+k}=i^k$ (m은 자연수)임을 이용한다. 특히 (3)과 같이 분모에 복소수가 있는 경우에는 먼저 분모의 켤레복소수를 분자, 분모에 곱하여 분모를 실수화해 본다.

유형 SSEN **복소수의 거듭제곱 ○ $i^{4n+k}=i^k$ (n은 자연수)**

풀이 (1) $i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$이므로

$$\begin{aligned}&i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{99}\\&=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots+i^{92}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{96}(i+i^2+i^3)\\&=i^{96}(i+i^2+i^3)=(i^4)^{24}(i-1-i)=-1\end{aligned}$$

(2) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2i}{2}=i$이므로

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{50}=i^{50}=(i^4)^{12}\cdot i^2=i^2=-1$$

(3) $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2020}=(-i)^{2020}=i^{2020}=(i^4)^{505}=1$$

답 (1) -1 (2) -1 (3) 1

Remark 복소수의 거듭제곱의 계산에서 다음 내용이 자주 이용된다. (단, n은 자연수)

① i^n의 합의 꼴 ➡ $i+i^2+i^3+i^4=0$임을 이용

② $\left(\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\right)^n$ 꼴 ➡ $\left(\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\right)^2=\pm i$ (복호동순)임을 이용

③ $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$ 꼴 ➡ $\frac{1+i}{1-i}=i$, $\frac{1-i}{1+i}=-i$임을 이용

정답 및 풀이 • 24쪽

유제 027-1 다음을 계산하여라.

(1) $i+2i^2+3i^3+\cdots+8i^8$ (2) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}$

개념 037 켤레복소수의 성질

복소수 z_1, z_2에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\overline{(\overline{z_1})}=z_1$

(2) $z_1+\overline{z_1}$, $z_1\overline{z_1}$는 실수이다.

(3) ① $\overline{z_1}=z_1 \iff z_1$은 실수 ② $\overline{z_1}=-z_1 \iff z_1$은 순허수 또는 0

(4) ① $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ ② $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

③ $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ ④ $\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}=\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$ (단, $z_1\neq0$)

개념 Approach

$z_1=a+bi$ (a, b는 실수)라 하고 위의 켤레복소수의 성질 (1)~(3)을 확인해 보자.

(1) $\overline{(\overline{z_1})}=\overline{(\overline{a+bi})}=\overline{a-bi}=a+bi=z_1$

(2) $z_1+\overline{z_1}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ ➡ 실수

$z_1\overline{z_1}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ ➡ 실수

(3) ① (i) $\overline{z_1}=z_1$이면 $a-bi=a+bi$이므로 $b=0$

$\therefore z_1=a$ ➡ 실수

(ii) 거꾸로 z_1이 실수이면 $b=0$이므로 $z_1=a$ $\therefore \overline{z_1}=a=z_1$

(i), (ii)에서 $\overline{z_1}=z_1 \iff z_1$은 실수

② (i) $\overline{z_1}=-z_1$이면 $a-bi=-(a+bi)$이므로 $a=0$

$\therefore z_1=bi$

따라서 z_1은 순허수 또는 0이다.

(ii) 거꾸로 z_1이 순허수 또는 0이면 $a=0$이므로 $z_1=bi$ $\therefore \overline{z_1}=-bi=-z_1$

(i), (ii)에서 $\overline{z_1}=-z_1 \iff z_1$은 순허수 또는 0

(4)는 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$(a, b, c, d는 실수)로 놓고 그 성질이 성립함을 확인할 수 있다. 이는 **유제 030-2**에 숙제로 남겨 놓았다.

Remark (4)에 의하여 켤레복소수 기호(bar)는 사칙계산에 대하여 띄어 쓸 수도 붙여 쓸 수도 있다고 기억하자.

개념 Check

$z=2-i$일 때, $z+\overline{z}$와 $z\overline{z}$의 값을 구하여라. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

풀이 $z=2-i$이므로 $\overline{z}=2+i$

$\therefore z+\overline{z}=(2-i)+(2+i)=(2+2)+(-i+i)=4$

$z\overline{z}=(2-i)(2+i)=4-(-1)=5$

답 $z+\overline{z}=4$, $z\overline{z}=5$

대표유형 028 켤레복소수를 포함한 식의 값

• 개념 037

복소수 $\alpha=1+3i$, $\beta=2-5i$에 대하여

$$\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}$$

의 값을 구하여라. (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

유형 Guide 주어진 식에 처음부터 α, β의 값을 대입하여 답을 구할 수도 있지만, 다음 켤레복소수의 사칙계산의 성질을 이용하여 식을 간단히 한 후 α, β의 값을 대입하면 계산이 훨씬 쉬워진다.

유형 SSEN
켤레복소수의 사칙계산
◎ 사칙계산에 대하여 켤레복소수 기호(bar)를 띄어 쓸 수도 붙여 쓸 수도 있다.

풀이

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}&=\alpha(\overline{\alpha}+\overline{\beta})+\beta(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\\&=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\\&=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})\end{aligned}$$

$\alpha=1+3i$, $\beta=2-5i$이므로

$$\alpha+\beta=(1+3i)+(2-5i)=3-2i$$

$$\overline{\alpha+\beta}=\overline{3-2i}=3+2i$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}&=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})\\&=(3-2i)(3+2i)\\&=9+4=13\end{aligned}$$

답 13

정답 및 풀이 • 24쪽

유제 028-1 두 복소수 α, β에 대하여 $\alpha+\beta=2-i$, $\alpha\beta=3-i$일 때, $\alpha\overline{\alpha}\beta+\alpha\beta\overline{\beta}$의 값을 구하여라.
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

유제 028-2 두 복소수 α, β에 대하여 $\alpha\overline{\alpha}=1$, $\beta\overline{\beta}=1$, $\alpha+\beta=-i$일 때, $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$의 값을 구하여라.
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

대표유형 029 켤레복소수에 대한 식의 값

• 개념 037

$x=1+\sqrt{2}i$, $y=1-\sqrt{2}i$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$ (2) x^2-xy+y^2

유형 Guide x와 y가 서로 켤레복소수인 경우, $x+y$와 xy의 값은 항상 실수가 된다. 주어진 식이 x, y를 서로 바꾸어도 변하지 않는 대칭식이므로 주어진 식을 $x+y$, xy에 대한 식으로 나타낸다.

유형 SSEN x, y에 대한 대칭식 ⊙ 합$(x+y)$과 곱(xy)의 식으로 변형

풀이 $x+y=(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)=2$

$xy=(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=1+2=3$

(1) $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$

$=\frac{2^2-2\cdot3}{3}=-\frac{2}{3}$

(2) $x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy=2^2-3\cdot3=-5$

답 (1) $-\frac{2}{3}$ (2) -5

정답 및 풀이 • 24쪽

유제 029-1 $z=3+2i$일 때, $z^3\overline{z}+z\overline{z}^3$의 값을 구하여라. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

유제 029-2 $\alpha=\frac{1+i}{2}$, $\beta=\frac{1-i}{2}$일 때, 다음 중 그 값이 가장 큰 것은?

① $(\alpha+\beta)^2$ ② $\alpha^2\beta^2$ ③ $\alpha^2+\beta^2$

④ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ ⑤ $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$

대표유형 030 등식을 만족시키는 복소수

• 개념 031, 037

복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 다음에 답하여라.

(1) 등식 $2z-3\overline{z}=3+10i$를 만족시키는 복소수 z를 구하여라.

(2) 등식 $(1+i)z+2i\overline{z}=1-3i$를 만족시키는 복소수 z를 구하여라.

유형 Guide z는 실수가 아니라 복소수이므로 z를 하나의 문자로 생각하여 계산하면 안 된다. z가 복소수라는 조건이 주어졌을 때에는 일반적으로 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고 생각한다.

유형 SSEN **복소수 z에 대한 등식 ➲ $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓는다.**

풀이 (1) $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$$2z-3\overline{z}=2(a+bi)-3(a-bi)=2a+2bi-3a+3bi=-a+5bi$$

따라서 $-a+5bi=3+10i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-a=3$, $5b=10$ $\quad\therefore a=-3$, $b=2$

$\therefore z=-3+2i$

(2) $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$$\begin{aligned}(1+i)z+2i\overline{z}&=(1+i)(a+bi)+2i(a-bi)=a+bi+ai-b+2ai+2b\\&=(a+b)+(3a+b)i\end{aligned}$$

따라서 $(a+b)+(3a+b)i=1-3i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=1$, $3a+b=-3$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-2$, $b=3$

$\therefore z=-2+3i$

답 (1) $-3+2i$ (2) $-2+3i$

정답 및 풀이 • 25쪽

유제 030-1 복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 다음에 답하여라.

(1) $z+\overline{z}=6$, $z\overline{z}=13$일 때, z를 모두 구하여라.

(2) $z^2=2i$일 때, $z\overline{z}$의 값을 구하여라.

유제 030-2 두 복소수 z_1, z_2에 대하여 다음 성질이 성립함을 확인하여라.

(단, $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$는 각각 z_1, z_2의 켤레복소수이다.)

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

(4) $\overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)}=\dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$ (단, $z_1\neq0$)

개념 038 음수의 제곱근

임의의 양수 a에 대하여

① $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$

② $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}i$이다.

Remark 위와 같이 정하면 a가 양수, 0, 음수인 것에 관계없이 a의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}$가 된다.

개념 Approach

양수 a에 대하여 제곱하여 a가 되는 수를 a의 제곱근이라 하고, a의 제곱근을 $\pm\sqrt{a}$로 나타냄을 중학교에서 공부하였다.

수의 범위를 복소수까지 확장하면 양수뿐만 아니라 음수의 제곱근도 구할 수 있다.

양수 a에 대하여 제곱하여 $-a$가 되는 수가 $-a$의 제곱근이며

$$(\sqrt{a}i)^2=ai^2=-a,\ (-\sqrt{a}i)^2=ai^2=-a$$

이므로 $-a$의 제곱근은 $\sqrt{a}i$와 $-\sqrt{a}i$이다.

이때 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$, $-\sqrt{-a}=-\sqrt{a}i$와 같이 나타내기로 하면 $-a$의 제곱근을 $\pm\sqrt{-a}$와 같이 나타낼 수 있다. 따라서 실수 A의 부호에 관계없이 A의 제곱근은 $\pm\sqrt{A}$가 된다.

이제 수의 범위를 복소수까지 확장하여 양수뿐만 아니라 음수의 제곱근도 구할 수 있게 되었다.

개념 SSEN: 음수 $-a$의 제곱근 → $\pm\sqrt{-a}$ → $\pm\sqrt{a}i$

개념 Check 1

다음 수를 허수단위 i를 사용하여 나타내어라.

(1) $\sqrt{-3}$　(2) $\sqrt{-9}$　(3) $-\sqrt{-5}$　(4) $-\sqrt{-8}$

풀이 (1) $\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$　(2) $\sqrt{-9}=\sqrt{9}i=3i$

(3) $-\sqrt{-5}=-\sqrt{5}i$　(4) $-\sqrt{-8}=-\sqrt{8}i=-2\sqrt{2}i$

답 (1) $\sqrt{3}i$　(2) $3i$　(3) $-\sqrt{5}i$　(4) $-2\sqrt{2}i$

개념 Check 2

다음 수의 제곱근을 구하여라.

(1) -3　(2) -16　(3) -12　(4) -20

풀이 (1) $\pm\sqrt{-3}=\pm\sqrt{3}i$　(2) $\pm\sqrt{-16}=\pm\sqrt{16}i=\pm4i$

(3) $\pm\sqrt{-12}=\pm\sqrt{12}i=\pm2\sqrt{3}i$　(4) $\pm\sqrt{-20}=\pm\sqrt{20}i=\pm2\sqrt{5}i$

답 (1) $\pm\sqrt{3}i$　(2) $\pm4i$　(3) $\pm2\sqrt{3}i$　(4) $\pm2\sqrt{5}i$

개념 039

음수의 제곱근의 성질

a, b가 실수일 때, 다음이 성립한다.

(1) ① $a<0$, $b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

그 외에는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

② $a>0$, $b<0$이면 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

그 외에는 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (단, $b\neq0$)

(2) ① $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $a<0$, $b<0$ 또는 $a=0$ 또는 $b=0$

② $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이면 $a>0$, $b<0$ 또는 $a=0$, $b\neq0$

Remark (1)과 (2)의 문장 구조를 살펴보면 'p이면 q이다.' 에서 p와 q가 서로 바뀐 관계에 있지만, $a=0$이거나 $b=0$인 경우는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$와 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$가 모두 가능하기 때문에 미세한 차이가 발생한다.

개념 Approach

근호 안의 수가 양수인 경우와 음수인 경우를 나누어 제곱근의 곱셈을 하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

- $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot3}=\sqrt{6}$ ➡ $a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
- $\sqrt{2}\sqrt{-3}=\sqrt{2}\sqrt{3}i=\sqrt{6}i=\sqrt{-6}$ ➡ $a>0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
- $\sqrt{-2}\sqrt{3}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}i=\sqrt{-6}$ ➡ $a<0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
- $\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{3}i=\sqrt{6}i^2=-\sqrt{6}$ ➡ **$a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$**

또 제곱근의 나눗셈에 대하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

- $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ ➡ $a>0$, $b>0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$
- $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}i}=\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{3}i^2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}i=-\sqrt{-\dfrac{2}{3}}=-\sqrt{\dfrac{2}{-3}}$

  ➡ **$a>0$, $b<0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$**
- $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i=\sqrt{\dfrac{2}{3}}i=\sqrt{-\dfrac{2}{3}}=\sqrt{\dfrac{-2}{3}}$ ➡ $a<0$, $b>0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$
- $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{3}i}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\sqrt{\dfrac{-2}{-3}}$ ➡ $a<0$, $b<0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

대표유형 031 음수의 제곱근의 계산

• 개념 039

다음을 계산하여라.

(1) $3\sqrt{-2}-3\sqrt{-8}+\sqrt{-32}$

(2) $\sqrt{-2}\sqrt{-\frac{1}{2}}$

(3) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}$

(4) $\frac{\sqrt{-9}-3}{\sqrt{-3}}$

유형 Guide (1) $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i\ (a>0)$임을 이용하여 음수의 제곱근을 허수단위 i로 나타낸 다음 실수는 실수끼리, 허수는 허수끼리 계산한다.

(2), (3) 음수의 제곱근은 성깔이 있다. 곱셈과 나눗셈을 할 때 그냥 사라지지 않는 경우가 있으니 근호 안의 값의 부호에 특히 주의한다.

유형 SSEN • $a<0,\ b<0$ ⊙ $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ • $a>0,\ b<0$ ⊙ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

풀이 (1) $3\sqrt{-2}-3\sqrt{-8}+\sqrt{-32}=3\sqrt{2}i-3\sqrt{8}i+\sqrt{32}i=3\sqrt{2}i-6\sqrt{2}i+4\sqrt{2}i=\sqrt{2}i$

(2) $-2<0,\ -\frac{1}{2}<0$이므로 $\sqrt{-2}\sqrt{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{(-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=-1$

(3) $6>0,\ -2<0$이므로 $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}=-\sqrt{\frac{6}{-2}}=-\sqrt{-3}=-\sqrt{3}i$

(4) $\frac{\sqrt{-9}-3}{\sqrt{-3}}=\frac{\sqrt{9}i-3}{\sqrt{3}i}=\frac{(3i-3)\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i\cdot\sqrt{3}i}=\frac{3\sqrt{3}i^2-3\sqrt{3}i}{3i^2}$

$=\frac{-3\sqrt{3}-3\sqrt{3}i}{-3}=\sqrt{3}+\sqrt{3}i$

답 (1) $\sqrt{2}i$ (2) -1 (3) $-\sqrt{3}i$ (4) $\sqrt{3}+\sqrt{3}i$

다른풀이 위의 (2), (3)의 경우, 풀이와 같이 음수의 제곱근의 성질을 이용하여 풀기도 하지만 다음과 같이 $a>0$일 때, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$ 꼴로 변형하여 계산하는 방법도 많이 사용된다.

(2) $\sqrt{-2}\sqrt{-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}i=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}i^2=i^2=-1$

(3) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}i}=\frac{\sqrt{6}i}{\sqrt{2}i^2}=-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}i=-\sqrt{3}i$

정답 및 풀이 • 25쪽

유제 031-1 다음을 계산하여라.

(1) $\sqrt{3}\sqrt{-4}$

(2) $\sqrt{-2}\sqrt{-3}\sqrt{-5}$

(3) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-5}}$

(4) $\sqrt{-4}\sqrt{-8}+\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-4}}$

대표유형 032 음수의 제곱근의 성질

• 개념 039

다음 등식을 만족시키는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

(1) $\sqrt{-a+1}\sqrt{a-3}=-\sqrt{(-a+1)(a-3)}$

(2) $\dfrac{\sqrt{a+2}}{\sqrt{a-1}}=-\sqrt{\dfrac{a+2}{a-1}}$

유형 Guide 음수의 제곱근의 성질을 이해하고 있어야 해결할 수 있는 문제이다. a, b가 실수일 때, $\sqrt{a}$와 $\sqrt{b}$의 곱셈과 나눗셈에서 a, b의 부호에 따라 계산 결과가 어떻게 달라지는지 생각해 보자.

유형 SSEN
- $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ ⇨ $a<0$, $b<0$ 또는 $a=0$ 또는 $b=0$
- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ ⇨ $a>0$, $b<0$ 또는 $a=0$, $b\neq0$

풀이 (1) $\sqrt{-a+1}\sqrt{a-3}=-\sqrt{(-a+1)(a-3)}$이므로

$-a+1<0$, $a-3<0$ 또는 $-a+1=0$ 또는 $a-3=0$

$1<a<3$ 또는 $a=1$ 또는 $a=3$

$\therefore 1\leq a\leq 3$

(2) $\dfrac{\sqrt{a+2}}{\sqrt{a-1}}=-\sqrt{\dfrac{a+2}{a-1}}$이므로

$a+2>0$, $a-1<0$ 또는 $a+2=0$, $a-1\neq0$

$-2<a<1$ 또는 $a=-2$, $a\neq1$

$\therefore -2\leq a<1$

답 (1) $1\leq a\leq 3$ (2) $-2\leq a<1$

정답 및 풀이 • 26쪽

유제 032-1 등식 $\dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-6}}=-\sqrt{\dfrac{x-4}{x-6}}$를 만족시키는 정수 x의 개수를 구하여라.

Plus 유제 032-2 등식 $\sqrt{-x}\sqrt{x-3}=-\sqrt{-x(x-3)}$을 만족시키는 실수 x에 대하여 $|x|+|x-4|$의 값을 구하여라.

중단원 연습 문제

정답 및 풀이 • 26쪽

STEP 1 유형 Training

01 복소수 $z=(3+i)x^2+(1+2i)x-4+i$와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 $z=\overline{z}$일 때, 실수 x의 값을 구하여라.

서술형

02 등식 $x(x+yi)+y(y+xi)-5-4i=0$을 만족시키는 양수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하여라.

03 $x=\dfrac{3}{1+i}$일 때, $4x^2-12x+20$의 값을 구하여라.

04 다음 중 $i^n=-i$를 만족시키는 자연수 n의 값이 될 수 없는 것은?

① 7　② 15　③ 23　④ 37　⑤ 43

05 홀수인 자연수 n에 대하여 $\left(\dfrac{-1+i}{1+i}\right)^{2n+1}$의 값을 구하여라.

06 $\alpha=5+2i$일 때, $\alpha^2\overline{\alpha}+\alpha\overline{\alpha}^2$의 값을 구하여라. (단, $\overline{\alpha}$는 α의 켤레복소수이다.)

서술형

07 $\dfrac{2-2\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}=a+bi$일 때, 실수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하여라.

08 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\sqrt{-3}\sqrt{5}=\sqrt{-15}$ ② $\sqrt{-3}\sqrt{-5}=-\sqrt{15}$ ③ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{-\dfrac{3}{5}}$

④ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}=\sqrt{-\dfrac{3}{5}}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-5}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

STEP 2 실전 Application

09 0이 아닌 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{a+bi}{b-ai}+\dfrac{b+ai}{a-bi}$의 값은?

① $-2i$ ② $-i$ ③ i ④ $2i$ ⑤ 1

10 두 복소수 α, β에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

① $\alpha=\overline{\alpha}$이면 α는 실수이다.
② $\alpha=\overline{\beta}$이면 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$는 실수이다.
③ $\alpha^2+\beta^2=0$이면 $\alpha=0$, $\beta=0$이다.
④ $\alpha=\overline{\beta}$일 때, $\alpha\beta=0$이면 $\alpha=0$, $\beta=0$이다.
⑤ $\beta=\overline{\alpha}$, $\alpha\neq0$일 때, $\alpha+\beta=0$이면 α, β는 순허수이다.

서술형

11 복소수 $z=(n-1+2i)^2$에 대하여 z^2이 음의 실수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구하여라.

12 두 복소수 α, β에 대하여 $\alpha◎\beta=\alpha+\beta+\alpha\beta$라 할 때, $(1+2i)◎(a+bi)=0$을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

교육청기출

13 등식

$$\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{i^n}=1-i$$

가 성립하도록 하는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

서술형

14 두 복소수 z_1, z_2에 대하여 $\overline{z_1}-\overline{z_2}=2+i$, $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=5-2i$일 때, $(z_1-2)(z_2+2)$의 값을 구하여라. (단, $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$는 각각 z_1, z_2의 켤레복소수이다.)

교육청기출

15 복소수 z가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $\frac{1}{2}(z+\overline{z})$의 값은?

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수, $i=\sqrt{-1}$)

(가) $z+(1-2i)$는 양의 실수
(나) $z\overline{z}=7$

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

16 두 등식

$$\sqrt{a+3}\sqrt{a-2}=-\sqrt{(a+3)(a-2)},\quad \frac{\sqrt{a+5}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{a+5}{a}}$$

를 모두 만족시키는 정수 a의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

17 양수 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{10}에 대하여

$a_1a_2a_3\cdots a_{10}=100$

일 때, $\sqrt{-a_1}\sqrt{-a_2}\sqrt{-a_3}\cdots\sqrt{-a_{10}}$의 값을 구하여라.

교육청기출

18 0이 아닌 실수 a, b, c가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

> (가) $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$
>
> (나) $|a+b|+|a+c-1|=0$

세 수 a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은?

① $a<b<c$ ② $a<c<b$ ③ $b<a<c$
④ $b<c<a$ ⑤ $c<a<b$

19 0이 아닌 실수 x, y에 대하여 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

> **보기**
>
> ㄱ. $xy<0$이면 $\sqrt{x}\sqrt{y}=\sqrt{xy}$이다.
>
> ㄴ. $x<y<0$이면 $\dfrac{\sqrt{y-x}}{\sqrt{x-y}}+\dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{x}}=2i$이다.
>
> ㄷ. $\sqrt{x}\sqrt{y}=-\sqrt{xy}$이면 $\sqrt{x}\sqrt{x}+\sqrt{y}$의 켤레복소수는 $x-\sqrt{y}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

STEP 3 심화 Forwarding

20 두 복소수 α, β에 대하여 $\alpha^2=2i$, $\beta^2=-2i$일 때, 항상 실수인 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

> **보기**
>
> ㄱ. $\alpha\beta$ ㄴ. $\alpha+\beta$ ㄷ. $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

교육청기출

21 두 복소수 α, β를 $\alpha=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $\beta=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$라 할 때, $\alpha^m\cdot\beta^n=i$를 만족시키는 10 이하의 자연수 m, n에 대하여 $m+2n$의 최댓값을 구하여라.

22 자연수 n에 대하여 $f(n)=\frac{i^n}{1+i}$일 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(1)f(2)=-\frac{1}{2}$

ㄴ. $f(100-2k)=f(100+2k)$ (단, $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 49$)

ㄷ. $f(1)f(2)+f(2)f(3)+f(3)f(4)+\cdots+f(99)f(100)=0$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

서술형

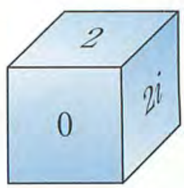
23 자연수 n의 양의 약수가 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_k$일 때,

$$x_n=i^{a_1}+i^{a_2}+i^{a_3}+\cdots+i^{a_k}$$

이다. $m=2^{10}$, $n=5^{10}$일 때, $x_m+x_n=p+qi$를 만족시키는 자연수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하여라.

교육청기출

24 그림과 같이 6개의 면에 각각 0, 2, 3, 5, $2i$, $1+i$가 적힌 정육면체 모양의 주사위가 있다. 이 주사위를 n번 던져서 나온 수들을 모두 곱하였더니 -32가 되었다. 가능한 모든 n의 값의 합을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$이다.)



05

이차방정식

중학교에서 속력과 거리, 소금물의 농도, 나이에 관한 문제 등 실생활의 여러 가지 문제가 주어지면 모르는 것을 미지수 x로 놓고 방정식을 세워 문제를 해결하였다.
이것은 '모르는 것'을 x로 놓음으로써 마치 '아는 것'처럼 생각하도록 하는 사고의 대전환으로, 복잡한 문장으로 주어져서 어떻게 실마리를 잡아야 할지 모르는 문제를 해결하는 데 매우 유용한 방법이다.

이 단원에서는 이차방정식의 근을 복소수의 범위까지 확장하여 구하고, 판별식을 이용하여 이차방정식이 어떤 근을 갖는지 알아보자. 또 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 여러 가지 문제를 해결해 보자.

●한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

12 일차방정식의 풀이

- 일차방정식의 뜻을 알고, 여러 가지 방정식의 해를 구할 수 있다.

13 이차방정식의 풀이

- 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 안다.
- 근의 공식을 이용하여 이차방정식의 해를 구할 수 있다.

14 이차방정식의 판별식

- 판별식을 이용하여 이차방정식의 근을 판별할 수 있다.

15 이차방정식의 근과 계수의 관계

- 이차방정식의 계수를 이용하여 두 근의 합과 곱을 구할 수 있다.

16 이차방정식의 실근의 부호

- 이차방정식의 판별식과 두 근의 합과 곱의 부호를 이용하여 실근의 부호를 판단할 수 있다.

개념 & 특강	대표유형 & 유제		
040 방정식과 일차방정식			
041 방정식 $ax=b$의 풀이	033 방정식 $ax=b$의 풀이		
특강 042 절댓값 기호를 포함한 방정식의 풀이	034 절댓값 기호를 포함한 방정식 (1)		037 절댓값 기호를 포함한 방정식 (2)
043 이차방정식의 뜻과 근의 종류			
044 이차방정식의 풀이	035 한 근이 주어진 이차방정식	036 이차항의 계수가 무리수 또는 허수인 이차방정식	
		038 가우스 기호를 포함한 방정식	
045 이차방정식의 근의 판별	040 이차방정식의 근의 판별		
		039 이차방정식의 활용	
특강 046 계수가 허수인 이차방정식의 근의 판별			
특강 047 이차식이 완전제곱식이 되도록 하는 조건			
048 이차방정식의 근과 계수의 관계	041 이차방정식의 두 근에 대한 식의 값	042 두 근이 주어진 이차방정식	043 두 근 사이의 관계가 주어진 이차방정식
049 이차식의 인수분해			
050 두 수를 근으로 갖는 이차방정식	044 두 수를 근으로 갖는 이차방정식		
051 이차방정식의 켤레근의 성질	045 이차방정식의 켤레근의 성질		
052 이차방정식의 실근의 부호	046 이차방정식의 실근의 부호		

개념 040 방정식과 일차방정식

1 방정식

(1) 방정식 : 등식에 포함된 미지수의 값에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하는 등식을 **방정식**이라 한다.

(2) 방정식의 해(근) : 방정식을 참이 되게 하는 미지수의 값을 방정식의 **해** 또는 **근**이라 하고, 방정식을 만족시키는 해 전체를 구하는 것을 **방정식을 푼다**고 한다.

Remark $x^2-1=(x+1)(x-1)$과 같이 미지수의 값에 관계없이 항상 참이 되는 등식은 **항등식**이라 한다.

2 일차방정식

$ax+b=0$($a\neq0$, a, b는 상수) 꼴로 변형할 수 있는 방정식을 x에 대한 **일차방정식**이라 한다.

개념 Approach

방정식 $ax+b=0$에서

미지수가 x일 때 ➡ x에 대한 방정식

미지수가 a일 때 ➡ a에 대한 방정식

미지수가 b일 때 ➡ b에 대한 방정식

이라 한다. 즉 '~에 대한'에서 '~' 부분의 문자가 미지수이고, 미지수를 제외한 나머지 문자는 상수로 생각한다.

Remark $f(x)$가 x에 대한 다항식일 때, 방정식 $f(x)=0$을 x에 대한 **다항방정식**이라 한다. x에 대한 다항방정식을 미지수의 차수에 따라 다음과 같이 분류하기도 한다. (단, $a\neq0$)

- 일차방정식 : $ax+b=0$ 예 $2x-1=0$
- 이차방정식 : $ax^2+bx+c=0$ 예 $x^2-3x-4=0$
- 삼차방정식 : $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 예 $3x^3+2x^2-7x+1=0$
- 사차방정식 : $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 예 $x^4-4x^2+3=0$

특히 삼차 이상의 방정식을 **고차방정식**이라 한다.

개념 Check

x에 대한 일차방정식인 것만을 **보기**에서 있는 대로 골라라.

보기

ㄱ. $2x-4=3$　　　ㄴ. $x^3-x^2+1=x^2(x-2)+2$

ㄷ. $x^2+2x+3=(x-3)(x+1)$　　　ㄹ. $(x-1)^2=x^2-2x+1$

풀이 주어진 방정식에서 우변의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면

ㄱ. $2x-7=0$　　ㄴ. $x^2-1=0$　　ㄷ. $4x+6=0$　　ㄹ. $0=0$

이상에서 x에 대한 일차방정식은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

개념 041 방정식 $ax=b$의 풀이

x에 대한 방정식 $ax=b$의 해는 다음과 같다.

① $a\neq0$일 때, $x=\dfrac{b}{a}$ (오직 하나의 해)

② $a=0$일 때, $\begin{cases} b=0\text{이면} \Rightarrow \text{해가 무수히 많다. (부정)} \\ b\neq0\text{이면} \Rightarrow \text{해가 없다. (불능)} \end{cases}$

개념 Approach

■$x+$▲$=$●$x+$▼ 꼴의 x에 대한 방정식을 풀 때에는 먼저 일차항을 좌변으로, 상수항을 우변으로 이항하여 $ax=b$ 꼴로 변형한다. 이때 주어진 방정식이 일차방정식인 경우와 아닌 경우, 즉 $a\neq0$인 경우와 $a=0$인 경우로 나누어 해를 구한다.

① $a\neq0$일 때 ⇐ x에 대한 일차방정식이다.

방정식 $ax=b$의 양변을 a로 나누면 $x=\dfrac{b}{a}$

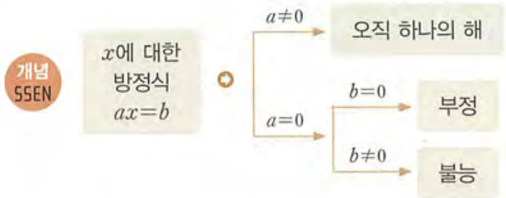
② $a=0$일 때 ⇐ x에 대한 일차방정식이 아니다.

$a=0$이면 $ax=b$의 양변을 a로 나눌 수 없으므로 $b=0$인 경우와 $b\neq0$인 경우로 나누어 생각한다.

(i) $b=0$이면 $0\cdot x=0$이 되어 x에 어떤 수를 대입해도 항상 등식이 성립한다.
따라서 주어진 방정식의 해는 무수히 많고, 이런 뜻에서 부정(不定)이라 한다.

(ii) $b\neq0$이면 $0\cdot x=b$가 되어 x에 어떤 수를 대입해도 등식이 성립하지 않는다.
따라서 주어진 방정식의 해는 없고, 이런 뜻에서 불능(不能)이라 한다.

Remark ① 부정(不定): 해가 무수히 많아서 해를 정할 수가 없다.
② 불능(不能): 해가 하나도 없어서 해를 구할 수가 없다.



개념 Check 1

다음 방정식을 풀어라.

(1) $-3(x+1)+2(3x-2)=5x-1$

(2) $1-\dfrac{5-3x}{2}=\dfrac{3}{4}(x-2)$

(3) $\dfrac{7}{2}x-4=x+\dfrac{5}{2}\left(x-\dfrac{8}{5}\right)$

(4) $7x+2(2x-1)=11x+1$

풀이

(1) $-3(x+1)+2(3x-2)=5x-1$에서

$-3x-3+6x-4=5x-1$

$-2x=6 \quad \therefore x=-3$

(2) 주어진 식의 양변에 분모의 최소공배수 4를 곱하면

$4-2(5-3x)=3(x-2), \quad 4-10+6x=3x-6$

$3x=0 \quad \therefore x=0$

(3) $\dfrac{7}{2}x-4=x+\dfrac{5}{2}\left(x-\dfrac{8}{5}\right)$에서

$\dfrac{7}{2}x-4=x+\dfrac{5}{2}x-4 \quad \therefore 0\cdot x=0$

따라서 해가 무수히 많다.

(4) $7x+2(2x-1)=11x+1$에서

$7x+4x-2=11x+1 \quad \therefore 0\cdot x=3$

따라서 해가 없다.

답 (1) $x=-3$ (2) $x=0$ (3) 해가 무수히 많다. (부정) (4) 해가 없다. (불능)

개념 Check 2

x에 대한 방정식 $(a+1)x=a^2-1$을 풀어라. (단, a는 상수이다.)

풀이

$(a+1)x=a^2-1$에서 $\quad (a+1)x=(a+1)(a-1)$

(i) $a+1\neq 0$, 즉 $a\neq -1$일 때,

양변을 $a+1$로 나누면

$$x=\frac{(a+1)(a-1)}{a+1}=a-1$$

(ii) $a+1=0$, 즉 $a=-1$일 때,

$0\cdot x=0$이므로 해가 무수히 많다.

답 풀이 참조

대표유형 033 방정식 $ax=b$의 풀이

• 개념 041

x에 대한 방정식 $(a^2-4)x+a=2$의 해가 무수히 많도록 하는 상수 a의 값을 m, 해가 없도록 하는 상수 a의 값을 n이라 할 때, $m-n$의 값을 구하여라.

05 이차방정식

유형 Guide 먼저 x에 대한 일차항은 좌변으로, 상수항은 우변으로 이항하여 $px=q$ 꼴로 정리한다. x에 대한 방정식 $px=q$의 해가 무수히 많으려면 $0\cdot x=0$ 꼴이어야 하고, 해가 없으려면 $0\cdot x=q$ $(q\neq 0)$ 꼴이어야 한다. 즉 x에 대한 방정식 $px=q$의 해가 무수히 많거나 해가 없는 것은 모두 $p=0$인 경우이다.

유형 SSEN x에 대한 방정식 $px=q$ ○ ┌ 해가 무수히 많으면 ○ $p=0,\ q=0$
└ 해가 없으면 ○ $p=0,\ q\neq 0$

풀이 $(a^2-4)x+a=2$에서

$(a+2)(a-2)x=-(a-2)$

(i) 해가 무수히 많으려면

$(a+2)(a-2)=0,\ -(a-2)=0$

$\therefore a=2$

(ii) 해가 없으려면

$(a+2)(a-2)=0,\ -(a-2)\neq 0$

$\therefore a=-2$

(i), (ii)에서 $m=2,\ n=-2$이므로

$m-n=4$

답 4

Remark $a\neq -2,\ a\neq 2$이면 $x=-\dfrac{a-2}{(a+2)(a-2)}=-\dfrac{1}{a+2}$

정답 및 풀이 • 30쪽

유제 033-1 x에 대한 방정식 $a^2x+1=x+a$의 해가 무수히 많을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

유제 033-2 x에 대한 방정식 $4k(x-1)=x+2$의 해가 없을 때, 상수 k의 값을 구하여라.

특강 042

절댓값 기호를 포함한 방정식의 풀이

절댓값 기호를 포함한 방정식은

$$|A|=\begin{cases} A & (A\geq 0) \\ -A & (A<0) \end{cases}$$

임을 이용하여 절댓값 기호를 없애는 것이 문제 해결의 핵심이다.
일반적으로 절댓값 기호를 포함한 방정식은 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 경계로 하여 x의 값의 범위를 나눈다.
(ii) 각 범위에서 절댓값 기호를 없앤 후 식을 정리하여 x의 값을 구한다.
(iii) (ii)에서 구한 x의 값 중 해당 범위에 속하는 것만 주어진 방정식의 해이다.

(1) $|x-a|=bx+c$ 꼴 (절댓값 기호가 1개인 경우)

절댓값 기호 안의 식 $x-a$의 값이 0이 되는 x의 값 a를 경계로 하여 다음과 같이 2개의 범위로 나누어서 푼다.

(i) $x<a$ (ii) $x\geq a$

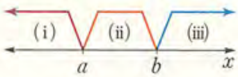
예를 들어 방정식 $|x-3|=x+1$은

(i) $x<3$ (ii) $x\geq 3$ ⇐ 절댓값 기호가 1개이면 x의 값의 범위는 2개로 나누어진다.

으로 나누어서 푼다.

(2) $|x-a|\pm|x-b|=cx+d$ $(a<b)$ 꼴 (절댓값 기호가 2개인 경우)

절댓값 기호 안의 식 $x-a$, $x-b$의 값이 0이 되는 x의 값 a, b를 경계로 하여 다음과 같이 3개의 범위로 나누어서 푼다.



(i) $x<a$ (ii) $a\leq x<b$ (iii) $x\geq b$

예를 들어 방정식 $|x-1|+|x-2|=x$는

(i) $x<1$ (ii) $1\leq x<2$ (iii) $x\geq 2$ ⇐ 절댓값 기호가 2개이면 x의 값의 범위는 3개로 나누어진다.

로 나누어서 푼다.

한편 $|f(x)|=a$, $|f(x)|=|g(x)|$와 같이 특수한 방정식은 다음을 이용하여 푼다.

① $|f(x)|=a$ $(a>0)$ $\Longleftrightarrow$ $f(x)=\pm a$
② $|f(x)|=|g(x)|$ $\Longleftrightarrow$ $f(x)=\pm g(x)$

예를 들어 방정식 $|x-1|=5$, $|x-1|=|2x|$는 각각 다음과 같이 변형하여 푼다.

$|x-1|=5$ ➡ $x-1=\pm 5$ $|x-1|=|2x|$ ➡ $x-1=\pm 2x$

Remark 방정식 $|f(x)|=a$에서 $a<0$이면 해가 없다.

개념 Check

다음 방정식을 풀어라.

(1) $|x-2|=5$　　(2) $|x-4|=x+2$

(3) $|x+1|+|x|=2$　　(4) $|x-1|=|3x|$

풀이 (1) $|x-2|=5$에서　$x-2=\pm 5$

따라서 주어진 방정식의 해는

$x=-3$ 또는 $x=7$

(2) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은 $x-4=0$에서

$x=4$

(i) $x<4$일 때,

$x-4<0$이므로　$-(x-4)=x+2$,　$-2x=-2$

$\therefore x=1$

(ii) $x\geq 4$일 때,

$x-4\geq 0$이므로　$x-4=x+2$

따라서 $0\cdot x=6$이므로 해가 없다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=1$

(3) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은 $x+1=0$, $x=0$에서

$x=-1$, $x=0$

(i) $x<-1$일 때,

$x+1<0$이므로　$-(x+1)-x=2$,　$-2x=3$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$

(ii) $-1\leq x<0$일 때,

$x+1\geq 0$이므로　$x+1-x=2$

따라서 $0\cdot x=1$이므로 해가 없다.

(iii) $x\geq 0$일 때,

$x+1>0$이므로　$x+1+x=2$

$2x=1$　$\therefore x=\frac{1}{2}$

이상에서 주어진 방정식의 해는

$x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

(4) $|x-1|=|3x|$에서　$x-1=\pm 3x$

(i) $x-1=3x$일 때,　$2x=-1$　$\therefore x=-\frac{1}{2}$

(ii) $x-1=-3x$일 때,　$4x=1$　$\therefore x=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는　$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{4}$

답 풀이 참조

대표유형 034 절댓값 기호를 포함한 방정식 (1)

• 특강 042

방정식 $|2x-6|+|x+1|=2x+1$을 풀어라.

유형 Guide 절댓값 기호를 포함한 방정식은 절댓값 기호 안의 식의 값을 0이 되게 하는 x의 값에 주목해야 한다. 절댓값 기호 안의 식의 값을 0이 되게 하는 x의 값을 경계로 x의 값의 범위를 나누어, 절댓값 기호를 없앤 후 해를 구한다. 이때 구한 해가 각 범위에 적합한지를 반드시 확인해야 한다.

유형 SSEN **절댓값 기호를 포함한 방정식**
◎ 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 미지수의 값을 경계로 범위를 나눈다.

풀이 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은 $2x-6=0$, $x+1=0$에서

$x=-1$, $x=3$

(i) $x<-1$일 때,

$2x-6<0$, $x+1<0$이므로

$-(2x-6)-(x+1)=2x+1$, $\quad -5x=-4$

$\therefore x=\frac{4}{5}$

그런데 $x<-1$이므로 $x=\frac{4}{5}$는 해가 아니다.

(ii) $-1\le x<3$일 때,

$2x-6<0$, $x+1\ge 0$이므로

$-(2x-6)+(x+1)=2x+1$, $\quad -3x=-6$

$\therefore x=2$

(iii) $x\ge 3$일 때,

$2x-6\ge 0$, $x+1>0$이므로

$(2x-6)+(x+1)=2x+1 \quad \therefore x=6$

이상에서 주어진 방정식의 해는

$x=2$ 또는 $x=6$

답 $x=2$ 또는 $x=6$

정답 및 풀이 • 30쪽

유제 034-1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $|x-1|+|x-5|=x$ (2) $|x+3|-2|x-3|=-1$

Plus 유제 034-2 방정식 $|x-2|=3-\sqrt{(x-3)^2}$의 모든 근의 합을 구하여라.

개념 043 이차방정식의 뜻과 근의 종류

1 실근과 허근

방정식의 근을 복소수의 범위까지 확장하여 구할 때, 실수인 근을 **실근**, 허수인 근을 **허근**이라 한다.

2 이차방정식

(1) 이차방정식 : $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수) 꼴로 변형할 수 있는 방정식을 x에 대한 **이차방정식**이라 한다.

(2) 이차방정식의 근의 종류

계수가 실수인 이차방정식은 복소수의 범위에서 항상 두 개의 근을 갖는다.
특히 두 개의 실근이 같을 때, 이 근을 **중근**이라 한다.
따라서 계수가 실수인 이차방정식의 근은 다음과 같이 구분할 수 있다.

① 서로 다른 두 실근 ┐
② 서로 같은 두 실근(중근) ┘ 실근
③ 서로 다른 두 허근

Remark 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 허근이면 다른 한 근은 그 근의 켤레복소수이다.

개념 Approach

중학교에서는 이차방정식의 근을 실수의 범위에서만 생각하여 방정식 $x^2+1=0$의 근은 존재하지 않았다. 그러나 근을 복소수의 범위까지 확장하여 생각하면 $x^2+1=0$의 근은 $x=\pm i$로 존재한다. 고등학교 과정에서는 특별한 조건이 없는 한 방정식의 해를 복소수의 범위에서 구한다. 복소수의 범위에서 계수가 실수인 이차방정식의 해는 항상 존재한다.

Remark
- x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ ➡ $a\neq0$임을 뜻한다.
- x에 대한 방정식 $ax^2+bx+c=0$ ➡ $a=0$인 경우와 $a\neq0$인 경우로 나누어서 생각한다.

개념 Check

이차방정식 $x^2+6=0$의 해를 다음 범위에서 구하여라.

(1) 실수의 범위　　　　(2) 복소수의 범위

풀이 (1) $x^2=-6$을 만족시키는 실수 x는 없으므로 해가 없다.
(2) $x^2=-6$　　$\therefore x=\pm\sqrt{6}i$

답 (1) 해가 없다. (2) $x=\pm\sqrt{6}i$

개념 044 이차방정식의 풀이

(1) 인수분해를 이용한 풀이

x에 대한 이차방정식이 $(ax-b)(cx-d)=0$ 꼴로 변형되면

$$(ax-b)(cx-d)=0 \Rightarrow ax-b=0 \text{ 또는 } cx-d=0$$
$$\Rightarrow x=\frac{b}{a} \text{ 또는 } x=\frac{d}{c}$$

(2) 완전제곱식을 이용한 풀이

x에 대한 이차방정식이 $(x-a)^2=b$ 꼴로 변형되면

$$(x-a)^2=b \Rightarrow x-a=\pm\sqrt{b} \Rightarrow x=a\pm\sqrt{b}$$

(3) 근의 공식을 이용한 풀이

① 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $\Rightarrow$ $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

② 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$ $\Rightarrow$ $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

Remark ②는 일차항의 계수가 짝수일 때 사용한다.

개념 Approach

이차방정식의 좌변이 두 일차식의 곱으로 인수분해되면 다음을 이용하여 해를 구한다.

$$AB=0 \Longleftrightarrow A=0 \text{ 또는 } B=0$$

그러나 이차방정식 $x^2-3x+1=0$과 같이 좌변이 쉽게 인수분해되지 않으면 좌변을 완전제곱식으로 변형하여 해를 구할 수 있다. 이를 공식화한 것이 이차방정식의 근의 공식이다.

완전제곱식을 이용하여 $x^2-3x+1=0$의 해를 구하는 과정과 근의 공식을 유도하는 과정을 비교하면 다음과 같다.

[완전제곱식을 이용한 풀이의 예]

x에 대한 방정식 $x^2-3x+1=0$에서

$$x^2-3x=-1$$
$$x^2-3x+\left(-\frac{3}{2}\right)^2=-1+\left(-\frac{3}{2}\right)^2$$
$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$
$$x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$x=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$\therefore x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

[완전제곱식을 이용한 근의 공식의 유도]

x에 대한 방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$에서

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$
$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$
$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \cdots ㉠$$

특히 일차항의 계수가 짝수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 근은 앞의 공식 ㉠에 b 대신 $2b'$을 대입하면 된다. 즉

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

Remark 이차방정식의 근의 공식은 근호 안의 값 b^2-4ac가 실수인 경우에 한하여 계수가 허수일 때에도 사용할 수 있다.

개념 SSEN

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 풀이
- 좌변이 인수분해되면 → $AB=0 \Longleftrightarrow A=0$ 또는 $B=0$ 이용
- 좌변이 인수분해되지 않으면 → 근의 공식 이용

개념 Check 1

다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $2x^2-x-1=0$
(2) $\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}=0$
(3) $4x^2-12x+9=0$
(4) $4x^2+4x+1=0$

풀이 (1) $2x^2-x-1=0$에서 $(2x+1)(x-1)=0$ $\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

(2) $\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}=0$의 양변에 2를 곱하면 $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

(3) $4x^2-12x+9=0$에서 $(2x-3)^2=0$ $\therefore x=\frac{3}{2}$

(4) $4x^2+4x+1=0$에서 $(2x+1)^2=0$ $\therefore x=-\frac{1}{2}$

답 풀이 참조

개념 Check 2

다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2+5x+1=0$
(2) $2x^2-3x+2=0$
(3) $9x^2-6\sqrt{2}x+2=0$
(4) $x^2+2x-1=0$

풀이 (1) $x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

(2) $x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot2}}{2\cdot2}=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{4}$

(3) $x=\frac{-(-3\sqrt{2})\pm\sqrt{(-3\sqrt{2})^2-9\cdot2}}{9}=\frac{3\sqrt{2}}{9}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

(4) $x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-1)}}{1}=-1\pm\sqrt{2}$

답 풀이 참조

대표유형 035 한 근이 주어진 이차방정식

• 개념 044

x에 대한 이차방정식 $2(a+2)x^2+4x+a^2-8=0$의 한 근이 1일 때, 상수 a의 값과 다른 한 근을 구하여라.

유형 Guide 주어진 근을 이차방정식에 대입하여 a의 값을 구한 후, 이 값을 다시 방정식에 대입하여 다른 한 근을 구한다. 이때 주어진 방정식이 x에 대한 이차방정식이므로 x^2의 계수가 0이 아님에 유의한다.

유형 SSEN 방정식의 한 근이 주어지면 ➔ 주어진 근을 방정식에 대입한다.

풀이 $2(a+2)x^2+4x+a^2-8=0$에 $x=1$을 대입하면

$2(a+2)+4+a^2-8=0$

$a^2+2a=0, \quad a(a+2)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-2$

그런데 $2(a+2)\neq 0$, 즉 $a\neq -2$이므로 $\quad a=0$

x에 대한 이차방정식이므로 (x^2의 계수)$\neq 0$

$2(a+2)x^2+4x+a^2-8=0$에 $a=0$을 대입하면

$4x^2+4x-8=0, \quad x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 다른 한 근은 -2이다.

답 $a=0$, 다른 한 근 : -2

정답 및 풀이 • 31쪽

유제 035-1 이차방정식 $x^2-mx-10m=2$의 한 근이 -3일 때, 다른 한 근을 구하여라. (단, m은 상수이다.)

유제 035-2 x에 대한 이차방정식 $(a-3)x^2+x-(a^2-10)=0$의 두 근이 -1, b일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

대표유형 036 이차항의 계수가 무리수 또는 허수인 이차방정식

• 개념 044

다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $(\sqrt{2}-1)x^2-(3-\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$

(2) $(1-i)x^2+2(1+i)x-(1-i)=0$ (단, $i=\sqrt{-1}$)

유형 Guide 인수분해, 완전제곱식, 근의 공식을 바로 적용하여 풀기에는 주어진 방정식의 꼴이 복잡하다. 이와 같이 x^2의 계수가 무리수인 이차방정식은 x^2의 계수를 유리화하고, 허수인 이차방정식은 x^2의 계수를 실수화하여 풀면 계산이 좀 더 간단해진다.
특히 x가 유리수 또는 실수라는 조건이 없으므로 무리수가 서로 같을 조건이나 복소수가 서로 같을 조건을 사용하지 않도록 주의해야 한다.

유형 SSEN 이차항의 계수가 [무리수이면 ⊙ 유리화 / 허수이면 ⊙ 실수화

풀이 (1) 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면

$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)x^2-(\sqrt{2}+1)(3-\sqrt{2})x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$

$\therefore x^2-(2\sqrt{2}+1)x+2+\sqrt{2}=0$ ...... ㉠

따라서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{(2\sqrt{2}+1)\pm\sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2-4(2+\sqrt{2})}}{2}=\frac{(2\sqrt{2}+1)\pm1}{2}$$

$\therefore x=\sqrt{2}+1$ 또는 $x=\sqrt{2}$

(2) 주어진 방정식의 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+2(1+i)^2x-(1+i)(1-i)=0$

$2x^2+4ix-2=0$ $\quad\therefore x^2+2ix-1=0$ ...... ㉡

따라서 근의 공식에 의하여

$x=-i\pm\sqrt{i^2-(-1)}=-i$

㉡에서 b^2-4ac가 실수이므로 근의 공식을 사용할 수 있다.

답 (1) $x=\sqrt{2}+1$ 또는 $x=\sqrt{2}$ (2) $x=-i$

다른풀이 (1) ㉠에서 $x^2-(2\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$이므로 좌변을 실수의 범위에서 인수분해하면

$(x-\sqrt{2})\{x-(\sqrt{2}+1)\}=0$ $\quad\therefore x=\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}+1$

(2) ㉡에서 $x^2+2ix+i^2=0$이므로 좌변을 복소수의 범위에서 인수분해하면

$(x+i)^2=0$ $\quad\therefore x=-i$

정답 및 풀이 • 31쪽

유제 036-1 다음 이차방정식을 풀어라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

(1) $\sqrt{2}x^2+(4-\sqrt{2})x+2\sqrt{2}-2=0$

(2) $\sqrt{3}x^2-(6-\sqrt{3})x+3\sqrt{3}-3=0$

(3) $ix^2+2x+3i=0$

(4) $ix^2-(3i-2)x-3-i=0$

대표유형 037 절댓값 기호를 포함한 방정식 (2)

• 특강 042 • 개념 044

다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^2+2|x|-3=0$　　(2) $x^2+|3x-2|-2=0$

유형 Guide 절댓값 기호를 포함한 방정식은 앞에서 배운대로 절댓값 기호 안의 식의 값을 0이 되게 하는 x의 값을 경계로 범위를 나누어 푼 다음, 구한 해가 각 범위에 적합한지 반드시 확인해야 한다.

유형 SSEN **절댓값 기호를 포함한 방정식**
⊙ 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 미지수의 값을 경계로 범위를 나눈다.

풀이 (1) (i) $x<0$일 때, $x^2-2x-3=0$이므로

$(x+1)(x-3)=0$　　$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 $x<0$이므로　$x=-1$

(ii) $x\ge 0$일 때, $x^2+2x-3=0$이므로

$(x+3)(x-1)=0$　　$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

그런데 $x\ge 0$이므로　$x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는　$x=-1$ 또는 $x=1$

(2) (i) $x<\frac{2}{3}$일 때, $x^2-(3x-2)-2=0$이므로

$x^2-3x=0$,　$x(x-3)=0$　　$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

그런데 $x<\frac{2}{3}$이므로　$x=0$

(ii) $x\ge\frac{2}{3}$일 때, $x^2+(3x-2)-2=0$이므로

$x^2+3x-4=0$,　$(x+4)(x-1)=0$　　$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

그런데 $x\ge\frac{2}{3}$이므로　$x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는　$x=0$ 또는 $x=1$

답 (1) $x=-1$ 또는 $x=1$　(2) $x=0$ 또는 $x=1$

다른풀이 (1) $x^2+2|x|-3=0$에서　$|x|^2+2|x|-3=0$,　$(|x|+3)(|x|-1)=0$

$|x|\ge 0$이므로　$|x|=1$　　$\therefore x=\pm 1$

정답 및 풀이 • 32쪽

유제 037-1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^2+3|x|-10=0$　　(2) $x^2-|x-1|+x-3=0$

대표유형 038 가우스 기호를 포함한 방정식

• 개념 044

$1 \le x < 3$일 때, 방정식 $3x-[x]=2x^2-[x]^2$을 풀어라.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

05 이차방정식

유형 Guide 실수 x에 대하여 x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$로 나타내고, 이를 **가우스 기호**라 한다. 만일 x가 정수 n이면 $[x]=n$이다. 또 x가 정수가 아니면 $[x]$는 수직선 위에서 x에 대응하는 점을 기준으로 왼쪽 첫 번째 정수이므로, 두 정수 n과 $n+1$ 사이의 실수 x에 대하여 $[x]=n$이다.
따라서 정수 n에 대하여 다음이 성립한다.

$n \le x < n+1 \iff [x]=n$

즉 정수의 구간에 따라 $[x]$의 값이 달라지므로 주어진 x의 값의 범위를 $1 \le x < 2$일 때와 $2 \le x < 3$일 때로 나누어 방정식의 해를 구한다.

유형 SSEN **가우스 기호를 포함한 방정식 ⊙ 미지수의 값의 범위를 정수의 구간으로 나눈다.**

풀이 (i) $1 \le x < 2$일 때, $[x]=1$이므로

$3x-1=2x^2-1, \quad 2x^2-3x=0$

$x(2x-3)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

그런데 $1 \le x < 2$이므로 $\quad x=\frac{3}{2}$

(ii) $2 \le x < 3$일 때, $[x]=2$이므로

$3x-2=2x^2-4, \quad 2x^2-3x-2=0$

$(2x+1)(x-2)=0 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

그런데 $2 \le x < 3$이므로 $\quad x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $\quad x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=2$

답 $x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=2$

정답 및 풀이 • 32쪽

유제 038-1 $3 \le x < 5$일 때, 방정식 $x^2-[x]-12=0$을 풀어라.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

Plus 유제 038-2 방정식 $[x]^2-6[x]+5=0$을 만족시키는 x의 값의 범위를 구하여라.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

대표유형 039 이차방정식의 활용

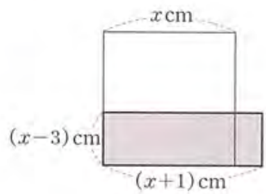
• 개념 044

어떤 정사각형의 가로의 길이를 1 cm만큼 늘이고 세로의 길이를 3 cm만큼 줄여서 만든 직사각형의 넓이가 12 cm^2이었다. 이때 처음 정사각형의 넓이는 몇 cm^2인지 구하여라.

유형 Guide 방정식의 활용 문제는 어떤 값을 미지수 x로 놓을지가 관건이다. 대부분 구하려는 값을 x로 놓고 식을 세우지만, 위의 문제와 같이 구하려는 값(정사각형의 넓이)을 결정짓는 값(정사각형의 한 변의 길이)을 x로 놓고 식을 세우기도 한다. 이때 방정식을 풀어 구한 미지수의 값 중에서 문제의 조건에 적합한 것만을 택한다.

유형 SSEN **방정식의 활용 ⊙ 미지수 x를 정하여 방정식을 세운다.**

풀이 처음 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 새로 만들어진 직사각형의 가로의 길이는 $(x+1)$cm, 세로의 길이는 $(x-3)$cm이므로



$(x+1)(x-3)=12$, $\quad x^2-2x-15=0$

$(x+3)(x-5)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=5$

그런데 $x>3$이므로 $\quad x=5$

(세로의 길이)>0이므로 $x-3>0 \quad \therefore x>3$

따라서 처음 정사각형의 한 변의 길이는 5 cm이므로 처음 정사각형의 넓이는 25 cm^2이다.

답 25 cm^2

Remark 방정식의 활용 문제는 일반적으로 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) 구하려는 값(또는 구하려는 값을 결정짓는 값)을 미지수 x로 놓는다.
(ii) 주어진 조건을 이용하여 x에 대한 방정식을 세운다.
(iii) 방정식을 푼 다음 문제의 조건을 만족시키는 것만 택한다.

정답 및 풀이 • 32쪽

유제 039-1 직사각형 모양의 수영장 바닥의 가로의 길이는 세로의 길이보다 10 m만큼 짧고, 그 넓이는 264 m^2이다. 이 수영장 바닥의 둘레의 길이는 몇 m인지 구하여라.

유제 039-2 현재 아버지와 아들의 나이의 차는 30살이다. 5년 후 아들의 나이의 제곱은 아버지의 나이의 2배보다 20살이 많다고 한다. 이때 5년 후 아들의 나이를 구하여라.

개념 045

이차방정식의 근의 판별

1 이차방정식의 판별식

a, b, c가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$에 대하여 근호 안의 식 b^2-4ac를 D라 하면 D의 부호에 따라 x가 실근인지 허근인지 결정된다. 이때

$$D=b^2-4ac$$

를 이차방정식의 **판별식**이라 한다.

Remark D는 판별식을 뜻하는 Discriminant의 첫 글자를 따온 것이다.

2 이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac$라 하면 다음이 성립한다.

① $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.
② $D=0 \Longleftrightarrow$ 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.
③ $D<0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$D\geq 0 \Leftrightarrow$ 실근을 갖는다.

Remark $D\geq 0$이면 $\sqrt{D}$는 실수이고, $D<0$이면 $\sqrt{D}$는 허수이다.

개념 Approach

판별식의 부호에 따라 이차방정식의 근이 실근인지 허근인지 결정되는 이유를 살펴보자.

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근을

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

라 하면 $2a$, $-b$는 실수이므로 $\sqrt{b^2-4ac}$에 의하여 α, β가 실근인지 허근인지 결정된다.

즉 $D=b^2-4ac$라 하면 D의 부호에 따라 α, β가 실근인지 허근인지 결정된다.

① $D>0$이면 $\sqrt{b^2-4ac}$는 0이 아닌 실수 $\Longleftrightarrow \alpha$, β는 서로 다른 두 실근
② $D=0$이면 $\sqrt{b^2-4ac}=0 \Longleftrightarrow \alpha$, β는 서로 같은 두 실근 (중근)
③ $D<0$이면 $\sqrt{b^2-4ac}$는 허수 $\Longleftrightarrow \alpha$, β는 서로 다른 두 허근

한편 일차항의 계수가 짝수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 판별식을 구하면

$$D=(2b')^2-4ac=4(b'^2-ac)$$

이므로 b'^2-ac의 부호로도 근을 판별할 수 있다.

이 식을 $\dfrac{D}{4}$로 나타내고, 일차항의 계수가 짝수인 경우에는 주로

$$\frac{D}{4}=b'^2-ac$$

의 부호를 이용하여 근을 판별한다.

개념 Check 1

다음 이차방정식의 근을 판별하여라.

(1) $3x^2-3x+2=0$

(2) $x^2-6x+9=0$

(3) $(x+1)^2=4x+3$

(4) $0.2x^2-0.3x+1=0$

풀이 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

(1) $D=(-3)^2-4\cdot3\cdot2=-15<0$

따라서 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(2) $\dfrac{D}{4}=(-3)^2-1\cdot9=0$

따라서 주어진 이차방정식은 중근을 갖는다.

(3) $(x+1)^2=4x+3$에서 좌변을 전개하여 정리하면

$x^2-2x-2=0$

$\therefore \dfrac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(-2)=3>0$

따라서 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(4) $0.2x^2-0.3x+1=0$의 양변에 10을 곱하면

$2x^2-3x+10=0$

$\therefore D=(-3)^2-4\cdot2\cdot10=-71<0$

따라서 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

답 풀이 참조

개념 Check 2

다음 조건을 만족시키는 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하여라.

(1) $x^2-3x+k+2=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $x^2-kx+k-1=0$이 중근을 갖는다.

(3) $2x^2+4x-k=0$이 실근을 갖는다.

(4) $x^2-2x+2k-1=0$이 허근을 갖는다.

풀이 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D=(-3)^2-4(k+2)>0$ $\therefore k<\dfrac{1}{4}$

(2) 중근을 가지려면 $D=(-k)^2-4(k-1)=0$, $k^2-4k+4=0$

$(k-2)^2=0$ $\therefore k=2$

(3) 실근을 가지려면 $\dfrac{D}{4}=2^2-2\cdot(-k)\geq0$ $\therefore k\geq-2$

(4) 허근을 가지려면 $\dfrac{D}{4}=(-1)^2-(2k-1)<0$ $\therefore k>1$

답 (1) $k<\dfrac{1}{4}$ (2) $k=2$ (3) $k\geq-2$ (4) $k>1$

대표유형 040 이차방정식의 근의 판별

• 개념 045

이차방정식 $(k+1)x^2-2(k+2)x+k-2=0$의 근이 다음과 같도록 하는 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 실근 (2) 중근 (3) 서로 다른 두 허근

유형 Guide 계수가 실수인 이차방정식이 서로 다른 두 실근, 중근, 서로 다른 두 허근을 가질 조건은 판별식을 이용하여 구할 수 있다. 특히 이차항의 계수가 미정일 때, '이차방정식' 이라는 말에는 이차항의 계수가 0이 아니라는 조건이 숨겨진 것임을 눈치챌 수 있어야 한다.

유형 SSEN **계수가 실수인 이차방정식의 근의 판별 ○ 판별식 D를 이용**

풀이 $(k+1)x^2-2(k+2)x+k-2=0$이 이차방정식이므로

$k+1\neq 0 \quad \therefore k\neq -1$

이차방정식 $(k+1)x^2-2(k+2)x+k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(k+2)\}^2-(k+1)(k-2)=5k+6$$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면

$$\frac{D}{4}=5k+6>0 \quad \therefore k>-\frac{6}{5}$$

그런데 $k\neq -1$이므로 $\quad -\frac{6}{5}<k<-1$ 또는 $k>-1$

(2) 중근을 가지려면

$$\frac{D}{4}=5k+6=0 \quad \therefore k=-\frac{6}{5}$$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면

$$\frac{D}{4}=5k+6<0 \quad \therefore k<-\frac{6}{5}$$

답 (1) $-\frac{6}{5}<k<-1$ 또는 $k>-1$ (2) $k=-\frac{6}{5}$ (3) $k<-\frac{6}{5}$

정답 및 풀이 • 32쪽

유제 040-1 이차방정식 $ax^2-2x-1=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

Plus 유제 040-2 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k+a)x+k^2+a^2+b-2=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.

특강 046 계수가 허수인 이차방정식의 근의 판별

판별식으로 이차방정식의 근을 판별하는 것은 계수가 모두 실수일 때에만 가능하다.
그 이유를 알아보자.

근의 공식을 이용하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근을 구하면 다음과 같다.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$에 대하여 $D>0$이라 하자.

(i) a, b, c가 모두 실수이면 ㉠에서 x의 값이 실수가 되므로 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) a, c가 실수이고 b가 허수이면 ㉠에서 x의 값이 허수가 된다. 즉 이차방정식의 계수가 허수일 때에는 $D>0$이지만 서로 다른 두 허근을 가질 수도 있다.
예를 들어 이차방정식 $x^2-3ix-3=0$ $(i=\sqrt{-1})$의 판별식을 D'이라 하면

$$D'=(-3i)^2-4\cdot1\cdot(-3)=3>0$$

그런데 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{3i\pm\sqrt{(-3i)^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}=\frac{3i\pm\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $D'>0$이지만 이차방정식 $x^2-3ix-3=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

일반적으로 계수가 허수인 이차방정식의 근이 실수인지 허수인지는 판별식으로 판별할 수 없다.

한편 $D=0$인 경우에는 계수가 허수일 때에도 이차방정식이 서로 같은 두 근을 갖는다. 그러나 그 근이 반드시 실근이라고 말할 수는 없다.

개념 Check

이차방정식 $x^2+2(a+i)x+b-i=0$이 서로 같은 두 근을 가질 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.
(단, $i=\sqrt{-1}$)

풀이 주어진 이차방정식이 서로 같은 두 근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=(a+i)^2-1\cdot(b-i)=0$$

$$(a^2-b-1)+(2a+1)i=0$$

a, b는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2-b-1=0,\ 2a+1=0$$

$$\therefore a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{3}{4}$$

답 $a=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{4}$

특강 047

이차식이 완전제곱식이 되도록 하는 조건

이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식이 되도록 하는 조건을 알아보자.

이차식 ax^2+bx+c에서

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

이므로 ax^2+bx+c가 완전제곱식이 되려면

$$-\frac{b^2-4ac}{4a}=0,\ \text{즉}\ b^2-4ac=0$$

이어야 한다.

거꾸로 ax^2+bx+c에서 $b^2-4ac=0$이면

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

이므로 이차식 ax^2+bx+c는 완전제곱식이다.

따라서 다음이 성립한다.

> 이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식이 되도록 하는 조건은 $D=b^2-4ac=0$이다.

다음과 같이 이해할 수도 있다.

개념 SSEN

이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식	$\Longleftrightarrow$	이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 갖는다.	$\Longleftrightarrow$	$D=b^2-4ac=0$

개념 Check

다음 이차식이 완전제곱식이 되도록 하는 실수 k의 값을 구하여라.

(1) $x^2+(k+3)x+4(k-1)$　　(2) $x^2-2(k+1)x+k^2+4k+5$

풀이 (1) 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $x^2+(k+3)x+4(k-1)=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=(k+3)^2-4\cdot1\cdot4(k-1)=0$

$k^2-10k+25=0,\quad (k-5)^2=0$

$\therefore k=5$

(2) 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2+4k+5=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k^2+4k+5)=0$

$2k=-4\quad \therefore k=-2$

답 (1) 5 (2) -2

개념 048 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 다음 관계가 성립한다.

① 두 근의 합 : $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$　　② 두 근의 곱 : $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

③ 두 근의 차 : $|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$ (단, a, α, β는 실수)

Remark ①, ②는 α, β가 실근인지 허근인지에 관계없이 성립한다. 그러나 ③은 α, β가 실근일 때에만 성립한다.

개념 Approach

이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하면 두 근을 직접 구하지 않아도 두 근의 합, 곱, 차를 구할 수 있다. 이차방정식의 근과 계수의 관계를 다음 두 가지 방법으로 유도해 보자.

방법 1 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\beta=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$라 하면

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

$$|\alpha-\beta|=\left|\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}\ \text{(단, } a,\ \alpha,\ \beta\text{는 실수)}$$

방법 2 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하고 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면
$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 인수정리에 의하여 $f(x)$는 $x-\alpha$와 $x-\beta$를 인수로 갖는다.
따라서 $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$이고, $a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-\alpha)(x-\beta)\qquad \therefore\ x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

이 등식은 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면　$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

또 $|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-4\cdot\dfrac{c}{a}}=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$이다.

(단, a, α, β는 실수)

개념 Check

이차방정식 $2x^2-6x+3=0$의 두 근 α, β의 합, 곱, 차를 구하여라.

풀이 $\alpha+\beta=-\dfrac{-6}{2}=3$, $\alpha\beta=\dfrac{3}{2}$, $|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{(-6)^2-4\cdot2\cdot3}}{2}=\sqrt{3}$

답 합 : 3, 곱 : $\dfrac{3}{2}$, 차 : $\sqrt{3}$

대표유형 041 이차방정식의 두 근에 대한 식의 값

• 개념 048

이차방정식 $x^2-3x-2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$　　(2) $\alpha^2+\beta^2$

(3) $\alpha^3+\beta^3$　　(4) $(\alpha-\beta)^2$

(5) $(2\alpha-1)(2\beta-1)$　　(6) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

유형 Guide '이차방정식의 두 근을 α, β라 하면…'으로 주어진 문제에서 가장 먼저 떠올려야 하는 것이 근과 계수의 관계라고 해도 과언이 아닐 정도로 이차방정식의 근과 계수의 관계는 출제 빈도가 매우 높다. 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구하고, 주어진 식을 곱셈 공식의 변형을 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대한 식으로 만든다. 주어진 식을 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대한 식으로 변형하는 것이 어려운 학생들은 24쪽 **개념 009**를 다시 한 번 학습하기 바란다.

유형 SSEN **이차방정식 + 두 근 ⊙ 근과 계수의 관계 이용**

풀이 이차방정식 $x^2-3x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-2$

(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-2)\cdot3=-6$

(2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\cdot(-2)=13$

(3) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=3^3-3\cdot(-2)\cdot3=45$

(4) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=3^2-4\cdot(-2)=17$

(5) $(2\alpha-1)(2\beta-1)=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1=4\cdot(-2)-2\cdot3+1=-13$

(6) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=-\dfrac{13}{2}$

답 (1) -6　(2) 13　(3) 45　(4) 17　(5) -13　(6) $-\dfrac{13}{2}$

정답 및 풀이 • 33쪽

유제 041-1 이차방정식 $x^2-4x+6=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$　　(2) $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$　　(3) $(\alpha-2)(\beta-2)$

(4) $\dfrac{\alpha}{\alpha-1}+\dfrac{\beta}{\beta-1}$　　(5) $\dfrac{\beta}{\alpha+1}+\dfrac{\alpha}{\beta+1}$　　(6) $\dfrac{\beta}{\alpha^2}+\dfrac{\alpha}{\beta^2}$

Plus 유제 041-2 이차방정식 $2x^2-4x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\alpha^2-\alpha+1)(\beta^2-\beta+1)$의 값을 구하여라.

대표유형 042 두 근이 주어진 이차방정식

• 개념 048

다음에 답하여라.

(1) 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 1, 3일 때, 이차방정식 $ax^2+2x-b=0$의 두 근의 곱을 구하여라. (단, a, b는 상수이다.)

(2) 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이고, 이차방정식 $x^2-bx+a=0$의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

유형 Guide (1) 이차방정식의 두 근이 주어졌으므로 각각 대입하여 연립방정식을 풀면 a, b의 값을 구할 수 있으나, 근과 계수의 관계를 이용하면 더욱 간단하게 문제를 해결할 수 있다.

(2) 이차방정식이 두 개 주어지고 각각의 이차방정식의 근이 모두 α, β로 나타내어져 있으므로 근과 계수의 관계를 이용하면 a, b의 값을 구할 수 있다.

유형 SSEN 이차방정식 + 두 근 ○ 근과 계수의 관계 이용

풀이 (1) 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 1, 3이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a=1+3=4,\ b=1\cdot3=3$

따라서 이차방정식 $ax^2+2x-b=0$의 두 근의 곱은

$\dfrac{-b}{a}=-\dfrac{3}{4}$

(2) 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$ ...... ㉠

이차방정식 $x^2-bx+a=0$의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+1)+(\beta+1)=b,\ (\alpha+1)(\beta+1)=a$

$\therefore \alpha+\beta+2=b,\ \alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=a$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $a+b=2,\ 2a-b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=1$

답 (1) $-\dfrac{3}{4}$ (2) $a=1, b=1$

정답 및 풀이 • 33쪽

유제 042-1 이차방정식 $x^2-ax-b=0$의 두 근이 α, β이고, 이차방정식 $x^2-(a+2)x+10=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라.

대표유형 043 두 근 사이의 관계가 주어진 이차방정식

• 개념 048

다음에 답하여라.

(1) x에 대한 이차방정식 $x^2+2mx+m^2-2m+3=0$의 두 근의 차가 2일 때, 실수 m의 값을 구하여라.

(2) 이차방정식 $x^2-5kx+12=0$의 두 근의 비가 $2:3$일 때, 실수 k의 값을 모두 구하여라.

05 이차방정식

유형 Guide 두 근 사이의 관계가 주어졌을 때, 근과 계수의 관계를 이용하는 문제이다.
(1) 두 근의 차가 2이므로 두 근을 α, $\alpha+2$라 하고 근과 계수의 관계를 이용한다.
(2) 두 근의 비가 $2:3$이므로 두 근을 2α, 3α라 하고 근과 계수의 관계를 이용한다.

유형 5SEN
- **두 근의 차가 k이면 ⊙ 두 근을 α, $\alpha+k$로 놓는다.**
- **두 근의 비가 $m:n$이면 ⊙ 두 근을 $m\alpha$, $n\alpha$로 놓는다.**

풀이 (1) 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+2$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+2)=-2m$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+2)=m^2-2m+3$ …… ㉡

㉠에서 $\alpha=-m-1$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$(-m-1)(-m+1)=m^2-2m+3$

$2m=4$ $\quad\therefore m=2$

(2) 주어진 이차방정식의 두 근을 2α, 3α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+3\alpha=5k$ …… ㉠

$2\alpha\cdot3\alpha=12$ …… ㉡

㉡에서 $6\alpha^2=12$이므로 $\quad\alpha^2=2\quad\therefore\alpha=\pm\sqrt{2}$

따라서 ㉠에서 $\quad k=\alpha=\pm\sqrt{2}$

답 (1) 2 (2) $\pm\sqrt{2}$

다른풀이 (1) 주어진 이차방정식의 두 근의 차가 2이므로

$\sqrt{(2m)^2-4(m^2-2m+3)}=2$, $\quad 8m-12=4$

$\therefore m=2$

실근을 갖는 이차방정식
$ax^2+bx+c=0$에서
$(\text{두 근의 차})=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$

정답 및 풀이 • 33쪽

유제 043-1 이차방정식 $x^2-mx+m-5=0$의 두 근의 차가 5일 때, 음수 m의 값을 구하여라.

유제 043-2 x에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+k^2-k=0$의 한 근이 다른 한 근의 3배일 때, 실수 k의 값을 구하여라. (단, $k\neq0$)

개념 049 이차식의 인수분해

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이면

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

로 인수분해된다.

개념 Approach

이차식을 인수분해할 때에는 일반적으로 인수분해 공식을 이용한다. 하지만 x에 대한 이차식 $f(x)$가 쉽게 인수분해되지 않을 때에는 이차방정식 $f(x)=0$의 근을 이용하여 $f(x)$를 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$$\begin{aligned}\therefore ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\&=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\\&=a(x-\alpha)(x-\beta)\end{aligned}$$

즉 이차식 ax^2+bx+c는 $a(x-\alpha)(x-\beta)$로 인수분해된다.

Remark 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$(a, b, c는 실수)은 복소수의 범위에서 항상 근을 가지므로 x에 대한 이차식 ax^2+bx+c는 복소수의 범위에서 항상 인수분해된다.

개념 Check

다음 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해하여라.

(1) $5x^2-4x-3$　　(2) x^2+2x+2

풀이 (1) 이차방정식 $5x^2-4x-3=0$을 풀면

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-5\cdot(-3)}}{5}=\frac{2\pm\sqrt{19}}{5}$$

$$\therefore 5x^2-4x-3=5\left(x-\frac{2+\sqrt{19}}{5}\right)\left(x-\frac{2-\sqrt{19}}{5}\right)$$

(2) 이차방정식 $x^2+2x+2=0$을 풀면

$$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot2}=-1\pm i$$

$$\begin{aligned}\therefore x^2+2x+2&=\{x-(-1+i)\}\{x-(-1-i)\}\\&=(x+1-i)(x+1+i)\end{aligned}$$

답 풀이 참조

개념 050

두 수를 근으로 갖는 이차방정식

두 수 α, β를 근으로 갖고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 다음과 같다.

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \Rightarrow x^2-\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{두 근의 합}}x+\underbrace{\alpha\beta}_{\text{두 근의 곱}}=0$$

개념 Approach

두 수를 근으로 갖는 x에 대한 이차방정식은 근과 계수의 관계를 이용하여

$$x^2-(\text{두 근의 합})x+(\text{두 근의 곱})=0$$

과 같이 구할 수 있다.

이때 계수가 분수로 구해지면 일반적으로 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 답한다.

예를 들어 두 수 1, $\frac{1}{2}$을 근으로 갖는 x에 대한 이차방정식은

$$x^2-\left(1+\frac{1}{2}\right)x+1\cdot\frac{1}{2}=0$$

$$x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=0$$

이므로 양변에 2를 곱하면

$$2x^2-3x+1=0$$

따라서 두 수 α, β를 근으로 갖고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=0 \Rightarrow a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$$

개념 Check

다음 이차방정식을 구하여라.

(1) 두 수 $2+\sqrt{5}$, $2-\sqrt{5}$를 근으로 갖고 x^2의 계수가 1인 이차방정식

(2) 두 수 $1+i$, $1-i$를 근으로 갖고 x^2의 계수가 1인 이차방정식 (단, $i=\sqrt{-1}$)

풀이 (1) x^2의 계수가 1이고 두 근이 $2+\sqrt{5}$, $2-\sqrt{5}$이므로

$$x^2-(2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5})x+(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=0$$

$$\therefore x^2-4x-1=0$$

(2) x^2의 계수가 1이고 두 근이 $1+i$, $1-i$이므로

$$x^2-(1+i+1-i)x+(1+i)(1-i)=0$$

$$\therefore x^2-2x+2=0$$

답 (1) $x^2-4x-1=0$ (2) $x^2-2x+2=0$

대표유형 044 두 수를 근으로 갖는 이차방정식

• 개념 050

이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음을 구하여라.

(1) $\alpha+1$, $\beta+1$을 두 근으로 갖고 x^2의 계수가 1인 이차방정식

(2) $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$을 두 근으로 갖고 x^2의 계수가 2인 이차방정식

유형 Guide 두 수를 근으로 갖는 이차방정식을 작성하는 문제이다. 근이 아무리 복잡한 꼴이라도 x^2-(두 근의 합)$x+$(두 근의 곱)$=0$임을 기억하고 있으면 해결할 수 있다.

유형 55EN **두 수 α, β를 근으로 갖는 이차방정식** ○ $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

풀이 이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-2$

(1) 두 근 $\alpha+1$, $\beta+1$의 합과 곱을 구하면

$$(\alpha+1)+(\beta+1)=(\alpha+\beta)+2=2+2=4$$

$$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=-2+2+1=1$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$x^2-4x+1=0$$

(2) 두 근 $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$의 합과 곱을 구하면

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2}{-2}=-1$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$2\left(x^2+x-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\therefore 2x^2+2x-1=0$$

답 (1) $x^2-4x+1=0$ (2) $2x^2+2x-1=0$

정답 및 풀이 • 34쪽

유제 044-1 이차방정식 $x^2-6x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$, $\beta+\dfrac{1}{\beta}$을 두 근으로 갖고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.

개념 051

이차방정식의 켤레근의 성질

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 다음이 성립한다.

① a, b, c가 유리수일 때, $\boldsymbol{p+q\sqrt{m}}$ **이 근이면** $\boldsymbol{p-q\sqrt{m}}$ 도 근이다.

(단, p, q는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수)

② a, b, c가 실수일 때, $\boldsymbol{p+qi}$**가 근이면** $\boldsymbol{p-qi}$도 근이다.

(단, p, q는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

$q\neq0$일 때, $p+q\sqrt{m}$과 $p-q\sqrt{m}$, $p+qi$와 $p-qi$를 각각 **켤레근**이라 한다.

개념 Approach

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근 α, β를

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

라 할 때,

(i) a, b, c가 유리수이고, $\sqrt{b^2-4ac}$가 무리수이면

➡ $\alpha=p+q\sqrt{m}$, $\beta=p-q\sqrt{m}$ (p, q는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수) 꼴이다.

(ii) a, b, c가 실수이고, $\sqrt{b^2-4ac}$가 허수이면

➡ $\alpha=p+qi$, $\beta=p-qi$ (p, q는 실수, $i=\sqrt{-1}$) 꼴이다.

Remark 켤레근의 성질은 삼차 이상의 방정식에도 적용된다. 197쪽 • 개념 071

개념 Check

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2+i$일 때, 다른 한 근이 $2-i$임을 확인하여라.

(단, $i=\sqrt{-1}$이고, a, b는 실수이다.)

풀이 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2+i$이므로 주어진 방정식에 $x=2+i$를 대입하면

$(2+i)^2+a(2+i)+b=0,\qquad (2a+b+3)+(a+4)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2a+b+3=0,\ a+4=0\qquad\cdots\cdots$ ㉠

한편 x^2+ax+b에 $x=2-i$를 대입하면

$(2-i)^2+a(2-i)+b=(2a+b+3)-(a+4)i=0$ ($\because$ ㉠)

따라서 $2-i$는 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 근이다.

답 풀이 참조

대표유형 045 이차방정식의 켤레근의 성질

• 개념 051

다음에 답하여라.

(1) 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라.

(2) 이차방정식 $x^2-mx+n=0$의 한 근이 $3-i$일 때, 실수 m, n에 대하여 mn의 값을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

유형 Guide 이차방정식의 미정계수 2개를 구하려면 두 근을 모두 알아야 하는데 조건에는 근이 1개만 주어져 있다. 대신 계수에 유리수, 실수 조건이 주어졌는데, 이것은 곧 주어진 이차방정식이 켤레근을 갖는다는 의미이다.

(1) 계수가 유리수인 이차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$ (p, q는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수)이면 $p-q\sqrt{m}$도 근임을 이용한다.

(2) 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 $p+qi$ (p, q는 실수, $i=\sqrt{-1}$)이면 $p-qi$도 근임을 이용한다.

유형 SSEN
- 유리계수 방정식 + 무리수 근 ⊙ 켤레근을 이용
- 실계수 방정식 + 허수 근 ⊙ 켤레근을 이용

풀이 (1) 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 유리수이고 한 근이 $1+\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=-a,\ (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=b$$
$$\therefore a=-2,\ b=-1$$
$$\therefore a-b=-1$$

(2) 이차방정식 $x^2-mx+n=0$에서 m, n이 실수이고 한 근이 $3-i$이므로 다른 한 근은 $3+i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(3-i)+(3+i)=m,\ (3-i)(3+i)=n$$
$$\therefore m=6,\ n=10$$
$$\therefore mn=60$$

답 (1) -1 (2) 60

정답 및 풀이 • 34쪽

유제 045-1 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-\sqrt{3}$일 때, 유리수 a, b의 값을 구하여라.

Plus 유제 045-2 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $\dfrac{2}{1+i}$일 때, 이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 두 근을 α, β라 하자. $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$이고, a, b는 실수이다.)

개념 052 이차방정식의 실근의 부호

계수가 실수인 이차방정식의 두 근이 실수일 때, 직접 근을 구하지 않고 판별식과 근과 계수의 관계를 이용하여 다음과 같이 실근의 부호를 판별할 수 있다.

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근을 α, β, 판별식을 D라 하면

① **두 근이 모두 양 $\Longleftrightarrow$ $D\geq 0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$**

② **두 근이 모두 음 $\Longleftrightarrow$ $D\geq 0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$**

③ **두 근이 서로 다른 부호 $\Longleftrightarrow$ $\alpha\beta<0$**

Remark 이차방정식의 근의 부호는 실근인 경우에만 생각할 수 있다.

개념 Approach

위의 ①에서 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$인 조건만으로는 $\alpha>0$, $\beta>0$이라고 할 수 없다.
예를 들어 $\alpha=1+i$, $\beta=1-i$일 때, $\alpha+\beta=2>0$, $\alpha\beta=2>0$이지만 α, β는 양, 음을 따질 수 없는 허수이다. 따라서 $D\geq 0$이라는 조건이 있어야 한다.
마찬가지로 ②에서도 $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$인 조건만 가지고 $\alpha<0$, $\beta<0$이라 할 수 없고, $D\geq 0$이라는 조건이 있어야 한다.
그러나 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$(a, b, c는 실수)의 실근 α, β의 부호가 서로 다를 때, 두 근의 곱은 음수이므로

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}<0 \Rightarrow ac<0 \Rightarrow D=b^2-4ac>0$$

즉 두 근의 부호가 서로 다를 때에는 항상 판별식 $D>0$이므로 실근을 갖는 조건을 생략해도 된다.

개념 Check

이차방정식 $x^2-4x+k-4=0$의 두 근이 모두 양수일 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

풀이 이차방정식 $x^2-4x+k-4=0$의 두 근을 α, β, 판별식을 D라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(-2)^2-(k-4)\geq 0$, $\quad -k+8\geq 0 \quad \therefore k\leq 8$

(ii) $\alpha+\beta=4>0$

(iii) $\alpha\beta=k-4>0 \quad \therefore k>4$

이상에서 $\quad 4<k\leq 8$

답 $4<k\leq 8$

대표유형 046 이차방정식의 실근의 부호

• 개념 052

이차방정식 $x^2+2mx+m-2=0$의 두 근 중 양수인 근의 절댓값이 음수인 근의 절댓값보다 작을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

유형 Guide 이차방정식이 두 실근을 가질 때 두 근의 양 · 음에 대한 문제는 판별식 D의 부호, 두 근의 합의 부호, 두 근의 곱의 부호를 조사한다. 특히 두 근의 부호가 서로 다를 때에는 판별식 D의 부호는 항상 양이므로 생각할 필요가 없다.

유형 55EN **이차방정식의 실근의 부호**
⊙ 판별식, 두 근의 합, 두 근의 곱의 부호를 조사한다.

풀이 이차방정식 $x^2+2mx+m-2=0$의 두 근을 α, β라 하면 α, β의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=m-2<0 \qquad \therefore m<2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 양수인 근의 절댓값이 음수인 근의 절댓값보다 작으므로

$\alpha+\beta=-2m<0 \qquad \therefore m>0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 m의 값의 범위는

$0<m<2$

답 $0<m<2$

Remark 이차방정식의 두 근이 서로 다른 부호일 때, 근의 절댓값에 대한 조건이 주어지면 다음과 같이 두 근의 합의 부호를 추가하여 생각해야 한다.

① |양수인 근|=|음수인 근| ➡ (두 근의 합)$=0$, (두 근의 곱)<0
② |양수인 근|>|음수인 근| ➡ (두 근의 합)>0, (두 근의 곱)<0
③ |양수인 근|<|음수인 근| ➡ (두 근의 합)<0, (두 근의 곱)<0

정답 및 풀이 • 34쪽

유제 046-1 이차방정식 $x^2-(3m+5)x+2m-8=0$의 두 근 중 양수인 근의 절댓값이 음수인 근의 절댓값보다 클 때, 정수 m의 최댓값을 구하여라.

유제 046-2 x에 대한 이차방정식 $x^2-(a^2-a-12)x-a+1=0$의 두 근의 부호가 서로 다르고 두 근의 절댓값이 서로 같을 때, 실수 a의 값을 구하여라.

중단원 연습 문제

정답 및 풀이 • 35쪽

STEP 1 유형 Training

01 두 이차방정식 $x^2+2x+a=0$, $2x^2-bx+a=0$의 공통인 근이 $x=1$일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

02 이차방정식 $ix^2-4x+4i=0$의 두 근이 $(a\pm b\sqrt{2})i$일 때, 유리수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 2　② 5　③ 8　④ 10　⑤ 13

03 이차방정식 $x^2+6x+2k+1=0$이 서로 다른 두 실근을 갖고, 이차방정식 $x^2+2x+k-1=0$이 허근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

서술형

04 이차방정식 $x^2+2(a+2i)x-(b-4i)=0$의 두 근이 서로 같을 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

05 이차방정식 $x^2+x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 1　⑤ 2

06 이차방정식 $x^2-2(m-1)x+m=0$의 두 근의 비가 $3:1$일 때, 실수 m의 값을 모두 구하여라.

07 이차방정식 $ax^2+x+b=0$의 한 근이 $1-i$가 되도록 하는 실수 a, b의 값을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

08 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에 대하여 $b^2-4ac>0$일 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c는 실수이다.)

보기

ㄱ. $a>0$, $b>0$, $c>0$이면 두 근은 모두 양수이다.
ㄴ. $a>0$, $b<0$, $c<0$이면 두 근은 모두 음수이다.
ㄷ. $a<0$, $b=0$, $c>0$이면 두 근의 절댓값은 같고 부호는 서로 다르다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

STEP 2 실전 Application

09 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$가 성립할 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 이차방정식 $ax^2+bx+1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄴ. 이차방정식 $x^2-2ax+b=0$이 허근을 가지면 이차방정식 $x^2+ax+b=0$도 허근을 갖는다.
ㄷ. 이차방정식 $ax^2+bx+ab^2=0$이 중근을 가지면 $a=-1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10 이차방정식 $x^2+2(a-i)x+(3+2i)=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

평가원기출

11 4 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 순서쌍 (a, b)의 개수는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

서술형

12 x에 대한 이차식 $2ax-b(x^2-1)+c(x^2+1)$이 완전제곱식일 때, a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라. (단, a, b, c는 양수이다.)

13 방정식 $|x^2+(a-2)x-2|=1$의 서로 다른 네 근의 합이 0일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

교육청기출

14 이차방정식 $3x^2-12x-k=0$의 두 실근의 절댓값의 합이 6일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

15 이차방정식 $x^2-ax-b=0$의 두 근이 α, β이고, 이차방정식 $x^2-(2a+3)x+4b-4=0$의 두 근이 α^2, β^2일 때, 실수 a, b에 대하여 a^3+b^3의 값을 구하여라.

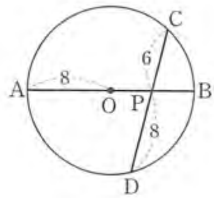
16 이차방정식 $x^2-(m-3)x+m-2=0$의 두 근 α, β에 대하여 $\alpha\beta<0$이고 $\alpha^2+\beta^2=6$일 때, 실수 m의 값을 구하여라.

서술형

17 이차방정식 $x^2-px+p=0$의 한 근이 다른 근의 제곱과 같을 때, 실수 p의 값을 모두 구하여라. (단, $p\neq0$)

18 합이 6이고 곱이 -2인 두 수를 구하여라.

19 반지름의 길이가 8인 원 O의 지름 AB와 현 CD가 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 만난다. $\overline{CP}=6$, $\overline{DP}=8$일 때, $\overline{AP}$, $\overline{BP}$의 길이를 두 근으로 갖고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.



서술형

20 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-i$이고, 방정식 $x^2-bx+a=0$의 두 근이 α, β일 때, $\dfrac{\beta}{\alpha+1}+\dfrac{\alpha}{\beta+1}$의 값을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$이고, a, b는 실수이다.)

STEP 3 심화 Forwarding

서술형

21 자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식 $x^2-(4n+6)x+n^2-3=0$의 두 근을 α_n, β_n이라 할 때,

$$\left(\frac{1}{\alpha_1+1}+\frac{1}{\alpha_2+1}+\frac{1}{\alpha_3+1}\right)+\left(\frac{1}{\beta_1+1}+\frac{1}{\beta_2+1}+\frac{1}{\beta_3+1}\right)=\frac{q}{p}$$

이다. 이때 $p+q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

22 두 이차식 $f(x)=x^2+ax-3$, $g(x)=x^2-2x+b$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$	(나) $g(\alpha)=\beta$, $g(\beta)=\alpha$

이때 상수 a, b에 대하여 ab의 값은? (단, $\alpha\neq\beta$)

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

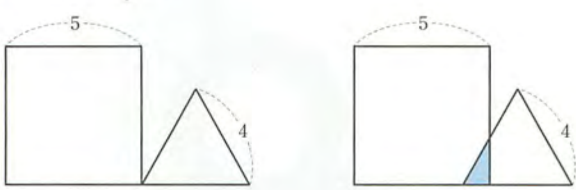
교육청기출

23 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 c와 d일 때, 다음 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는? (단, a와 b는 상수이다.)

(가) a, b, c, d는 100 이하의 서로 다른 자연수이다.
(나) c와 d는 각각 3개의 양의 약수를 가진다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24 한 변의 길이가 5인 정사각형과 한 변의 길이가 4인 정삼각형이 [그림 1]과 같이 한 꼭짓점이 일치하고 한 변이 일직선이 되도록 놓여 있다. 정사각형이 매초 1의 속도로 정삼각형을 향하여 [그림 2]와 같이 일직선을 유지하면서 이동할 때 정사각형과 정삼각형이 겹치는 부분의 넓이가 $\frac{7\sqrt{3}}{2}$이 되는 것은 정사각형이 이동하기 시작한 지 t_1초 후 또는 t_2초 후이다. 이때 t_1t_2의 값은?



[그림 1] [그림 2]

① 10 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 20

06

이차방정식과 이차함수

기호의 학문인 대수학과 도형의 학문인 기하학을 하나로 묶어 연구하는 학문을 해석기하학이라 한다. 해석기하학은 17세기 프랑스의 수학자 데카르트에 의해 정립되었는데, 기하학적 문제를 대수적으로 고찰함으로써 기하학은 획기적으로 발전하게 되었다.

이제 우리는 방정식을 이용하여 도형의 성질을 확인할 수도 있고, 반대로 방정식 문제를 도형의 문제로 전환하여 발상할 수도 있게 되었다.

이 단원에서는 이차방정식과 이차함수의 관계를 바탕으로 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 알아보자. 또 제한된 범위에서 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구해 보자.

● 한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

17 이차함수의 그래프

- 이차함수의 그래프의 성질을 이해한다.

18 이차방정식과 이차함수의 관계

- 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해한다.

19 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

- 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.

20 이차함수의 최대 · 최소

- 제한된 범위에서 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.
- 이차함수의 최대 · 최소를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있다.

개념 & 특강	대표유형 & 유제		
053 다항함수			
054 이차함수의 그래프	047 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표		
055 이차함수의 계수의 부호 결정	048 이차함수의 그래프와 계수의 부호		
056 이차함수의 식의 결정	049 이차함수의 식 구하기		
057 이차방정식과 이차함수의 관계			
058 이차방정식의 해와 이차함수의 그래프	050 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계		
059 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계	051 이차함수의 그래프와 직선의 교점	052 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계	
060 방정식의 실근과 그래프의 교점의 관계			
061 이차방정식의 근의 분리	053 이차방정식의 근의 분리 (1)	054 이차방정식의 근의 분리 (2)	
062 이차함수의 최대 · 최소	055 이차함수의 최대 · 최소		
063 제한된 범위에서의 이차함수의 최대 · 최소	056 제한된 범위에서의 이차함수의 최대 · 최소	057 공통부분이 있는 함수의 최대 · 최소	058 이차함수의 최대 · 최소의 활용
특강 064 완전제곱식 또는 판별식을 이용한 최대 · 최소	059 실수 조건이 있는 이차식의 최대 · 최소	060 이차방정식을 만족시키는 실수의 최대 · 최소	061 조건식이 주어진 이차식의 최대 · 최소

개념 053 다항함수

(1) 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 다항식일 때, 이 함수를 **다항함수**라 한다.
(2) 다항식 $f(x)$가 일차식, 이차식, 삼차식, $\cdots$일 때, 그 다항함수 $y=f(x)$를 각각 **일차함수**, **이차함수**, **삼차함수**, $\cdots$라 한다.
특히 $f(x)$가 상수일 때, 즉 $y=c$(c는 상수) 꼴의 다항함수를 **상수함수**라 한다.

개념 Approach

함수 $y=f(x)$의 이름은 $f(x)$에 주목하여

$y=$(개똥식) ➡ 개똥함수, $y=$(소똥식) ➡ 소똥함수

와 같이 자연스럽게 붙인다. 즉 $f(x)$가 다항식이면 함수 $y=f(x)$는 다항함수이다.
다항식의 차수에 따른 다항함수의 꼴을 살펴보면 다음과 같다. (단, a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)

개념 SSEN

$y=$(상수)	⟶	상수함수 $y=c$
$y=$(일차식)	⟶	일차함수 $y=ax+b$
$y=$(이차식)	⟶	이차함수 $y=ax^2+bx+c$
$y=$(삼차식)	⟶	삼차함수 $y=ax^3+bx^2+cx+d$

개념 Check

다항함수인 것만을 **보기**에서 있는 대로 골라라.

보기

ㄱ. $-x+1$　　ㄴ. $y=-\dfrac{x^2}{3}+2$　　ㄷ. $y=(x+1)^3$　　ㄹ. $y=\dfrac{2x-1}{x}$

풀이
ㄱ. 일차식
ㄴ. 이차함수
ㄷ. 삼차함수
ㄹ. $\dfrac{2x-1}{x}$은 x가 분모에 있으므로 다항식이 아니다. 따라서 $y=\dfrac{2x-1}{x}$은 다항함수가 아니다.
이상에서 다항함수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

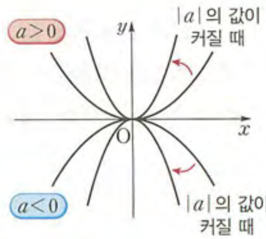
답 ㄴ, ㄷ

개념 054

이차함수의 그래프

1 이차함수의 기본형 $y=ax^2$의 그래프

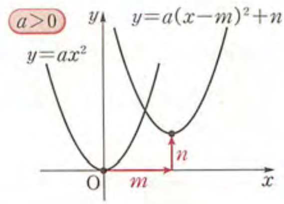
① 꼭짓점 : 원점 $(0,\ 0)$
② 축 : y축 (직선 $x=0$)
③ $\begin{cases} a>0\text{이면 } \cup \text{의 꼴로 아래로 볼록하다.} \\ a<0\text{이면 } \cap \text{의 꼴로 위로 볼록하다.} \end{cases}$
④ $|a|$의 값이 클수록 y축에 가까워진다.



Remark $|a|$의 값이 커질수록 $y=ax^2$의 그래프의 폭이 좁아진다.

2 이차함수의 표준형 $y=a(x-m)^2+n$의 그래프

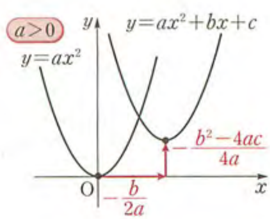
① 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.
② 꼭짓점 : 점 $(m,\ n)$
③ 축 : 직선 $x=m$



3 이차함수의 일반형 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$이므로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 다음과 같은 성질이 있다.

① 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{2a}$만큼, y축의 방향으로 $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$만큼 평행이동한 것이다.
② 꼭짓점 : 점 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$
③ 축 : 직선 $x=-\dfrac{b}{2a}$
④ y절편 : c



개념 Approach

이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 포물선이다. 또 $y=a(x-m)^2+n$은 $y=ax^2$에 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입한 것이므로 이차함수의 표준형 $y=a(x-m)^2+n$의 그래프는 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이고, 그 그래프의 모양이 $y=ax^2$의 그래프와 같다.

일반형으로 주어진 이차함수는 표준형으로 변형하여 그래프의 꼭짓점의 좌표와 축의 방정식을 구할 수 있다. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$를 표준형으로 변형하면

$$\begin{aligned} y=ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c = a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \end{aligned}$$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$, 축의 방정식은 $x=-\frac{b}{2a}$

즉 이차함수의 일반형 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{2a}$만큼, y축의 방향으로 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프의 모양이 $y=ax^2$의 그래프와 같다.

Remark $y=ax^2+bx+c$를 완전제곱식을 포함한 꼴로 변형한 식 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$를 통째로 외우기보다는 '$y=ax^2+bx+c$는 $y=a(x-m)^2+n$ 꼴로 변형하여 푼다.'는 정도로 기억하는 것이 실전에서도 유용하다.

개념 SSEN 이차함수 $y=ax^2+bx+c$가 주어지면 → $y=a(x-m)^2+n$ 꼴로 변형한다.

개념 Check

다음 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표, 축의 방정식, y절편을 구하고, 그 그래프를 그려라.

(1) $y=-2(x-3)^2+5$ (2) $y=\frac{1}{2}x^2-4x+2$

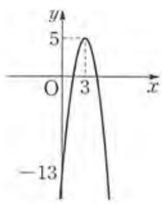
풀이 (1) 꼭짓점의 좌표 : $(3,\ 5)$

축의 방정식 : $x=3$

$x=0$을 $y=-2(x-3)^2+5$에 대입하면 $y=-13$이므로

y절편 : -13

또 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



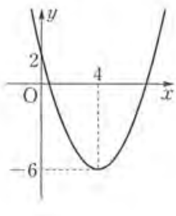
(2) $y=\frac{1}{2}x^2-4x+2=\frac{1}{2}(x-4)^2-6$이므로

꼭짓점의 좌표 : $(4,\ -6)$

축의 방정식 : $x=4$

y절편 : 2

또 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조



대표유형 047 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표

• 개념 054

이차함수 $y=-x^2+6mx-9m^2+4m+2$의 그래프의 꼭짓점이 제 2사분면에 있을 때, 상수 m의 값의 범위를 구하여라.

유형 Guide 일반형으로 주어진 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구하려면 함수식을 표준형인 $y=a(x-m)^2+n$ 꼴로 변형해야 한다.

유형 SSEN 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점
➲ $y=a(x-m)^2+n$ 꼴로 변형하여 구한다.

풀이 $y=-x^2+6mx-9m^2+4m+2=-(x-3m)^2+4m+2$이므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(3m,\ 4m+2)$

꼭짓점이 제 2사분면에 있으므로

$3m<0$, $4m+2>0$

$3m<0$에서 $\quad m<0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$4m+2>0$에서 $\quad m>-\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad -\frac{1}{2}<m<0$

답 $-\frac{1}{2}<m<0$

Remark 좌표평면 위의 점 $(m,\ n)$이 어느 사분면의 점인가에 따라 m, n의 부호는 다음과 같다.

제 1 사분면	제 2 사분면	제 3 사분면	제 4 사분면
$m>0,\ n>0$	$m<0,\ n>0$	$m<0,\ n<0$	$m>0,\ n<0$

정답 및 풀이 • 40쪽

유제 047-1 이차함수 $y=x^2+2ax+a^2+b^2-4b$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -4)$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

유제 047-2 이차함수 $y=2x^2-4kx+k^2-5k-7$의 그래프의 꼭짓점이 직선 $y=x+2$ 위에 있을 때, 상수 k의 값을 구하여라.

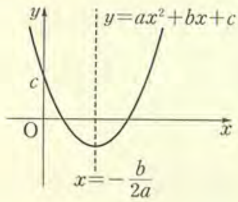
개념 055 이차함수의 계수의 부호 결정

그래프를 보고 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 계수 a, b, c의 부호를 결정할 때에는 다음 방법에 따른다.

① a의 부호 : 그래프의 모양 ($\cup$ 또는 $\cap$)으로 결정

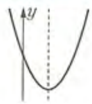
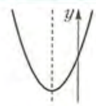
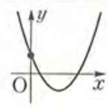
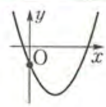
② b의 부호 : 축$\left(x=-\dfrac{b}{2a}\right)$의 위치로 결정

③ c의 부호 : y축과의 교점의 위치로 결정



개념 Approach

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 주어졌을 때, 계수의 부호는 다음과 같이 정할 수 있다.

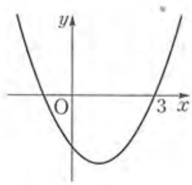
a의 부호 ➡ 그래프의 모양		b의 부호 ➡ 축의 위치		c의 부호 ➡ y축과의 교점의 위치	
					
아래로 볼록 ⬇ $a>0$	위로 볼록 ⬇ $a<0$	축이 y축의 오른쪽 ⬇ $-\dfrac{b}{2a}>0$ ⬇ a, b는 서로 다른 부호	축이 y축의 왼쪽 ⬇ $-\dfrac{b}{2a}<0$ ⬇ a, b는 서로 같은 부호	y축과의 교점이 $y>0$인 부분 ⬇ $c>0$	y축과의 교점이 $y<0$인 부분 ⬇ $c<0$

개념 Check

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음의 부호를 정하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)

(1) a (2) b

(3) c (4) $a+b+c$



풀이 (1) 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

(2) 그래프의 축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $-\dfrac{b}{2a}>0$ $\therefore b<0$

(3) 그래프가 y축과 $y<0$인 부분에서 만나므로 $c<0$

(4) $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $f(1)=a+b+c$

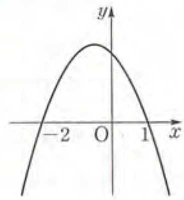
그래프에서 $x=1$일 때 $y<0$, 즉 $f(1)<0$이므로 $a+b+c<0$

답 (1) $a>0$ (2) $b<0$ (3) $c<0$ (4) $a+b+c<0$

대표유형 048 이차함수의 그래프와 계수의 부호

• 개념 055

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 옳지 않은 것은? (단, a, b, c는 상수이다.)



① $ac<0$ ② $bc<0$

③ $a+b+c=0$ ④ $a-b+c>0$

⑤ $a+2b+4c<0$

유형 Guide 주어진 그래프의 모양을 보고 $a<0$, $b<0$, $c>0$임을 알 수 있지만, 이것으로부터 $a+b+c$, $a-b+c$, $a+2b+4c$의 부호는 알 수 없다. 이와 같이 계수로 이루어진 식의 부호는 그 식이 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 x에 어떤 수를 대입한 것과 같아지는지를 파악하고, 그래프에서 그 함숫값의 부호를 조사한다.

유형 SSEN 함수의 계수로 이루어진 식의 부호 ⊙ 특정한 함숫값의 부호를 조사한다.

풀이 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

(i) 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

(ii) 축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $-\dfrac{b}{2a}<0$ $\therefore b<0$

(iii) 그래프가 y축과 $y>0$인 부분에서 만나므로 $c>0$

① $a<0$, $c>0$이므로 $ac<0$

② $b<0$, $c>0$이므로 $bc<0$

③ $f(1)=a+b+c$이고 그래프에서 $x=1$일 때 $y=0$, 즉 $f(1)=0$이므로

$a+b+c=0$

④ $f(-1)=a-b+c$이고 그래프에서 $x=-1$일 때 $y>0$, 즉 $f(-1)>0$이므로

$a-b+c>0$

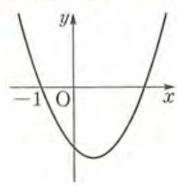
⑤ $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{2}b+c=\dfrac{1}{4}(a+2b+4c)$이고 그래프에서 $x=\dfrac{1}{2}$일 때 $y>0$, 즉

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$이므로 $\dfrac{1}{4}(a+2b+4c)>0$ $\therefore a+2b+4c>0$

답 ⑤

정답 및 풀이 • 40쪽

유제 048-1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 골라라. (단, a, b, c는 상수이다.)



보기

ㄱ. $ab<0$ ㄴ. $a+b^2>0$

ㄷ. $a-c<0$ ㄹ. $a-3b+9c<0$

개념 056

이차함수의 식의 결정

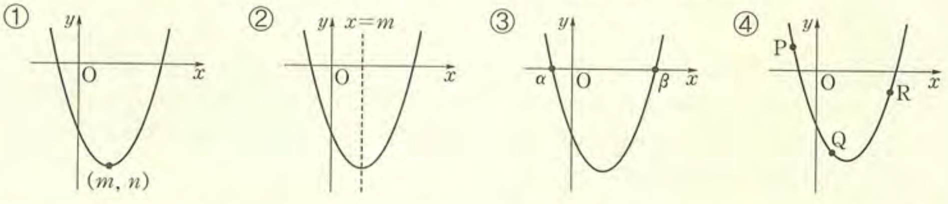
어떤 조건을 만족시키는 이차함수의 식을 구할 때에는 다음과 같이 함수식을 놓으면 비교적 쉽게 구할 수 있다.

① 꼭짓점의 좌표 $(m,\ n)$이 주어질 때 ➡ $y=a(x-m)^2+n$

② 축의 방정식 $x=m$이 주어질 때 ➡ $y=a(x-m)^2+n$

③ x축과의 두 교점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$이 주어질 때 ➡ $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$

④ 그래프 위의 세 점이 주어질 때 ➡ $y=ax^2+bx+c$



➡ $y=a(x-m)^2+n$ ➡ $y=a(x-m)^2+n$ ➡ $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ➡ $y=ax^2+bx+c$

개념 Check

다음 조건을 만족시키는 이차함수의 식을 구하여라.

(1) 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 1)$이고, 점 $(1,\ 2)$를 지난다.

(2) 그래프가 x축과 두 점 $(-2,\ 0)$, $(1,\ 0)$에서 만나고, y절편이 2이다.

(3) 그래프가 세 점 $(0,\ 3)$, $(-1,\ 6)$, $(1,\ 2)$를 지난다.

풀이 (1) 이차함수의 식을 $y=a(x-2)^2+1$이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=a+1 \quad \therefore a=1$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=(x-2)^2+1$

(2) 이차함수의 식을 $y=a(x+2)(x-1)$이라 하면 이 함수의 그래프의 y절편이 2이므로

$2=a\cdot 2\cdot(-1) \quad \therefore a=-1$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=-(x+2)(x-1)$, 즉 $y=-x^2-x+2$

(3) 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$c=3$

따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+3$의 그래프가 두 점 $(-1,\ 6)$, $(1,\ 2)$를 지나므로

$6=a-b+3,\ 2=a+b+3$

$a-b=3,\ a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-2$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=x^2-2x+3$

답 (1) $y=(x-2)^2+1$ (2) $y=-x^2-x+2$ (3) $y=x^2-2x+3$

대표유형 049 이차함수의 식 구하기

• 개념 056

축의 방정식이 $x=-2$이고 두 점 $(0,\ 6)$, $(-3,\ 0)$을 지나는 이차함수의 그래프가 점 $(1,\ k)$를 지날 때, 상수 k의 값을 구하여라.

유형 Guide 꼭짓점의 좌표, 축의 방정식, x축과의 두 교점 중 어떤 조건이 주어졌느냐에 따라 이차함수의 식을 놓는 방법이 달라진다. 이 문제에서는 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=-2$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+2)^2+b$로 놓는다. 여기에 이 이차함수의 그래프가 지나는 두 점의 좌표를 대입하면 a, b에 대한 연립방정식을 얻을 수 있다.

유형 55EN 축의 방정식 $x=m$이 주어진 이차함수의 식 ➡ $y=a(x-m)^2+n$으로 놓는다.

풀이 이차함수의 식을 $y=a(x+2)^2+b$라 하면 이 함수의 그래프가 두 점 $(0,\ 6)$, $(-3,\ 0)$을 지나므로

$6=4a+b,\ 0=a+b$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-2$

따라서 이차함수의 식은

$y=2(x+2)^2-2$

이 함수의 그래프가 점 $(1,\ k)$를 지나므로

$k=2\cdot3^2-2=16$

답 16

정답 및 풀이 • 40쪽

유제 049-1 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ -2)$이고 점 $(1,\ 2)$를 지나는 이차함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표를 구하여라.

유제 049-2 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만나고, 꼭짓점의 y좌표가 8일 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

개념 057 이차방정식과 이차함수의 관계

이차방정식과 이차함수의 그래프 사이에는 다음의 관계가 있다.

① 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표

$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근 x

② 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 개수

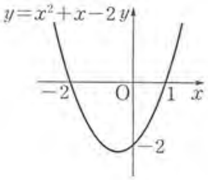
$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근의 개수

Remark 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서 함숫값 y가 0이 되는 x의 값과 같다.

개념 Approach

예를 들어 이차방정식 $x^2+x-2=0$과 이차함수 $y=x^2+x-2$의 그래프 사이의 관계를 알아보자.

이차함수 $y=x^2+x-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=0$, 즉 x축과 두 점 $(-2,\ 0)$, $(1,\ 0)$에서 만난다.



또 이차방정식 $x^2+x-2=0$의 해를 구해 보면

$$(x+2)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

즉 이차방정식 $x^2+x-2=0$의 두 실근 -2, 1은 이차함수 $y=x^2+x-2$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표와 같음을 알 수 있다.

일반적으로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표와 같고, 이것을 다음과 같이 설명할 수 있다. 수학적인 문장이 해석되는 과정을 잘 살펴서 이해하길 바란다.

$y=ax^2+bx+c$의 그래프와 $\underbrace{x\text{축의}}_{y=0}$ $\underbrace{\text{교점의}}_{\text{연립}}$ $\underbrace{x\text{좌표}}_{x\text{의 값}}$

➡ $y=ax^2+bx+c$ and $y=0$

➡ $ax^2+bx+c=0$의 실근 x

개념 Check

다음 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표를 구하여라.

(1) $y=x^2-3x$

(2) $y=-x^2+4x-4$

풀이 (1) 이차방정식 $x^2-3x=0$에서 $\quad x(x-3)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\quad (0,\ 0),\ (3,\ 0)$

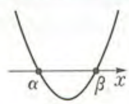
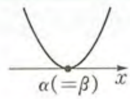
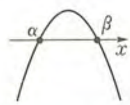
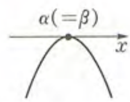
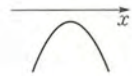
(2) 이차방정식 $-x^2+4x-4=0$에서 $\quad (x-2)^2=0 \quad \therefore x=2$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\quad (2,\ 0)$

답 (1) $(0,\ 0),\ (3,\ 0)$ (2) $(2,\ 0)$

개념 058 이차방정식의 해와 이차함수의 그래프

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근의 개수와 같으므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하고, 두 실근을 갖는 경우 그 근을 α, $\beta(\alpha\le\beta)$라 하면 다음이 성립한다.

		$D>0$	$D=0$	$D<0$
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프	$a>0$			
	$a<0$			
x축과의 위치 관계		서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다.(접한다.)	만나지 않는다.
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근		서로 다른 두 실근 α, β	중근 $\alpha(=\beta)$	서로 다른 두 허근

Remark 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 만난다.
$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면 $D\ge0$이다.

개념 Check

다음 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구하여라.

(1) $y=x^2+x-1$ (2) $y=2x^2+5x+4$ (3) $y=-x^2+6x-9$

풀이 (1) 이차방정식 $x^2+x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot1\cdot(-1)=5>0$

이므로 $x^2+x-1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 2개이다.

(2) 이차방정식 $2x^2+5x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4\cdot2\cdot4=-7<0$

이므로 $2x^2+5x+4=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 없다.

(3) 이차방정식 $-x^2+6x-9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-(-1)\cdot(-9)=0$

이므로 $-x^2+6x-9=0$은 중근을 갖는다.

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 1개이다.

답 (1) 2 (2) 0 (3) 1

대표유형 050 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계

• 개념 058

이차함수 $y=x^2-ax+2a$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 모두 구하여라.

유형 Guide 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 이차방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수와 같으므로 미정계수를 포함한 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계 문제는 다음과 같이 이차방정식의 판별식 D를 이용하여 해결한다.

① $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

$\Longleftrightarrow$ $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. $\Longleftrightarrow$ $D>0$

② $y=f(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만난다.

$\Longleftrightarrow$ $f(x)=0$은 중근을 갖는다. $\Longleftrightarrow$ $D=0$

③ $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

$\Longleftrightarrow$ $f(x)=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다. $\Longleftrightarrow$ $D<0$

유형 55EN **이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 위치 관계**
➲ 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 이용

풀이 이차함수 $y=x^2-ax+2a$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-ax+2a=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=(-a)^2-4\cdot1\cdot2a=0$

$a^2-8a=0,\quad a(a-8)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=8$

답 0, 8

정답 및 풀이 • 40쪽

유제 050-1 이차함수 $y=x^2+4x-4a$의 그래프가 다음 조건을 만족시킬 때, 실수 a의 값 또는 a의 값의 범위를 구하여라.

(1) x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) x축에 접한다.

(3) x축과 만나지 않는다.

유제 050-2 이차함수 $y=x^2-2kx+k+2$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나도록 하는 양수 k의 값을 구하여라.

개념 059

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

1 이차함수의 그래프와 직선의 교점에 대한 성질

① 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표

$\iff ax^2+bx+c=mx+n$의 실근 x

② 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수

$\iff ax^2+bx+c=mx+n$의 실근의 개수

2 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$을 정리한

$$ax^2+(b-m)x+c-n=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

의 판별식 D의 부호에 따라 다음과 같이 결정된다.

① $D>0 \iff$ ㉠이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

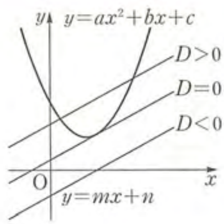
$\iff$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $D=0 \iff$ ㉠이 중근을 갖는다.

$\iff$ 한 점에서 만난다.(접한다.)

③ $D<0 \iff$ ㉠이 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$\iff$ 만나지 않는다.



개념 Approach

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는

$$y=ax^2+bx+c,\ y=mx+n$$

에서 y를 소거하여 얻은 이차방정식

$$ax^2+bx+c=mx+n,\ 즉\ ax^2+(b-m)x+c-n=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

의 실근과 같다.

따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 이차방정식 ㉠의 판별식의 부호에 따라 결정된다.

Remark 두 이차함수 $y=ax^2+bx+c$, $y=px^2+qx+r$ $(a\neq p)$의 그래프의 위치 관계도 같은 방법으로 생각할 수 있다. 즉 이차방정식 $(a-p)x^2+(b-q)x+c-r=0$의 판별식을 D라 할 때,

① 서로 다른 두 점에서 만난다. $\iff D>0$

② 한 점에서 만난다. $\iff D=0$

③ 만나지 않는다. $\iff D<0$

06 이차방정식과 이차함수

개념 060

방정식의 실근과 그래프의 교점의 관계

1 방정식의 실근과 그래프의 교점

① 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근 x

$\Longleftrightarrow$ 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표

② 방정식 $f(x)=0$의 실근 x

$\Longleftrightarrow$ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축(즉 직선 $y=0$)의 교점의 x좌표

2 방정식의 실근의 개수와 그래프의 교점의 개수

① 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수

$\Longleftrightarrow$ 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수

② 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수

$\Longleftrightarrow$ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축(즉 직선 $y=0$)의 교점의 개수

개념 Approach

방정식 $x^2-2x=a$의 실근의 개수를 함수의 그래프를 이용하여 구해 보자.

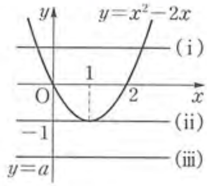
방법 1 방정식 $x^2-2x=a$의 실근의 개수는 두 함수 $y=x^2-2x$, $y=a$의 그래프의 교점의 개수를 조사하면 된다.

오른쪽 그림에서 방정식 $x^2-2x=a$의 실근의 개수는

(i) $a>-1$일 때, 2개

(ii) $a=-1$일 때, 1개

(iii) $a<-1$일 때, 0개



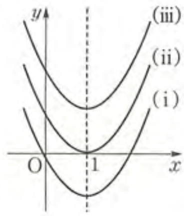
방법 2 방정식 $x^2-2x=a$를 $x^2-2x-a=0$으로 변형하면 구하는 실근의 개수는 함수 $y=x^2-2x-a$의 그래프와 x축의 교점의 개수이다.

이차방정식 $x^2-2x-a=0$의 판별식을 D라 하면 $\dfrac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(-a)=1+a$

(i) $\dfrac{D}{4}=1+a>0$에서 $a>-1$일 때, 2개

(ii) $\dfrac{D}{4}=1+a=0$에서 $a=-1$일 때, 1개

(iii) $\dfrac{D}{4}=1+a<0$에서 $a<-1$일 때, 0개



이와 같이 방정식을 어떠한 형태로 변형하느냐에 따라 그래프의 모양은 달라지지만 실근의 개수에 대한 결과는 변함이 없다.

개념 SSEN

방정식 $f(x)=g(x)$의 실근 x	$\Longleftrightarrow$	$y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표	$\Longleftrightarrow$	$y=f(x)-g(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표

대표유형 051 이차함수의 그래프와 직선의 교점 • 개념 059

이차함수 $y=x^2+ax-3$의 그래프와 직선 $y=-x+b$의 교점의 x좌표가 2, 5일 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.

유형 Guide 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표가 α, β이면 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$, 즉 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 실근은 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이다.

유형 SSEN 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표
○ 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같다.

풀이 이차함수 $y=x^2+ax-3$의 그래프와 직선 $y=-x+b$의 교점의 x좌표는 이차방정식

$x^2+ax-3=-x+b$, 즉 $x^2+(a+1)x-3-b=0$ …… ㉠

의 실근과 같으므로 2, 5는 이차방정식 ㉠의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+5=-(a+1)$, $2\cdot5=-3-b$

$\therefore a=-8,\ b=-13$

답 $a=-8$, $b=-13$

다른풀이 이차방정식 ㉠의 두 근이 2, 5이므로

$4+2(a+1)-3-b=0 \quad \therefore 2a-b=-3$ …… ㉡

$25+5(a+1)-3-b=0 \quad \therefore 5a-b=-27$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-8$, $b=-13$

정답 및 풀이 • 41쪽

유제 051-1 이차함수 $y=-2x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=2x+3$의 교점의 x좌표가 -1, 3일 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.

Plus 유제 051-2 이차함수 $y=x^2-2x+2$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 한 교점의 x좌표가 $1+\sqrt{2}$일 때, 유리수 m, n의 값을 구하여라.

대표유형 052 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

• 개념 059

이차함수 $y=x^2-2x-1$의 그래프와 직선 $y=-x+a$가 다음 조건을 만족시킬 때, 실수 a의 값 또는 a의 값의 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다.

(3) 만나지 않는다.

유형 Guide 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계가 주어지면 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 판별식 D를 구한 후 다음을 이용한다.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다. $\Longleftrightarrow D>0$

(2) 한 점에서 만난다. $\Longleftrightarrow D=0$

(3) 만나지 않는다. $\Longleftrightarrow D<0$

유형 SSEN 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계
○ 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$의 판별식을 이용

풀이 이차방정식 $x^2-2x-1=-x+a$, 즉 $x^2-x-(a+1)=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot\{-(a+1)\}=4a+5$$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D=4a+5>0$

$4a>-5 \qquad \therefore a>-\frac{5}{4}$

(2) 한 점에서 만나려면 $D=4a+5=0$

$4a=-5 \qquad \therefore a=-\frac{5}{4}$

(3) 만나지 않으려면 $D=4a+5<0$

$4a<-5 \qquad \therefore a<-\frac{5}{4}$

답 (1) $a>-\frac{5}{4}$ (2) $a=-\frac{5}{4}$ (3) $a<-\frac{5}{4}$

정답 및 풀이 • 41쪽

유제 052-1 이차함수 $y=x^2+x-a$의 그래프와 직선 $y=5x-1$이 만나지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

유제 052-2 직선 $y=mx$가 이차함수 $y=x^2+x+1$의 그래프와 한 점에서 만나도록 하는 자연수 m의 값을 구하여라.

개념 061

이차방정식의 근의 분리

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 하고,
$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 상수 p, $q\ (p<q)$에 대하여 다음이 성립한다.

① 두 근이 모두 p보다 크다. $\iff D\geq 0,\ f(p)>0,\ -\dfrac{b}{2a}>p$

② 두 근이 모두 p보다 작다. $\iff D\geq 0,\ f(p)>0,\ -\dfrac{b}{2a}<p$

③ 두 근 사이에 p가 있다. $\iff f(p)<0$

④ 두 근이 모두 p, q 사이에 있다. $\iff D\geq 0,\ f(p)>0,\ f(q)>0,\ p<-\dfrac{b}{2a}<q$

개념 Approach

방정식의 실근과 어떤 실수와의 대소 관계의 조건을 따지는 것을 **근의 분리**라 한다. 즉 방정식의 실근과 실수 p 사이에 '실근이 p보다 크다.', '실근이 p보다 작다.' 와 같이 대소 관계의 조건을 따지는 것이 근의 분리이다.

예를 들어 139쪽 **개념 052**에서 실근의 부호를 판별한 것은 0을 기준으로 근을 분리한 것과 같다.
즉 a, b, c가 실수일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D, 두 실근을 α, β라 하면

① 두 근이 모두 양 $\iff D\geq 0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$

② 두 근이 모두 음 $\iff D\geq 0,\ \alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호 $\iff \alpha\beta<0$

에서 ①은 두 근이 모두 0보다 크다.
②는 두 근이 모두 0보다 작다.
③은 두 근 사이에 0이 있다.

와 같은 뜻이다.

일반적으로 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$에 대하여 이차방정식 $f(x)=0$의 근의 분리 문제는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 조건에 맞게 그린 후, 다음 세 가지에 주목하여 생각한다.

(i) $f(x)=0$의 판별식의 부호

(ii) 경곗값의 부호

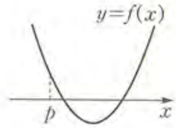
(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 위치

Remark 경계에서의 함숫값을 **경곗값**이라 한다.
예를 들어 $y=f(x)$에서 $p<x<q$이면 $x=p$, $x=q$는 경계이고 $f(p)$, $f(q)$는 경곗값이다.

06 이차방정식과 이차함수

a, b, c가 실수일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a>0)$의 두 근이 모두 p보다 클 조건을 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프를 이용하여 알아보자.

두 실근이 모두 p보다 크려면 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 판별식 D의 부호

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 실근을 가져야 한다. (즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나야 한다.) $\quad\therefore D\geq 0$

(ii) 경곗값의 부호

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점이 모두 직선 $x=p$의 오른쪽에 있어야 하므로 $f(p)>0$이어야 한다.

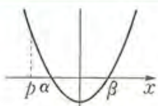
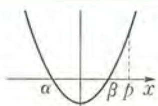
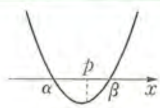
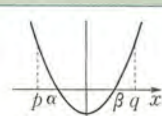
(iii) 축의 위치

함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=p$의 오른쪽에 있어야 한다. 즉 $-\dfrac{b}{2a}>p$이어야 한다.

이상에서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$의 두 근이 모두 p보다 클 조건은 다음과 같다.

$$D\geq 0,\ f(p)>0,\ -\frac{b}{2a}>p$$

이제 a, b, c가 실수일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$의 두 실근 α, $\beta\ (\alpha\leq\beta)$와 상수 p, $q\ (p<q)$ 사이의 대소 관계의 조건을 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프를 이용하여 알아보면 다음과 같다.

두 근이 모두 p보다 크다.	두 근이 모두 p보다 작다.	두 근 사이에 p가 있다.	두 근이 모두 p, q 사이에 있다.
 $x=-\frac{b}{2a}$	 $x=-\frac{b}{2a}$		 $x=-\frac{b}{2a}$
(i) $D\geq 0$ (ii) $f(p)>0$ (iii) $-\frac{b}{2a}>p$	(i) $D\geq 0$ (ii) $f(p)>0$ (iii) $-\frac{b}{2a}<p$	$f(p)<0$	(i) $D\geq 0$ (ii) $f(p)>0$, $f(q)>0$ (iii) $p<-\frac{b}{2a}<q$

Remark 두 근 사이에 p가 있는 경우에는 $f(p)<0$만 만족시키면 된다. $a>0$이면 $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록하므로 $f(p)<0$이기만 해도 p의 값의 좌우에서 그래프가 x축과 만나기 때문이다.

개념 55EN

이차방정식의 근의 분리의 3요소 → 판별식 D의 부호 / 경곗값의 부호 / 축의 위치

대표유형 053 이차방정식의 근의 분리 (1)

• 개념 061

다음에 답하여라.

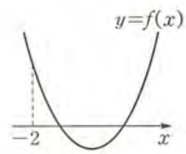
(1) 이차방정식 $x^2+2x+2-a=0$의 두 근이 모두 -2보다 클 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

(2) 이차방정식 $x^2-kx+4k-1=0$의 두 근 사이에 3이 있을 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

유형 Guide 이차방정식의 근의 분리 문제는 이차함수의 그래프를 그려서 해결하는 것이 편리하다. 이차함수의 그래프를 조건에 맞게 그린 후, 이차방정식의 판별식과 경곗값의 부호, 축의 위치 등에 주목하여 미정계수의 값의 범위를 구한다.

유형 SSEN 이차방정식의 근의 분리 ⊙ 판별식 · 경곗값의 부호, 축의 위치를 조사한다.

풀이 (1) $f(x)=x^2+2x+2-a$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -2보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

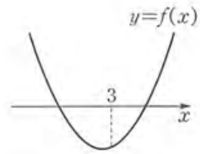
$$\frac{D}{4}=1^2-(2-a)\geq 0 \qquad \therefore a\geq 1$$

(ii) $f(-2)=4-4+2-a>0 \qquad \therefore a<2$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-1$이고 $-1>-2$이다.

이상에서 $\quad 1\leq a<2$

(2) $f(x)=x^2-kx+4k-1$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 3이 있으므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(3)<0$이어야 하므로

$$9-3k+4k-1<0 \qquad \therefore k<-8$$

답 (1) $1\leq a<2$ (2) $k<-8$

정답 및 풀이 • 41쪽

유제 053-1 이차방정식 $x^2+x+m-2=0$의 두 근이 모두 1보다 작을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

유제 053-2 이차방정식 $2x^2+4x-m=0$의 두 근이 모두 -2와 1 사이에 있을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

대표유형 054 이차방정식의 근의 분리 (2)

• 개념 061

이차방정식 $ax^2-(a+1)x-3=0$의 한 근은 -1과 0 사이에 있고, 다른 한 근은 1과 2 사이에 있을 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

유형 Guide $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$에 대하여 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 p가 있을 조건은 $f(p)<0$이다. '두 근 사이에 p가 있다.'는 것은 '한 근은 p보다 작고 다른 한 근은 p보다 크다.'는 것과 같은 뜻이다. 이와 같이 두 근이 서로 다른 범위에 있는 경우에는 $f(x)=0$의 판별식의 부호나 $y=f(x)$의 그래프의 축의 위치를 고려하지 않아도 된다.

유형 SSEN 근이 서로 다른 범위에 있는 경우 ⊙ 경곗값의 부호에 주목하라!

풀이 $f(x)=ax^2-(a+1)x-3$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근은 -1과 0 사이에 있고, 다른 한 근은 1과 2 사이에 있다.

(i) $a>0$일 때,

$y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로

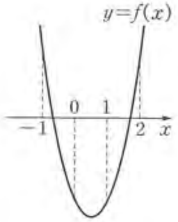
$f(-1)=a+a+1-3>0 \qquad \therefore a>1$

$f(0)=-3<0$

$f(1)=a-(a+1)-3=-4<0$

$f(2)=4a-2(a+1)-3>0 \qquad \therefore a>\frac{5}{2}$

따라서 a의 값의 범위는 $\quad a>\frac{5}{2}$



(ii) $a<0$일 때,

$f(0)=-3$이므로 조건을 만족시키는 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 없다.

(i), (ii)에서 $\quad a>\frac{5}{2}$

답 $a>\frac{5}{2}$

Remark 주어진 방정식이 이차방정식이므로 $a\neq0$이다. 따라서 $a>0$일 때와 $a<0$일 때로 나누어 생각하면 된다.

정답 및 풀이 • 42쪽

유제 054-1 이차방정식 $x^2+3(a+1)x-4=0$의 한 근은 1보다 크고, 다른 한 근은 -1보다 작을 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

Plus 유제 054-2 이차방정식 $x^2-2x+m=0$의 한 근만이 1과 2 사이에 있을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

개념 062 이차함수의 최대 · 최소

1 최댓값 · 최솟값

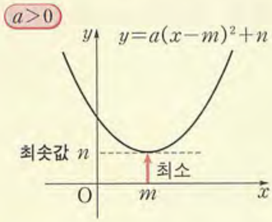
함수 $y=f(x)$의 함숫값 중에서 최대인 값을 함수 $f(x)$의 **최댓값**, 최소인 값을 함수 $f(x)$의 **최솟값**이라 한다.

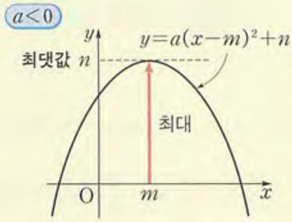
2 이차함수의 최대 · 최소

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최대 · 최소는 함수식을 $y=a(x-m)^2+n$ 꼴로 변형한 후 다음과 같이 구한다.

① $a>0$이면 $x=m$에서 최솟값 n을 갖는다. (최댓값은 없다.)

② $a<0$이면 $x=m$에서 최댓값 n을 갖는다. (최솟값은 없다.)





개념 Approach

이차함수의 최대 · 최소는 억지로 외우지 말고, 그래프를 떠올려서 풀 수 있도록 연습하자.

예를 들어 이차함수 $y=x^2-4x+5$의 최댓값 또는 최솟값을 구해 보자.

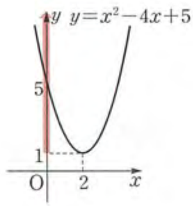
$y=x^2-4x+5$를 $y=a(x-m)^2+n$ 꼴로 변형하면

$$y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$$

이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$y\geq 1$$

따라서 이차함수 $y=x^2-4x+5$는 $x=2$에서 최솟값 1을 갖고, 최댓값은 없다.



또 이차함수 $y=-x^2-2x+3$의 최댓값 또는 최솟값을 구해 보자.

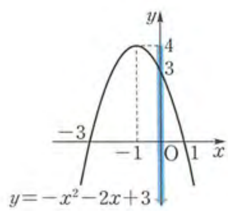
$y=-x^2-2x+3$을 $y=a(x-m)^2+n$ 꼴로 변형하면

$$y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$$

이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$y\leq 4$$

따라서 이차함수 $y=-x^2-2x+3$은 $x=-1$에서 최댓값 4를 갖고, 최솟값은 없다.



대표유형 055 이차함수의 최대 · 최소

• 개념 062

다음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x)=2x^2+ax+b$는 $x=2$에서 최솟값 3을 갖는다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

(2) 함수 $f(x)=-x^2+6x+k$의 최댓값이 11일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

유형 Guide 이차함수 $y=a(x-m)^2+n$은 $a>0$이면 $x=m$에서 최솟값 n을 갖고, $a<0$이면 $x=m$에서 최댓값 n을 갖는다.

유형 SSEN 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최대 · 최소 ⇨ $y=a(x-m)^2+n$ 꼴로 변형

풀이 (1) $f(x)=2x^2+ax+b=2\left(x+\frac{a}{4}\right)^2-\frac{a^2}{8}+b$

$f(x)$는 $x=-\frac{a}{4}$에서 최솟값 $-\frac{a^2}{8}+b$를 가지므로

$$-\frac{a}{4}=2,\ -\frac{a^2}{8}+b=3$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-8$, $b=11$

$\therefore a+b=3$

(2) $f(x)=-x^2+6x+k=-(x-3)^2+9+k$

$f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $9+k$를 가지므로

$9+k=11$ $\quad\therefore k=2$

답 (1) 3 (2) 2

다른풀이 (1) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 3)$이므로

$$f(x)=2(x-2)^2+3=2x^2-8x+11$$

따라서 $a=-8$, $b=11$이므로

$a+b=3$

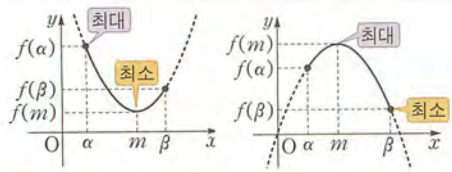
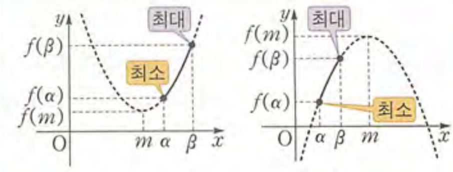
정답 및 풀이 • 42쪽

유제 055-1 함수 $f(x)=x^2-2ax+2a+4$의 최솟값이 1이 되도록 하는 상수 a의 값을 모두 구하여라.

Plus 유제 055-2 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$는 $x=3$에서 최댓값 -1을 갖고 $f(-3)=-13$이다. 이때 상수 a, b, c에 대하여 $3a+b+c$의 값을 구하여라.

개념 063 제한된 범위에서의 이차함수의 최대 · 최소

x의 값의 범위가 $\alpha \le x \le \beta$일 때, 이차함수 $f(x)=a(x-m)^2+n$의 최대 · 최소는 다음과 같다.

$\alpha \le m \le \beta$일 때	$m<\alpha$ 또는 $m>\beta$일 때
	
➡ $f(m)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.	➡ $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중에서 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

Remark 제한된 범위에서 이차함수의 최대 · 최소를 구할 때에도 이차함수의 그래프를 그려서 생각하는 것이 편리하다.

개념 Approach

x의 값의 범위가 $\alpha \le x \le \beta\,(\alpha<\beta)$와 같이 α, β를 포함하면 이차함수 $f(x)=a(x-m)^2+n$은 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다. 이때 이차함수의 최대 · 최소는 그래프의 꼭짓점의 x좌표 또는 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$에서의 함숫값 중에서 결정된다.

따라서 꼭짓점의 x좌표가 주어진 x의 값의 범위에 속하는지의 여부에 따라 꼭짓점에서의 함숫값 $f(m)$과 두 경곗값 $f(\alpha)$, $f(\beta)$의 대소를 비교하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

개념 SSEN

꼭짓점의 x좌표 m이 x의 값의 범위 $\alpha \le x \le \beta$에 속하는가?
- 예 → $f(m)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$의 대소를 비교한다.
- 아니오 → $f(\alpha)$, $f(\beta)$의 대소를 비교한다.

개념 Check

함수 $y=x^2-2x+3$의 x의 값의 범위가 다음과 같을 때, 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $0 \le x \le 3$　　(2) $2 \le x \le 4$

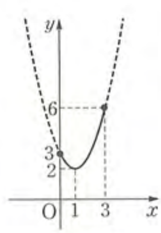
풀이 $f(x)=x^2-2x+3$이라 하면

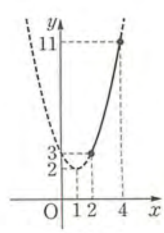
$$f(x)=(x-1)^2+2$$

(1) [그림 1]에서 $f(0)=3$, $f(1)=2$, $f(3)=6$이므로 최댓값은 6, 최솟값은 2이다.

(2) [그림 2]에서 $f(2)=3$, $f(4)=11$이므로 최댓값은 11, 최솟값은 3이다.

답 풀이 참조


[그림 1]


[그림 2]

Remark 함수식이 같더라도 x의 값의 범위가 다르면 함수의 최댓값과 최솟값은 달라질 수 있다.

대표유형 056 제한된 범위에서의 이차함수의 최대 · 최소

• 개념 063

$-3 \le x \le 6$일 때, 함수 $y=\frac{1}{3}x^2-2x+k$의 최솟값이 -1이다. 이때 실수 k의 값과 함수의 최댓값을 구하여라.

유형 Guide 제한된 범위에서 이차함수의 최대 · 최소를 구할 때에는 이차함수의 식을 완전제곱식을 포함한 꼴로 변형하여 꼭짓점의 x좌표가 제한 범위에 속하는지 속하지 않는지를 먼저 파악해야 한다.
x의 값의 범위가 $\alpha \le x \le \beta$인 이차함수 $f(x)=a(x-m)^2+n$에 대하여
(i) $\alpha \le m \le \beta$일 때
- $a>0$이면, $f(m)$이 최솟값이고 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값이다.
- $a<0$이면, $f(m)$이 최댓값이고 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 작은 값이 최솟값이다.

(ii) $m<\alpha$ 또는 $m>\beta$일 때
$f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

유형 SSEN 제한된 범위에서의 이차함수의 최대 · 최소
○ 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하는지 확인한다.

풀이 $y=\frac{1}{3}x^2-2x+k=\frac{1}{3}(x-3)^2-3+k$이고, 꼭짓점의 x좌표 3이 $-3 \le x \le 6$에 속하므로 $x=3$에서 최솟값 $-3+k$를 갖는다.
그런데 주어진 함수의 최솟값이 -1이므로

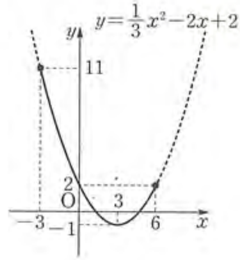
$-3+k=-1 \quad \therefore k=2$

따라서 $y=\frac{1}{3}(x-3)^2-1$에서

$x=-3$일 때, $\quad y=11$

$x=6$일 때, $\quad y=2$

이므로 주어진 함수의 최댓값은 11이다.



답 $k=2$, 최댓값 : 11

정답 및 풀이 • 42쪽

유제 056-1 $-1 \le x \le 3$일 때, 함수 $y=x^2-5x+k$의 최솟값이 4이다. 이때 실수 k의 값을 구하여라.

Plus 유제 056-2 $0 \le x \le a$일 때, 함수 $y=2x^2+x$의 최댓값이 6이다. 이때 실수 a의 값을 구하여라.

대표유형 057 공통부분이 있는 함수의 최대 · 최소

• 개념 063

$-2\leq x\leq 1$일 때, 함수 $y=(x^2+2x)^2-6(x^2+2x)+3$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

유형 Guide 주어진 함수를 전개하여 정리하면 사차함수가 된다. 사차함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 방법은 수학 I 과정을 넘으므로 공통부분을 한 문자로 치환하여 이차함수로 고친 다음 최댓값과 최솟값을 구한다. 이때 치환한 문자의 제한 범위에 주의하도록 한다.

유형 SSEN **공통부분 ◎ 치환한다. 이때 제한 범위에 주의한다.**

풀이 $x^2+2x=t$로 놓으면

$t=x^2+2x=(x+1)^2-1$

$-2\leq x\leq 1$이므로 [그림 1]에서

$-1\leq t\leq 3$

이차함수 $t=x^2+2x$는 $x=-1$에서 최솟값 -1, $x=1$에서 최댓값 3을 갖는다.

이때 주어진 함수는

$y=t^2-6t+3$

$=(t-3)^2-6\ (-1\leq t\leq 3)$

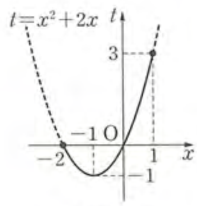
이므로 [그림 2]에서

$t=-1$일 때, $y=10$

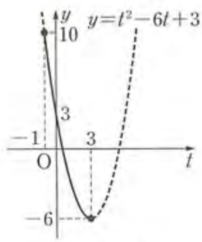
$t=3$일 때, $y=-6$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 10이고, 최솟값은 -6이다.

답 최댓값 : 10, 최솟값 : -6



[그림 1]



[그림 2]

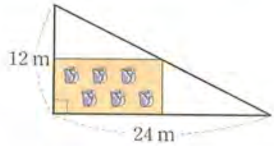
정답 및 풀이 • 43쪽

유제 057-1 $-1\leq x\leq 2$일 때, 함수 $y=(x^2-2x-1)^2+2(x^2-2x-1)-3$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. 이때 $M+m$의 값을 구하여라.

대표유형 058 이차함수의 최대 · 최소의 활용

• 개념 063

오른쪽 그림과 같이 밑변의 길이가 24 m, 높이가 12 m인 직각삼각형 모양의 땅에 직사각형 모양의 꽃밭을 만들려고 한다. 꽃밭의 최대 넓이는 몇 m^2인지 구하여라.

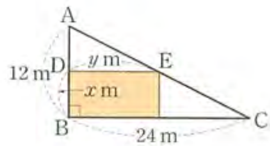


유형 Guide (직사각형의 넓이)=(가로의 길이)×(세로의 길이)이므로 꽃밭의 가로의 길이와 세로의 길이를 한 문자에 대한 식으로 나타내면 직사각형의 넓이를 이차식으로 나타낼 수 있고, 이 이차식의 최댓값을 구하면 된다. 이때 문자의 제한 범위에 주의한다.

유형 SSEN 최대 · 최소의 활용 ➡ 변수를 정하고, 관계를 파악한다.

풀이 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{BD}=x$ m, $\overline{DE}=y$ m라 하면 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$이므로

$\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DE} : \overline{BC}$



즉 $(12-x) : 12 = y : 24$이므로

$y=24-2x$

이때 변의 길이는 양수이므로

$x>0,\ y>0$, 즉 $x>0,\ 24-2x>0$

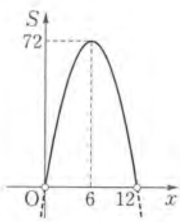
$\therefore 0<x<12$

꽃밭의 넓이를 S m^2라 하면

$S=xy=x(24-2x)$

$=-2(x^2-12x)$

$=-2(x-6)^2+72\ \ (0<x<12)$



따라서 오른쪽 그림에서 S는 $x=6$에서 최댓값 72를 가지므로 꽃밭의 최대 넓이는 72 m^2이다.

답 72 m^2

정답 및 풀이 • 43쪽

유제 058-1 지면으로부터 초속 30 m로 똑바로 위로 쏘아 올린 어떤 물체의 x초 후의 높이를 y m라 하면 $y=30x-5x^2$이라 한다. 이 물체가 도달하는 최고 높이는 몇 m인지 구하여라.

특강 064 완전제곱식 또는 판별식을 이용한 최대 · 최소

이차함수의 최대 · 최소를 구하는 2가지 방법을 알아보고, 이것을 이용하여 이차식 $f(x,\ y)$의 최대 · 최소와 이차방정식 $f(x,\ y)=0$을 만족시키는 실수 x 또는 y의 최대 · 최소를 구하는 방법을 알아보자.

1 완전제곱식을 이용한 최대 · 최소

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최대 · 최소는 함수식을 $y=a(x-m)^2+n$ 꼴로 변형한 후, $(\text{실수})^2\geq 0$임을 이용하여 구할 수 있다.

예를 들어 이차함수 $y=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$에서 $(x-2)^2\geq 0$이므로 y는 $x=2$에서 최솟값 -3을 갖는다. 이와 같은 방법으로 실수 x, y에 대한 이차식 $f(x,\ y)$의 최댓값 또는 최솟값을 다음과 같이 구할 수 있다.

> x, y에 대한 이차식 $f(x,\ y)$가 x, y에 대한 완전제곱식을 포함한 꼴, 즉
> $$f(x,\ y)=a(x-l)^2+b(y-m)^2+k\ (a,\ b,\ l,\ m,\ k\text{는 상수})$$
> 꼴로 변형되면 $(\text{실수})^2\geq 0$임을 이용한다.

2 판별식을 이용한 최대 · 최소

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 식을 완전제곱식을 포함한 꼴로 변형하지 않고, x, y가 실수임을 이용하여 다음과 같이 최대 · 최소를 구할 수도 있다.

예를 들어 $y=x^2-4x+1$을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2-4x+1-y=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 식을 x에 대한 이차방정식으로 보면 x는 실수이므로 이차방정식이 실근을 가져야 한다. 즉 ㉠의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-(1-y)\geq 0 \qquad \therefore y\geq -3$$

따라서 y의 최솟값은 -3이다. 이때 x의 값은 $y=-3$을 ㉠에 대입하여 구할 수 있다.

이와 같은 방법으로 이차방정식 $f(x,\ y)=0$을 만족시키는 실수 y의 최대 · 최소는 다음과 같이 구할 수 있다.

> y의 최댓값 또는 최솟값을 구할 때, $f(x,\ y)=0$이 x에 대한 이차방정식으로 정리되면 이 이차방정식이 실근을 가짐을 이용한다. 즉 $(\text{판별식})\geq 0$임을 이용한다.

이차방정식 $f(x,\ y)=0$을 만족시키는 실수 x의 최대 · 최소도 같은 방법으로 구할 수 있다.

개념 SSEN

이차방정식 $f(x,\ y)=0$
- x의 최대 · 최소 → y에 대한 이차방정식으로 정리 → $(\text{판별식})\geq 0$
- y의 최대 · 최소 → x에 대한 이차방정식으로 정리 → $(\text{판별식})\geq 0$

대표유형 059 실수 조건이 있는 이차식의 최대 · 최소

• 특강 064

실수 x, y에 대하여 다음에 답하여라.

(1) $x^2+4x+2y^2-12y+9$의 최솟값을 구하여라.

(2) $8x-x^2+2y-y^2+2$의 최댓값을 구하여라.

유형 Guide x, y가 실수이므로 주어진 식을

$a(x-l)^2+b(y-m)^2+k$ (a, b, l, m, k는 상수)

꼴로 변형하여 (실수)$^2 \ge 0$임을 이용한다. 이때 주어진 식은 $a>0$, $b>0$이면 최솟값 k를 갖고, $a<0$, $b<0$이면 최댓값 k를 갖는다.

유형 SSEN 실수 조건 + 이차식의 최대 · 최소 ➡ (실수)$^2 \ge 0$임을 이용한다.

풀이 (1) $x^2+4x+2y^2-12y+9=(x+2)^2+2(y-3)^2-13$

이때 x, y가 실수이므로

$(x+2)^2 \ge 0$, $(y-3)^2 \ge 0$

$\therefore x^2+4x+2y^2-12y+9 \ge -13$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $x=-2$, $y=3$일 때 -13이다.

(2) $8x-x^2+2y-y^2+2=-(x-4)^2-(y-1)^2+19$

이때 x, y가 실수이므로

$(x-4)^2 \ge 0$, $(y-1)^2 \ge 0$

$\therefore 8x-x^2+2y-y^2+2 \le 19$

따라서 주어진 식의 최댓값은 $x=4$, $y=1$일 때 19이다.

답 (1) -13 (2) 19

정답 및 풀이 • 43쪽

유제 059-1 실수 x, y에 대하여 $x^2+5y^2-4xy-4y+5$의 최솟값을 구하여라.

유제 059-2 실수 x, y, z에 대하여 $2x+6z-x^2-y^2-z^2+12$의 최댓값을 구하여라.

대표유형 060 이차방정식을 만족시키는 실수의 최대 · 최소

• 특강 064

실수 x, y가 $x^2+2xy+y^2-2y-3=0$을 만족시킬 때, 다음을 구하여라.

(1) x의 최댓값 (2) y의 최솟값

유형 Guide (1) 이차방정식 $f(x, y)=0$에서 y가 실수이면 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리한 후 이차방정식이 실근을 가질 조건, 즉 판별식 $D\ge 0$임을 이용하여 x의 값의 범위를 구한다. x의 값의 범위를 구하면 최댓값은 쉽게 구할 수 있다.

(2) 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리한 후, (1)과 같은 방법으로 구한다.

유형 SSEN 이차방정식 $f(x, y)=0$에서 y가 실수 ⊙ 근이 실수 ⊙ 실근 ⊙ $D\ge 0$

풀이 (1) 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$y^2+2(x-1)y+x^2-3=0$$

이 식을 y에 대한 이차방정식으로 보면 y가 실수이므로 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(x-1)^2-(x^2-3)\ge 0$$

$$2x-4\le 0 \qquad \therefore x\le 2$$

따라서 x의 최댓값은 2이다.

(2) 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2+2yx+y^2-2y-3=0$$

이 식을 x에 대한 이차방정식으로 보면 x가 실수이므로 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=y^2-(y^2-2y-3)\ge 0$$

$$2y+3\ge 0 \qquad \therefore y\ge -\frac{3}{2}$$

따라서 y의 최솟값은 $-\frac{3}{2}$이다.

답 (1) 2 (2) $-\frac{3}{2}$

다른풀이 (2) 주어진 식은 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$(x+y)^2-2y-3=0$$

따라서 $2y+3=(x+y)^2\ge 0$에서

$$2y+3\ge 0 \qquad \therefore y\ge -\frac{3}{2}$$

정답 및 풀이 • 43쪽

유제 060-1 실수 x, y가 $x^2+y^2-4x+2xy-8=0$을 만족시킬 때, 다음을 구하여라.

(1) x의 최솟값 (2) y의 최댓값

대표유형 061 조건식이 주어진 이차식의 최대 · 최소

• 특강 064

실수 x, y가 $x-y^2=1$을 만족시킬 때, $-x^2+2y^2$의 최댓값을 구하여라.

유형 Guide '~을 만족시킬 때, …의 최댓값 또는 최솟값을 구하여라.' 라는 문제에서 ~을 조건식, …을 결과식이라 하자. 위의 문제는 조건식을 사용하여 결과식을 문자 x에 대한 이차식으로 변형하여 푸는 문제이다. 결과식이 x에 대한 이차식, y에 대한 이차식이므로 조건식을 $y^2=x-1$로 변형하여 결과식에 대입한다. 이때 (실수)$^2 \geq 0$임을 이용하여 x의 값의 제한 범위부터 구한다.

유형 SSEN 여러 문자가 포함된 식 ○ 한 문자로 통일한다. ○ 제한 범위에 주의!

풀이 $x-y^2=1$에서 $\quad y^2=x-1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

y가 실수이므로 $\quad y^2=x-1 \geq 0$

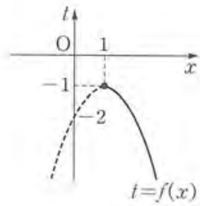
$\therefore x \geq 1$

㉠을 $-x^2+2y^2$에 대입하면

$$-x^2+2(x-1)=-x^2+2x-2$$
$$=-(x-1)^2-1 \ (x \geq 1)$$

$f(x)=-(x-1)^2-1$이라 하면 $x \geq 1$에서 함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 -1을 갖는다.

즉 $-x^2+2y^2$의 최댓값은 -1이다.



답 -1

정답 및 풀이 • 43쪽

유제 061-1 $2x+y^2=1$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2x^2+y^2+3x$의 최솟값을 구하여라.

유제 061-2 실수 x, y가 $x+3y^2=1$을 만족시킬 때, $-x^2+3y^2$의 최댓값을 구하여라.

중단원 연습 문제

정답 및 풀이 • 44쪽

STEP 1 유형 Training

01 이차함수 $y=2x^2+8kx+4k+1$의 그래프의 꼭짓점이 직선 $y=x-1$ 위에 있도록 하는 실수 k의 값을 모두 구하여라.

02 이차함수 $y=x^2-4x+a^2-5$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 모두 구하여라.

03 이차함수 $y=2x^2+x-1$의 그래프와 직선 $y=-x+m$이 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

04 이차방정식 $x^2-mx+2m-4=0$의 두 근 α, β에 대하여 $-1<\alpha<1<\beta$일 때, 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

05 함수 $f(x)=x^2-ax-1$의 최솟값이 $-\frac{7}{4}$일 때, 양수 a의 값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

06 $0\le x\le 5$일 때, $y=(x^2-4x+1)^2-2(x^2-4x-1)^2+5$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -23 ② -13 ③ 0 ④ 13 ⑤ 23

07 실수 x, y에 대하여 $-4x+6y+4x^2+y^2+13$의 최솟값은 $x=\alpha$, $y=\beta$일 때 m이다. 이때 $\alpha+\beta+m$의 값을 구하여라.

서술형

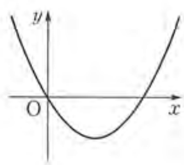
08 $x+3y^2-4=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 x^2+3y^2의 최솟값을 구하여라.

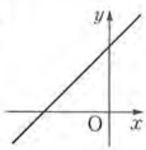
STEP 2 실전 Application

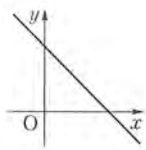
서술형

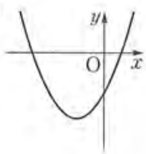
09 이차함수 $y=-2x^2+4x+1$의 그래프의 꼭짓점과 이차함수 $y=x^2+2ax+\frac{7}{4}a^2$의 그래프의 꼭짓점을 지나는 직선의 기울기가 -3이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하여라.

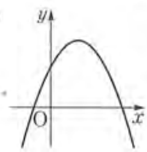
10 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 함수 $y=cx^2-bx+a$의 그래프의 개형으로 적당한 것은? (단, a, b, c는 상수이다.)

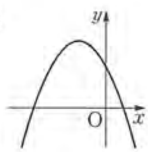


①


②


③


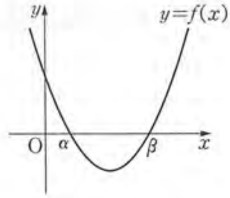
④


⑤


11 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 점 $(-1,\ 1)$을 지나고 x축에 접할 때, 양수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

12 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 x절편이 α, β일 때, $\alpha+\beta=17$이다. 방정식 $f(3x+4)=0$의 모든 실근의 합은?



① -3　　② -1　　③ 0
④ 1　　⑤ 3

서술형

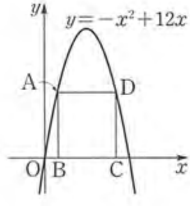
13 이차함수 $y=x^2-3x-m-2$의 그래프에 의하여 x축이 잘리는 부분의 길이가 7일 때, 실수 m의 값을 구하여라.

14 이차함수 $f(x)=x^2-4ax+4a+1$의 최솟값을 $g(a)$라 할 때, $g(a)$의 최댓값을 구하여라.

15 $0\le x\le 3$에서 함수 $f(x)=2x^2-4ax+a+a^2$의 최솟값이 0이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하여라.

서술형

16 오른쪽 그림과 같이 두 꼭짓점이 이차함수 $y=-x^2+12x$의 그래프 위에 있고 한 변이 x축 위에 놓여 있는 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.



17 $x\ge 0$, $y\ge 0$, $x+y=3$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2x^2+y^2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

① 10　　② 11　　③ 12　　④ 13　　⑤ 14

STEP 3 심화 Forwarding

교육청기출

18 이차함수 $f(x)$는 다음 두 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(3-x)=f(3+x)$이다.
> (나) $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(-1,\ 2)$, $(4,\ 17)$을 지난다.

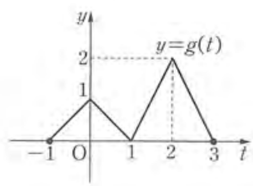
옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.
ㄴ. $1\le x\le 8$에서 이차함수 $f(x)$의 최솟값은 -7이다.
ㄷ. $g(x)=f(x+3)$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=-g(x)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19 함수 $y=g(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, x에 대한 이차함수 $y=x^2-2xg(t)+2g(t)+1$의 최솟값을 $f(t)$라 하자. 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?



보기

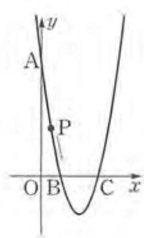
ㄱ. $f(1)=f(3)$ ㄴ. $f(t)$의 최댓값은 2이다.
ㄷ. $f(t)=2$를 만족시키는 t의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

서술형

20 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=2x^2-8x+6$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A, x축과 만나는 두 점을 각각 B, C라 하자. 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 점 A에서 점 C까지 그래프 위를 움직일 때, $4x-2y+1$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

(단, 점 B의 x좌표는 점 C의 x좌표보다 작다.)



더하기 위한 빼기

인생의 계산법은
교과서와는 달라서
뺄셈은 결국 덧셈이 되기도 합니다.

유치가 빠지는 것은
영구치가 나기 위함이고

넘어진 후에
코앞의 보물을 발견할 수도 있습니다.

무대 공포증이
더 준비된 연극배우로 단련시키고

길을 잃은 후
우연히 눈을 사로잡는 풍경과 마주칠 수도 있죠.

그러므로 지금 닥친 인생의 뺄셈에
너무 낙심하지 않아도 돼요.

그것 또한 큰 덧셈의
일부분이 될 테니까요.

* 이 글은 〈1cm〉, 〈달팽이 안에 달〉의 저자 김은주님이 작성해 주셨습니다.

07

고차방정식

근의 공식을 이용하면 어떤 이차방정식도 그 근을 구할 수 있다. 그렇다면 삼차방정식, 사차방정식에도 근의 공식이 존재할까?
15, 16세기의 수학자들은 고차방정식의 해법을 발견하기 위해 치열하게 경쟁하였고, 결국 삼차방정식과 사차방정식의 근의 공식을 발견하였다. 또 오차 이상의 방정식의 해법은 존재하지 않는다는 것이 그로부터 200년이 지난 후 밝혀졌다.

삼차방정식과 사차방정식의 근의 공식은 매우 복잡하고 교육과정을 넘어서므로 이 단원에서는 인수정리와 치환 등을 이용하여 그 해를 구하는 방법에 대하여 알아보자.

●한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

21 삼차방정식과 사차방정식

- 고차방정식의 뜻을 이해하고, 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.

22 삼차방정식의 근의 성질

- 삼차방정식의 근과 계수의 관계와 켤레근의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

23 방정식 $x^3=1$의 허근 ω

- $x^3=1$의 한 허근 ω의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

개념 & 특강	대표유형 & 유제		
065 고차방정식			
066 인수정리, 치환을 이용한 고차방정식의 풀이	062 인수정리를 이용한 고차방정식의 풀이	063 공통부분이 있는 고차방정식의 풀이	066 고차방정식의 활용
067 복이차방정식	064 복이차방정식		
068 상반방정식	065 상반방정식		
069 삼차방정식의 근과 계수의 관계	067 삼차방정식의 세 근에 대한 식의 값		
070 세 수를 근으로 갖는 삼차방정식	068 세 수를 근으로 갖는 삼차방정식		
071 켤레근의 성질	069 켤레근의 성질		
072 방정식 $x^3=1$의 허근 ω의 성질	070 방정식 $x^3=1$의 한 허근 ω		

개념 065 고차방정식

1 고차방정식

다항식 $f(x)$의 차수에 따라 방정식 $f(x)=0$의 이름이 정해진다. x에 대한 방정식 $f(x)=0$은 다항식 $f(x)$가 삼차식일 때 **삼차방정식**, $f(x)$가 사차식일 때 **사차방정식**이라 한다. 또 삼차 이상의 방정식을 **고차방정식**이라 한다.

$f(x)$		$f(x)=0$
이차식	⋯→	이차방정식
삼차식	⋯→	삼차방정식
사차식	⋯→	사차방정식

2 고차방정식의 풀이의 원리

고차방정식 $f(x)=0$은 $f(x)$를 인수분해한 후, 다음 성질을 이용한다.

① $AB=0 \iff A=0$ 또는 $B=0$

② $ABC=0 \iff A=0$ 또는 $B=0$ 또는 $C=0$

③ $ABCD=0 \iff A=0$ 또는 $B=0$ 또는 $C=0$ 또는 $D=0$

Remark 특별한 언급이 없으면 고차방정식의 해는 복소수의 범위에서 구한다.

개념 Approach

x에 대한 삼차방정식 $f(x)=0$에서 삼차식 $f(x)$가 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ (a\neq 0)$로 인수분해되면 방정식 $a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$에서

$$x-\alpha=0 \text{ 또는 } x-\beta=0 \text{ 또는 } x-\gamma=0$$

이므로 이 방정식의 해는

$$x=\alpha \text{ 또는 } x=\beta \text{ 또는 } x=\gamma$$

이와 같이 고차방정식의 풀이의 기본은 다항식의 인수분해이므로 59쪽 **개념 021**에서 공부한 내용을 다시 한 번 확인해 보자.

Remark 계수가 실수인 삼차방정식과 사차방정식은 복소수의 범위에서 각각 3개와 4개의 근을 갖는다.

개념 Check

다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3-8=0$ (2) $x^3+27=0$ (3) $x^3-x^2-42x=0$

풀이 (1) $x^3-8=0$의 좌변을 인수분해하면 $(x-2)(x^2+2x+4)=0$이므로

$x-2=0$ 또는 $x^2+2x+4=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

(2) $x^3+27=0$의 좌변을 인수분해하면 $(x+3)(x^2-3x+9)=0$이므로

$x+3=0$ 또는 $x^2-3x+9=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

(3) $x^3-x^2-42x=0$의 좌변을 인수분해하면 $x(x+6)(x-7)=0$이므로

$x=0$ 또는 $x+6=0$ 또는 $x-7=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=-6$ 또는 $x=7$

답 풀이 참조

개념 066 인수정리, 치환을 이용한 고차방정식의 풀이

고차방정식 $f(x)=0$에서 다항식 $f(x)$를 인수분해할 때, 인수분해 공식을 이용하기 어려운 경우에는 다음과 같은 방법을 이용한다.

(1) 인수정리 이용
다항식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$이면 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$임을 이용한다.

(2) 치환 이용
방정식에 공통부분이 있으면 공통부분을 한 문자로 치환하여 그 문자에 대한 방정식으로 변형한 후 인수분해한다.

개념 Approach

(1) 인수정리 이용

고차방정식 $f(x)=0$에서 $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $(x-\alpha)Q(x)$ 꼴로 인수분해된다.

즉 방정식 $f(x)=0$에서

$$(x-\alpha)Q(x)=0$$

$$\therefore x=\alpha \text{ 또는 } Q(x)=0$$

이때 $f(x)$가 삼차식이면 $Q(x)$는 이차식이므로 $Q(x)=0$은 이차방정식이 된다.

따라서 $Q(x)=0$의 해는 이차방정식의 풀이를 이용하여 구할 수 있다.

또 $f(x)$가 사차식이면 $Q(x)$는 삼차식이므로 $Q(x)=0$은 삼차방정식이 된다.

따라서 $Q(x)=0$의 해를 구하려면 다시 인수정리를 이용하여 $Q(x)$를 인수분해해야 한다.

이와 같이 고차방정식 $f(x)=0$의 해를 구할 때에는 $f(x)$를 일차식 또는 이차식의 곱으로 나타낼 수 있을 때까지 인수분해한다.

Remark $f(x)$의 계수가 모두 정수일 때, $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값은

$$\pm\frac{(f(x)\text{의 상수항의 양의 약수})}{(f(x)\text{의 최고차항의 계수의 양의 약수})}$$ 중에서 찾을 수 있다.

(2) 치환 이용

공통부분이 있는 고차방정식에서 공통부분을 한 문자로 치환하면 일반적으로 그 문자에 대한 방정식은 주어진 방정식보다 차수가 낮아지게 된다.

예를 들어 사차방정식 $(x^2+2x)^2+5(x^2+2x)+6=0$에서 $x^2+2x=X$로 놓으면 주어진 방정식은 $X^2+5X+6=0$과 같이 X에 대한 이차방정식이 된다. 이 이차방정식을 푼 후 $X=x^2+2x$를 대입하여 x의 값을 구하면 주어진 방정식의 좌변을 전개하여 해를 구할 때보다 쉽게 해를 구할 수 있다.

대표유형 062 인수정리를 이용한 고차방정식의 풀이

• 개념 066

다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3-4x^2+3x+2=0$ (2) $x^4-2x^3+2x^2+2x-3=0$

유형 Guide 인수분해 공식을 적용할 수 없는 고차방정식은 인수정리를 이용하여 해결한다.
다항식 $f(x)$에서 $f(\alpha)=0$이면 $x-\alpha$는 $f(x)$의 인수이므로 방정식 $f(x)=0$의 좌변을 조립제법을 이용하여 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ 꼴로 인수분해한다.

유형 SSEN 다항식 $f(x)$에서 $f(\alpha)=0$이면 ➡ $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$

풀이 (1) $f(x)=x^3-4x^2+3x+2$라 하면

$f(2)=8-16+6+2=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 3 & 2 \\ & & 2 & -4 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2-2x-1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-2)(x^2-2x-1)=0$

이므로

$x-2=0$ 또는 $x^2-2x-1=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

(2) $f(x)=x^4-2x^3+2x^2+2x-3$이라 하면

$f(-1)=1+2+2-2-3=0$, $f(1)=1-2+2+2-3=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -2 & 2 & 2 & -3 \\ & & -1 & 3 & -5 & 3 \\ \hline 1 & 1 & -3 & 5 & -3 & \boxed{0} \\ & & 1 & -2 & 3 & \\ \hline & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-1)(x^2-2x+3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x-1)(x^2-2x+3)=0$

이므로

$x+1=0$ 또는 $x-1=0$ 또는 $x^2-2x+3=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}i$

답 풀이 참조

정답 및 풀이 • 48쪽

유제 062-1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3+x^2-3x+1=0$ (2) $x^3-3x^2+4=0$

(3) $x^4-x^3-x^2-x-2=0$ (4) $x^4-4x^3-4x^2+4x+3=0$

대표유형 063 공통부분이 있는 고차방정식의 풀이

• 개념 066

다음 방정식을 풀어라.

(1) $3(x^2+x)-2=(x^2+x)^2$ (2) $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$

유형 Guide 공통부분이 있는 고차방정식에서 공통부분을 치환하면 차수가 낮은 방정식으로 변형할 수 있다. 이때 어떤 식을 치환하느냐에 따라 계산을 좀 더 간단하게 할 수 있다. (1)은 주어진 식에서 공통부분을 치환하고, (2)는 공통부분이 나오도록 전개한 후 치환한다.

유형 SSEN 공통부분이 있는 고차방정식 ➜ 공통부분을 치환하여 차수가 낮은 방정식으로 변형

풀이 (1) $x^2+x=X$로 놓으면 주어진 방정식은 $3X-2=X^2$

$X^2-3X+2=0$, $(X-1)(X-2)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=2$

(i) $X=1$, 즉 $x^2+x=1$일 때, $x^2+x-1=0$ $\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(ii) $X=2$, 즉 $x^2+x=2$일 때, $x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$

(2) $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$에서

$\{x(x+6)\}\{(x+2)(x+4)\}+15=0$

$(x^2+6x)(x^2+6x+8)+15=0$

$x^2+6x=X$로 놓으면 주어진 방정식은 $X(X+8)+15=0$

$X^2+8X+15=0$, $(X+5)(X+3)=0$

$\therefore X=-5$ 또는 $X=-3$

(i) $X=-5$, 즉 $x^2+6x=-5$일 때, $x^2+6x+5=0$, $(x+5)(x+1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=-1$

(ii) $X=-3$, 즉 $x^2+6x=-3$일 때, $x^2+6x+3=0$ $\therefore x=-3\pm\sqrt{6}$

(i), (ii)에서 $x=-5$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=-3\pm\sqrt{6}$

답 풀이 참조

정답 및 풀이 • 49쪽

유제 063-1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $(x^2-2x-1)(x^2-2x+2)-10=0$

(2) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=24$

개념 067

복이차방정식

방정식의 모든 항을 좌변으로 이항하였을 때, $x^4+ax^2+b=0$ (a, b는 상수)과 같이 차수가 짝수인 항과 상수항으로만 이루어진 방정식을 **복이차방정식**이라 한다.

복이차방정식 $x^4+ax^2+b=0$을 풀 때에는 복이차식의 인수분해를 이용하여 다음과 같은 방법으로 푼다.

(1) $x^2=X$로 치환하여 X^2+aX+b를 인수분해한다.

(2) $x^4+ax^2+b=0$의 이차항 ax^2을 적당히 분리하여 $(x^2+A)^2-(Bx)^2=0$ 꼴로 변형한 후 좌변을 인수분해한다.

개념 Approach

복이차방정식 $x^4+ax^2+b=0$ (a, b는 상수)의 좌변은 복이차식이므로 좌변을 인수분해할 때 복이차식의 인수분해를 이용한다. 64쪽 · 개념 023

위의 방법 (2)에서 방정식 $x^4+ax^2+b=0$을 $(x^2+A)^2-(Bx)^2=0$ 꼴로 변형할 때에는 이차항 ax^2을 적당히 분리하는 것이 중요하다. 이때 상수항에 주목해야 한다.

예를 들어 방정식 $x^4-12x^2+16=0$에서 상수항이 $16=4^2$이므로

$$x^4-8x^2-4x^2+16=0 \quad \Leftarrow -12x^2=-8x^2-4x^2\text{으로 분리}$$

$$(x^4-8x^2+16)-4x^2=0$$

$$(x^2-4)^2-(2x)^2=0 \quad \Leftarrow (x^2+A)^2-(Bx)^2=0\text{ 꼴로 변형}$$

$$(x^2+2x-4)(x^2-2x-4)=0 \quad \Leftarrow \text{인수분해}$$

이때 x^2+2x-4, x^2-2x-4는 더 이상 인수분해되지 않으므로 이차방정식의 근의 공식을 이용하여 두 방정식 $x^2+2x-4=0$과 $x^2-2x-4=0$의 해를 구하면 된다.

개념 SSEN

복이차방정식 $x^4+ax^2+b=0$ → $x^2=X$로 치환

복이차방정식 $x^4+ax^2+b=0$ → $(x^2+A)^2-(Bx)^2=0$ 꼴로 변형

대표유형 064 복이차방정식

• 개념 067

다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^4-x^2-12=0$　　(2) $x^4-15x^2+25=0$

유형 Guide 짝수 차수인 항과 상수항으로만 이루어진 복이차식은 눈으로 보기만 해도 구별이 가는 특수한 꼴이다. 고차방정식 $f(x)=0$에서 $f(x)$가 복이차식으로 주어진 경우, 복이차식의 인수분해를 이용한다.

유형 SSEN $x^4+ax^2+b=0$ ⊙ $x^2=X$로 치환하거나 $(x^2+A)^2-(Bx)^2=0$ 꼴로 변형

풀이 (1) $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-X-12=0,\quad (X+3)(X-4)=0$

$\therefore X=-3$ 또는 $X=4$

따라서 $x^2=-3$ 또는 $x^2=4$이므로

$x=\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=\pm 2$

(2) 주어진 방정식에서

$(x^4+10x^2+25)-25x^2=0$

$(x^2+5)^2-(5x)^2=0$

$(x^2+5x+5)(x^2-5x+5)=0$

$\therefore x^2+5x+5=0$ 또는 $x^2-5x+5=0$

(i) $x^2+5x+5=0$에서　$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$

(ii) $x^2-5x+5=0$에서　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

(i), (ii)에서　$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

답 (1) $x=\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=\pm 2$　(2) $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

정답 및 풀이 • 49쪽

유제 064-1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^4+2x^2-3=0$　　(2) $2x^4-7x^2-4=0$

(3) $x^4-14x^2+25=0$　　(4) $x^4+2x^2+9=0$

개념 068

상반방정식

다음과 같이 x에 대한 내림차순 또는 오름차순으로 정리하였을 때 가운데 항을 중심으로 계수가 서로 대칭인 방정식을 **상반방정식**이라 한다.

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0,\quad ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0\ (a\neq 0)$$

상반방정식은 최고차항의 차수에 따라 다음과 같은 방법으로 푼다.

(1) 짝수차 상반방정식의 풀이

(i) 양변을 x^2으로 나눈다.

(ii) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$임을 이용하여 좌변을 정리한 후, $x+\dfrac{1}{x}=X$로 치환하여 주어진 방정식을 X에 대한 방정식으로 나타낸다.

(iii) X의 값을 구한 후, $X=x+\dfrac{1}{x}$을 대입하여 x의 값을 구한다.

(2) 홀수차 상반방정식의 풀이

(i) $x=-1$일 때 주어진 방정식이 성립하므로 $(x+1)f(x)=0$ 꼴로 변형한다.

(ii) $f(x)=0$은 짝수차 상반방정식이므로 (1)의 방법을 이용하여 푼다.

Remark 홀수차 상반방정식은 모두 $x=-1$을 근으로 갖는다.

개념 Approach

(1) 사차 상반방정식 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$에서 $x\neq 0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0,\qquad a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$이므로 $\quad a\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+b\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+c-2a=0$

이때 $x+\dfrac{1}{x}=X$로 치환하면

$$aX^2+bX+c-2a=0$$

이 이차방정식을 푼 후 $X=x+\dfrac{1}{x}$을 대입하여 x의 값을 구한다.

(2) 오차 상반방정식 $ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$에 $x=-1$을 대입하면 주어진 방정식이 성립한다. 즉 이 방정식의 좌변은 $x+1$을 인수로 가지므로 $(x+1)f(x)=0$ 꼴로 변형할 수 있고, 이때 $f(x)=0$은 사차 상반방정식이므로 (1)과 같이 푼다.

대표유형 065 상반방정식

• 개념 068

방정식 $x^4+5x^3+6x^2+5x+1=0$을 풀어라.

유형 Guide 이차항을 중심으로 계수가 서로 대칭인 상반방정식이므로 식의 특징을 이용하여 다음과 같은 방법으로 푼다.

$$\overbrace{1\cdot x^4+\underbrace{5x^3+6x^2+5}_{\text{같다}}x+1}^{\text{같다}}=0$$

유형 SSEN
- 짝수차 상반방정식 ⊙ 양변을 x^2으로 나누고 $x+\frac{1}{x}=X$로 치환
- 홀수차 상반방정식 ⊙ $(x+1)f(x)=0$ 꼴로 변형

풀이 $x\neq0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+5x+6+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0,\qquad \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$$X^2+5X+4=0,\qquad (X+4)(X+1)=0$$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=-1$

(i) $X=-4$, 즉 $x+\frac{1}{x}=-4$일 때, $\quad x+\frac{1}{x}+4=0,\quad x^2+4x+1=0$

$\therefore x=-2\pm\sqrt{3}$

(ii) $X=-1$, 즉 $x+\frac{1}{x}=-1$일 때, $\quad x+\frac{1}{x}+1=0,\quad x^2+x+1=0$

$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서 $\quad x=-2\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

답 $x=-2\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

정답 및 풀이 • 50쪽

유제 065-1 다음 방정식을 풀어라.

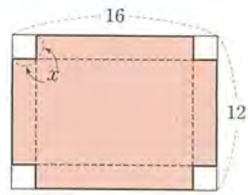
(1) $x^4+7x^3-16x^2+7x+1=0$

(2) $x^5+2x^4-9x^3-9x^2+2x+1=0$

대표유형 066 고차방정식의 활용

• 개념 066

가로의 길이가 16, 세로의 길이가 12인 직사각형 모양의 종이가 있다. 오른쪽 그림과 같이 종이의 네 귀퉁이에서 한 변의 길이가 x인 정사각형을 잘라 내어 부피가 192인 상자를 만들 때, x의 값을 구하여라.



유형 Guide 상자는 직육면체 모양이므로 그 부피는 (가로의 길이)×(세로의 길이)×(높이)임을 이용하여 x에 대한 방정식을 세워 푼다. 이때 구한 x의 값이 문제의 조건에 적합한지 꼭 확인해 본다.

유형 SSEN **방정식의 활용 ➲ 조건에 맞는 방정식을 세운다.**

풀이 네 귀퉁이를 잘라 내어 만든 상자의 부피가 192이므로

$$x(16-2x)(12-2x)=192$$

$$x^3-14x^2+48x-48=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f(x)=x^3-14x^2+48x-48$이라 하면

$$f(2)=8-56+96-48=0$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$f(x)=(x-2)(x^2-12x+24)$$

2	1	-14	48	-48
		2	-24	48
	1	-12	24	0

따라서 방정식 ㉠은

$$(x-2)(x^2-12x+24)=0$$

이므로

$$x-2=0 \text{ 또는 } x^2-12x+24=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=6\pm2\sqrt{3}$$

그런데 $0<x<6$이므로

$$x=2 \text{ 또는 } x=6-2\sqrt{3}$$

답 $x=2$ 또는 $x=6-2\sqrt{3}$

정답 및 풀이 • 50쪽

유제 066-1 어떤 정육면체의 가로, 세로의 길이를 각각 1, 2만큼 줄이고 높이를 2배가 되도록 늘여서 직육면체를 만들었다. 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{3}{4}$배일 때, 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 구하여라.

개념 069 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면 다음 관계가 성립한다.

① $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$ ② $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$ ③ $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

Remark 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

개념 Approach

삼차방정식의 근과 계수의 관계를 유도해 보자.

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근이 α, β, γ일 때, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면

$$f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0,\ f(\gamma)=0$$

이므로 인수정리에 의하여 $f(x)$는 $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$를 인수로 갖는다.

따라서 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$이고, $a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

$$\therefore\ x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$$

이 등식은 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

Remark 위의 공식을 다음과 같이 눈으로 기억하면 쉽다.

$ax^3+bx^2+cx+d=0$

−
+
−

개념 Check

삼차방정식 $2x^3-3x^2+7x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\alpha+\beta+\gamma$ (2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

(3) $\alpha\beta\gamma$ (4) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$

풀이 (1) $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{-3}{2}=\dfrac{3}{2}$ (2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{7}{2}$

(3) $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{-1}{2}=\dfrac{1}{2}$ (4) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=7$

답 (1) $\dfrac{3}{2}$ (2) $\dfrac{7}{2}$ (3) $\dfrac{1}{2}$ (4) 7

07 고차방정식

대표유형 067 삼차방정식의 세 근에 대한 식의 값

• 개념 069

삼차방정식 $x^3+3x-2=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

(3) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

(4) $(\alpha^3+4\alpha)(\beta^3+4\beta)(\gamma^3+4\gamma)$

유형 Guide 삼차방정식의 세 근에 대한 식의 값을 구하는 문제는 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 푼다. 이때 (4)와 같이 구하는 식의 차수가 높으면 $\alpha^3+3\alpha-2=0$에서 $\alpha^3=-3\alpha+2$임을 이용하여 차수를 낮추어 계산한다.

유형 SSEN 삼차방정식의 세 근에 대한 식의 값 ◎ 삼차방정식의 근과 계수의 관계 이용

풀이 삼차방정식 $x^3+3x-2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,\ \alpha\beta\gamma=2$$

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$=0-2\cdot3=-6$

(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$
$=0\cdot(-6-3)+3\cdot2=6$

(3) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$
$=2+3+0+1=6$

(4) 주어진 방정식의 세 근이 α, β, γ이므로

$$\alpha^3+3\alpha-2=0,\ \beta^3+3\beta-2=0,\ \gamma^3+3\gamma-2=0$$

따라서 $\alpha^3+4\alpha=\alpha+2$, $\beta^3+4\beta=\beta+2$, $\gamma^3+4\gamma=\gamma+2$이므로

$$\begin{aligned}(\alpha^3+4\alpha)(\beta^3+4\beta)(\gamma^3+4\gamma)&=(\alpha+2)(\beta+2)(\gamma+2)\\&=\alpha\beta\gamma+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+4(\alpha+\beta+\gamma)+8\\&=2+2\cdot3+4\cdot0+8=16\end{aligned}$$

답 (1) -6 (2) 6 (3) 6 (4) 16

정답 및 풀이 • 50쪽

유제 067-1 삼차방정식 $x^3+5x^2+4x+2=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

(3) $\dfrac{\alpha}{\beta\gamma}+\dfrac{\beta}{\gamma\alpha}+\dfrac{\gamma}{\alpha\beta}$

(4) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

개념 070

세 수를 근으로 갖는 삼차방정식

세 수 α, β, γ를 근으로 갖고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 다음과 같다.

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0 \Rightarrow x^3-\underbrace{(\alpha+\beta+\gamma)}_{\text{세 근의 합}}x^2+\underbrace{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}_{\text{두 근끼리의 곱의 합}}x-\underbrace{\alpha\beta\gamma}_{\text{세 근의 곱}}=0$$

Remark 두 수 α, β를 근으로 갖고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \Rightarrow x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

개념 Approach

135쪽 **개념 050**에서 두 수를 근으로 갖는 이차방정식을 구한 것과 같이 세 수를 근으로 갖는 x에 대한 삼차방정식도 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

x^3-(세 근의 합)x^2+(두 근끼리의 곱의 합)$x-$(세 근의 곱)$=0$

따라서 세 수 α, β, γ를 근으로 갖고 x^3의 계수가 a인 삼차방정식은 다음과 같이 구할 수 있다.

$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$

$\Rightarrow a\{x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma\}=0$

예를 들어 세 수 -1, 1, $\frac{1}{2}$을 근으로 갖고 x^3의 계수가 2인 삼차방정식은

$$2\left[x^3-\left(-1+1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left\{(-1)\cdot1+1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot(-1)\right\}x-(-1)\cdot1\cdot\frac{1}{2}\right]=0$$

$$2\left(x^3-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)=0 \qquad \therefore 2x^3-x^2-2x+1=0$$

개념 Check

다음 삼차방정식을 구하여라.

(1) 세 수 3, $1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$를 근으로 갖고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식

(2) 세 수 -1, $2+i$, $2-i$를 근으로 갖고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식 (단, $i=\sqrt{-1}$)

풀이 (1) (i) 세 근의 합은 $3+(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})=5$

(ii) 두 근끼리의 곱의 합은 $3(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})+3(1+\sqrt{2})=5$

(iii) 세 근의 곱은 $3(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-3$

이상에서 구하는 삼차방정식은

$x^3-5x^2+5x+3=0$

(2) (i) 세 근의 합은 $-1+(2+i)+(2-i)=3$

(ii) 두 근끼리의 곱의 합은 $-(2+i)+(2+i)(2-i)-(2-i)=1$

(iii) 세 근의 곱은 $-(2+i)(2-i)=-5$

이상에서 구하는 삼차방정식은

$x^3-3x^2+x+5=0$

답 (1) $x^3-5x^2+5x+3=0$ (2) $x^3-3x^2+x+5=0$

대표유형 068 세 수를 근으로 갖는 삼차방정식

• 개념 070

삼차방정식 $x^3-4x^2-2x+3=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 할 때, $\alpha+2,\ \beta+2,\ \gamma+2$를 세 근으로 갖고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하여라.

유형 Guide 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,\ \alpha\beta\gamma$의 값을 구한 후 이 값을 이용하여 $\alpha+2,\ \beta+2,\ \gamma+2$에 대하여 세 근의 합, 두 근끼리의 곱의 합, 세 근의 곱을 구한다.

유형 SSEN 세 수를 근으로 갖는 삼차방정식 ➊ 세 근의 합, 두 근끼리의 곱의 합, 세 근의 곱 이용

풀이 삼차방정식 $x^3-4x^2-2x+3=0$의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=4,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2,\ \alpha\beta\gamma=-3$$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $\alpha+2,\ \beta+2,\ \gamma+2$이므로

(i) 세 근의 합은

$$(\alpha+2)+(\beta+2)+(\gamma+2)=(\alpha+\beta+\gamma)+6=4+6=10$$

(ii) 두 근끼리의 곱의 합은

$$\begin{aligned}&(\alpha+2)(\beta+2)+(\beta+2)(\gamma+2)+(\gamma+2)(\alpha+2)\\&=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+4(\alpha+\beta+\gamma)+12\\&=-2+4\cdot4+12=26\end{aligned}$$

(iii) 세 근의 곱은

$$\begin{aligned}(\alpha+2)(\beta+2)(\gamma+2)&=\alpha\beta\gamma+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+4(\alpha+\beta+\gamma)+8\\&=-3+2\cdot(-2)+4\cdot4+8=17\end{aligned}$$

이상에서 구하는 삼차방정식은

$$x^3-10x^2+26x-17=0$$

답 $x^3-10x^2+26x-17=0$

다른풀이 $f(x)=x^3-4x^2-2x+3$이라 하면 $\quad f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0,\ f(\gamma)=0$

따라서 방정식 $f(x-2)=0$은 $\alpha+2,\ \beta+2,\ \gamma+2$를 세 근으로 갖는 삼차방정식이고

$$f(x-2)=(x-2)^3-4(x-2)^2-2(x-2)+3=x^3-10x^2+26x-17$$

이므로 구하는 삼차방정식은 $\quad x^3-10x^2+26x-17=0$

정답 및 풀이 • 51쪽

유제 068-1 삼차방정식 $x^3-2x^2+3x+1=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 할 때, $\alpha\beta,\ \beta\gamma,\ \gamma\alpha$를 세 근으로 갖고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구하여라.

개념 071

켤레근의 성질

이차 이상의 다항식 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

① $f(x)=0$이 계수가 유리수인 방정식일 때, $\boldsymbol{p+q\sqrt{m}}$**이 근이면** $\boldsymbol{p-q\sqrt{m}}$**도 근이다.** (단, p, q는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수)

② $f(x)=0$이 계수가 실수인 방정식일 때, $\boldsymbol{p+qi}$**가 근이면** $\boldsymbol{p-qi}$**도 근이다.**
(단, p, q는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

Remark ① $p+q\sqrt{m}$, $p-q\sqrt{m}$이 유리계수 삼차방정식의 근이면 나머지 한 근은 유리수이다. (단, $q\neq0$)
② $p+qi$, $p-qi$가 실계수 삼차방정식의 근이면 나머지 한 근은 실수이다. (단, $q\neq0$)

개념 Approach

$f(x)$가 이차 이상의 실계수 다항식이라 하자. 즉

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$$

(단, a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_n은 실수, n은 $n\geq2$인 자연수)

만약 실계수 방정식 $f(x)=0$이 복소수 z를 근으로 갖는다고 하면

$$f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$$

$$\therefore\ \overline{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0}=0$$

켤레복소수의 성질에 의하여

$$\overline{a_nz^n}+\overline{a_{n-1}z^{n-1}}+\cdots+\overline{a_1z}+\overline{a_0}=0,\qquad \overline{a_n}\cdot\overline{z^n}+\overline{a_{n-1}}\cdot\overline{z^{n-1}}+\cdots+\overline{a_1}\cdot\overline{z}+\overline{a_0}=0$$

$$\therefore\ a_n\overline{z}^n+a_{n-1}\overline{z}^{n-1}+\cdots+a_1\overline{z}+a_0=0\ (\because a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n\text{은 실수})$$

$$\therefore\ f(\overline{z})=0$$

따라서 실계수 방정식 $f(x)=0$은 z의 켤레복소수 $\overline{z}$를 근으로 갖는다.

너무 어려운가? 복소수에 대한 이해가 확실하면 이해할 수 있을 것으로 생각한다.

Remark '실계수', '유리계수' 라는 용어를 가끔 사용하는데, 이는 계수가 실로 되어 있거나 유리로 되어 있다는 말이 아니라 계수가 '실수', '유리수' 라는 뜻이다. (너무 썰렁(^^;) 한가?)

개념 Check

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 두 근이 3, $1+2i$일 때, 실수 a, b, c의 값을 구하여라.
(단, $i=\sqrt{-1}$)

풀이 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이고 한 근이 $1+2i$이므로 $1-2i$도 근이다.
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3+(1+2i)+(1-2i)=-a \quad \therefore a=-5$

$3(1+2i)+(1+2i)(1-2i)+3(1-2i)=b \quad \therefore b=11$

$3(1+2i)(1-2i)=-c \quad \therefore c=-15$

답 $a=-5$, $b=11$, $c=-15$

07 고차방정식

대표유형 069 켤레근의 성질

• 개념 071

삼차방정식 $x^3+ax^2+5x+b=0$의 한 근이 $2-3i$일 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

유형 Guide 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 허수이면 이 허수의 켤레복소수도 근이 된다. 이 켤레근의 성질은 이차방정식에서뿐만 아니라 삼차 이상의 방정식에서도 성립함을 이미 학습하였다. 즉 실계수 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 복소수 z, 즉 $f(z)=0$이면 $f(\bar{z})=0$도 성립한다.

유형 SSEN
- 유리계수 방정식 + 무리수 근 ➡ 켤레근을 이용
- 실계수 방정식 + 허수 근 ➡ 켤레근을 이용

풀이 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이고 한 근이 $2-3i$이므로 $2+3i$도 근이다.
나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha(2-3i)+(2-3i)(2+3i)+\alpha(2+3i)=5$

$4\alpha+13=5 \qquad \therefore \alpha=-2$

즉 삼차방정식의 세 근이 $2-3i$, $2+3i$, -2이므로

$-a=(2-3i)+(2+3i)-2 \qquad \therefore a=-2$

$-b=(2-3i)(2+3i)\cdot(-2) \qquad \therefore b=26$

$\therefore a+b=24$

답 24

다른풀이 $2-3i$가 삼차방정식 $x^3+ax^2+5x+b=0$의 근이므로 $x=2-3i$를 방정식에 대입하면

$(2-3i)^3+a(2-3i)^2+5(2-3i)+b=0$

$(5a-b+36)+(12a+24)i=0$

a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$5a-b+36=0$, $12a+24=0$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-2$, $b=26$

$\therefore a+b=24$

정답 및 풀이 • 51쪽

유제 069-1 삼차방정식 $x^3+ax+b=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라.

유제 069-2 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+6=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 실수 a, b의 값과 나머지 두 근을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

개념 072

방정식 $x^3=1$의 허근 ω의 성질

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 하면 다음 성질이 성립한다. (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수)

① $\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$ ② $\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

③ 다른 한 허근은 ω^2이고, $\omega^2=\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}$이다.

Remark • ω는 그리스 문자 Ω의 소문자로 오메가(omega)라 읽는다.
• $\omega^3=1$이면 $\overline{\omega}^3=1$이므로, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$, $\overline{\omega}^2=\omega$도 성립한다.

개념 Approach

위의 성질을 확인해 보자.

① 방정식 $x^3=1$의 허근 중 하나를 ω로 나타내면 $\omega^3=1$

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$이므로 좌변을 인수분해하면 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x^2+x+1=0$

이때 ω는 허근이므로 방정식 $x^2+x+1=0$의 근이다.

$\therefore \omega^2+\omega+1=0$ …… ㉠

② 켤레근의 성질에 의하여 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이면 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$ …… ㉡

③ ㉠에서 $\omega^2=-\omega-1$이고 ㉡에서 $\overline{\omega}=-\omega-1$, $\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}$이므로 $\omega^2=\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}$

한편 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근을 ω라 하면 $\omega^2+\omega+1=0$이고, 양변에 $\omega-1$을 곱하면

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0,\quad \omega^3-1=0\quad \therefore \omega^3=1$

따라서 '$x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω'라는 조건이 주어져도 위의 모든 성질이 성립한다.

Remark 방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라 하면 다음 성질이 성립한다. (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수)

① $\omega^3=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$ ② $\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$ ③ $\omega^2=-\overline{\omega}=-\dfrac{1}{\omega}$

개념 SSEN

$x^3=1$의 한 허근이 ω $\Longleftrightarrow$ $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω

개념 Check

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^2+\omega-3$의 값을 구하여라.

풀이 $x^3=1$에서 $x^3-1=0,\quad (x-1)(x^2+x+1)=0$
따라서 ω는 $x^2+x+1=0$의 근이므로 $\omega^2+\omega+1=0$
$\omega^2+\omega=-1$이므로 $\omega^2+\omega-3=-1-3=-4$

답 -4

대표유형 070 방정식 $x^3=1$의 한 허근 ω

• 개념 072

방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

(1) $\omega^{100}+\omega^{50}+1$ (2) $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{15}$ (3) $\dfrac{2\omega^2+3\overline{\omega}}{\omega^4+1}$

유형 Guide 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω라는 것은 ω가 방정식 $x^3=1$의 한 허근임을 뜻한다. 따라서 $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$임을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있다.

유형 SSEN **방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이면 ◎ $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$**

풀이 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^2+\omega+1=0$

이 식의 양변에 $\omega-1$을 곱하면 $(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega^3-1=0$ $\therefore \omega^3=1$

(1) $\omega^{100}=(\omega^3)^{33}\cdot\omega=\omega$, $\omega^{50}=(\omega^3)^{16}\cdot\omega^2=\omega^2$

$\therefore \omega^{100}+\omega^{50}+1=\omega+\omega^2+1=0$

(2) $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{15}$

$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\cdots+\omega^{12}(1+\omega+\omega^2)+(\omega^3)^5$

$=0+1=1$ $\boxed{1+\omega+\omega^2=0,\ \omega^3=1}$

(3) 방정식 $x^2+x+1=0$의 계수가 실수이고 한 허근이 ω이므로 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$ $\therefore \overline{\omega}=-\omega-1$

$\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2=-\omega-1$이므로

$\overline{\omega}=-\omega-1=\omega^2$

$$\therefore \frac{2\omega^2+3\overline{\omega}}{\omega^4+1}=\frac{2\omega^2+3\omega^2}{\omega+1}=\frac{5\omega^2}{-\omega^2}=-5$$

답 (1) 0 (2) 1 (3) -5

정답 및 풀이 • 51쪽

유제 070-1 방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

(1) $\dfrac{\omega^{99}+\omega^{101}}{\omega^{100}}+\dfrac{\omega^{199}+\omega^{201}}{\omega^{200}}$ (2) $\omega+\dfrac{1}{\omega}+\overline{\omega}+\dfrac{1}{\overline{\omega}}$

중단원 연습 문제

정답 및 풀이 • 52쪽

STEP 1 유형 Training

01 삼차방정식 $x^3-5x^2+x+7=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

02 방정식 $(x^2+2x-3)^2+2(x^2+2x-3)-3=0$을 풀어라.

03 방정식 $x^4-2x^2-8=0$의 모든 실근의 곱을 구하여라.

04 방정식 $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$을 풀어라.

서술형

05 삼차방정식 $2x^3-16x^2+ax+b=0$의 세 근의 비가 $1:3:4$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

06 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}i$일 때, 실수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

서술형

07 방정식 $x^3+1=0$의 한 허근을 α라 할 때, $1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4-\alpha^5+\alpha^6$의 값을 구하여라.

08 삼차방정식 $x^3-(k-4)x^2+kx-4=0$의 한 근이 2일 때, 나머지 두 근을 구하여라.
(단, k는 상수이다.)

교육청기출

09 사차방정식 $x^4+3x^3+3x^2-x-6=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

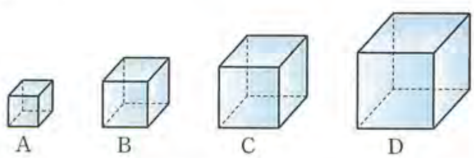
서술형

10 삼차방정식 $x^3-6x^2+(a+8)x-2a=0$이 한 실근과 두 허근을 가질 때, 정수 a의 최솟값을 구하여라.

11 사차방정식 $x^4+8x^2+36=0$의 네 근을 α, β, γ, δ라 할 때, $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\delta}$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

12 다음 그림과 같이 정육면체 A의 모든 모서리의 길이를 2, 4, 6씩 늘인 정육면체를 각각 B, C, D라 하자.



정육면체 B와 D의 부피의 합은 A의 부피의 3배와 C의 부피의 2배의 합과 같다. 이때 정육면체 A의 한 모서리의 길이를 구하여라.

13 삼차방정식 $x^3+kx^2+3x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때,

$$(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=7$$

이다. 이때 상수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

서술형

14 두 다항식 $f(x)=x^3+x+2$, $g(x)=x^3+2x+4$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$의 값을 구하여라.

15 삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?
(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

보기

ㄱ. $\omega^2=\overline{\omega}$

ㄴ. $\omega^2+\overline{\omega}^2=\omega^3+\overline{\omega}^3$

ㄷ. $\dfrac{1}{\omega+1}+\dfrac{1}{\omega^2+1}+\dfrac{1}{\omega^3+1}=0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

STEP 3 심화 Forwarding

교육청기출

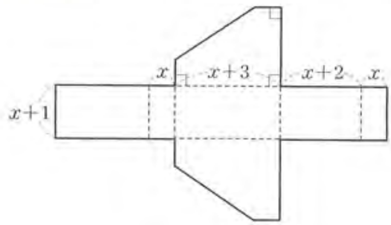
16 삼차방정식 $2x^3+5x^2+(k+3)x+k=0$의 세 근이 음수가 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $-1\le k\le\dfrac{5}{8}$ ② $-1\le k<\dfrac{9}{8}$ ③ $0<k\le\dfrac{9}{8}$

④ $0<k<\dfrac{11}{8}$ ⑤ $1\le k<\dfrac{11}{8}$

교육청기출

17 그림은 오각기둥의 전개도이다. 이 전개도의 점선을 따라 접어서 만든 오각기둥의 부피가 108일 때, 전개도에서 x의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

18 삼차식 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(2x-1)=8x^3-4x$를 만족시킨다. 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

교육청기출

19 세 실수 a, b, c에 대하여 $P(x)=x^3-ax^2+bx-c$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $2+i$는 삼차방정식 $P(x)=0$의 근이다. (나) $P(x)$를 일차식 $x-1$로 나눈 나머지는 1이다.

이때 $a+b+c$의 값을 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

서술형

20 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때,

$$\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2+\left(\omega^2+\frac{1}{\omega^2}\right)^2+\left(\omega^3+\frac{1}{\omega^3}\right)^2+\cdots+\left(\omega^{21}+\frac{1}{\omega^{21}}\right)^2$$

의 값을 구하여라.

종이비행기

미국의 유명한 광고인, 잭 포스터의 일화입니다.
그는 언제나 창의적이고 기발한 발상을 강조하였는데,
어느 날 그는 회의 중 신선한 의견이 나오지 않자 한 가지를 제안했습니다.

"다들 종이비행기를 만들어 회의실 끝까지 날려 보세요."

사람들은 각자 다른 모양으로 종이비행기를 접어서 날렸습니다.
그러나 회의실이 넓어서 끝까지 날릴 수 있는 사람은 아무도 없었습니다.
이 모습을 보던 잭 포스터는 종이비행기를 만들어 회의실 끝까지 날렸습니다.
모두 그의 종이비행기를 보며 놀라움을 감추지 못했습니다.
그의 종이비행기는 다른 사람과 달리 야구공처럼 뭉쳐서 만든 것이었기 때문입니다.

그는 놀라는 사람들을 보며 이렇게 말했습니다.
"종이비행기가 꼭 비행기처럼 생겨야 하는 것은 아니지요."
그의 기발한 발상에 사람들은 고개를 끄덕였습니다.

우리는 때때로 열심히 노력해도 난관에 봉착해 목표를 이루지 못할 때가 있습니다.
그럴 때, 잭 포스터처럼 기존에 가지고 있던 생각을 비틀어 보는 건 어떨까요?
어려운 문제를 푸는 열쇠는 '다른 시각에서 생각해보는 것'일지도 모릅니다.

08

연립방정식

연립방정식이란 두 개 이상의 방정식을 한 쌍으로 묶어서 나타낸 것으로, 미지수가 2개, 3개, 4개, … 인 경우, 차수가 일차, 이차, 삼차, …인 경우 등 다양한 형태가 존재한다.

이 단원에서는 미지수가 3개인 연립일차방정식과 미지수가 2개인 연립이차방정식의 해를 구하는 방법에 대하여 알아보자. 또 방정식의 개수가 미지수의 개수보다 적은 부정방정식의 풀이 방법에 대하여 공부해 보자.

● 한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

24 연립일차방정식

- 미지수가 3개인 연립일차방정식의 뜻과 풀이 방법을 알고, 이를 활용할 수 있다.

25 연립이차방정식

- 미지수가 2개인 연립이차방정식의 뜻과 풀이 방법을 안다.

26 공통근, 부정방정식

- 방정식의 공통근의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.
- 부정방정식의 해를 구할 수 있다.

개념 & 특강	대표유형 & 유제		
073 미지수가 2개인 연립 일차방정식			
074 미지수가 3개인 연립 일차방정식	071 미지수가 3개인 연립일차방정식	072 특수한 꼴의 연립일차방정식	073 해가 없거나 무수히 많은 연립일차방정식
			074 연립일차방정식의 활용
075 미지수가 2개인 연립 이차방정식	075 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립방정식	076 두 이차방정식으로 이루어진 연립방정식 (1)	077 두 이차방정식으로 이루어진 연립방정식 (2)
076 대칭식으로 이루어진 연립방정식	078 대칭식으로 이루어진 연립방정식		
077 공통근	079 공통근		
078 부정방정식			
079 정수 조건의 부정방정식	080 정수 조건의 부정방정식		
080 실수 조건의 부정방정식	081 실수 조건의 부정방정식		
특강 081 이차방정식의 정수근			

개념 073 미지수가 2개인 연립일차방정식

1 미지수가 2개인 연립일차방정식

$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ 와 같이 미지수가 2개이고 일차방정식만으로 이루어진 연립방정식을 **미지수가 2개인 연립일차방정식**이라 한다. 또 두 방정식을 동시에 만족시키는 $x=1$, $y=0$을 연립방정식의 **해** 또는 **근**이라 하고, 해를 구하는 것을 **연립방정식을 푼다**라고 한다.

2 미지수가 2개인 연립일차방정식의 풀이

(i) 미지수 중 하나를 소거하여 미지수가 1개인 일차방정식을 만든다.
(ii) (i)의 일차방정식을 푼다.
(iii) (ii)에서 구한 값을 한 일차방정식에 대입하여 나머지 미지수의 값을 구한다.

개념 Approach

미지수가 2개 이상인 연립방정식을 풀 때에는 미지수를 소거하여 미지수의 개수를 줄이는 것이 중요하다. 이때 가감법과 대입법 중 주어진 방정식의 형태에 따라 편리한 방법을 이용하여 푼다.

개념 SSEN

미지수가 2개인 연립일차방정식 $\xrightarrow[\text{소거}]{\text{한 미지수}}$ 미지수가 1개인 일차방정식

개념 Check

연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+2y=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀어라.

풀이 ㉠×2를 하면 $4x+2y=4$ $\cdots\cdots$ ㉢
㉢−㉡을 하면 $3x=-3$ $\therefore x=-1$
$x=-1$을 ㉠에 대입하면 $-2+y=2$ $\therefore y=4$

답 $x=-1$, $y=4$

다른풀이 ㉠에서 $y=-2x+2$ $\cdots\cdots$ ㉢
㉢을 ㉡에 대입하면 $x+2(-2x+2)=7$, $-3x=3$ $\therefore x=-1$
$x=-1$을 ㉢에 대입하면 $y=4$

Remark 미지수가 2개인 연립일차방정식에서 한 미지수를 소거하는 방법에는 위의 풀이와 같은 가감법, 대입법 외에 등치법이 있다. 위의 연립방정식을 등치법을 이용하여 풀면 다음과 같다.
㉠에서 $y=-2x+2$이므로 $2y=-4x+4$
㉡에서 $2y=-x+7$이므로 $-4x+4=-x+7$, $-3x=3$
$\therefore x=-1$, $y=4$

개념 074

미지수가 3개인 연립일차방정식

1 미지수가 3개인 연립일차방정식

$\begin{cases} x+2y+3z=-2 \\ 2x+y+z=1 \\ x-y+2z=-1 \end{cases}$ 과 같이 미지수가 3개이고 일차방정식만으로 이루어진 연립방정식을 **미지수가 3개인 연립일차방정식**이라 한다.

2 미지수가 3개인 연립일차방정식의 풀이

(i) 미지수 중 하나를 소거하여 미지수가 2개인 연립일차방정식을 만든다.

(ii) (i)의 연립일차방정식을 풀어 두 미지수의 값을 구한다.

(iii) (ii)에서 구한 두 미지수의 값을 한 일차방정식에 대입하여 나머지 미지수의 값을 구한다.

개념 Approach

미지수가 3개인 연립일차방정식을 풀 때에는 먼저 소거할 미지수를 정한 후 그 미지수가 없어지도록 3개의 방정식 중 2개의 방정식끼리 연립해야 한다.

예를 들어 연립방정식 $\begin{cases} x+2y+3z=-2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+y+z=1 & \cdots\cdots ㉡ \\ x-y+2z=-1 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$ 에서 한 미지수를 소거해 보자.

① 미지수 x 소거하기

㉠×2−㉡을 하면 $3y+5z=-5$

㉠−㉢을 하면 $3y+z=-1$

⬅ 미지수 x 소거

② 미지수 y 소거하기

㉡×2−㉠을 하면 $3x-z=4$

㉡+㉢을 하면 $3x+3z=0$

⬅ 미지수 y 소거

③ 미지수 z 소거하기

㉡×3−㉠을 하면 $5x+y=5$

㉡×2−㉢을 하면 $3x+3y=3$

⬅ 미지수 z 소거

위와 같이 미지수가 2개인 연립일차방정식을 만들어 두 미지수의 값을 구한 다음 ㉠, ㉡, ㉢ 중 하나의 방정식에 대입하여 나머지 미지수의 값을 구한다.

개념 SSEN

미지수가 3개인 연립일차방정식 $\xrightarrow{\text{한 미지수 소거}}$ 미지수가 2개인 연립일차방정식 $\xrightarrow{\text{한 미지수 소거}}$ 미지수가 1개인 일차방정식

대표유형 071 미지수가 3개인 연립일차방정식

• 개념 074

다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x-y+z=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+y+z=2 & \cdots\cdots ㉡ \\ x+y-2z=0 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y-z=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-3y+5z=2 & \cdots\cdots ㉡ \\ 2x+y-4z=-3 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

유형 Guide 미지수가 3개인 연립일차방정식은 어느 한 미지수를 소거하여 미지수가 2개인 연립일차방정식을 만들어 푼다. 이때 3개의 미지수 중 어떤 미지수를 소거할 것이냐는 크게 중요하지 않지만 되도록이면 계산이 간단해지는 것을 택하여 소거한다. (1)에서는 y를, (2)에서는 x를 소거하는 것이 간단하다.

유형 SSEN 미지수가 3개인 연립일차방정식의 풀이 ⊙ 미지수 1개를 소거한다.

풀이 (1) ㉠+㉡을 하면　$3x+2z=6$　$\cdots\cdots$ ㉣

㉠+㉢을 하면　$2x-z=4$　$\cdots\cdots$ ㉤

㉣+㉤×2를 하면　$7x=14$　$\therefore x=2$

$x=2$를 ㉤에 대입하면　$4-z=4$　$\therefore z=0$

$x=2,\ z=0$을 ㉠에 대입하면

$2-y+0=4$　$\therefore y=-2$

$\therefore x=2,\ y=-2,\ z=0$

(2) ㉠-㉡을 하면　$4y-6z=4$　$\therefore 2y-3z=2$　$\cdots\cdots$ ㉣

㉠×2-㉢을 하면　$y+2z=15$　$\cdots\cdots$ ㉤

㉤×2-㉣을 하면　$7z=28$　$\therefore z=4$

$z=4$를 ㉤에 대입하면　$y+8=15$　$\therefore y=7$

$y=7,\ z=4$를 ㉠에 대입하면　$x+7-4=6$　$\therefore x=3$

$\therefore x=3,\ y=7,\ z=4$

답 (1) $x=2,\ y=-2,\ z=0$　(2) $x=3,\ y=7,\ z=4$

정답 및 풀이 • 57쪽

유제 071-1 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x-y+z=-1 \\ x+2y-z=0 \\ 3x+y+z=2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y+3z=9 \\ 2x+2y+z=3 \\ 3x-y-2z=2 \end{cases}$

대표유형 072 특수한 꼴의 연립일차방정식

• 개념 074

다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x+y+z=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+2y+z=3 & \cdots\cdots ㉡ \\ x+y+2z=4 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

(2) $\dfrac{x-y}{3}=\dfrac{y+z}{2}=\dfrac{z-x}{4}=2$

유형 Guide 특수한 꼴의 연립방정식은 일반적인 연립방정식과 같이 가감법, 대입법 등을 이용하여 풀 수도 있지만 좀 더 간단한 방법이 있는 경우가 많다. (1)과 같은 윤환형의 연립방정식은 일반적으로 세 식을 모두 더하거나 곱하여 새로운 식을 만든 후, 주어진 식과 차례로 연립하여 푼다.
(2)와 같은 $A=B=C=$(상수) 꼴의 연립방정식은 $A=$(상수), $B=$(상수), $C=$(상수)로 변형하여 푼다.

유형 SSEN 윤환형의 연립방정식 ➜ 변끼리 더하거나 곱한다.

풀이 (1) ㉠+㉡+㉢을 하면 $4(x+y+z)=8$

$\therefore x+y+z=2$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉠−㉣을 하면 $x=-1$

㉡−㉣을 하면 $y=1$

㉢−㉣을 하면 $z=2$

$\therefore x=-1,\ y=1,\ z=2$

(2) 주어진 방정식에서

$\begin{cases} x-y=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ y+z=4 & \cdots\cdots ㉡ \\ z-x=8 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠+㉡+㉢을 하면 $2z=18$ $\therefore z=9$

$z=9$를 ㉡, ㉢에 각각 대입하면 $y+9=4,\ 9-x=8$

$\therefore y=-5,\ x=1$

$\therefore x=1,\ y=-5,\ z=9$

답 풀이 참조

Remark $\begin{cases} xy=2 \\ yz=3 \\ zx=6 \end{cases}$과 같은 윤환형의 연립방정식은 변끼리 곱하여 푼다.

정답 및 풀이 • 57쪽

유제 072-1 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x+y=3 \\ y+z=6 \\ z+x=7 \end{cases}$

(2) $\dfrac{3x-y}{4}=\dfrac{-y+z}{2}=\dfrac{6z-x}{5}=3$

대표유형 073 해가 없거나 무수히 많은 연립일차방정식

• 개념 074

다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x+4y+z=-7 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x-2y+z=1 & \cdots\cdots ㉡ \\ 3x+y+z=-3 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y-2z=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-2y+z=4 & \cdots\cdots ㉡ \\ 2x-y-z=2 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

유형 Guide 연립일차방정식에서 미지수를 소거하여 얻은 일차방정식의 해가 무수히 많으면 연립방정식도 해가 무수히 많고, 일차방정식의 해가 없으면 연립방정식도 해가 없다. 즉 미지수를 소거하기 위하여 변형한 방정식이 다음과 같은 꼴이면 연립방정식의 해가 무수히 많거나 해가 없다.

유형 SSEN
- **$0\cdot x+0\cdot y=0$ ⇨ 연립일차방정식의 해가 무수히 많다. (부정)**
- **$0\cdot x+0\cdot y=k$ $(k\neq 0)$ ⇨ 연립일차방정식의 해가 없다. (불능)**

풀이 (1) ㉠−㉡을 하면 $-4x+6y=-8$ $\quad\therefore 2x-3y=4$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉡−㉢을 하면 $2x-3y=4$ $\cdots\cdots$ ㉤

㉣−㉤을 하면 $0\cdot x+0\cdot y=0$

따라서 주어진 연립방정식은 해가 무수히 많다.

(2) ㉠+㉡×2를 하면 $3x-3y=12$ $\quad\therefore x-y=4$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉡+㉢을 하면 $3x-3y=6$ $\quad\therefore x-y=2$ $\cdots\cdots$ ㉤

㉣−㉤을 하면 $0\cdot x+0\cdot y=2$

따라서 주어진 연립방정식은 해가 없다.

답 (1) 해가 무수히 많다. (2) 해가 없다.

Remark (1)의 풀이에서 ㉣과 ㉤의 식이 일치하므로 이를 동시에 만족시키는 x, y의 값은 하나로 정해지지 않는다. 즉 $x=t$ (t는 임의의 수)로 놓으면

$$x=t,\ y=\frac{2t-4}{3},\ z=-\frac{11t+5}{3}$$

따라서 주어진 연립방정식은 t의 값에 따라 무수히 많은 해를 갖는다.

정답 및 풀이 • 58쪽

유제 073-1 연립방정식 $\begin{cases} 4x+y-z=5 \\ 2x+y-3z=7 \\ x-y+6z=-1 \end{cases}$ 을 풀어라.

유제 073-2 연립방정식 $\begin{cases} (a^2-3)x+6y=a \\ 2x+2y=-1 \end{cases}$ 의 해가 무수히 많을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

대표유형 074 **연립일차방정식의 활용** • 개념 074

세 상품 A, B, C 한 개의 가격은 각각 200원, 300원, 400원이다. A, B, C를 합하여 30개 구입하였더니 총 가격이 10000원이었다. 구입한 상품 C의 개수가 상품 A의 개수의 3배일 때, 구입한 상품 A, B, C의 개수를 구하여라.

유형 Guide 연립방정식에서는 실생활에서의 활용 문제가 자주 출제된다. 이와 같은 문제를 풀 때에는 먼저 미지수의 개수를 확인하고 미지수의 개수만큼 방정식을 세우면 답을 구할 수 있다. 무엇을 미지수로 놓느냐에 따라 계산이 간편해지기도 하고 복잡해지기도 하므로 먼저 미지수로 놓을 것을 결정한 다음 주어진 조건들을 수식화한다.

유형 SSEN **연립방정식의 활용 ○ 구하는 것의 개수만큼 방정식을 세운다.**

풀이 구입한 세 상품 A, B, C의 개수를 각각 x, y, z라 하면

$x+y+z=30$ …… ㉠

상품의 총 가격이 10000원이므로

$200x+300y+400z=10000$

$\therefore 2x+3y+4z=100$ …… ㉡

또 상품 C의 개수가 상품 A의 개수의 3배이므로

$z=3x$ …… ㉢

㉢을 ㉠, ㉡에 각각 대입하여 정리하면

$\begin{cases} 4x+y=30 & \cdots\cdots ㉣ \\ 14x+3y=100 & \cdots\cdots ㉤ \end{cases}$

㉤$-$㉣$\times 3$을 하면 $2x=10$ $\therefore x=5$

$x=5$를 ㉢, ㉣에 각각 대입하면 $z=15$, $20+y=30$

$\therefore y=10$, $z=15$

따라서 구입한 상품 A, B, C의 개수는 각각 5, 10, 15이다.

답 A : 5, B : 10, C : 15

정답 및 풀이 • 58쪽

유제 074-1 어떤 일을 끝마치는 데 A, B, C 세 사람이 함께 일하면 1시간이 걸리고, A, B 두 사람이 함께 일하면 1시간 30분이 걸리고, B, C 두 사람이 함께 일하면 2시간이 걸린다고 한다. A, C 두 사람이 함께 일하여 이 일을 끝마치는 데 걸리는 시간을 구하여라.

개념 075

미지수가 2개인 연립이차방정식

1 미지수가 2개인 연립이차방정식

$\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$, $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ 2x^2+5xy-y^2=1 \end{cases}$ 과 같이 미지수가 2개인 연립방정식에서 차수가 가장 높은 방정식이 이차방정식일 때, 이 연립방정식을 **미지수가 2개인 연립이차방정식**이라 한다.

미지수가 2개인 연립이차방정식은

$$\begin{cases} (\text{일차식})=0 \\ (\text{이차식})=0 \end{cases}, \begin{cases} (\text{이차식})=0 \\ (\text{이차식})=0 \end{cases}$$

의 두 가지 꼴이 있다.

2 $\begin{cases} (\text{일차식})=0 \\ (\text{이차식})=0 \end{cases}$ 의 풀이

일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립방정식은 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) (일차식)$=0$에서 한 미지수를 다른 미지수에 대한 식으로 나타낸다.
(ii) (i)에서 얻은 식을 이차방정식에 대입하여 푼다.

3 $\begin{cases} (\text{이차식})=0 \\ (\text{이차식})=0 \end{cases}$ 의 풀이

두 이차방정식으로 이루어진 연립방정식은 다음과 같이 일차방정식과 이차방정식을 연립하는 꼴로 변형하여 2 의 방법으로 푼다.

(1) 인수분해되는 식이 있는 경우

한 이차방정식이 $AB=0$ (A, B는 일차식) 꼴로 인수분해되면 두 일차방정식 $A=0$, $B=0$을 다른 이차방정식과 각각 연립하여 푼다.

(2) 인수분해되는 식이 없는 경우

① 이차항을 소거할 수 있으면

➡ 이차항을 소거하여 일차방정식을 얻는다.

② 이차항을 소거할 수 없으면

➡ 상수항을 소거해 본다.

개념 Approach

2 $\begin{cases} (\text{일차식})=0 \\ (\text{이차식})=0 \end{cases}$ **의 풀이**

일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립방정식을 풀 때에는 일차방정식의 한 미지수를 다른 미지수에 대한 식으로 나타낸 다음 이차방정식에 대입하여 푼다.

예를 들어 연립방정식 $\begin{cases} y-3x=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+y^2=11 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$을 풀어 보자.

㉠에서 $y=3x$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$2x^2+(3x)^2=11$ ⇐ 미지수 y 소거

$x^2=1 \qquad \therefore x=\pm1$

$x=\pm1$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $\quad y=\pm3$ (복호동순)

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

3 $\begin{cases} (\text{이차식})=0 \\ (\text{이차식})=0 \end{cases}$ **의 풀이**

(1) 인수분해되는 식이 있는 경우

$\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y-6=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 에서

㉠의 좌변을 인수분해하면 $\quad (x+y)(x-2y)=0$

$x+y=0,\ x-2y=0$을 각각 ㉡과 연립하여 $\begin{cases} (\text{일차식})=0 \\ (\text{이차식})=0 \end{cases}$ 꼴의 연립방정식을 푼다.

(2) 인수분해되는 식이 없는 경우

① 이차항을 소거할 수 있으면 ➡ 이차항을 소거한다.

$\begin{cases} 2x^2+3x-5y=9 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x^2-5x+2y=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 에서

㉠×3−㉡×2를 하면 $\quad 19x-19y=19$

$\therefore x-y=1$ ⇐ 이차항이 소거된다.

$x-y=1$을 ㉠, ㉡ 중 어느 하나와 연립하여 $\begin{cases} (\text{일차식})=0 \\ (\text{이차식})=0 \end{cases}$ 꼴의 연립방정식을 푼다.

② 이차항을 소거할 수 없으면 ➡ 상수항을 소거해 본다.

$\begin{cases} x^2-xy=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy-y^2=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 에서

㉠−㉡×2를 하면 $\quad x^2-3xy+2y^2=0$ ⇐ 상수항이 소거된다.

좌변을 인수분해하면 $\quad (x-y)(x-2y)=0$

$x-y=0,\ x-2y=0$을 각각 ㉠, ㉡ 중 어느 하나와 연립하여 $\begin{cases} (\text{일차식})=0 \\ (\text{이차식})=0 \end{cases}$ 꼴의 연립방정식을 푼다.

대표유형 075 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립방정식

• 개념 075

다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x-y=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x^2-y^2=-6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-3y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy-2y^2=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

유형 Guide 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립방정식은 일차방정식의 한 미지수를 다른 미지수에 대한 식으로 정리한 후 이차방정식에 대입하여 푼다.

유형 SSEN $\begin{cases} (\text{일차식})=0 \\ (\text{이차식})=0 \end{cases}$ ➡ 일차방정식을 한 미지수에 대하여 정리 ➡ 이차방정식에 대입

풀이 (1) ㉠에서 $y=2x+1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $3x^2-(2x+1)^2=-6$

$x^2+4x-5=0$, $(x+5)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-5$ 또는 $x=1$

(i) $x=-5$를 ㉢에 대입하면 $y=-9$

(ii) $x=1$을 ㉢에 대입하면 $y=3$

(i), (ii)에서 구하는 해는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-9 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

(2) ㉠에서 $x=3y+3$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $(3y+3)y-2y^2=4$

$y^2+3y-4=0$, $(y+4)(y-1)=0$

$\therefore$ $y=-4$ 또는 $y=1$

(i) $y=-4$를 ㉢에 대입하면 $x=-9$

(ii) $y=1$을 ㉢에 대입하면 $x=6$

(i), (ii)에서 구하는 해는 $\begin{cases} x=-9 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$

답 (1) $\begin{cases} x=-5 \\ y=-9 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=-9 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$

정답 및 풀이 • 58쪽

유제 075-1 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x+2y=1 \\ x^2-3y^2=-2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+4xy+y^2=-2 \end{cases}$

대표유형 076 두 이차방정식으로 이루어진 연립방정식 (1) • 개념 075

다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+y^2=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

유형 Guide 두 이차방정식으로 이루어진 연립방정식은 일차방정식과 이차방정식을 연립하는 꼴로 변형하여 푼다. 이때 두 이차방정식 중 어느 한 방정식이 인수분해되면 인수분해하여 두 일차방정식을 얻는다.

유형 SSEN $\begin{cases} (\text{이차식})=0 \\ (\text{이차식})=0 \end{cases}$ ○ **인수분해되는 식을 인수분해한다.**

풀이 ㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x+y)(x-y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$(-y)^2-(-y)\cdot y+y^2=9$

$y^2=3 \quad \therefore y=\pm\sqrt{3}$

$x=-y$이므로 $x=\pm\sqrt{3},\ y=\mp\sqrt{3}$ (복호동순)

(ii) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2-y\cdot y+y^2=9$

$y^2=9 \quad \therefore y=\pm 3$

$x=y$이므로 $x=\pm 3,\ y=\pm 3$ (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}$

답 풀이 참조

정답 및 풀이 • 58쪽

유제 076-1 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0 \\ x^2+2y^2=18 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2-2xy+2y^2=5 \\ 4x^2+3xy-y^2=0 \end{cases}$

대표유형 077 두 이차방정식으로 이루어진 연립방정식 (2)

• 개념 075

다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 3y^2+2x-5y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2y^2-5x+3y=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2-xy=12 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy-y^2=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

유형 Guide 연립방정식을 이루는 두 이차방정식이 모두 인수분해되지 않는 경우에는 이차항을 소거할 수 있으면 이차항을 소거하고, 소거할 수 없으면 상수항을 소거한다.

유형 SSEN $\begin{cases} (\text{이차식})=0 \\ (\text{이차식})=0 \end{cases}$ ◎ 인수분해 ◎ 이차항 소거 ◎ 상수항 소거 검토

풀이 (1) ㉠×2−㉡×3을 하면 $19x-19y=-19$

$x-y=-1$ $\therefore x=y-1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $3y^2+2(y-1)-5y=4$

$y^2-y-2=0$, $(y+1)(y-2)=0$ $\therefore y=-1$ 또는 $y=2$

(i) $y=-1$을 ㉢에 대입하면 $x=-2$

(ii) $y=2$를 ㉢에 대입하면 $x=1$

(i), (ii)에서 구하는 해는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

(2) ㉠−㉡×3을 하면 $x^2-4xy+3y^2=0$

$(x-y)(x-3y)=0$ $\therefore x=y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=y$를 ㉠에 대입하면 $0\cdot y^2=12$

따라서 해가 없다.

(ii) $x=3y$를 ㉠에 대입하면 $9y^2-3y^2=12$, $y^2=2$ $\therefore y=\pm\sqrt{2}$

$x=3y$이므로 $x=\pm3\sqrt{2}$, $y=\pm\sqrt{2}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는 $\begin{cases} x=3\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$

답 (1) $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=3\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$

Remark (1)에서 ㉢을 ㉡에 대입하거나 (2)에서 $x=y$, $x=3y$를 ㉡에 대입하여 풀어도 된다.

정답 및 풀이 • 59쪽

유제 077-1 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x^2-y^2+2x-y=3 \\ 2x^2-2y^2+3x-y=4 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2+2y=3 \\ y^2+2x=3 \end{cases}$

개념 076

대칭식으로 이루어진 연립방정식

연립방정식을 이루는 방정식이 모두 x, y에 대한 대칭식인 경우에는 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) $x+y=u$, $xy=v$로 놓고 주어진 연립방정식을 u, v에 대한 연립방정식으로 변형한다.

(ii) (i)에서 만든 연립방정식을 풀어 u, v의 값을 구한다.

(iii) x, y는 이차방정식 $t^2-ut+v=0$의 두 근임을 이용하여 x, y의 값을 구한다.

개념 Approach

$(x+y)^2-xy=13$과 같이 x, y를 서로 바꾸어도 변하지 않는 식을 대칭식이라 한다. x, y에 대한 연립이차방정식에서 각 방정식이 x, y에 대한 대칭식이면 $x+y=u$, $xy=v$로 놓고 주어진 연립방정식을 u, v에 대한 연립방정식으로 변형한다. 이때 곱셈 공식의 변형 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 등을 이용하면 x, y에 대한 이차식을 u, v에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

예를 들어 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ x+y+xy=0 \end{cases}$ 에서 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$$\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ x+y+xy=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=3 \\ x+y+xy=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2-2v=3 \\ u+v=0 \end{cases}$$

과 같이 u, v에 대한 연립방정식으로 변형되고, 두 식을 연립하여 풀면 u, v의 값을 구할 수 있다.

한편 $x+y=u$, $xy=v$를 만족시키는 x, y의 값은 이차방정식을 이용하여 구할 수 있다.
즉 x, y를 두 근으로 갖고 이차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은

$$t^2-(x+y)t+xy=0 \Rightarrow t^2-ut+v=0$$

135쪽 • 개념 050

따라서 이차방정식 $t^2-ut+v=0$을 풀면 x, y의 값을 구할 수 있다.

개념 Check

$x+y=4$, $xy=3$을 만족시키는 x, y의 값을 구하여라.

풀이 $x+y=4$, $xy=3$을 만족시키는 x, y는 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이다.
$t^2-4t+3=0$에서 $(t-1)(t-3)=0$ $\therefore t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

대표유형 078 대칭식으로 이루어진 연립방정식

• 개념 076

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 을 풀어라.

유형 Guide 주어진 방정식은 x, y를 서로 바꾸어도 식이 변하지 않는 대칭식이다. $x+y=u$, $xy=v$로 놓고 u, v의 값을 먼저 구한 다음, x, y는 이차방정식 $t^2-ut+v=0$의 두 근임을 이용하여 x, y의 값을 구한다.

유형 SSEN x, y에 대한 대칭식인 연립방정식 ➔ $x+y$, xy의 값을 먼저 구한다.

풀이 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 에서 $\begin{cases} (x+y)^2-2xy=5 \\ (x+y)^2-3xy=3 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 $\begin{cases} u^2-2v=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-3v=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $v=2$

$v=2$를 ㉠에 대입하면 $u^2-4=5$, $u^2=9$ $\therefore u=\pm 3$

(i) $u=3$, $v=2$, 즉 $x+y=3$, $xy=2$일 때, x, y는 이차방정식 $t^2-3t+2=0$의 두 근이다.

$(t-1)(t-2)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=2$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

(ii) $u=-3$, $v=2$, 즉 $x+y=-3$, $xy=2$일 때, x, y는 이차방정식 $t^2+3t+2=0$의 두 근이다. $(t+2)(t+1)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=-1$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

답 풀이 참조

다른풀이 $\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+y^2=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 에서 ㉡×5−㉠×3을 하면 $2x^2-5xy+2y^2=0$

$(x-2y)(2x-y)=0$ $\therefore x=2y$ 또는 $x=\frac{1}{2}y$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

정답 및 풀이 • 59쪽

유제 078-1 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (x-y)^2+xy=124 \\ (x+1)^2+(y+1)^2=122 \end{cases}$

개념 077 공통근

1 공통근

두 개 이상의 방정식을 동시에 만족시키는 미지수의 값을 이들 방정식의 **공통근**이라 한다.

2 공통근을 구하는 방법

두 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 공통근 $x=\alpha$는 다음의 방법으로 구한다.

(1) 인수분해 이용

$f(x)$, $g(x)$를 각각 인수분해하여 공통근을 찾는다.

(2) 최고차항 또는 상수항 소거

(i) 두 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 공통근을 α라 하고 $x=\alpha$를 주어진 방정식에 대입한다.

(ii) α에 대한 두 방정식 $f(\alpha)=0$, $g(\alpha)=0$을 연립하여 최고차항 또는 상수항을 소거한다.

(iii) (ii)에서 얻은 방정식의 해 중에서 공통근을 구한다.

Remark 최고차항이나 상수항을 소거하여 얻은 방정식의 해 중에는 공통근 외의 근도 있으므로 (iii)에서 확인이 필요하다.

개념 Approach

두 이차방정식 $x^2-x-2=0$, $x^2+x-6=0$의 공통근을 구해 보자.

방법 1 인수분해 이용

$x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$x^2+x-6=0$에서 $(x+3)(x-2)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 공통근은 $x=2$

방법 2 최고차항 소거

공통근을 α라 하면 $\alpha^2-\alpha-2=0$ …… ㉠ $\alpha^2+\alpha-6=0$ …… ㉡

㉡－㉠을 하면 $2\alpha-4=0$ $\therefore \alpha=2$

$\alpha=2$는 ㉠, ㉡을 모두 만족시키므로 구하는 공통근은 $x=2$

방법 3 상수항 소거

공통근을 α라 하면 $\alpha^2-\alpha-2=0$ …… ㉠ $\alpha^2+\alpha-6=0$ …… ㉡

㉠×3－㉡을 하면 $2\alpha^2-4\alpha=0$, $2\alpha(\alpha-2)=0$

$\therefore \alpha=0$ 또는 $\alpha=2$

이때 $\alpha=2$는 ㉠, ㉡을 모두 만족시키지만 $\alpha=0$은 ㉠, ㉡을 만족시키지 않는다.

따라서 구하는 공통근은 $x=2$

대표유형 079 공통근

• 개념 077

두 이차방정식 $x^2+2mx+m=0$, $x^2+(m-1)x-1=0$이 오직 하나의 공통근을 갖도록 하는 실수 m의 값과 이때의 공통근을 구하여라.

유형 Guide 두 방정식 $f(x)=0$과 $g(x)=0$이 공통근을 가질 때 공통근을 α라 하면

$f(\alpha)=0$, $g(\alpha)=0$

위의 두 식을 연립하여 문제의 뜻에 알맞은 값을 구해야 하는데 이때 주로 다음 방법이 쓰인다.

유형 SSEN 공통근 문제 ◎ 최고차항 또는 상수항 소거

풀이 두 이차방정식의 공통근을 α라 하면

$\alpha^2+2m\alpha+m=0$ …… ㉠

$\alpha^2+(m-1)\alpha-1=0$ …… ㉡

㉠－㉡을 하면 $(m+1)\alpha+m+1=0$

$(m+1)(\alpha+1)=0$ $\therefore m=-1$ 또는 $\alpha=-1$

(i) $m=-1$일 때,

두 이차방정식이 모두 $x^2-2x-1=0$이 되어 일치하므로 공통근은 2개가 되어 문제의 뜻에 어긋난다.

(ii) $\alpha=-1$일 때,

$\alpha=-1$을 ㉠에 대입하면

$1-2m+m=0$ $\therefore m=1$

(i), (ii)에서 $m=1$이고 이때의 공통근은 $x=-1$이다.

답 $m=1$, 공통근 : $x=-1$

정답 및 풀이 • 60쪽

유제 079-1 두 이차방정식 $x^2+x-a=0$, $x^2-ax+1=0$이 오직 하나의 공통근을 갖도록 하는 상수 a의 값을 구하여라.

유제 079-2 두 이차방정식 $x^2+(k-3)x-7k=0$, $x^2+(k-1)x-9k=0$이 0이 아닌 공통근을 가질 때, 상수 k의 값을 구하여라.

개념 078

부정방정식

1 부정방정식

방정식의 개수가 미지수의 개수보다 적은 경우 해가 무수히 많아서 해를 정할 수 없는 경우가 있는데 이러한 방정식을 **부정방정식**이라 한다.

부정방정식 ➡ (방정식의 개수) < (미지수의 개수)

2 부정방정식의 해결 조건

부정방정식에서 부족한 방정식의 개수를 대신할 어떤 조건이 주어지면 해가 유한개로 정해질 수도 있다. 이때 주어지는 조건으로 대표적인 것은 다음과 같다.

① 정수(또는 자연수) 조건　　② 유리수 조건　　③ 실수 조건

개념 Approach

방정식 $x+y=2$는 미지수가 x, y의 2개, 방정식이 1개인 부정방정식이다.
따라서 이 방정식의 해는

$$\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}, \cdots$$

과 같이 무수히 많다. 그러나 'x, y가 자연수'라는 조건이 있으면 해가 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 하나로 정해진다.
또 방정식 $2x-y+\sqrt{2}x=\sqrt{2}$도 미지수가 x, y의 2개, 방정식이 1개인 부정방정식으로 해가 무수히 많다. 그러나 'x, y가 유리수'라는 조건이 있으면 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2x-y+\sqrt{2}x=\sqrt{2} \iff \begin{cases} 2x-y=0 \\ x=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

와 같이 해가 하나로 정해진다.
이와 같이 부정방정식에서 미지수에 대한 특정한 조건이 주어지면 그 해가 유한개로 정해질 수도 있다.

개념 Check

방정식 $3x+2y=15$를 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)를 구하여라.

풀이　x, y가 자연수이므로 $y=\dfrac{15-3x}{2}\geq 1$에서　$x\leq\dfrac{13}{3}$

$\therefore x=1, 2, 3, 4$

(i) $x=1$일 때, $y=6$　　(ii) $x=2$일 때, $y=\dfrac{9}{2}$ (조건에 어긋난다.)

(iii) $x=3$일 때, $y=3$　　(iv) $x=4$일 때, $y=\dfrac{3}{2}$ (조건에 어긋난다.)

이상에서 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(1, 6)$, $(3, 3)$이다.

답 $(1, 6)$, $(3, 3)$

개념 079 정수 조건의 부정방정식

x, y가 정수(또는 자연수)일 때, 미지수 x, y를 포함하는 부정방정식은 다음과 같은 방법으로 해를 구하는 경우가 많다.

(i) 주어진 방정식을 $f(x, y)\times g(x, y)=$(정수) 꼴로 변형한다.
(ii) 약수와 배수의 성질을 이용하여 해를 구한다.

개념 Approach

세 정수 a, b, c에 대하여 $ab=c$ $(c\neq0)$이면 a, b는 c의 약수인 것과 같이 x, y가 정수일 때, $f(x, y)\times g(x, y)=$(정수)이면 두 식 $f(x, y)$, $g(x, y)$의 값은 우변에 있는 정수의 약수이다.
예를 들어 $f(x, y)\times g(x, y)=3$이면 두 식 $f(x, y)$, $g(x, y)$의 값은 3의 약수이므로 다음 중 어느 하나가 된다.

$$\begin{cases} f(x, y)=1 \\ g(x, y)=3 \end{cases},\ \begin{cases} f(x, y)=3 \\ g(x, y)=1 \end{cases},\ \begin{cases} f(x, y)=-1 \\ g(x, y)=-3 \end{cases},\ \begin{cases} f(x, y)=-3 \\ g(x, y)=-1 \end{cases}$$

따라서 위의 4개의 식을 각각 연립하여 풀면 된다.
일반적으로 정수 조건의 부정방정식은 $xy+ax+by+c=0$ (a, b, c는 정수) 꼴로 주어지는 경우가 많다. 이때에는 주어진 방정식을 $(x+b)(y+a)=d$ (d는 정수) 꼴로 변형하여 해를 구한다.

개념 Check

x, y가 정수일 때, $xy-x-y=1$을 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)를 모두 구하여라.

풀이 $xy-x-y=1$에서 $\quad xy-x-y+1=2$

$\therefore (x-1)(y-1)=2$

x, y가 정수이므로 $x-1$, $y-1$도 정수이고 2의 약수이다.
따라서 $x-1$, $y-1$의 값은 다음과 같다.

$x-1$	-2	-1	1	2
$y-1$	-1	-2	2	1

(i) $x-1=-2$, $y-1=-1$일 때, $\quad x=-1$, $y=0$
(ii) $x-1=-1$, $y-1=-2$일 때, $\quad x=0$, $y=-1$
(iii) $x-1=1$, $y-1=2$일 때, $\quad x=2$, $y=3$
(iv) $x-1=2$, $y-1=1$일 때, $\quad x=3$, $y=2$

이상에서 구하는 순서쌍 (x, y)는

$(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$

답 $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$

대표유형 080 정수 조건의 부정방정식

• 개념 079

x, y가 정수일 때, 방정식 $xy-2x+y-5=0$을 만족시키는 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$를 모두 구하여라.

유형 Guide x, y가 정수(또는 자연수)라는 조건이 주어진 $xy+ax+by+c=0$(a, b, c는 정수) 꼴의 부정방정식은

$$x(y+a)+b(y+a)=ab-c,\ 즉\ (x+b)(y+a)=ab-c$$

로 변형하여 $x+b$, $y+a$가 $ab-c$의 약수임을 이용한다.

유형 SSEN **정수(또는 자연수) 조건의 부정방정식 ⊙ (일차식)×(일차식)=(정수) 꼴로 변형해 본다.**

풀이 $xy-2x+y-5=0$에서 $x(y-2)+(y-2)=3$

$\therefore (x+1)(y-2)=3$

x, y가 정수이므로 $x+1$, $y-2$도 정수이고 3의 약수이다.
따라서 $x+1$, $y-2$의 값은 다음과 같다.

$x+1$	-3	-1	1	3
$y-2$	-1	-3	3	1

(i) $x+1=-3$, $y-2=-1$일 때, $x=-4$, $y=1$
(ii) $x+1=-1$, $y-2=-3$일 때, $x=-2$, $y=-1$
(iii) $x+1=1$, $y-2=3$일 때, $x=0$, $y=5$
(iv) $x+1=3$, $y-2=1$일 때, $x=2$, $y=3$

이상에서 구하는 순서쌍 $(x,\ y)$는

$(-4,\ 1)$, $(-2,\ -1)$, $(0,\ 5)$, $(2,\ 3)$

답 $(-4,\ 1)$, $(-2,\ -1)$, $(0,\ 5)$, $(2,\ 3)$

정답 및 풀이 • 60쪽

유제 080-1 방정식 $mn-4m+5n=27$을 만족시키는 정수 m, n에 대하여 $m+n$의 최댓값을 구하여라.

Plus 유제 080-2 방정식 $x^2-3xy+2y^2+6=0$을 만족시키는 자연수 x, y의 값을 구하여라.

개념 080

실수 조건의 부정방정식

x, y가 실수일 때, 미지수 x, y를 포함하는 부정방정식은 다음과 같은 방법으로 해를 구하는 경우가 많다.

(1) 주어진 방정식이 $\{f(x, y)\}^2+\{g(x, y)\}^2=0$ **꼴로 변형**되면
➡ $f(x, y)=g(x, y)=0$임을 이용한다.

(2) 실수 x, y에 대한 이차방정식이 주어지면
➡ 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 **판별식 $D\geq 0$임**을 이용한다.

Remark 실수 조건의 부정방정식이 허수단위 i를 포함하고 있으면 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 해를 구한다.

개념 Approach

실수 x, y에 대한 방정식 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ (a, b, c는 실수)의 풀이를 (2)의 방법으로 설명해 보자.

$x^2+y^2+ax+by+c=0$의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2+ax+y^2+by+c=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠을 x에 대한 이차방정식으로 생각하면 이 방정식의 실근 x가 존재해야 한다.
따라서 ㉠의 판별식을 D라 하면 $D=a^2-4(y^2+by+c)\geq 0$이다.
이 부등식에서 y의 값을 구한 다음, 이 값을 ㉠에 대입하여 x의 값을 구한다.

개념 Check

방정식 $x^2+y^2-6x+8y+25=0$을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하여라.

풀이 주어진 방정식에서

$$(x^2-6x+9)+(y^2+8y+16)=0 \qquad \therefore (x-3)^2+(y+4)^2=0$$

이때 x, y가 실수이므로 $x-3$, $y+4$도 실수이다.
따라서 $x-3=0$, $y+4=0$이므로 $x=3$, $y=-4$

답 $x=3$, $y=-4$

다른풀이 주어진 방정식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2-6x+y^2+8y+25=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

x가 실수이므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-(y^2+8y+25)\geq 0, \qquad y^2+8y+16\leq 0 \qquad \therefore (y+4)^2\leq 0$$

y도 실수이므로 $y+4=0$ $\quad\therefore y=-4$
$y=-4$를 ㉠에 대입하면 $x^2-6x+9=0$, $(x-3)^2=0$ $\quad\therefore x=3$
따라서 구하는 x, y의 값은 $x=3$, $y=-4$

Remark 위의 두 가지 방법 중 어느 것을 이용해도 그 결과는 같다.

대표유형 081 실수 조건의 부정방정식

• 개념 080

방정식 $9x^2+2y^2-6xy+4y+4=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하여라.

유형 Guide 실수 조건이 있는 이차부정방정식의 풀이에는 주로 다음 두 가지 방법이 쓰인다.

유형 SSEN 실수 조건의 부정방정식 ⊙ ① $A^2+B^2=0$ ⊙ $A=B=0$ / ② x가 실수 ⊙ 실근 ⊙ 판별식 $D\ge0$

풀이 $9x^2+2y^2-6xy+4y+4=0$에서

$$(9x^2-6xy+y^2)+(y^2+4y+4)=0$$

$$\therefore (3x-y)^2+(y+2)^2=0$$

x, y가 실수이므로 $3x-y$, $y+2$도 실수이다.

따라서 $3x-y=0$, $y+2=0$이므로 $x=-\frac{2}{3}$, $y=-2$

$$\therefore x+y=-\frac{8}{3}$$

답 $-\frac{8}{3}$

다른풀이 주어진 방정식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$9x^2-6yx+2y^2+4y+4=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

x가 실수이므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-3y)^2-9(2y^2+4y+4)\ge0$$

$$y^2+4y+4\le0 \qquad \therefore (y+2)^2\le0$$

y도 실수이므로 $y+2=0$ $\therefore y=-2$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $9x^2+12x+4=0$

$$(3x+2)^2=0 \qquad \therefore x=-\frac{2}{3}$$

$$\therefore x+y=-\frac{8}{3}$$

정답 및 풀이 • 61쪽

유제 081-1 방정식 $17a^2-8ab+b^2-2a+1=0$을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

유제 081-2 방정식 $10x^2-12xy+5y^2-4x-6y+13=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x-y$의 값을 구하여라.

특강 081 이차방정식의 정수근

이차방정식 $x^2-(k+2)x+k+3=0$과 같이 계수가 문자이면 근을 구할 수 없다. 그러나 이차방정식의 근이 정수라는 조건이 있으면 다음과 같은 방법으로 두 근 α, β와 상수 k의 값을 구할 수 있다.

(i) 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근 α, β에 대한 식을 구한다.
(ii) (i)에서 얻은 식을 이용하여 α, β에 대한 부정방정식을 만든 후

$$f(\alpha,\ \beta)\times g(\alpha,\ \beta)=(\text{정수})$$

꼴로 변형한다.
(iii) 약수와 배수의 성질을 이용하여 α, β를 구한다.
(iv) 두 근 α, β를 (i)에서 얻은 식에 대입하여 상수 k의 값을 구한다.

예를 들어 x에 대한 이차방정식 $x^2-(k+2)x+k+3=0$의 두 근 α, β $(\alpha\ge\beta)$가 정수일 때, 상수 k의 값을 모두 구해 보자.

(i) 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $x^2-(k+2)x+k+3=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=k+2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$\alpha\beta=k+3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

(ii) 두 근에 대한 부정방정식을 만든다.

㉡$-$㉠을 하면 $\alpha\beta-\alpha-\beta=1$

$\alpha\beta-\alpha-\beta+1=2$, $\alpha(\beta-1)-(\beta-1)=2$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=2$

(iii) 약수와 배수의 성질을 이용하여 두 근을 구한다.

그런데 $\alpha-1$, $\beta-1$은 $\alpha-1\ge\beta-1$인 정수이고 2의 약수이므로

$\alpha-1$	-1	2
$\beta-1$	-2	1

$\alpha-1=-1$, $\beta-1=-2$일 때, $\alpha=0$, $\beta=-1$
$\alpha-1=2$, $\beta-1=1$일 때, $\alpha=3$, $\beta=2$

(iv) 두 근을 대입하여 상수 k의 값을 구한다.

$\alpha=0$, $\beta=-1$을 ㉠에 대입하면

$-1=k+2 \qquad \therefore k=-3$

$\alpha=3$, $\beta=2$를 ㉠에 대입하면

$3+2=k+2 \qquad \therefore k=3$

따라서 구하는 k의 값은 -3, 3이다.

중단원 연습 문제

정답 및 풀이 • 61쪽

STEP 1 유형 Training

01 연립방정식 $\begin{cases} x+y+z=-1 \\ 2x-y+2z=-8 \\ x+2y+5z=-15 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$의 값을 구하여라.

02 연립방정식 $\begin{cases} x(y+z)=6 \\ y(z+x)=10 \\ z(x+y)=12 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$라 할 때, $(\alpha\beta\gamma)^2$의 값은?

① 25 ② 36 ③ 49 ④ 64 ⑤ 81

03 연립방정식 $\begin{cases} x+y=a \\ 2x^2+y^2=6 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 양수 a의 값을 구하여라.

04 서술형

연립방정식 $\begin{cases} x^2+3y^2=12 \\ xy+3y^2=6 \end{cases}$ 을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 xy의 최댓값을 구하여라.

05 연립방정식 $\begin{cases} x+y+xy=-1 \\ xy(x+y)=-20 \end{cases}$ 을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x-y$의 최솟값은?

① -6 ② -4 ③ 1 ④ 4 ⑤ 6

06 방정식 $5x^2+y^2+4x-2xy+1=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 xy의 값을 구하여라.

STEP 2 실전 Application

07 두 학생 P와 Q가 x, y, z에 대한 연립방정식 $\begin{cases} 2x+ay=1 \\ -2y+z=b \\ -2z+x=-3 \end{cases}$ 을 푸는데, P는 상수 a만 잘못 보고 풀어서 $x=-3$, $y=-2$, $z=0$의 해를 얻었고, Q는 상수 b만 잘못 보고 풀어서 $x=-1$, $y=3$, $z=1$의 해를 얻었다. 처음 주어진 연립방정식의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$라 할 때, $\alpha+\beta+\gamma$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

서술형

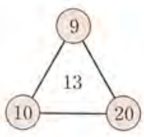
08 연립방정식 $\begin{cases} (x+2y)(x+y+z)=96 \\ (y+2z)(x+y+z)=204 \\ (z+2x)(x+y+z)=132 \end{cases}$ 의 해가 $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$일 때, $\alpha\beta\gamma$의 값을 구하여라. (단, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$)

09 연립방정식 $\begin{cases} 3kx+y=0 \\ ky+3z=0 \\ x-2y+2z=0 \end{cases}$ 의 해가 무수히 많도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?

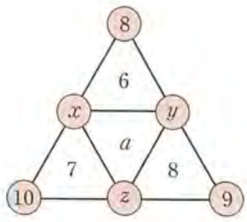
① -5　　② -3　　③ -1　　④ 3　　⑤ 5

서술형

10 삼각형의 세 꼭짓점에 있는 수의 평균을 삼각형의 내부에 나타내기로 한다. 예를 들어 [그림 1]과 같이 세 꼭짓점에 9, 10, 20이 있을 때 삼각형의 내부에는 9, 10, 20의 평균 13을 나타낸다. 이때 [그림 2]에서 xyz의 값과 a의 값을 구하여라.



[그림 1]



[그림 2]

교육청기출

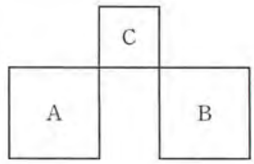
11 어떤 경기에서는 경기 결과에 따라 오른쪽 세 가지 규정 중 하나로 점수를 계산한다. 예를 들어 6경기를 치른 결과가 3승 2무 1패일 때, 규정 A에 의한 점수는 $3\times1+2\times0+1\times(-1)$이므로 2점이다. 갑이 10경기를 치른 결과 규정 A에 의한 점수가 3점, 규정 B에 의한 점수가 18점이다. 이때 규정 C에 의한 갑의 점수는?

경기 결과 \ 규정	A	B	C
승	1	3	2
무승부	0	1	1
패	-1	0	-1

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

평가원기출

12 그림과 같이 길이가 32 cm인 철사로 다음 조건을 모두 만족시키도록 세 정사각형 A, B, C를 만들었다.



- A의 넓이는 B의 넓이와 같다.
- A의 한 변의 길이는 C의 한 변의 길이보다 길다.
- 세 정사각형의 넓이의 합은 $22\,\text{cm}^2$이다.

이때 정사각형 A의 한 변의 길이는?

(단, 철사의 굵기는 무시하고, 겹치는 부분 없이 모두 사용한다.)

① 2 cm　② 2.5 cm　③ 3 cm　④ 3.5 cm　⑤ 4 cm

서술형

13 이차방정식 $x^2+ax+2b=0$의 두 근이 α, β이고, 이차방정식 $x^2+bx+2a=0$의 두 근이 α, γ일 때, $\beta+\gamma$의 값을 구하여라. (단, $a\neq b$)

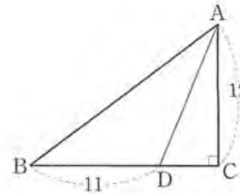
14 이차방정식 $x^2-2kx+8k-12=0$의 두 근 α, $\beta(\alpha\geq\beta)$가 정수일 때, 모든 상수 k의 값의 합을 구하여라.

15 등식 $(x^2-x-6)^2+(y^2+2y-8)^2=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 등식 $(xy-z)^2=0$을 만족시키는 실수 z의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

16 실수 x, y에 대하여 $x◎y=\begin{cases} x & (x \geq y) \\ -2y & (x<y) \end{cases}$라 하자. 연립방정식

$\begin{cases} 3x-8y^2=x◎y \\ x-2y+10=x◎y \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하여라.

17 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}=12$, $\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC의 변 BC 위의 한 점 D에 대하여 $\overline{BD}=11$이다. $\overline{AB}+\overline{AD}=33$일 때, 선분 AD의 길이는?



① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

18 두 다항식 $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=x^2+cx+d$에 대하여 방정식 $f(x)+g(x)=0$의 근은 2, α이고, $f(x)g(x)=0$의 근은 2, 3, 5이다. 이때 α의 값을 구하여라.

(단, a, b, c, d는 상수이다.)

19 연립방정식 $\begin{cases} x+y+z=\sqrt{3} \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$을 만족시키는 실수 x, y, z에 대하여 $x+2y+3z$의 값을 구하여라.

서술형

20 갑과 을은 게임을 하기 위하여 동전 모양의 플라스틱 30개를 준비하였다. 이 플라스틱들은 하얀색, 빨간색, 파란색으로 구분되며, 각 색깔의 플라스틱은 적어도 한 개씩 존재하고 하얀색 플라스틱의 개수가 가장 많다. 하얀색, 빨간색, 파란색 플라스틱 한 개당 각각 10원, 50원, 100원의 가치를 부여하였더니 30개의 플라스틱의 가치의 합이 1200원이었다. 모든 빨간색 플라스틱의 가치의 합과 모든 파란색 플라스틱의 가치의 합이 각각 a원, b원일 때, $|a-b|$의 값을 구하여라.

III 부등식

09

여러 가지 부등식 (1)

부등식(不等式)을 문자 그대로 해석한다면 등식이 아닌 식이다. 즉 등식 $a=b$의 부정인 $a\neq b$를 뜻한다. 그러나 일반적으로 부등호는 두 수 또는 두 식의 대소 관계를 나타내는 기호 $<$, $>$, $\leq$, $\geq$를 뜻하고, 부등식은 그들 사이의 대소 관계를 부등호를 사용하여 나타낸 식을 말한다. 이러한 의미에서 부등식은 오히려 대소식(大小式)이라 하는 것이 옳을 것이다.

이 단원에서는 부등식의 성질을 이용하여 일차부등식을 풀어 보자. 또 이차부등식과 이차함수의 관계를 이해하고, 이를 바탕으로 이차부등식의 해를 구해 보자.

●한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

27 부등식의 성질

- 부등식의 성질을 이해한다.

28 일차부등식

- 일차부등식의 뜻을 안다.
- 절댓값 기호를 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.

29 이차부등식

- 이차부등식의 뜻과 풀이 방법을 안다.
- 이차부등식과 이차함수의 관계를 이해한다.

개념 & 특강	대표유형 & 유제
082 부등식	082 부등식의 성질
특강 083 부등식의 사칙계산	
084 일차부등식	083 부등식 $ax>b$의 풀이
085 절댓값 기호를 포함한 간단한 부등식	084 절댓값 기호를 포함한 부등식의 풀이 (1)
086 절댓값 기호를 포함한 부등식의 풀이	
087 이차부등식	
088 이차부등식과 이차함수의 관계	085 그래프를 이용한 부등식의 풀이
089 이차부등식의 풀이 (1)	
090 이차부등식의 풀이 (2)	086 이차부등식의 풀이 — 087 절댓값 기호를 포함한 부등식의 풀이 (2) — 088 미정계수를 포함한 부등식의 풀이 — 089 이차방정식의 근의 판별 — 090 이차부등식의 활용
091 이차부등식의 풀이 (3)	

개념 082 부등식

1 부등식

(1) 부등식 : 부등호 $>$, $<$, $\geq$, $\leq$를 사용하여 수나 식의 값의 대소 관계를 나타낸 식을 **부등식**이라 한다.

(2) 부등식의 해 : 미지수를 포함한 부등식에서 그 부등식을 참이 되게 하는 미지수의 값 또는 범위를 **부등식의 해**라 하고, 부등식을 만족시키는 해 전체를 구하는 것을 **부등식을 푼다**고 한다.

2 부등식의 기본 성질

실수 a, b, c, m에 대하여 다음 성질이 성립한다.

① $a>b$이고 $b>c$이면 $a>c$

② $a>b$이면 $a+m>b+m$, $a-m>b-m$

③ $a>b$이고 $m>0$이면 $am>bm$, $\frac{a}{m}>\frac{b}{m}$

④ $a>b$이고 $m<0$이면 $am<bm$, $\frac{a}{m}<\frac{b}{m}$

⑤ a, b가 같은 부호이면 $ab>0$, $\frac{a}{b}>0$

⑥ a, b가 다른 부호이면 $ab<0$, $\frac{a}{b}<0$

Remark ④에서 부등식의 양변에 같은 음수를 곱하거나 나누면 부등호의 방향이 바뀌는 것에 주의한다.

개념 Approach

부등식은 $x>1$, $x+y<3$, $x^2-2x+1\leq 0$, $a^2+b^2\geq ab$와 같이 부등호($>$, $<$, $\geq$, $\leq$)를 사용하여 대소 관계를 나타내는 식이다. 이때 허수에 대해서는 대소 관계를 생각할 수 없으므로 부등식에 포함된 문자는 실수를 나타내는 것으로 본다.

부등식의 기본 성질은 0으로 나누는 경우를 제외하면 등호가 포함된 부등식에서도 성립한다.

이 부등식의 기본 성질을 이용하면 여러 가지 부등식의 성질을 확인할 수 있다.

개념 Check

$-2\leq x<3$일 때, $-2x+5$의 값의 범위를 구하여라.

풀이 $-2\leq x<3$에서 각 변에 -2를 곱하면 $-6<-2x\leq 4$

위의 식의 각 변에 5를 더하면 $-1<-2x+5\leq 9$

답 $-1<-2x+5\leq 9$

대표유형 082 부등식의 성질

• 개념 082

다음을 설명하여라.

(1) $a>b$, $c>d$이면 $\quad a+c>b+d$

(2) $a>b$, $c>d$이면 $\quad a-d>b-c$

(3) $a>b>0$, $c>d>0$이면 $\quad ac>bd$

(4) $a>b>0$, $c>d>0$이면 $\quad \dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$

유형 Guide 부등식의 기본 성질과 '$A>B$이고 $B>C$이면 $A>C$' 임을 이용하여 설명한다.

유형 SSEN 여러 가지 부등식의 성질 ◎ 부등식의 기본 성질을 이용한다.

풀이 (1) $a>b$의 양변에 c를 더하면 $\quad a+c>b+c$ …… ㉠

$c>d$의 양변에 b를 더하면 $\quad b+c>b+d$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a+c>b+c>b+d$

$\therefore a+c>b+d$

(2) $a>b$의 양변에서 d를 빼면 $\quad a-d>b-d$ …… ㉠

$c>d$의 양변에 -1을 곱하면 $\quad -d>-c$

$-d>-c$의 양변에 b를 더하면 $\quad b-d>b-c$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a-d>b-d>b-c$

$\therefore a-d>b-c$

(3) $a>b$의 양변에 c를 곱하면 $\quad ac>bc$ …… ㉠

$c>d$의 양변에 b를 곱하면 $\quad bc>bd$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad ac>bc>bd$

$\therefore ac>bd$

(4) $a>b$의 양변을 d로 나누면 $\quad \dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{d}$ …… ㉠

$c>d$의 양변을 cd로 나누면 $\quad \dfrac{1}{d}>\dfrac{1}{c}$

$\dfrac{1}{d}>\dfrac{1}{c}$의 양변에 b를 곱하면 $\quad \dfrac{b}{d}>\dfrac{b}{c}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad \dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{d}>\dfrac{b}{c}$

$\therefore \dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$

답 풀이 참조

정답 및 풀이 • 67쪽

유제 082-1 $a>0$, $b>0$일 때, $a^2>b^2$이면 $a>b$임을 설명하여라.

특강 083

부등식의 사칙계산

x, y의 값의 범위가 주어졌을 때, x, y를 사칙계산한 값의 범위는 주어진 부등식의 양 끝값을 이용하여 구할 수 있다.

실수 x, y에 대하여 $0<a<x<b$, $0<c<y<d$일 때, $x+y$, $x-y$, xy, $\frac{x}{y}$의 값의 범위를 구하는 방법은 다음과 같다.

(1) 덧셈

$$\begin{array}{rl} & a < x < b \\ +) & c < y < d \\ \hline & a+c<x+y<b+d \end{array}$$

(2) 뺄셈

$$\begin{array}{rl} & a < x < b \\ -) & c < y < d \\ \hline & a-d<x-y<b-c \end{array}$$

(3) 곱셈

$$\begin{array}{rl} & a < x < b \\ \times) & c < y < d \\ \hline & ac < xy < bd \end{array}$$

(4) 나눗셈

$$\begin{array}{rl} & a < x < b \\ \div) & c < y < d \\ \hline & \frac{a}{d} < \frac{x}{y} < \frac{b}{c} \end{array}$$

Remark (1), (2)는 x, y의 값의 범위에 음수가 포함되어도 성립한다.

개념 Check

실수 x, y에 대하여 $2\le x\le 6$, $1\le y\le 3$일 때, 다음 식의 값의 범위를 구하여라.

(1) $x+y$ (2) $x-y$ (3) xy (4) $\frac{x}{y}$

풀이

(1)
$$\begin{array}{rl} & 2 \le x \le 6 \\ +) & 1 \le y \le 3 \\ \hline & 2+1\le x+y\le 6+3 \end{array}$$
$\therefore 3\le x+y\le 9$

(2)
$$\begin{array}{rl} & 2 \le x \le 6 \\ -) & 1 \le y \le 3 \\ \hline & 2-3\le x-y\le 6-1 \end{array}$$
$\therefore -1\le x-y\le 5$

(3)
$$\begin{array}{rl} & 2 \le x \le 6 \\ \times) & 1 \le y \le 3 \\ \hline & 2\cdot 1\le xy\le 6\cdot 3 \end{array}$$
$\therefore 2\le xy\le 18$

(4)
$$\begin{array}{rl} & 2 \le x \le 6 \\ \div) & 1 \le y \le 3 \\ \hline & \frac{2}{3}\le \frac{x}{y}\le \frac{6}{1} \end{array}$$
$\therefore \frac{2}{3}\le \frac{x}{y}\le 6$

답 풀이 참조

개념 084

일차부등식

1 일차부등식

주어진 부등식을 이항하여 정리했을 때,

$$\boldsymbol{ax>b},\ \boldsymbol{ax\geq b},\ \boldsymbol{ax<b},\ \boldsymbol{ax\leq b}\ (\text{단, } \boldsymbol{a\neq 0},\ a,\ b\text{는 상수})$$

와 같은 꼴이 되는 부등식을 x에 대한 **일차부등식**이라 한다.

2 부등식 $ax>b$의 풀이

x에 대한 부등식 $ax>b$의 해는 다음과 같다.

① $a>0$일 때, $x>\frac{b}{a}$　　② $a<0$일 때, $x<\frac{b}{a}$

③ $a=0$일 때, $\begin{cases} b\geq 0\text{이면} \Rightarrow \text{해는 없다.} \\ b<0\text{이면} \Rightarrow \text{해는 모든 실수이다.} \end{cases}$

개념 Approach

x에 대한 부등식 $ax>b$의 해를 음미해 보자.

(i) $a>0$일 때, 양변을 양수 a로 나누면　$x>\frac{b}{a}$　⇐ 부등호 방향 그대로

(ii) $a<0$일 때, 양변을 음수 a로 나누면　$x<\frac{b}{a}$　⇐ 부등호 방향 반대로

(iii) $a=0$일 때, $0\cdot x>b$이므로

① $b\geq 0$이면 x에 어떤 값을 대입하여도 부등식이 성립하지 않는다. ➡ 해는 없다.

② $b<0$이면 x에 어떤 값을 대입하여도 부등식이 항상 성립한다. ➡ 해는 모든 실수이다.

Remark $a>0$ 또는 $a<0$일 때에는 a로 양변을 나누는 경우에 부등호의 방향에만 주의하면 되지만 $a=0$일 때에는 경우가 복잡해진다. 따라서 $a=0$일 때에는 주어진 부등식을

$0\cdot x>0$, $0\cdot x>(\text{양수})$, $0\cdot x>(\text{음수})$

와 같이 구체적으로 표현한 다음 해를 구하는 것이 좋다.

개념 Check

다음 부등식을 풀어라.

(1) $2x-5>4x+2$　　(2) $2x-5>2(x-2)$　　(3) $2(x+1)+x>3(x-1)$

풀이 (1) $2x-4x>2+5$, 　$-2x>7$　 $\therefore x<-\frac{7}{2}$

(2) $2x-5>2x-4$에서 $0\cdot x>1$이므로 부등식의 해는 없다.

(3) $2x+2+x>3x-3$에서 $0\cdot x>-5$이므로 부등식의 해는 모든 실수이다.

답 (1) $x<-\frac{7}{2}$　(2) 해는 없다.　(3) 모든 실수

대표유형 083 부등식 $ax>b$의 풀이

• 개념 084

다음에 답하여라.

(1) x에 대한 부등식 $ax+4\le a^2+2x$를 풀어라.

(2) x에 대한 부등식 $(a+b)x+2a-b>0$의 해가 $x<-1$일 때, x에 대한 부등식 $(3a-3b)x+2a+5b<0$을 풀어라.

유형 Guide 일차항의 계수가 미정인 $ax>b$ 꼴의 부등식은 x의 계수의 부호에 따라 경우를 나누어 푼다. 즉 $a>0$, $a<0$, $a=0$인 경우의 해를 모두 생각해야 한다. 그러나 (2)와 같이 해가 주어진 경우에는 'x'를 기준으로 주어진 부등식의 부등호의 방향과 해의 부등호의 방향을 잘 관찰하면 미정 계수의 부호를 알 수 있다. 즉 주어진 부등식의 부등호의 방향과 해의 부등호의 방향이 같으면 일차항의 계수 a가 양수, 방향이 다르면 a가 음수임을 뜻한다.

유형 SSEN $ax>b$에서 ○ $x>\frac{b}{a}$이면 $a>0$, $x<\frac{b}{a}$이면 $a<0$

풀이 (1) $ax+4\le a^2+2x$에서 $(a-2)x\le a^2-4$ $\therefore (a-2)x\le(a-2)(a+2)$

(i) $a-2>0$, 즉 $a>2$일 때, $x\le a+2$

(ii) $a-2<0$, 즉 $a<2$일 때, $x\ge a+2$

(iii) $a-2=0$, 즉 $a=2$일 때, $0\cdot x\le 0$이므로 해는 모든 실수이다.

이상에서 부등식의 해는 $\begin{cases} a>2\text{일 때,} & x\le a+2 \\ a<2\text{일 때,} & x\ge a+2 \\ a=2\text{일 때,} & \text{모든 실수} \end{cases}$

(2) $(a+b)x+2a-b>0$에서 $(a+b)x>-2a+b$ ······ ㉠

이 부등식의 해가 $x<-1$이므로 $a+b<0$ ······ ㉡

㉠의 양변을 $a+b$로 나누면 $x<\frac{-2a+b}{a+b}$

주어진 부등식과 해의 부등호의 방향이 다르므로 x의 계수는 음수이다.

따라서 $\frac{-2a+b}{a+b}=-1$이므로

$-2a+b=-a-b$ $\therefore a=2b$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $2b+b<0$ $\therefore b<0$

㉢을 부등식 $(3a-3b)x+2a+5b<0$에 대입하면

$(6b-3b)x+4b+5b<0$, $3bx<-9b$

$\therefore x>-3$ ($\because b<0$)

답 풀이 참조

정답 및 풀이 • 67쪽

유제 083-1 다음에 답하여라.

(1) x에 대한 부등식 $ax+b>x+1$을 풀어라.

(2) x에 대한 부등식 $a(x+a)\le b(x+b)$의 해가 $x\ge 2$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

개념 085 절댓값 기호를 포함한 간단한 부등식

$a>0$, $b>0$일 때, 다음과 같은 성질이 성립한다.

① $|x|<a \iff -a<x<a$

② $|x|>a \iff x<-a$ 또는 $x>a$

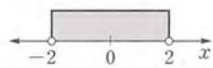
③ $a<|x|<b \iff a<x<b$ 또는 $-b<x<-a$ (단, $b>a$)

개념 Approach

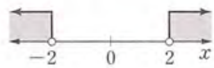
$|x|$는 수직선 위의 원점에서 x에 대응하는 점까지의 거리를 나타내므로 위의 성질 ①~③이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

예를 들어 생각해 보자.

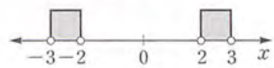
① $|x|<2 \iff -2<x<2$



② $|x|>2 \iff x<-2$ 또는 $x>2$



③ $2<|x|<3 \iff 2<x<3$ 또는 $-3<x<-2$



개념 Check

다음 부등식을 풀어라.

(1) $|5-2x|\le 7$ (2) $|x+1|>3$

풀이 (1) $|5-2x|\le 7$에서 $-7\le 5-2x\le 7$

$-12\le -2x\le 2$ $\therefore -1\le x\le 6$

(2) $|x+1|>3$에서 $x+1<-3$ 또는 $x+1>3$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>2$

답 (1) $-1\le x\le 6$ (2) $x<-4$ 또는 $x>2$

개념 086

절댓값 기호를 포함한 부등식의 풀이

일반적으로 절댓값 기호를 포함한 부등식은 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 경계로 하여 x의 값의 범위를 나눈다.

(ii) 각 범위에서 절댓값 기호를 없앤 후 식을 정리하여 해를 구한다.

(iii) (ii)에서 구한 해를 합친 x의 값의 범위를 구한다.

Remark 절댓값 기호를 1개 포함하는 부등식은 x의 값의 범위가 2개로 나누어지고, 절댓값 기호를 2개 포함하는 부등식은 x의 값의 범위가 3개로 나누어진다.

개념 Approach

절댓값 기호를 포함한 부등식은 절댓값 기호를 포함한 방정식과 같은 원리로 푼다.

즉 절댓값 기호를 포함한 부등식이 **개념 085**와 같이 간단한 꼴이 아니면 오른쪽 절댓값의 성질을 이용하여 절댓값 기호를 없앤 다음 부등식을 푼다.

$$|a|=\begin{cases} a & (a\geq 0\text{일 때}) \\ -a & (a<0\text{일 때}) \end{cases}$$

이때 위의 (ii)에서 구한 부등식의 해 중에서 해당 범위에 속하는 것만을 택해야 한다.

또 각 범위에서 구한 해는 모두 주어진 부등식을 만족시키므로 (ii)에서 구한 해를 합친 x의 값의 범위가 주어진 부등식의 해가 된다.

개념 Check

다음 부등식을 풀어라.

(1) $|x-1|\leq 2x$

(2) $|x+2|\geq x$

풀이 (1) (i) $x\geq 1$일 때, $x-1\leq 2x$ $\quad\therefore x\geq -1$

그런데 $x\geq 1$이므로 $x\geq 1$

(ii) $x<1$일 때, $-(x-1)\leq 2x$, $3x\geq 1$ $\quad\therefore x\geq \frac{1}{3}$

그런데 $x<1$이므로 $\frac{1}{3}\leq x<1$

(i), (ii)에서 구하는 부등식의 해는 $x\geq \frac{1}{3}$

(2) (i) $x\geq -2$일 때, $x+2\geq x$

$0\cdot x\geq -2$이므로 x는 모든 실수이다.

그런데 $x\geq -2$이므로 $x\geq -2$

(ii) $x<-2$일 때, $-(x+2)\geq x$, $2x\leq -2$ $\quad\therefore x\leq -1$

그런데 $x<-2$이므로 $x<-2$

(i), (ii)에서 구하는 부등식의 해는 모든 실수이다.

답 (1) $x\geq \frac{1}{3}$ (2) 모든 실수

대표유형 084 절댓값 기호를 포함한 부등식의 풀이 (1)

• 개념 085, 086

다음 부등식을 풀어라.

(1) $1<|x-1|<3$ (2) $|x-2|+|x|<4$

유형 Guide 절댓값 기호를 포함한 방정식과 마찬가지로 절댓값 기호를 포함한 부등식도 절댓값 기호 안의 식의 값을 0이 되게 하는 값을 경계로 하여 미지수의 값의 범위를 나누어 푼다. 한편 (1)과 같이 간단한 부등식은 미지수의 값의 범위를 나눌 필요 없이

$a<|x|<b \Longleftrightarrow a<x<b$ 또는 $-b<x<-a$

임을 이용하면 절댓값 기호 안의 식의 값의 범위를 간단히 구할 수 있다.

유형 SSEN **절댓값 기호를 포함한 부등식**
절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 미지수의 값을 경계로 범위를 나눈다.

풀이 (1) $1<|x-1|<3$에서

$-3<x-1<-1$ 또는 $1<x-1<3$

$\therefore -2<x<0$ 또는 $2<x<4$

(2) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은 $x-2=0$, $x=0$, 즉 $x=0$, $x=2$

(i) $x<0$일 때, $-(x-2)-x<4$이므로

$-2x<2$ $\therefore x>-1$

그런데 $x<0$이므로 $-1<x<0$ …… ㉠

(ii) $0\le x<2$일 때, $-(x-2)+x<4$이므로

$0\cdot x<2$

따라서 부등식의 해는 모든 실수이다.

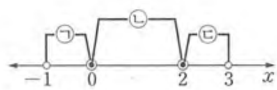
그런데 $0\le x<2$이므로 $0\le x<2$ …… ㉡

(iii) $x\ge 2$일 때, $x-2+x<4$이므로

$2x<6$ $\therefore x<3$

그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x<3$ …… ㉢

이상에서 부등식의 해는 $-1<x<3$



답 (1) $-2<x<0$ 또는 $2<x<4$ (2) $-1<x<3$

정답 및 풀이 • 67쪽

유제 084-1 부등식 $2|x-4|-|x-2|<4$를 만족시키는 정수 x의 개수를 구하여라.

Plus 유제 084-2 x에 대한 부등식 $|ax+1|\le b$의 해가 $-1\le x\le 5$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

개념 087 이차부등식

부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리했을 때,

$$ax^2+bx+c>0,\ ax^2+bx+c\geq 0,\ ax^2+bx+c<0,\ ax^2+bx+c\leq 0$$

(단, $a\neq 0$, a, b, c는 상수)

과 같이 좌변이 미지수 x에 대한 이차식으로 나타내어지는 부등식을 x에 대한 **이차부등식**이라 한다.

개념 Approach

예를 들어 $-2x^2>3$, $x^2+2x\geq 2$, $2x^2+3x-2<3x+2$, $x^2-x-2\leq 2x^2+1$의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면

$$-2x^2-3>0,\ x^2+2x-2\geq 0,\ 2x^2-4<0,\ -x^2-x-3\leq 0$$

이므로 위의 부등식은 모두 x에 대한 이차부등식이다.

그러나 $2x^2+x+1>2x^2-1$의 경우에는 이항하여 정리하면

$$x+2>0$$

으로 변형되어 이차항이 사라지므로 이차부등식이 아니라 일차부등식이 된다.

즉 부등식이 언뜻 보아서 x에 대한 이차항을 포함하고 있다고 해서 그 부등식이 x에 대한 이차부등식인 것은 아니다. 따라서 어떤 부등식이 이차부등식인지 알아볼 때에는 부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 후, 좌변의 식이 이차식인지 확인한다.

개념 Check

이차부등식인 것만을 **보기**에서 있는 대로 골라라.

보기

ㄱ. $x^2-x>2x+1$ ㄴ. $-2x^2-3<-2x^2$

ㄷ. $3(x^2+1)\geq 2(x^2-1)+x^2$ ㄹ. $-2x(x+1)\geq x+1$

풀이 부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면

ㄱ. $x^2-x>2x+1$에서 $x^2-3x-1>0$

ㄴ. $-2x^2-3<-2x^2$에서 $-3<0$

ㄷ. $3x^2+3\geq 2x^2-2+x^2$에서 $5\geq 0$

ㄹ. $-2x^2-2x\geq x+1$에서 $-2x^2-3x-1\geq 0$

이상에서 이차부등식인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

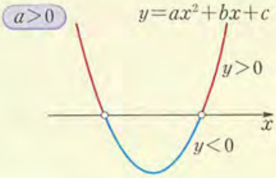
개념 088 이차부등식과 이차함수의 관계

이차부등식의 해와 이차함수의 그래프 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

① 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해

$\Longleftrightarrow$ 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서 $y>0$을 만족시키는 x의 값의 범위

$\Longleftrightarrow$ 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위



② 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해

$\Longleftrightarrow$ 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서 $y<0$을 만족시키는 x의 값의 범위

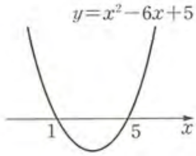
$\Longleftrightarrow$ 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위

개념 Approach

이차함수의 그래프가 주어지면 이차부등식의 해를 쉽게 구할 수 있다.
좌표평면에서 x축을 기준으로 위쪽에 있는 y의 값은 모두 양수이고, 아래쪽에 있는 y의 값은 모두 음수이므로 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이고, 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해는 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.
한편 x축에서의 y의 값은 0이므로 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge 0$의 해는 $ax^2+bx+c>0$의 해와 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 합친 것이고, 이차부등식 $ax^2+bx+c\le 0$의 해는 $ax^2+bx+c<0$의 해와 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 합친 것이다.

개념 Check

이차함수 $y=x^2-6x+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 다음 부등식의 해를 구하여라.



(1) $x^2-6x+5>0$ (2) $x^2-6x+5\le 0$

풀이 (1) 이차부등식 $x^2-6x+5>0$의 해는 이차함수 $y=x^2-6x+5$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x<1$ 또는 $x>5$

(2) 이차부등식 $x^2-6x+5\le 0$의 해는 이차함수 $y=x^2-6x+5$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 x축과 만나는 점의 x좌표를 합친 것이므로

$1\le x\le 5$

답 (1) $x<1$ 또는 $x>5$ (2) $1\le x\le 5$

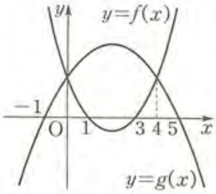
대표유형 085 그래프를 이용한 부등식의 풀이

• 개념 088

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 부등식의 해를 구하여라.

(1) $f(x)>g(x)$

(2) $f(x)g(x)<0$



유형 Guide (1) 부등식 $f(x)>g(x)$의 해는 그래프를 이용하여 다음의 ① 또는 ②의 방법으로 구할 수 있다.

① $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위를 구한다.

② $y=f(x)-g(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위를 구한다.

이 문제에서는 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 주어졌으므로 ①의 방법을 이용한다.

(2) $f(x)g(x)<0$이면 $f(x)>0$, $g(x)<0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)>0$이므로 각각의 경우를 만족시키는 x의 값의 범위를 구한다.

유형 55EN 부등식 $f(x)>g(x)$의 해

○ $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 위치 관계를 이용한다.

풀이 (1) 부등식 $f(x)>g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 구하는 해는 $x<0$ 또는 $x>4$

(2) $f(x)g(x)<0$이면 $f(x)>0$, $g(x)<0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)>0$

(i) $f(x)>0$, $g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$f(x)>0$일 때, $x<1$ 또는 $x>3$ …… ㉠

$g(x)<0$일 때, $x<-1$ 또는 $x>5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면 $x<-1$ 또는 $x>5$

(ii) $f(x)<0$, $g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$f(x)<0$일 때, $1<x<3$ …… ㉢

$g(x)>0$일 때, $-1<x<5$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 공통부분을 구하면 $1<x<3$

(i), (ii)에서 구하는 부등식의 해는

$x<-1$ 또는 $1<x<3$ 또는 $x>5$

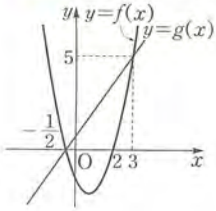
답 (1) $x<0$ 또는 $x>4$ (2) $x<-1$ 또는 $1<x<3$ 또는 $x>5$

정답 및 풀이 • 68쪽

유제 085-1 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 부등식의 해를 구하여라.

(1) $f(x)\le g(x)$

(2) $f(x)g(x)>0$



개념 089 이차부등식의 풀이 (1)

이차함수의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때 이차부등식의 해는 다음과 같다.

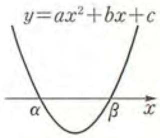
이차함수 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 α, β $(\alpha<\beta)$라 할 때,

① $ax^2+bx+c>0$의 해는 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$

② $ax^2+bx+c\ge0$의 해는 $x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta$

③ $ax^2+bx+c<0$의 해는 $\alpha<x<\beta$

④ $ax^2+bx+c\le0$의 해는 $\alpha\le x\le\beta$



Remark
- $a<0$일 때에는 주어진 부등식의 양변에 -1을 곱하여 x^2의 계수를 양수로 고쳐서 푼다.
- 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나는 것은 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D>0$일 때이다.

개념 Approach

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$의 그래프가 x축과 두 점 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ $(\alpha<\beta)$에서 만나면

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

로 인수분해된다. 따라서 ax^2+bx+c의 부호는 $(x-\alpha)(x-\beta)$의 부호와 같고, $(x-\alpha)(x-\beta)$의 부호는 두 인수 $x-\alpha$, $x-\beta$의 부호에 의하여 다음과 같이 결정된다.

	$x<\alpha$	$x=\alpha$	$\alpha<x<\beta$	$x=\beta$	$x>\beta$
$x-\alpha$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\beta$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-\alpha)(x-\beta)$	$+$	0	$-$	0	$+$

위의 표에서 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

① $ax^2+bx+c>0$ ➡ $a(x-\alpha)(x-\beta)>0$ ➡ $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$

② $ax^2+bx+c\ge0$ ➡ $a(x-\alpha)(x-\beta)\ge0$ ➡ $x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta$

③ $ax^2+bx+c<0$ ➡ $a(x-\alpha)(x-\beta)<0$ ➡ $\alpha<x<\beta$

④ $ax^2+bx+c\le0$ ➡ $a(x-\alpha)(x-\beta)\le0$ ➡ $\alpha\le x\le\beta$

개념 Check

다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2-2x-3\ge0$　　　(2) $x^2+5x-6<0$

풀이 (1) $x^2-2x-3\ge0$에서　$(x+1)(x-3)\ge0$　$\therefore$ $x\le-1$ 또는 $x\ge3$

(2) $x^2+5x-6<0$에서　$(x+6)(x-1)<0$　$\therefore$ $-6<x<1$

답 풀이 참조

개념 090

이차부등식의 풀이 (2)

이차함수의 그래프가 x축과 한 점에서 만날 때 이차부등식의 해는 다음과 같다.

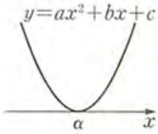
이차함수 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 α라 할 때,

① $ax^2+bx+c>0$의 해는 $x\neq\alpha$인 모든 실수이다.

② $ax^2+bx+c\geq0$의 해는 모든 실수이다.

③ $ax^2+bx+c<0$의 해는 없다.

④ $ax^2+bx+c\leq0$의 해는 $x=\alpha$이다.



Remark 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나는 것은 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=0$일 때이다.

개념 Approach

이차함수 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$의 그래프가 x축과 점 $(\alpha,\ 0)$에서 접하면

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$$

으로 인수분해된다. 따라서 ax^2+bx+c의 부호는 $(x-\alpha)^2$의 부호와 같고

$x=\alpha$이면 $\quad (x-\alpha)^2=0$

$x\neq\alpha$이면 $\quad (x-\alpha)^2>0$

이므로 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

① $ax^2+bx+c>0 \Rightarrow a(x-\alpha)^2>0 \Rightarrow$ 해는 $x\neq\alpha$인 모든 실수이다.

② $ax^2+bx+c\geq0 \Rightarrow a(x-\alpha)^2\geq0 \Rightarrow$ 해는 모든 실수이다.

③ $ax^2+bx+c<0 \Rightarrow a(x-\alpha)^2<0 \Rightarrow$ 해는 없다.

④ $ax^2+bx+c\leq0 \Rightarrow a(x-\alpha)^2\leq0 \Rightarrow$ 해는 $x=\alpha$이다.

Remark 위의 내용을 무작정 암기하는 것보다는 한 두 번 음미하는 정도가 좋다. '$D=0$일 때에는 완전제곱식으로 변형하여 생각한다.'는 정도로 기억해 두자.

개념 Check

다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2+2x+1>0$ (2) $4x^2-4x+1<0$

풀이 (1) $x^2+2x+1>0$에서 $\quad (x+1)^2>0$

따라서 $x^2+2x+1>0$의 해는 $x\neq-1$인 모든 실수이다.

(2) $4x^2-4x+1<0$에서 $\quad (2x-1)^2<0$

따라서 $4x^2-4x+1<0$의 해는 없다.

답 (1) $x\neq-1$인 모든 실수 (2) 해는 없다.

개념 091 이차부등식의 풀이 (3)

이차함수의 그래프가 x축과 만나지 않을 때 이차부등식의 해는 다음과 같다.

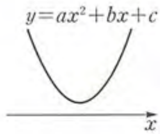
이차함수 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$의 그래프가 x축과 만나지 않을 때,

① $ax^2+bx+c>0$의 해는 모든 실수이다.

② $ax^2+bx+c\geq0$의 해는 모든 실수이다.

③ $ax^2+bx+c<0$의 해는 없다.

④ $ax^2+bx+c\leq0$의 해는 없다.



Remark 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 만나지 않는 것은 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D<0$일 때이다.

개념 Approach

이차함수 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$의 그래프가 x축과 만나지 않으면 ax^2+bx+c는 인수분해되지 않는다. 이때 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 $(p,\ q)$라 하면 $q>0$이고

$$ax^2+bx+c=a(x-p)^2+q$$

로 변형된다. 따라서 ax^2+bx+c의 부호는 $a(x-p)^2+q$의 부호와 같고

$$a(x-p)^2\geq0,\ q>0$$

이므로 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

① $ax^2+bx+c>0$ ➡ $a(x-p)^2+q>0$ ➡ 해는 모든 실수이다.

② $ax^2+bx+c\geq0$ ➡ $a(x-p)^2+q\geq0$ ➡ 해는 모든 실수이다.

③ $ax^2+bx+c<0$ ➡ $a(x-p)^2+q<0$ ➡ 해는 없다.

④ $ax^2+bx+c\leq0$ ➡ $a(x-p)^2+q\leq0$ ➡ 해는 없다.

Remark $D=0$일 때와 마찬가지로 '$D<0$일 때에는 완전제곱식이 포함된 꼴로 변형하여 생각한다.'는 정도로 기억해 두자.

개념 Check

다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2+x+1>0$ (2) $x^2-x+1<0$

풀이 (1) $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$이므로 주어진 부등식은 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

따라서 $x^2+x+1>0$의 해는 모든 실수이다.

(2) $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$이므로 주어진 부등식은 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}<0$

따라서 $x^2-x+1<0$의 해는 없다.

답 (1) 모든 실수 (2) 해는 없다.

대표유형 086 이차부등식의 풀이

• 개념 089 ~ 091

다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2+2x+7\le 2x^2-1$　　(2) $-9x^2+12x-4\ge 0$　　(3) $3x^2\le 2x-1$

유형 Guide 모든 항을 좌변으로 이항하여 간단히 한 후 좌변의 이차식을 인수분해하여 해를 구한다. 이때 이차식이 인수분해되지 않으면 $a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 식의 값의 범위를 확인한다.

유형 SSEN 이차부등식의 풀이 ⊙ 이차식을 인수분해해 본다.

풀이 (1) $x^2+2x+7\le 2x^2-1$에서

$x^2-2x-8\ge 0,\quad (x+2)(x-4)\ge 0$

$\therefore x\le -2$ 또는 $x\ge 4$

(2) 주어진 부등식의 양변에 -1을 곱하면

$9x^2-12x+4\le 0$

$\therefore (3x-2)^2\le 0$

따라서 부등식의 해는　$x=\frac{2}{3}$

(3) $3x^2\le 2x-1$에서　$3x^2-2x+1\le 0$

$3x^2-2x+1=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

답 (1) $x\le -2$ 또는 $x\ge 4$　(2) $x=\frac{2}{3}$　(3) 해는 없다.

다른풀이 (3) $3x^2-2x+1=2x^2+(x^2-2x+1)=2x^2+(x-1)^2$

이때 $x^2\ge 0$, $(x-1)^2\ge 0$이고 $x^2=0$, $(x-1)^2=0$을 동시에 만족시키는 x의 값은 존재하지 않으므로

$2x^2+(x-1)^2>0$

따라서 $3x^2-2x+1>0$이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

정답 및 풀이 • 68쪽

유제 086-1 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $\frac{1}{3}x^2-x>\frac{1}{6}x-1$

(2) $4x^2+28x+49<0$

(3) $-x^2+3x\le 4$

대표유형 087 절댓값 기호를 포함한 부등식의 풀이 (2)

• 개념 089 ~ 091

다음 부등식을 풀어라.

(1) $x^2-|x|-2<0$　　　(2) $x^2-3x\le|x-3|$

유형 Guide 절댓값 기호를 포함한 문제는 앞에서 여러 번 학습하여 이제 어느 정도 익숙해졌으리라 생각한다. 절댓값 기호를 포함한 부등식은 미지수의 차수가 일차이든 이차이든 다음과 같이 범위를 나누어 절댓값 기호를 없앤 후 푼다.

유형 SSEN 절댓값 기호를 포함한 부등식
➲ 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 미지수의 값을 경계로 범위를 나눈다.

풀이 (1) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은　$x=0$

(i) $x<0$일 때, $x^2+x-2<0$이므로

$(x+2)(x-1)<0$　$\therefore -2<x<1$

그런데 $x<0$이므로　$-2<x<0$

(ii) $x\ge0$일 때, $x^2-x-2<0$이므로

$(x+1)(x-2)<0$　$\therefore -1<x<2$

그런데 $x\ge0$이므로　$0\le x<2$

(i), (ii)에서 부등식의 해는　$-2<x<2$

(2) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은　$x-3=0$, 즉 $x=3$

(i) $x<3$일 때, $x^2-3x\le-(x-3)$이므로

$x^2-2x-3\le0$,　$(x+1)(x-3)\le0$

$\therefore -1\le x\le3$

그런데 $x<3$이므로　$-1\le x<3$

(ii) $x\ge3$일 때, $x^2-3x\le x-3$이므로

$x^2-4x+3\le0$,　$(x-1)(x-3)\le0$

$\therefore 1\le x\le3$

그런데 $x\ge3$이므로　$x=3$

(i), (ii)에서 부등식의 해는　$-1\le x\le3$

답 (1) $-2<x<2$　(2) $-1\le x\le3$

다른풀이 (1) $x^2=|x|^2$이므로 $|x|^2-|x|-2<0$에서　$(|x|+1)(|x|-2)<0$

그런데 $|x|+1>0$이므로　$|x|-2<0$,　$|x|<2$

$\therefore -2<x<2$

정답 및 풀이 • 69쪽

유제 087-1 다음 부등식을 풀어라.

(1) $2x^2-5|x|-3>0$

(2) $3x(2x+1)-3\ge|-2x+3|$

대표유형 088 미정계수를 포함한 부등식의 풀이

• 개념 089 ~ 091

다음 x에 대한 부등식을 풀어라.

(1) $x^2-(a+2)x+2a<0$　　　(2) $ax^2+3ax-4a>0$

유형 Guide 미정계수를 포함한 부등식은 인수분해를 이용하여

$(x-\alpha)(x-\beta)>0$ 또는 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$

꼴로 변형하였을 때, α, β의 대소 관계에 따라 해가 달라지므로

$\alpha>\beta$, $\alpha=\beta$, $\alpha<\beta$

로 경우를 나누어 풀어야 한다. 특히 (2)의 경우에는 최고차항의 계수가 문자이므로

$a>0$, $a=0$, $a<0$

의 경우를 고려해야 한다.

유형 SSEN **부등식 $ax^2+bx+c>0$ ⭘ $a>0$, $a=0$, $a<0$인 경우로 나누어 푼다.**

풀이 (1) $x^2-(a+2)x+2a<0$에서　$(x-a)(x-2)<0$

(i) $a>2$일 때,　$2<x<a$

(ii) $a=2$일 때, $(x-2)^2<0$이므로 해는 없다.

(iii) $a<2$일 때,　$a<x<2$

이상에서 부등식의 해는 $\begin{cases} a>2\text{일 때,} & 2<x<a \\ a=2\text{일 때,} & \text{해는 없다.} \\ a<2\text{일 때,} & a<x<2 \end{cases}$

(2) $ax^2+3ax-4a>0$에서　$a(x^2+3x-4)>0$

$a(x+4)(x-1)>0$　…… ㉠

(i) $a>0$일 때, ㉠의 양변을 a로 나누면

$(x+4)(x-1)>0$　$\therefore x<-4$ 또는 $x>1$

(ii) $a=0$일 때, ㉠에 $a=0$을 대입하면

$0\cdot(x+4)(x-1)>0$

이므로 해는 없다.

(iii) $a<0$일 때, ㉠의 양변을 a로 나누면

$(x+4)(x-1)<0$　$\therefore -4<x<1$

이상에서 부등식의 해는 $\begin{cases} a>0\text{일 때,} & x<-4 \text{ 또는 } x>1 \\ a=0\text{일 때,} & \text{해는 없다.} \\ a<0\text{일 때,} & -4<x<1 \end{cases}$

답 풀이 참조

정답 및 풀이 • 69쪽

유제 088-1 다음 x에 대한 부등식을 풀어라.

(1) $-x^2+(a+b)x-ab\le 0$　　　(2) $ax^2-8ax+12a\le 0$

대표유형 089 이차방정식의 근의 판별

• 개념 089 ~ 091

다음에 답하여라.

(1) x에 대한 이차방정식 $x^2-(k+2)x+k^2=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

(2) 이차방정식 $kx^2+3x+k=0$이 서로 다른 두 허근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

유형 Guide 이차방정식의 근을 판별하는 문제는 이미 127쪽의 대표유형 040에서 풀어 보았다.
여기에서 주어진 문제들은 이차방정식의 판별식이 이차식인 경우이다. 즉 계수가 실수인 이차방정식의 판별식 D에 대하여

서로 다른 두 실근 ➡ $D>0$, 중근 ➡ $D=0$, 서로 다른 두 허근 ➡ $D<0$

이 성립하는데, 이때 $D>0$ 또는 $D<0$이 이차부등식이 되는 문제를 해결해 보자.

유형 SSEN 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 판별 ⊙ 판별식 $D=b^2-4ac$ 이용

풀이 (1) 이차방정식 $x^2-(k+2)x+k^2=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이므로

$(k+2)^2-4k^2>0$, $3k^2-4k-4<0$

$(3k+2)(k-2)<0$

$\therefore -\frac{2}{3}<k<2$

(2) $kx^2+3x+k=0$이 이차방정식이므로 $k\neq 0$ …… ㉠

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D<0$이므로

$9-4k^2<0$, $4k^2-9>0$

$(2k+3)(2k-3)>0$

$\therefore k<-\frac{3}{2}$ 또는 $k>\frac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$k<-\frac{3}{2}$ 또는 $k>\frac{3}{2}$

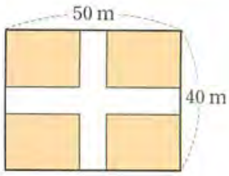
답 (1) $-\frac{2}{3}<k<2$ (2) $k<-\frac{3}{2}$ 또는 $k>\frac{3}{2}$

정답 및 풀이 • 69쪽

유제 089-1 이차방정식 $kx^2-(k+3)x+k=0$이 실근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

대표유형 090 **이차부등식의 활용** • 개념 089 ~ 091

오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 50 m, 40 m인 직사각형 모양의 땅에 폭이 일정한 도로를 서로 수직으로 만나도록 만들었다. 남은 땅의 넓이가 $1200\,\mathrm{m}^2$ 이상이 되도록 할 때, 도로의 최대 폭은 몇 m인지 구하여라.
(단, 도로는 직사각형의 가로 또는 세로와 평행하다.)



유형 Guide '~ 이상' 또는 '~ 이하'의 조건을 만족시키는 식은 대부분 부등식이다. 방정식이든 부등식이든 활용 문제를 해결하려면 먼저 무엇을 미지수 x로 놓을지 정해야 한다. 이 문제에서는 도로의 폭을 구하라고 하였으므로 그것을 x로 놓고 식을 세운다. 이때 x의 값의 범위에 주의한다.

유형 SSEN **활용 문제 ⊙ 구하려는 것을 x로 놓고 식을 세운다.**

풀이 도로의 폭을 xm라 하면 남은 땅의 가로의 길이와 세로의 길이는 각각

$(50-x)$m, $(40-x)$m

이므로 남은 땅의 넓이는

$(50-x)(40-x)\geq 1200$

$x^2-90x+800\geq 0,\qquad (x-10)(x-80)\geq 0$

$\therefore x\leq 10$ 또는 $x\geq 80$

그런데 $0<x<40$이어야 하므로 $\quad 0<x\leq 10$

따라서 도로의 최대 폭은 10m이다.

답 10 m

정답 및 풀이 • 69쪽

유제 090-1 어떤 테니스 선수가 라켓으로 공을 치고 t초가 지난 후에 지면으로부터의 공의 높이를 h m라 하면

$h=-5t^2+3t+2.13$

의 관계가 성립한다고 한다. 이 테니스공의 높이가 0.78 m 이상인 시간은 몇 초까지인지 구하여라.

Plus 유제 090-2 A상점에서 휴대전화 한 대를 50만 원에 판매하면 하루에 20대가 팔리고, 휴대전화 한 대의 가격을 x만 원 인하하면 하루 판매량이 $2x$대 증가한다고 한다. 한 대에 50만 원에 판매하던 휴대전화의 가격을 인하하여 하루 총 판매액이 1750만 원 이상 되도록 할 때, 이 휴대전화 한 대의 가격의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

중단원 연습 문제

정답 및 풀이 • 70쪽

STEP 1 유형 Training

01 x에 대한 부등식 $ax-(a+b)<0$의 해가 $x>3$일 때, x에 대한 부등식 $bx-(a+b)>0$의 해를 구하여라.

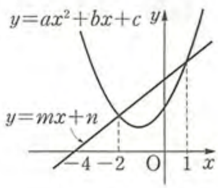
02 x에 대한 부등식 $a(x-1)-b(x-2)>1$의 해가 존재하지 않을 때, 실수 a의 최댓값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

서술형

03 부등식 $2|x-1|+3|x+1|<6$의 해를 구하여라.

04 두 함수 $y=ax^2+bx+c$, $y=mx+n$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 부등식 $ax^2+(b-m)x+c-n\le 0$의 해를 구하여라. (단, a, b, c, m, n은 상수이다.)



05 부등식 $(x+1)(x-3)<5$를 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

서술형

06 부등식 $(x+1)(|x|-2)<0$의 해가 $x<a$ 또는 $b<x<c$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

07 어느 시계 전문점에서 A시계 한 개를 10만 원에 판매하면 한 달에 100개가 팔리고, A시계 한 개의 가격을 x만 원 인상하면 한 달 판매량이 $4x$개 감소한다고 한다. A시계의 한 달 총 판매액이 1200만 원 이상이 되도록 하는 x의 값의 범위를 구하여라.

STEP 2 실전 Application

교육청기출

08 $a>b>1$, $c>0$인 실수 a, b, c에 대하여 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\frac{1}{a+c}<\frac{1}{b+c}$　　ㄴ. $ab+1>a+b$　　ㄷ. $\frac{a}{b}<\frac{a-1}{b-1}$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

09 부등식 $a^2x+1>x+a$가 모든 실수 x에 대하여 성립할 때, 실수 a의 값을 구하여라.

10 두 부등식 $x+2a>0$, $2x-3\le x+1$을 모두 만족시키는 정수 x의 개수가 5일 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $a<-\frac{1}{2}$　② $0<a\le\frac{1}{2}$　③ $0<a<1$
④ $1<a<2$　⑤ $a>2$

11 부등식 $[x]^2+[x]-6<0$의 해를 구하여라.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

서술형

12 이차부등식 $x^2+3x+a\le 0$의 해가 $x=\alpha$일 때, 실수 a의 값을 구하여라.
(단, α는 실수이다.)

13 $x=1+n\sqrt{2}$가 부등식 $x^2-4x-12<0$을 만족시키도록 하는 정수 n의 개수를 구하여라. (단, $\sqrt{2}=1.4$로 계산한다.)

서술형

14 어떤 물체를 지면에서 초속 70 m로 똑바로 쏘아 올릴 때, t초 후에 지면으로부터의 물체의 높이를 h m라 하면 $h=70t-5t^2$의 관계가 성립한다고 한다. 이 물체의 높이가 120 m 이상이 되는 시간은 a초 동안이다. 상수 a의 값을 구하여라.

교육청기출

15 그림과 같이 일직선 위의 세 지점 A, B, C에 같은 제품을 생산하는 공장이 있다. A와 B 사이의 거리는 10 km, B와 C 사이의 거리는 30 km, A와 C 사이의 거리는 20 km이다. 이 일직선 위의 A와 C 사이에 보관창고를 지으려고 한다. 공장과 보관창고와의 거리가 x km일 때, 제품 한 개당 운송비는 x^2원이 든다고 하자. 세 지점 A, B, C의 공장에서 하루에 생산되는 제품이 각각 100개, 200개, 300개일 때, 하루에 드는 총 운송비가 155000원 이하가 되도록 하는 보관창고는 A지점에서 최대 몇 km 떨어진 지점까지 지을 수 있는가? (단, 공장과 보관창고의 크기는 무시한다.)

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

STEP 3 심화 Forwarding

16 $[x]=2$, $[y]=5$일 때, $(x-y)(y-x)$의 값 중에서 정수의 최댓값을 M, 최솟값을 N이라 하자. 이때 MN의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 72 ② 75 ③ 78 ④ 80 ⑤ 84

교육청기출

17 이차항의 계수가 음수인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$이 두 점에서 만나고 그 교점의 y좌표가 각각 3과 8이다. 이때 이차부등식 $f(x)-x-1>0$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은?

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

18 이차부등식 $x^2-2ax+2a-1<0$의 해 중에서 가장 큰 정수가 4일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

19 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq0$의 해가 $x=1$뿐일 때, 실수 a, b, c의 부호를 바르게 나타낸 것은?

① $a<0$, $b>0$, $c<0$ ② $a<0$, $b<0$, $c>0$ ③ $a<0$, $b>0$, $c>0$
④ $a>0$, $b>0$, $c<0$ ⑤ $a>0$, $b<0$, $c>0$

서술형

20 x에 대한 부등식 $(x-8)|x-a|<0$을 만족시키는 자연수 x의 개수가 6일 때, 상수 a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

나를 바꾸는 힘

시도했던 모든 것이 물거품이 되었더라도
그것은 또 하나의 전진이기 때문에
나는 용기를 잃지 않는다.
– 토마스 에디슨

실패는 결코 '끝'을 뜻하지 않습니다.
실패했다고 모든 것이 끝난 것처럼 좌절하지 마세요.
포기하지 않는다면 실패를 만회할 기회는 반드시 다시 온답니다.

실패는 결코 '후퇴'를 뜻하지 않습니다.
실패했다는 것은 무언가에 도전했다는 것을 뜻하고,
우리는 도전과 실패를 통해서 많은 것을 배우게 되죠.
실패는 또 하나의 '전진'입니다.

사람마다 전진하는 속도가 다를 뿐,
우리는 지금도 꿈을 향해 전진하고 있다는 것을 잊지 마세요.

10

여러 가지 부등식 (2)

두 개 이상의 방정식을 한 쌍으로 묶어서 나타낸 것을 연립방정식이라 하는 것과 같이, 두 개 이상의 부등식을 한 쌍으로 묶어서 나타낸 것을 연립부등식이라 한다. 연립부등식의 해는 각 부등식의 해를 수직선 위에 함께 나타낸 후 공통부분, 즉 각 부등식의 해가 겹치는 부분을 찾으면 구할 수 있다.

이 단원에서는 이차부등식의 해가 모든 실수인 경우를 이용하여 이차부등식이 항상 성립할 조건을 알아보고, 연립부등식에서 차수가 가장 높은 부등식이 이차부등식인 연립이차부등식을 풀어 보자.

● 한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

30 이차부등식의 활용

- 이차부등식이 항상 성립할 조건을 이해한다.
- 해가 주어진 이차부등식을 구할 수 있다.

31 연립이차부등식

- 연립이차부등식의 뜻과 풀이 방법을 알고, 이를 활용할 수 있다.

개념 & 특강	대표유형 & 유제		
092 이차부등식이 항상 성립할 조건	091 모든 실수에 대하여 성립하는 부등식	092 이차부등식과 두 그래프의 위치 관계	093 제한된 범위에서 항상 성립하는 이차부등식
093 이차부등식의 작성	094 해가 주어진 이차부등식		
094 연립부등식	095 연립이차부등식의 풀이	096 해가 주어진 연립이차부등식	097 두 이차방정식의 근의 판별
			098 이차방정식의 근의 분리
			099 연립이차부등식의 활용

개념 092 이차부등식이 항상 성립할 조건

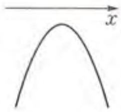
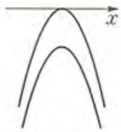
이차부등식이 항상 성립할 조건은 다음과 같다. (단, $a\neq0$, $D=b^2-4ac$)

① 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c>0 \Longleftrightarrow a>0,\ D<0$
② 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\geq0 \Longleftrightarrow a>0,\ D\leq0$
③ 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c<0 \Longleftrightarrow a<0,\ D<0$
④ 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\leq0 \Longleftrightarrow a<0,\ D\leq0$

Remark 위의 내용을 무조건 외우기보다는 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 생각하여 조건을 이끌어 낼 수 있도록 연습해 놓자.

개념 Approach

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이려면 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있어야 한다.
또 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<0$이려면 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 한다.
따라서 다음이 성립한다.

모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c>0$	모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\geq0$	모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c<0$	모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\leq0$
			
그래프가 아래로 볼록하고, x축보다 위쪽에 있다. ➡ $a>0$, $D<0$	그래프가 아래로 볼록하고, x축에 접하거나 x축보다 위쪽에 있다. ➡ $a>0$, $D\leq0$	그래프가 위로 볼록하고, x축보다 아래쪽에 있다. ➡ $a<0$, $D<0$	그래프가 위로 볼록하고, x축에 접하거나 x축보다 아래쪽에 있다. ➡ $a<0$, $D\leq0$

개념 Check

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+kx+2>0$이 성립할 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

풀이 이차함수 $y=x^2+kx+2$의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $x^2+kx+2=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=k^2-8<0,\qquad (k+2\sqrt{2})(k-2\sqrt{2})<0$$
$$\therefore\ -2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$$

답 $-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$

대표유형 091 모든 실수에 대하여 성립하는 부등식

• 개념 092

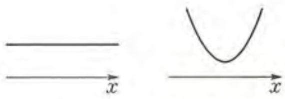
모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2+3ax+9>0$이 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

유형 Guide 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립하려면 이차부등식인 경우와 아닌 경우로 나누어 생각해야 한다. 즉 $a=0$인 경우와 $a\neq0$인 경우에 대하여 함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 각각 오른쪽 그림과 같아야 하므로

(i) $a=0$일 때, $b=0$, $c>0$

(ii) $a\neq0$일 때, $a>0$, $b^2-4ac<0$

임을 이용한다.



[$a=0$일 때] [$a\neq0$일 때]

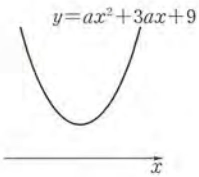
유형 SSEN **모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c>0$ ⊙ $a=0$, $a\neq0$인 경우로 나누어 생각한다.**

풀이 (i) $a=0$일 때,

9>0이므로 주어진 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $a\neq0$일 때,

주어진 부등식은 이차부등식이므로 이차함수 $y=ax^2+3ax+9$의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있어야 한다.



따라서 이차함수의 그래프가 아래로 볼록해야 하므로

$a>0$ …… ㉠

또 이차방정식 $ax^2+3ax+9=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(3a)^2-4\cdot a\cdot 9<0$

$9a(a-4)<0$ $\quad\therefore 0<a<4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면 $\quad 0<a<4$

(i), (ii)에서 $\quad 0\le a<4$

답 $0\le a<4$

정답 및 풀이 • 74쪽

유제 091-1 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(a-1)x^2+2(a-1)x-5\le0$이 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

유제 091-2 모든 실수 x에 대하여 $-x^2+(m+3)x-m$의 값이 3보다 작도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

대표유형 092 이차부등식과 두 그래프의 위치 관계

• 개념 092

이차함수 $y=x^2-mx+3$의 그래프가 직선 $y=2x-1$보다 항상 위쪽에 있을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

유형 Guide '항상 위쪽에 있을 때'라는 말에서 '부등식이 항상 성립할 때'라는 말을 떠올릴 수 있어야 한다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있다는 것은 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립함을 뜻한다. 따라서 부등식 $f(x)-g(x)>0$이 항상 성립할 조건을 이용하여 미정계수의 값의 범위를 구한다.

유형 SSEN $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있다.
⇨ 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립한다.

풀이 이차함수 $y=x^2-mx+3$의 그래프가 직선 $y=2x-1$보다 항상 위쪽에 있으므로 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$x^2-mx+3>2x-1$$

이 성립한다.

위의 부등식의 우변을 좌변으로 이항하여 정리하면

$$x^2-(m+2)x+4>0$$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 이차방정식 $x^2-(m+2)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=\{-(m+2)\}^2-16<0$$

$$m^2+4m-12<0, \qquad (m+6)(m-2)<0$$

$$\therefore -6<m<2$$

답 $-6<m<2$

정답 및 풀이 • 74쪽

유제 092-1 이차함수 $y=-x^2+2x$의 그래프가 직선 $y=2kx+k-1$보다 항상 아래쪽에 있을 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

Plus 유제 092-2 이차함수 $y=x^2+x-5$의 그래프가 직선 $y=ax+7$보다 위쪽에 있을 때의 x의 값의 범위가 $x<b$ 또는 $x>4$이다. 실수 a, b의 값을 구하여라. (단, $b<4$)

대표유형 093 제한된 범위에서 항상 성립하는 이차부등식

• 개념 092

다음에 답하여라.

(1) $-4\le x\le 2$에서 부등식 $x^2+4x+a^2-3a>0$이 항상 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

(2) $0\le x\le 4$에서 부등식 $x^2+a^2x-20\le 0$이 항상 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

유형 Guide (1) $-4\le x\le 2$가 이차부등식 $x^2+4x+a^2-3a>0$의 해에 포함되도록 a의 값의 범위를 정하는 문제이다. 주어진 이차부등식의 좌변이 인수분해되지 않으므로 $f(x)=x^2+4x+a^2-3a$로 놓고 조건에 맞도록 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후, 주어진 범위에서 최솟값의 부호를 따져 본다.

(2) (1)과 같이 하여 최댓값의 부호를 확인한다.

유형 SSEN 부등식이 쉽게 풀리지 않으면 ○ 그래프를 이용한다.

풀이 (1) $f(x)=x^2+4x+a^2-3a$로 놓으면

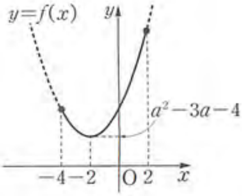
$f(x)=(x+2)^2+a^2-3a-4$

$-4\le x\le 2$에서 $f(x)>0$이 항상 성립해야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉 $f(x)$의 최솟값이 $f(-2)$이므로 $f(-2)>0$에서

$a^2-3a-4>0,\qquad (a+1)(a-4)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>4$



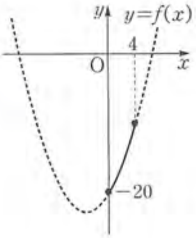
(2) $f(x)=x^2+a^2x-20$으로 놓으면 $0\le x\le 4$에서 $f(x)\le 0$이 항상 성립해야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉 $0\le x\le 4$에서 $f(x)$의 최댓값이 $f(4)$이므로 $f(4)\le 0$에서

$16+4a^2-20\le 0$

$a^2-1\le 0,\qquad (a+1)(a-1)\le 0$

$\therefore -1\le a\le 1$



답 (1) $a<-1$ 또는 $a>4$ (2) $-1\le a\le 1$

정답 및 풀이 • 75쪽

유제 093-1 $-1\le x\le 3$에서 부등식 $x^2-6x>a^2-11$이 항상 성립하도록 하는 정수 a의 개수를 구하여라.

개념 093

이차부등식의 작성

이차부등식의 해가 주어졌을 때, 다음과 같이 이차부등식을 구할 수 있다.

① 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$ $(\alpha<\beta)$이고 x^2의 계수가 1인 x에 대한 이차부등식은

$$(x-\alpha)(x-\beta)>0,\ \text{즉 } x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta>0$$

② 해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 x에 대한 이차부등식은

$$(x-\alpha)(x-\beta)<0,\ \text{즉 } x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta<0$$

개념 Approach

247쪽 **개념 089**에서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$이 서로 다른 두 실근 α, β $(\alpha<\beta)$를 가질 때,

① $ax^2+bx+c>0$ ➡ $a(x-\alpha)(x-\beta)>0$ ➡ $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$

② $ax^2+bx+c<0$ ➡ $a(x-\alpha)(x-\beta)<0$ ➡ $\alpha<x<\beta$

임을 이용하면 이차부등식의 해가 주어졌을 때 그 이차부등식을 구할 수 있다.

즉 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-\alpha)(x-\beta)>0,\ \text{즉 } x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta>0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-\alpha)(x-\beta)<0,\ \text{즉 } x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta<0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

임을 알 수 있다.

해가 주어졌을 때 x^2의 계수가 a인 이차부등식은 ㉠과 ㉡의 양변에 a를 곱하여 구한다.

이때 $a<0$이면 부등호의 방향이 바뀌는 것에 주의한다.

개념 Check

다음에 답하여라.

(1) 해가 $-2<x<1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식을 구하여라.

(2) 해가 $x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>\frac{1}{3}$이고 x^2의 계수가 6인 이차부등식을 구하여라.

풀이 (1) 해가 $-2<x<1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+2)(x-1)<0 \qquad \therefore x^2+x-2<0$$

(2) 해가 $x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>\frac{1}{3}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)>0 \qquad \therefore x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}>0$$

따라서 양변에 6을 곱하면 $6x^2+x-1>0$

답 (1) $x^2+x-2<0$ (2) $6x^2+x-1>0$

이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $-4<x<1$일 때, 이차부등식 $ax^2-cx+b>0$의 해를 구하여라.

유형 Guide 부등식의 해가 주어졌을 때 이차부등식의 계수를 구하려면 먼저 주어진 해를 이용하여 x^2의 계수가 1인 이차부등식을 만든다. 이 이차부등식과 주어진 부등식의 x^2의 계수와 부등호의 방향을 비교한 후 적당한 수를 곱하여 두 부등식이 일치하도록 한다.

유형 SSEN
- **해가 $\alpha<x<\beta$인 이차부등식** ⇨ $(x-\alpha)(x-\beta)<0$
- **해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$인 이차부등식** ⇨ $(x-\alpha)(x-\beta)>0$

풀이 해가 $-4<x<1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+4)(x-1)<0$

$\therefore x^2+3x-4<0$ …… ㉠

주어진 부등식 $ax^2+bx+c>0$과 부등식 ㉠의 부등호의 방향이 다르므로

$a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면 $ax^2+3ax-4a>0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c>0$과 같으므로

$b=3a,\ c=-4a$ …… ㉡

㉡을 $ax^2-cx+b>0$에 대입하면

$ax^2+4ax+3a>0$

양변을 a로 나누면 $x^2+4x+3<0$ ($\because a<0$)

$(x+3)(x+1)<0$

$\therefore -3<x<-1$

답 $-3<x<-1$

정답 및 풀이 • 75쪽

유제 094-1 이차부등식 $x^2+ax+b\ge0$의 해가 $x\le-2$ 또는 $x\ge5$일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

유제 094-2 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $-1<x<3$일 때, 이차부등식 $bx^2+ax-c<0$의 해를 구하여라.

개념 094 연립부등식

1 연립부등식

두 개 이상의 부등식을 하나의 쌍으로 묶은 것을 **연립부등식**이라 하고 연립부등식에서 차수가 가장 높은 부등식이 이차부등식일 때, 이 연립부등식을 **연립이차부등식**이라 한다.

2 연립부등식의 풀이

연립부등식은 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) 연립부등식을 이루는 각 부등식의 해를 구한다.
(ii) (i)에서 구한 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 구한다.

Remark 연립부등식을 이루는 각 부등식의 해의 공통부분이 없으면 연립부등식의 해는 없다.

개념 Approach

연립부등식에서 차수가 가장 높은 부등식이 n차부등식일 때, 이 연립부등식을 **연립n차부등식**이라 한다. 예를 들어 연립부등식 $\begin{cases} -1\le x-1<2 \\ -1\le 3x+2\le 8 \end{cases}$ 은 가장 높은 차수가 일차이므로 연립일차부등식이다. 또 연립부등식 $\begin{cases} x^2+x-2\le 0 \\ 0<x+1<3 \end{cases}$ 은 가장 높은 차수가 이차이므로 연립이차부등식이다.

즉 연립이차부등식은 다음 중 하나의 꼴이다.

$\begin{cases} \text{일차부등식} \\ \text{이차부등식} \end{cases}$, $\begin{cases} \text{이차부등식} \\ \text{이차부등식} \end{cases}$

Remark $A<B<C$ 꼴의 부등식은 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ 로 변형하여 해를 구해야 한다.

개념 Check

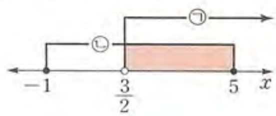
연립이차부등식 $\begin{cases} 3x-5>x-2 \\ x^2-4x-5\le 0 \end{cases}$ 을 풀어라.

풀이 $3x-5>x-2$에서 $2x>3$ $\therefore x>\dfrac{3}{2}$ ...... ㉠

$x^2-4x-5\le 0$에서 $(x+1)(x-5)\le 0$ $\therefore -1\le x\le 5$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$\dfrac{3}{2}<x\le 5$



답 $\dfrac{3}{2}<x\le 5$

대표유형 095 연립이차부등식의 풀이

• 개념 094

다음 부등식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x^2-x-2<0 \\ x^2+2\le 2x^2+x \end{cases}$ (2) $|x^2+6x-8|<8$

유형 Guide (1) 각 부등식의 해를 구한 후, 수직선 위에 나타내어 공통부분을 구한다.

(2) $|A|<k \Longleftrightarrow -k<A<k \Longleftrightarrow \begin{cases} A>-k \\ A<k \end{cases}$로 변형하여 해를 구한다.

유형 5SEN 연립부등식의 풀이 ◎ 수직선을 이용한다.

풀이 (1) $\begin{cases} x^2-x-2<0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2\le 2x^2+x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

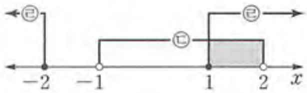
㉠에서 $(x+1)(x-2)<0$ $\therefore -1<x<2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $x^2+x-2\ge 0$, $(x+2)(x-1)\ge 0$

$\therefore x\le -2$ 또는 $x\ge 1$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 공통부분을 구하면

$1\le x<2$



(2) $|x^2+6x-8|<8$에서 $-8<x^2+6x-8<8$

(i) $-8<x^2+6x-8$에서

$x^2+6x>0$, $x(x+6)>0$

$\therefore x<-6$ 또는 $x>0$ $\cdots\cdots$ ㉠

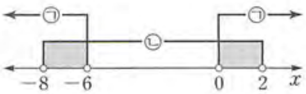
(ii) $x^2+6x-8<8$에서

$x^2+6x-16<0$, $(x+8)(x-2)<0$

$\therefore -8<x<2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$-8<x<-6$ 또는 $0<x<2$



답 (1) $1\le x<2$ (2) $-8<x<-6$ 또는 $0<x<2$

정답 및 풀이 • 75쪽

유제 095-1 다음 부등식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x^2+4x-5\le 0 \\ x^2+x-6\le 0 \end{cases}$ (2) $|x^2-5x|<6$

연립부등식 $\begin{cases} x^2-6x+8>0 \\ x^2-(k+5)x+5k\le 0 \end{cases}$ 의 해가 $4<x\le5$가 되도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

유형 Guide 연립부등식의 해는 각 부등식의 해의 공통부분이므로 각 부등식의 해를 구한 다음 공통부분이 주어진 해와 일치하도록 해를 수직선 위에 나타낸다. 이때 계수가 문자인 경우에는 문자의 범위를 나누어 해를 구한다.

유형 SSEN 연립부등식의 해가 주어지면 ○ 수직선을 이용한다.

풀이 $\begin{cases} x^2-6x+8>0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-(k+5)x+5k\le 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-2)(x-4)>0$ $\quad \therefore x<2$ 또는 $x>4$

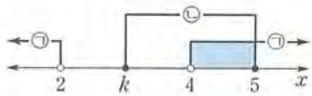
㉡에서 $(x-k)(x-5)\le 0$

(i) $k>5$일 때, $5\le x\le k$

(ii) $k=5$일 때, $x=5$

(iii) $k<5$일 때, $k\le x\le 5$

㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $4<x\le5$가 되도록 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 ㉡의 해는



$k\le x\le 5$

따라서 실수 k의 값의 범위는

$2\le k\le 4$

답 $2\le k\le 4$

Remark 부등식 문제에서 어떤 범위의 경계가 되는 값의 포함 여부가 헷갈리는 경우에는 그 값을 부등식에 대입하여 주어진 조건을 만족시키는지 확인한다.
위의 풀이 과정에서 $k=2$이면 ㉡의 해가 $2\le x\le5$이므로 ㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $4<x\le5$가 된다.
또 $k=4$이면 ㉡의 해가 $4\le x\le5$이므로 ㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $4<x\le5$가 된다.
즉 $k=2$, $k=4$는 모두 주어진 조건을 만족시키므로 k의 값의 범위에 포함된다.

정답 및 풀이 • 75쪽

유제 096-1 연립부등식 $\begin{cases} x^2-3x+2<0 \\ x^2-4ax+3a^2<0 \end{cases}$ 의 해가 $1<x<2$가 되도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

대표유형 097 두 이차방정식의 근의 판별
• 개념 094

두 이차방정식 $x^2-2kx-2k+3=0$과 $x^2+kx+k+3=0$이 모두 허근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

유형 Guide 주어진 두 이차방정식이 모두 허근을 가지므로 각각의 이차방정식의 판별식 $D<0$임을 이용하여 k에 대한 두 개의 이차부등식을 구한 후, 부등식을 풀어 공통부분을 구한다.

유형 SSEN 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 판별 ➡ 판별식 $D=b^2-4ac$ 이용!

풀이 이차방정식 $x^2-2kx-2k+3=0$의 판별식을 D_1이라 하면 이 방정식이 허근을 가지므로

$\frac{D_1}{4}=(-k)^2-(-2k+3)<0$

$k^2+2k-3<0,\quad (k+3)(k-1)<0$

$\therefore -3<k<1$ ⋯⋯ ㉠

또 이차방정식 $x^2+kx+k+3=0$의 판별식을 D_2라 하면 이 방정식이 허근을 가지므로

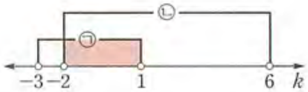
$D_2=k^2-4(k+3)<0$

$k^2-4k-12<0,\quad (k+2)(k-6)<0$

$\therefore -2<k<6$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$-2<k<1$



답 $-2<k<1$

정답 및 풀이 • 76쪽

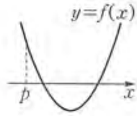
유제 097-1 이차방정식 $x^2-kx+1=0$은 실근을 갖고, 이차방정식 $x^2-2kx+5k-4=0$은 허근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

대표유형 098 이차방정식의 근의 분리

• 개념 094

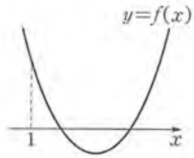
이차방정식 $x^2+2ax+2-a=0$의 두 근이 모두 1보다 클 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

유형 Guide 이차방정식의 근의 분리 문제는 이차방정식과 이차함수 단원에서 이차방정식의 판별식과 이차함수의 경곗값의 부호, 그래프의 축의 위치 등을 조사하여 해결함을 배웠다. 여기에서는 이차방정식의 판별식이 이차식이어서 이차부등식을 풀어야 하는 문제를 공부한다.



유형 SSEN 이차방정식의 근의 분리 ⊙ 판별식·경곗값의 부호, 축의 위치를 조사한다.

풀이 $f(x)=x^2+2ax+2-a$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-(2-a)\geq 0$$

$$a^2+a-2\geq 0, \qquad (a+2)(a-1)\geq 0$$

$$\therefore a\leq -2 \text{ 또는 } a\geq 1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $f(1)=1+2a+2-a>0$에서

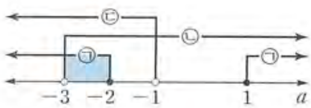
$$a>-3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-a$이므로

$$-a>1 \qquad \therefore a<-1 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢에서 공통부분을 구하면

$$-3<a\leq -2$$



답 $-3<a\leq -2$

정답 및 풀이 • 76쪽

유제 098-1 x에 대한 이차방정식 $x^2+mx+2m-3=0$의 두 근이 모두 -2보다 작을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

대표유형 099 연립이차부등식의 활용

• 개념 094

세 실수 x, $x+2$, $x+4$가 예각삼각형의 세 변의 길이가 되도록 x의 값의 범위를 정하여라.

유형 Guide 예각삼각형이라는 단서에는 '삼각형'이라는 조건과 '세 내각이 모두 예각'이라는 조건이 포함되어 있다. 즉 삼각형이 되려면 가장 긴 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하고, 세 내각이 모두 예각이려면 가장 긴 변의 대각이 예각이라는 것을 이용하여 식을 세운다.

유형 SSEN 활용 문제 ○ 문제에서 단서를 찾아 식을 세운다.

풀이 세 수 x, $x+2$, $x+4$가 삼각형의 세 변의 길이가 되려면 $x>0$이고

$x+(x+2)>x+4$

$\therefore x>2$ ...... ㉠

이 삼각형이 예각삼각형이 되려면

$x^2+(x+2)^2>(x+4)^2$

$x^2-4x-12>0$, $(x+2)(x-6)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>6$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면 $x>6$

답 $x>6$

Remark 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 a, b, c $(a\le b\le c)$일 때

① $a^2+b^2>c^2$ ➡ △ABC는 예각삼각형

② $a^2+b^2=c^2$ ➡ △ABC는 직각삼각형 (∠C가 직각)

③ $a^2+b^2<c^2$ ➡ △ABC는 둔각삼각형 (∠C가 둔각)

정답 및 풀이 • 76쪽

유제 099-1 세 실수 $x-1$, x, $x+1$이 둔각삼각형의 세 변의 길이가 되도록 x의 값의 범위를 정하여라.

STEP 1 유형 Training

01 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2+ax+a-1\leq0$이 성립하도록 하는 정수 a의 최댓값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

02 이차함수 $y=-x^2-4x-7$의 그래프가 직선 $y=mx+m$보다 항상 아래쪽에 있도록 하는 실수 m의 값의 범위가 $\alpha<m<\beta$일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하여라.

서술형

03 $0\leq x\leq3$에서 함수 $y=x^2-x$의 그래프가 직선 $y=-3x-a^2+5$보다 항상 위쪽에 있도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

04 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$일 때, 이차부등식 $4cx^2-2bx+a>0$의 해를 구하여라.

05 부등식 $2\leq x^2-x<6$을 만족시키는 정수 x의 최솟값을 α, 최댓값을 β라 할 때, $\alpha\beta$의 값은?

① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 3

서술형

06 두 이차방정식 $x^2+ax-2a+5=0$과 $x^2-(a-4)x-2a+8=0$이 모두 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 자연수 a의 최솟값을 구하여라.

07 이차방정식 $x^2-2(k+1)x-2k+6=0$의 두 근이 양수일 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

STEP 2 실전 Application

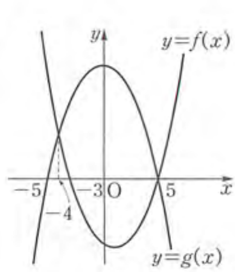
08 부등식 $(m-2)x^2-2(m-2)x+3\leq 0$의 해가 없도록 하는 자연수 m의 개수는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

서술형

09 함수 $y=2x^2-4x+3$의 그래프가 함수 $y=ax^2-2ax$의 그래프보다 항상 위쪽에 있을 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

10 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 부등식 $0<f(x)\leq g(x)$의 해는?



① $-5<x\leq -4$　　② $-5<x\leq -3$
③ $-4\leq x<-3$　　④ $-4<x<5$
⑤ $-3<x<5$

평가원기출

11 연립부등식 $\begin{cases} |x-2|<k \\ x^2-2x-3\leq 0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수가 5일 때, 양의 정수 k의 최솟값을 구하여라.

서술형

12 두 이차부등식 $x^2+ax+b\leq 0$, $x^2+cx+d\geq 0$을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위가 $-1\leq x\leq 3$ 또는 $x=5$일 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $ab-cd$의 값을 구하여라.

13 연립부등식 $\begin{cases} x^2 \le 4x \\ x^2-3 \ge 2x \end{cases}$ 의 해가 x에 대한 이차부등식 $ax^2+bx-24 \ge 0$의 해와 같을 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -4 ② 0 ③ 4 ④ 8 ⑤ 12

14 두 방정식 $x^2+kx-k+3=0$과 $(k+5)x^2-2(2k+1)x+k+5=0$ 중에서 적어도 하나가 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

평가원기출

15 x에 대한 이차방정식 $x^2+(a^2-4a+3)x-a+2=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 갖는다. 음의 근의 절댓값이 양의 근보다 클 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $a>3$ ② $a>2$ ③ $1<a<2$
④ $2<a<3$ ⑤ $a<1$ 또는 $a>3$

교육청기출

16 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{(k+1)x^2-(k+1)x+5}$의 값이 실수가 되게 하는 정수 k의 개수를 구하여라.

STEP 3 심화 Forwarding

서술형

17 x에 대한 부등식 $|[x]^2-6[x]-8|<8$의 해는 $a \le x < b$ 또는 $c \le x < d$이다. 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

18 양수 a에 대하여 연립부등식 $\begin{cases} x^2+ax-2a^2 \le 0 \\ x^2-ax-2a^2 < 0 \end{cases}$을 만족시키는 정수 x의 개수를 $f(a)$라 할 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(a) \ge 1$
ㄴ. $f(a)=4$를 만족시키는 정수 x의 합은 -2이다.
ㄷ. $f(a+1)=f(a)+2$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

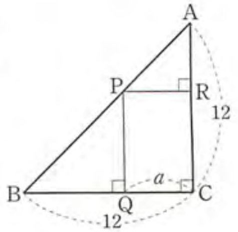
19 연립부등식 $\begin{cases} x^2+px+q<0 \\ x^2+2x \ge 0 \end{cases}$ 의 해가 $0 \le x < 2$이고, 실수 p, q가 $|p|+|q|=3$을 만족시킬 때, pq의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

20 $-1 \le x \le 1$에서 x에 대한 부등식 $x+a \le x^2 \le 2x+b$가 항상 성립할 때, 상수 a, b에 대하여 $b-4a$의 최솟값을 구하여라.

평가원기출

21 그림과 같이 $\overline{AC}=\overline{BC}=12$인 직각이등변삼각형 ABC가 있다. 빗변 AB 위의 점 P에서 변 BC와 변 AC에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, 직사각형 PQCR의 넓이는 두 삼각형 APR와 PBQ의 각각의 넓이보다 크다. $\overline{QC}=a$일 때, 모든 자연수 a의 값의 합을 구하여라.



재미있는 이름

미국 코넬 대학 '음식과 브랜드 연구소'에서 초등학생들을 대상으로 실험을 하였습니다.
아이들이 싫어하는 당근 요리를 3일간 급식으로 제공하고 아이들이 먹는 당근의 양을 조사하였습니다.
하루는 요리에 아무런 이름을 붙이지 않았고, 하루는 '오늘의 요리'라는 평범한 이름을,
나머지 하루는 '투시력 당근'이라는 재미있는 이름을 붙였습니다.
그 결과, '투시력 당근'이라고 이름을 붙인 날 아이들이 섭취한 당근의 양이
그렇지 않은 날보다 두 배나 높았습니다.
'파워펀치 브로콜리', '바보 같고 우스운 껍질 콩'이라고 이름을 붙인 채소 요리도
이름을 붙이지 않거나 '오늘의 요리'라는 이름을 붙인 요리보다 섭취량이 많았습니다.
단어 몇 개만 바꾸었을 뿐인데 아이들의 호기심과 흥미를 유발할 수 있었던 것이죠.

싫어하는 일을 억지로 해야 해서 의욕이 나지 않는다면,
재미있는 이름을 붙여 보는 건 어떨까요?
여러분이 직접 붙인 재미있는 이름처럼 그 일이 재미있어질 테니까요.

Ⅳ 도형의 방정식

11

평면좌표

인공위성을 이용하여 차량의 위치를 파악하고 운전을 도와주는 장치를 내비게이션이라 한다. 내비게이션에서 제공하는 지도 정보는 경도와 위도를 좌표로 하여 구성된다.
좌표란 직선, 평면, 공간에서 점의 위치를 나타내는 수 또는 순서쌍을 뜻하는 것으로, 17세기 프랑스의 수학자 데카르트에 의해 도입되었다.

중학교에서는 평면도형에 대한 문제가 주어질 때 보조선을 긋거나 합동 또는 닮음을 이용하여 해결하였다. 이 단원에서는 선분의 내분점과 외분점, 삼각형의 무게중심 등 도형을 좌표평면 위에 나타내어 문제를 해결해 보자.

한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

32 두 점 사이의 거리

- 수직선 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
- 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

33 선분의 내분점과 외분점

- 선분의 내분과 외분의 뜻을 안다.
- 수직선과 좌표평면 위에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.

34 선분의 내분점과 외분점의 활용

- 삼각형의 무게중심의 좌표를 구할 수 있다.
- 조건을 만족시키는 점의 자취의 방정식을 구할 수 있다.

개념 & 특강 | 대표유형 & 유제

- 095 수직선 위의 두 점 사이의 거리
- 096 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리
  - 100 두 점 사이의 거리 → 101 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점 → 102 삼각형의 판정 / 103 거리의 제곱의 합이 최소인 점 / 105 도형의 성질 확인
- 특강 097 차원
- 특강 098 삼각형의 외심, 내심, 무게중심
  - 104 삼각형의 외심

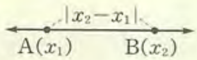
- 099 선분의 내분점과 외분점
- 100 수직선 위의 선분의 내분점과 외분점
- 101 좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점
  - 106 선분의 내분점과 외분점 (1) → 107 선분의 내분점과 외분점 (2) → 108 선분의 내분점과 외분점의 삼각형에의 활용 / 109 선분의 내분점과 외분점의 사각형에의 활용

- 102 삼각형의 무게중심
  - 110 삼각형의 무게중심
- 특강 103 자취의 방정식
  - 111 자취의 방정식

개념 095 수직선 위의 두 점 사이의 거리

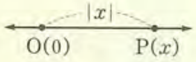
(1) 수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=|x_2-x_1|$



(2) 수직선 위의 원점 $O(0)$과 점 $P(x)$ 사이의 거리는

$\overline{OP}=|x|$



개념 Approach

수직선 위의 두 점 A, B의 위치가 그림과 같을 때, 두 점 사이의 거리 $\overline{AB}$는 각각 다음과 같다.

(i)


$\overline{AB}=4-1=3$

(ii)


$\overline{AB}=(-1)-(-4)=3$

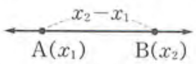
(iii)


$\overline{AB}=1-(-4)=5$

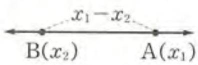
즉 수직선 위의 두 점 사이의 거리는 오른쪽 점의 좌표에서 왼쪽 점의 좌표를 뺀 것과 같다.

일반적으로 수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$ 사이의 거리 $\overline{AB}$는 다음의 두 가지 경우가 있다.

① $x_1\le x_2$일 때, $\overline{AB}=x_2-x_1$



② $x_1>x_2$일 때, $\overline{AB}=x_1-x_2$



이를 하나의 식으로 나타내면

$\overline{AB}=|x_2-x_1|$

특히 원점 $O(0)$과 점 $P(x)$ 사이의 거리 $\overline{OP}$는 다음과 같다.

$\overline{OP}=|x-0|=|x|$

Remark $|x_2-x_1|$은 $|x_1-x_2|$와 같은 값이다. 즉 빼는 방향은 어느 쪽이든 상관없다.

개념 Check

다음 두 점 사이의 거리를 구하여라.

(1) $A(3)$, $B(-1)$ (2) $O(0)$, $P(-6)$ (3) $Q(a-1)$, $R(a+2)$

풀이 (1) $\overline{AB}=|-1-3|=4$

(2) $\overline{OP}=|-6|=6$

(3) $\overline{QR}=|a+2-(a-1)|=|a+2-a+1|=3$

답 (1) 4 (2) 6 (3) 3

개념 096 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

(1) 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

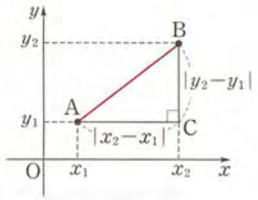
(2) 좌표평면 위의 원점 O와 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

개념 Approach

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리 $\overline{AB}$를 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 x축에 평행한 직선을 긋고, 점 B에서 y축에 평행한 직선을 그어 그 교점을 C라 하면 삼각형 ACB는 $\overline{AB}$를 빗변으로 하는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여



$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$$

그런데 $\overline{AC}=|x_2-x_1|$, $\overline{BC}=|y_2-y_1|$이므로

$$\overline{AB}^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2$$
$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$
$$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

특히 원점 O와 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리 $\overline{OA}$는 다음과 같다.

$$\overline{OA}=\sqrt{(x_1-0)^2+(y_1-0)^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

Remark $(x_2-x_1)^2$ 대신 $(x_1-x_2)^2$을, $(y_2-y_1)^2$ 대신 $(y_1-y_2)^2$을 사용해도 상관없다. 즉 빼는 방향은 어느 쪽이든 상관없다.

개념 Check

다음 두 점 사이의 거리를 구하여라.

(1) $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ (2) $C(2, 8)$, $D(7, -4)$

(3) $E(-3, 5)$, $F(6, -1)$ (4) $O(0, 0)$, $P(4, -3)$

풀이 (1) $\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

(2) $\overline{CD}=\sqrt{(7-2)^2+(-4-8)^2}=\sqrt{169}=13$

(3) $\overline{EF}=\sqrt{\{6-(-3)\}^2+(-1-5)^2}=\sqrt{117}=3\sqrt{13}$

(4) $\overline{OP}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$

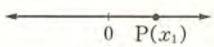
답 (1) $2\sqrt{2}$ (2) 13 (3) $3\sqrt{13}$ (4) 5

특강 097

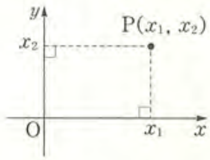
차원

1 수학에서의 차원

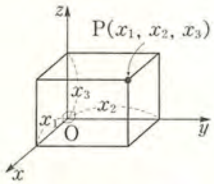
차원이란 직선이나 평면 등에서 임의의 점을 지정하는 데 필요한 좌표의 수이다.
아래 그림과 같이 수직선 위의 점은 실수 1개로, 평면 위의 점은 실수 2개로, 공간의 점은 실수 3개로 지정하여 나타낼 수 있고, 각각 1차원, 2차원, 3차원이라 한다.



[직선 ➡ P(x_1) ➡ 1차원]



[평면 ➡ P(x_1, x_2) ➡ 2차원]



[공간 ➡ P(x_1, x_2, x_3) ➡ 3차원]

수학적으로는 네 개의 실수 쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$로 된 4차원 공간도 생각할 수 있고, 더 나아가 n개의 실수로 이루어진 순서쌍으로 된 n차원 공간도 생각해 볼 수 있다.

2 물리학에서의 차원

흔히 0차원은 점, 1차원은 선, 2차원은 면, 3차원은 공간, 4차원은 시공간이라 한다.
차원의 개념을 다음과 같이 교통사고에 비유하여 이해해 보자.

[0차원] 교통사고를 '동일한 지점을 두 자동차가 공유하는 것' 이라고 하면 0차원, 즉 점의 세계에서 두 자동차는 항상 교통사고의 상태이다.

[1차원] 점이 모여 이루어진 선의 세계, 즉 **1개의 직선 도로로 이루어진 1차원**에서는 항상 교통사고의 상태이던 문제를 어느 정도 해결할 수는 있다. 그러나 앞의 차를 추월하려고 하거나 차량의 진행 방향을 바꾸면 교통사고가 발생한다.

[2차원] 선이 모여 이루어진 면의 세계, 즉 **교차로가 존재하는 2차원**의 세계에서는 1차원에서 발생하는 교통사고를 줄일 수 있다. 그러나 서로 다른 방향으로 이동하는 차량들이 교차로에서 만나면 충돌 사고가 일어날 수 있다.

[3차원] 2차원의 세계를 **고가도로나 지하도를 만들어 3차원**으로 확장하면 교차로에서의 충돌을 피할 수 있다. 그러나 3차원의 세계에서도 여전히 교통사고는 존재한다.

[4차원] 3차원에서의 교통사고를 줄이는 방법으로 신호등을 생각할 수 있다. 신호등을 설치하여 두 차량이 동시에 같은 지점을 공유할 수 없도록 시간의 차이를 두면 교통사고를 줄일 수 있다. 즉 **3차원에** 신호등이라는 **시간의 개념을 추가한 세계가 4차원**의 세계라고 이해할 수 있다.

대표유형 100 두 점 사이의 거리

• 개념 096

다음에 답하여라.

(1) 수직선 위의 세 점 $A(-2)$, $B(6)$, $C(x)$에 대하여 $3\overline{AC}=\overline{BC}$가 성립할 때, x의 값을 모두 구하여라.

(2) 좌표평면 위의 두 점 $A(-1,\ -a)$, $B(a,\ -6)$ 사이의 거리가 5일 때, a의 값을 모두 구하여라.

유형 Guide 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 주어진 미지수에 대한 방정식을 세운다.

유형 SSEN
- 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$ 사이의 거리 ➡ $\overline{AB}=|x_2-x_1|$
- 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리 ➡ $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

풀이 (1) $\overline{AC}=|x-(-2)|=|x+2|$, $\overline{BC}=|x-6|$이므로 $3\overline{AC}=\overline{BC}$에서

$3|x+2|=|x-6|$

양변을 제곱하면

$9(x^2+4x+4)=x^2-12x+36$

$8x^2+48x=0,\qquad x(x+6)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=0$

(2) $\overline{AB}=5$이므로 $\qquad \overline{AB}^2=25$

따라서 $\{a-(-1)\}^2+\{-6-(-a)\}^2=25$, 즉 $(a+1)^2+(a-6)^2=25$이므로

$2a^2-10a+12=0,\qquad a^2-5a+6=0$

$(a-2)(a-3)=0\qquad \therefore a=2$ 또는 $a=3$

답 (1) $-6,\ 0$ (2) $2,\ 3$

Remark (1) $3\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}:\overline{BC}=1:3$임을 이용하여 풀 수도 있다. 자세한 내용은 **개념 100**에서 공부하도록 한다.

정답 및 풀이 • 83쪽

유제 100-1 수직선 위의 두 점 $O(0)$, $A(2)$를 이은 선분 OA 위의 점 B에 대하여 $\overline{OB}:\overline{BA}=\overline{OA}:\overline{OB}$가 성립할 때, 점 B의 좌표를 구하여라.

유제 100-2 좌표평면 위의 세 점 $A(-7,\ a)$, $B(-1,\ 3)$, $C(1,\ 7)$에 대하여 $\overline{AC}=2\overline{BC}$를 만족시키는 모든 a의 값의 합을 구하여라.

Plus 유제 100-3 두 점 $A(t-2,\ 0)$, $B(0,\ 2t-1)$ 사이의 거리가 3 이하가 되도록 하는 실수 t의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하여라.

대표유형 101 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점

• 개념 096

다음에 답하여라.

(1) 두 점 A$(-1,\ 4)$, B$(5,\ 2)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하여라.

(2) 두 점 A$(1,\ 7)$, B$(3,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 직선 $y=3x+2$ 위의 점 P$(a,\ b)$에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

유형Guide '같은 거리에 있는'에서 두 점 사이의 거리에 대한 문제임을 알고, 점의 좌표를 미지수를 이용하여 나타내어야 한다.
곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점은 미지수 a를 이용하여 $(a,\ f(a))$로 나타낼 수 있다. 예를 들어 직선 $y=3x+2$ 위의 임의의 점은 $(a,\ 3a+2)$로 나타낼 수 있다. 특히 x축 위의 임의의 점은 y좌표가 0이므로 $(a,\ 0)$으로, y축 위의 임의의 점은 x좌표가 0이므로 $(0,\ a)$로 나타낼 수 있다.

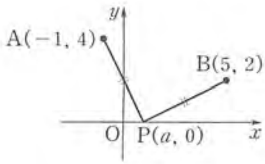
유형 SSEN 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점의 좌표 ◎ $(a,\ f(a))$로 놓아라!

풀이 (1) 점 P가 x축 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하자.
이때 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+1)^2+(0-4)^2=(a-5)^2+(0-2)^2$

$12a=12 \qquad \therefore a=1$

$\therefore$ P$(1,\ 0)$



(2) 점 P$(a,\ b)$가 직선 $y=3x+2$ 위의 점이므로

$b=3a+2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

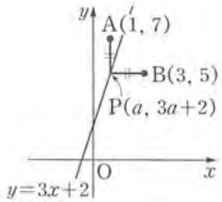
즉 점 P의 좌표가 $(a,\ 3a+2)$이고, $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-1)^2+(3a+2-7)^2=(a-3)^2+(3a+2-5)^2$

$-32a+26=-24a+18, \qquad 8a=8 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=5$

$\therefore a+b=6$



답 (1) $(1,\ 0)$ (2) 6

정답 및 풀이 • 83쪽

유제 101-1 두 점 A$(2,\ -5)$, B$(4,\ -1)$에서 같은 거리에 있는 직선 $y=x$ 위의 점 P의 좌표를 구하여라.

유제 101-2 두 점 A$(2,\ -4)$, B$(6,\ 8)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하여라.

대표유형 102 삼각형의 판정

• 개념 096

다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하여라.

(1) $A(-1, 1)$, $B(1, 3)$, $C(5, -1)$

(2) $A(2, 4)$, $B(-2, 2)$, $C(3, -3)$

유형 Guide 주어진 삼각형이 어떤 삼각형인지 알아볼 때에는 세 변의 길이 사이의 관계를 파악해야 한다. 이 문제에서는 세 꼭짓점의 좌표가 주어졌으므로 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 세 변의 길이부터 먼저 구해 본다.

유형 SSEN 삼각형의 판정 ➡ 세 변의 길이 사이의 관계를 알아본다.

풀이 (1) 삼각형 ABC의 세 변의 길이의 제곱을 각각 구하면

$\overline{AB}^2=(1+1)^2+(3-1)^2=8$

$\overline{BC}^2=(5-1)^2+(-1-3)^2=32$

$\overline{CA}^2=(-1-5)^2+(1+1)^2=40$

따라서 $\overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$이므로 삼각형 ABC는 $\angle B=90°$인 직각삼각형이다.

(2) 삼각형 ABC의 세 변의 길이의 제곱을 각각 구하면

$\overline{AB}^2=(-2-2)^2+(2-4)^2=20$

$\overline{BC}^2=(3+2)^2+(-3-2)^2=50$

$\overline{CA}^2=(2-3)^2+(4+3)^2=50$

$\therefore \overline{BC}=\overline{CA}=5\sqrt{2}$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{BC}=\overline{CA}$인 이등변삼각형이다.

답 (1) $\angle B=90°$인 직각삼각형 (2) $\overline{BC}=\overline{CA}$인 이등변삼각형

Remark 삼각형 ABC의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여

① $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ➡ $\triangle ABC$는 이등변삼각형이다.

② $a=b=c$ ➡ $\triangle ABC$는 정삼각형이다.

③ 가장 긴 변의 길이가 c일 때,

(i) $a^2+b^2<c^2$ ➡ $\triangle ABC$는 $\angle C>90°$인 둔각삼각형이다.

(ii) $a^2+b^2=c^2$ ➡ $\triangle ABC$는 $\angle C=90°$인 직각삼각형이다.

(iii) $a^2+b^2>c^2$ ➡ $\triangle ABC$는 예각삼각형이다.

정답 및 풀이 • 83쪽

유제 102-1 세 점 $A(-1, 0)$, $B(5, 2)$, $C(a, -2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 $\angle C=90°$인 직각삼각형이 되도록 하는 a의 값을 모두 구하여라.

대표유형 103 거리의 제곱의 합이 최소인 점

• 개념 096

두 점 A(5, −1), B(−3, 1)과 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값과 이때의 점 P의 좌표를 구하여라.

유형 Guide $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값을 구하기 위해서는 먼저 점 P의 좌표를 미지수를 이용하여 나타내어야 한다. 점 P가 x축 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$을 a에 대한 이차식으로 나타낼 수 있다.

유형 SSEN x축 위의 점의 좌표 ➡ $(a, 0)$으로 놓아라!

풀이 점 P가 x축 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2&=\{(a-5)^2+1\}+\{(a+3)^2+(-1)^2\}\\&=2a^2-4a+36\\&=2(a-1)^2+34\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $a=1$일 때 최솟값 34를 갖고, 이때의 점 P의 좌표는 (1, 0)이다.

답 최솟값 : 34, 점 P의 좌표 : (1, 0)

정답 및 풀이 • 83쪽

유제 103-1 두 점 A(−2, 3), B(1, −7)과 y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값과 이때의 점 P의 좌표를 구하여라.

유제 103-2 두 점 A(4, −2), B(1, −5)와 직선 $y=x+3$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표를 구하여라.

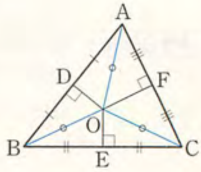
특강 098 삼각형의 외심, 내심, 무게중심

삼각형의 외심, 내심, 무게중심에 대한 성질은 중학교에서 이미 학습하였지만, 고등학교 과정의 문제를 해결할 때에도 자주 사용되므로 다시 한 번 정리해 두도록 하자.

(1) 삼각형의 외심

삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점(외심)에서 만나고, 이 점에서 삼각형의 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

즉 오른쪽 그림에서 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$

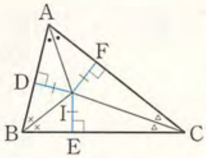


Remark 삼각형의 세 꼭짓점을 지나는 원을 그 삼각형의 **외접원**이라 하고, 삼각형의 외접원의 중심을 그 삼각형의 **외심**이라 한다.

(2) 삼각형의 내심

삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점(내심)에서 만나고, 이 점에서 삼각형의 세 변에 이르는 거리는 같다.

즉 오른쪽 그림에서 $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$



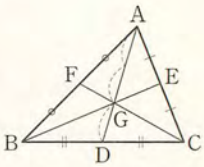
Remark 삼각형의 세 변이 그 삼각형의 내부에 있는 한 원에 접할 때, 그 원을 그 삼각형의 **내접원**이라 하고, 삼각형의 내접원의 중심을 그 삼각형의 **내심**이라 한다.

(3) 삼각형의 무게중심

삼각형의 세 중선은 한 점(무게중심)에서 만나고, 이 점은 세 중선의 길이를 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 나눈다.

즉 오른쪽 그림에서

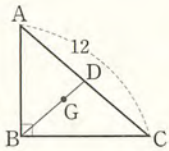
$$\overline{AG}:\overline{GD}=\overline{BG}:\overline{GE}=\overline{CG}:\overline{GF}=2:1$$



Remark 삼각형의 한 꼭짓점과 그 대변의 중점을 이은 선분을 **중선**이라 하고, 삼각형의 세 중선이 만나는 점을 삼각형의 **무게중심**이라 한다.

개념 Check

오른쪽 그림의 삼각형 ABC는 $\angle B=90°$인 직각삼각형이고 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이다. $\overline{AC}=12$일 때, 선분 BG의 길이를 구하여라.



풀이 선분 BD는 무게중심 G를 지나므로 △ABC의 중선이다.
따라서 점 D는 변 AC의 중점이고, 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이므로 점 D는 △ABC의 외심이다. 즉 점 D에서 세 점 A, B, C에 이르는 거리가 모두 같으므로

$$\overline{BD}=\overline{AD}=\overline{CD}=6$$

점 G는 선분 BD를 2 : 1로 나누므로

$$\overline{BG}=\frac{2}{3}\overline{BD}=\frac{2}{3}\cdot 6=4$$

답 4

대표유형 104 삼각형의 외심

• 개념 096 • 특강 098

세 점 A(2, 2), B(−5, 3), C(−2, 4)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

유형 Guide 삼각형의 세 꼭짓점을 지나는 원을 그 삼각형의 외접원이라 하고, 삼각형의 외접원의 중심을 그 삼각형의 외심이라 한다. 삼각형의 세 꼭짓점에서 외심에 이르는 거리는 모두 같고, 이 거리는 삼각형의 외접원의 반지름의 길이와 같다.

유형 SSEN 삼각형의 외심 ⊙ 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

풀이 삼각형 ABC의 외심을 P라 하면 점 P에서 세 점 A, B, C에 이르는 거리가 모두 같으므로

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-2)^2+(b-2)^2=(a+5)^2+(b-3)^2$

$a^2-4a+4+b^2-4b+4=a^2+10a+25+b^2-6b+9$

$-14a+2b=26 \quad \therefore 7a-b=-13 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\overline{AP}=\overline{CP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$(a-2)^2+(b-2)^2=(a+2)^2+(b-4)^2$

$a^2-4a+4+b^2-4b+4=a^2+4a+4+b^2-8b+16$

$-8a+4b=12 \quad \therefore 2a-b=-3 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=-1$

$\therefore a+b=-3$

답 −3

Remark 방정식 $A=B=C$는 다음 세 연립방정식과 해가 같으므로 세 가지 중 가장 간단한 것 하나를 선택하여 푼다.

$\begin{cases} A=B \\ A=C \end{cases},\quad \begin{cases} A=B \\ B=C \end{cases},\quad \begin{cases} A=C \\ B=C \end{cases}$

정답 및 풀이 • 84쪽

유제 104-1 세 점 A(0, 0), B(a, 0), C(0, b)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표가 (3, 1)일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

Plus 유제 104-2 삼각형 ABC의 세 꼭짓점이 A(0, 6), B(−3, 5), C(4, 4)일 때, 이 삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 구하여라.

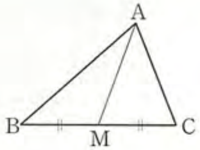
대표유형 105 도형의 성질 확인

• 개념 096

삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때,

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

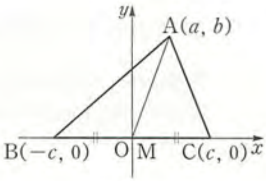
이 성립함을 확인하여라.



유형 Guide 도형의 성질이 성립함을 보일 때, 좌표를 도입하면 쉽게 확인되는 경우가 많다. 이때 주어진 점이 원점 또는 좌표축 위의 점이 되도록 좌표축을 정하면 계산이 간단해진다.

유형 SSEN 도형의 성질 확인 ➡ 좌표 도입을 검토하라!

풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 점 M을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 정하면 점 M은 원점이 된다.



$A(a, b)$, $C(c, 0)$이라 하면 $B(-c, 0)$이므로

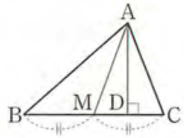
$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}$$
$$=2(a^2+b^2+c^2)$$

한편 $\overline{AM}^2=a^2+b^2$, $\overline{BM}^2=c^2$이므로

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

답 풀이 참조

다른풀이 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하면



$\triangle ABD$와 $\triangle ACD$에서

$$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AD}^2+(\overline{BM}+\overline{DM})^2$$
$$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{DC}^2=\overline{AD}^2+(\overline{CM}-\overline{DM})^2$$
$$=\overline{AD}^2+(\overline{BM}-\overline{DM})^2$$

점 M은 선분 BC의 중점이므로 $\overline{BM}=\overline{CM}$

위의 두 식을 변끼리 더하면

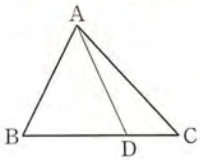
$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{BM}^2+2\overline{DM}^2$$
$$=2(\overline{AD}^2+\overline{DM}^2)+2\overline{BM}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

점 D가 변 BC의 연장선 위에 있는 경우 또는 두 점 D, M이 일치하는 경우에도 같은 방법으로 확인할 수 있다.

Remark 위와 같은 삼각형의 성질을 **파포스**(Pappos) **정리** 또는 **중선 정리**라 한다.

정답 및 풀이 • 84쪽

유제 105-1 삼각형 ABC의 변 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{BD}=2\overline{CD}$일 때, $\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=3\overline{AD}^2+6\overline{CD}^2$이 성립함을 확인하여라.



개념 099

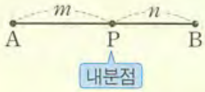
선분의 내분점과 외분점

1 내분과 내분점

점 P가 선분 AB 위에 있고

$$\overline{AP}:\overline{PB}=m:n\ (m>0,\ n>0)$$

일 때, 점 P는 선분 AB를 $m:n$으로 **내분**한다고 하며,
점 P를 선분 AB의 **내분점**이라 한다.



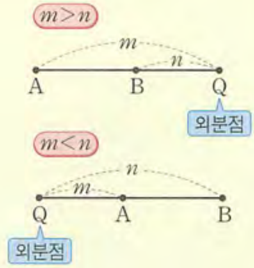
Remark 선분 AB를 1 : 1로 내분하는 점은 선분 AB의 중점이다.

2 외분과 외분점

점 Q가 선분 AB의 연장선 위에 있고

$$\overline{AQ}:\overline{QB}=m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$$

일 때, 점 Q는 선분 AB를 $m:n$으로 **외분**한다고 하며,
점 Q를 선분 AB의 **외분점**이라 한다.



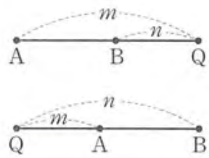
Remark 선분 AB를 1 : 1로 외분하는 점은 존재하지 않으므로
외분의 경우는 $m\neq n$인 경우만 생각한다.

개념 Approach

내분점은 선분 위에 있고, 외분점은 선분의 연장선 위에 있다.
선분의 외분점의 위치는 m, n의 대소 관계에 따라 다음과 같다.

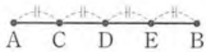
(i) $m>n$일 때, $\overline{AQ}>\overline{QB}$이어야 하므로 점 Q는 점 B의 방향으로 그은 선분 AB의 연장선 위에 있다.

(ii) $m<n$일 때, $\overline{AQ}<\overline{QB}$이어야 하므로 점 Q는 점 A의 방향으로 그은 선분 AB의 연장선 위에 있다.



개념 Check

오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 사등분점을 각각 C, D, E라 할 때, □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.



(1) 점 C는 선분 AB를 □(으)로 내분하는 점이다.
(2) 점 D는 선분 EB를 □(으)로 외분하는 점이다.
(3) 점 □(은)는 선분 AD를 2 : 1로 외분하는 점이다.

풀이 (1) $\overline{AC}:\overline{BC}=1:3$ (2) $\overline{ED}:\overline{BD}=1:2$ (3) $\overline{AB}:\overline{DB}=2:1$

답 (1) 1 : 3 (2) 1 : 2 (3) B

개념 100 수직선 위의 선분의 내분점과 외분점

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여

(1) 선분 AB를 $m : n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표

$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$$

(2) 선분 AB의 중점 M의 좌표

$$\mathrm{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

(3) 선분 AB를 $m : n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표

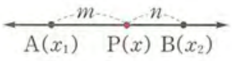
$$\mathrm{Q}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\right)$$

Remark ① $m\neq n$일 때, 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점과 선분 BA를 $m : n$으로 내분하는 점은 일반적으로 같지 않으므로 선분의 내분점을 구할 때에는 선분을 읽는 순서에 주의해야 한다.

② $m : n$으로 외분하는 경우는 $m : (-n)$으로 내분하는 것으로 생각하고 내분점을 구하는 공식을 적용해도 된다.

개념 Approach

(1) 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 $\mathrm{P}(x)$의 좌표를 구해 보자. (단, $x_1<x_2$)



오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{AP}}=x-x_1$, $\overline{\mathrm{PB}}=x_2-x$이므로

$$(x-x_1) : (x_2-x)=m : n$$

$$m(x_2-x)=n(x-x_1), \qquad (m+n)x=mx_2+nx_1$$

$m>0$, $n>0$에서 $m+n\neq 0$이므로

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x_1>x_2$일 때에도 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점 P에 대하여 ㉠이 성립한다.

$$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$$

(2) 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB의 중점 M은 선분 AB를 $1 : 1$로 내분하는 점이므로

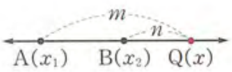
$$\mathrm{M}\left(\frac{1\cdot x_2+1\cdot x_1}{1+1}\right),\ 즉\ \mathrm{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

(3) 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 $\mathrm{Q}(x)$의 좌표를 구해 보자. (단, $x_1<x_2$)

(i) $m>n$이면 $\overline{\mathrm{AQ}}=x-x_1$, $\overline{\mathrm{QB}}=x-x_2$이므로

$$(x-x_1) : (x-x_2)=m : n$$

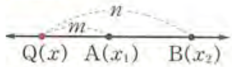
$m>n$



(ii) $m<n$이면 $\overline{AQ}=x_1-x$, $\overline{QB}=x_2-x$이므로

$$(x_1-x):(x_2-x)=m:n$$

$m<n$



(i), (ii)의 경우 모두 $m(x_2-x)=n(x_1-x)$이므로

$$(m-n)x=mx_2-nx_1$$

$m\neq n$에서 $m-n\neq 0$이므로

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

$x_1>x_2$일 때에도 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 Q에 대하여 ㉡이 성립한다.

$$\therefore \mathrm{Q}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\right)$$

Remark 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q의 좌표는 다음 그림과 같이 기억하면 편리하다.

(1) $m : n$

$\mathrm{A}(x_1)\,\mathrm{B}(x_2)$

➡ $\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$ ← 엇갈리게 곱하여 더한다.

(2) $m : n$

$\mathrm{A}(x_1)\,\mathrm{B}(x_2)$

➡ $\mathrm{Q}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\right)$ ← 엇갈리게 곱하여 뺀다.

개념 Check

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(-4)$, $\mathrm{B}(8)$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점 P의 좌표

(2) 선분 AB의 중점 M의 좌표

(3) 선분 AB를 $5:2$로 외분하는 점 Q의 좌표

풀이 (1) $\frac{3\cdot 8+1\cdot(-4)}{3+1}=5 \quad \therefore \mathrm{P}(5)$

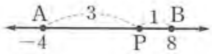
(2) $\frac{-4+8}{2}=2 \quad \therefore \mathrm{M}(2)$

(3) $\frac{5\cdot 8-2\cdot(-4)}{5-2}=16 \quad \therefore \mathrm{Q}(16)$

답 (1) 5 (2) 2 (3) 16

다른풀이 선분의 내분점과 외분점을 구할 때, 다음과 같이 비례를 이용하여 풀 수도 있다.

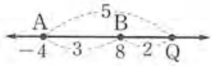
(1) $\overline{AB}=|8-(-4)|=12$이므로 $\quad \overline{AP}=12\cdot\frac{3}{4}=9$



따라서 점 P의 좌표는 $\quad -4+9=5$

(3) $\overline{AB}=|8-(-4)|=12$이므로

$$\overline{AQ}=12\cdot\frac{5}{3}=20$$



따라서 점 Q의 좌표는 $\quad -4+20=16$

개념 101

좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 선분 AB를 $m : n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

(2) 선분 AB의 중점 M의 좌표

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

(3) 선분 AB를 $m : n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

Remark 수직선에서와 마찬가지로 $m:n$으로 외분하는 경우는 $m:(-n)$으로 내분하는 것이라 생각하고 내분점을 구하는 공식을 적용해도 된다.

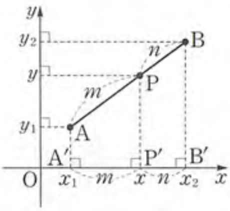
개념 Approach

(1) 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 $P(x, y)$의 좌표를 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 세 점 A, P, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, P′, B′이라 하면 평행선 사이의 선분의 길이의 비에 의하여

$$\overline{A'P'} : \overline{P'B'} = \overline{AP} : \overline{PB} = m : n$$

이므로 점 P′은 x축 위에서 선분 A′B′을 $m : n$으로 내분하는 점이다.



$$\therefore x = \frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

y축에 대해서도 같은 방법으로 생각하면

$$y = \frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

따라서 점 P의 좌표는 다음과 같다.

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

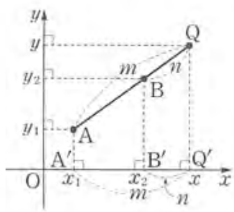
(2) 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB의 중점 M은 선분 AB를 $1 : 1$로 내분하는 점이므로

$$M\left(\frac{1\cdot x_2+1\cdot x_1}{1+1},\ \frac{1\cdot y_2+1\cdot y_1}{1+1}\right),\ 즉\ M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

(3) 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0, m \neq n)$으로 외분하는 점 $Q(x, y)$의 좌표를 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, Q′이라 하면 평행선 사이의 선분의 길이의 비에 의하여

$$\overline{A'Q'} : \overline{B'Q'} = \overline{AQ} : \overline{BQ} = m : n$$



이므로 점 Q′은 x축 위에서 선분 A′B′을 $m : n$으로 외분하는 점이다.

$$\therefore x = \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}$$

y축에 대해서도 같은 방법으로 생각하면

$$y = \frac{my_2 - ny_1}{m-n}$$

따라서 점 Q의 좌표는 다음과 같다.

$$Q\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$$

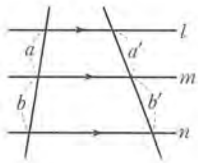
Remark 평행선 사이의 선분의 길이의 비

세 개 이상의 평행선이 다른 두 직선과 만나서 생기는 선분의 길이의 비는 같다.

즉 오른쪽 그림에서 $l /\!/ m /\!/ n$일 때,

① $a : b = a' : b'$

② $(a+b) : b = (a'+b') : b'$



개념 **Check**

좌표평면 위의 두 점 $A(5, -4)$, $B(-1, 2)$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 선분 AB를 $1 : 2$로 내분하는 점 P의 좌표

(2) 선분 AB의 중점 M의 좌표

(3) 선분 AB를 $4 : 1$로 외분하는 점 Q의 좌표

풀이

(1) $P\left(\frac{1\cdot(-1)+2\cdot5}{1+2}, \frac{1\cdot2+2\cdot(-4)}{1+2}\right)$ $\quad \therefore P(3, -2)$

(2) $M\left(\frac{5+(-1)}{2}, \frac{-4+2}{2}\right)$ $\quad \therefore M(2, -1)$

(3) $Q\left(\frac{4\cdot(-1)-1\cdot5}{4-1}, \frac{4\cdot2-1\cdot(-4)}{4-1}\right)$ $\quad \therefore Q(-3, 4)$

답 (1) $(3, -2)$ (2) $(2, -1)$ (3) $(-3, 4)$

대표유형 106 선분의 내분점과 외분점 (1)

• 개념 101

두 점 $A(-1,\ 2)$, $B(9,\ -3)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 중점 M의 좌표를 구하여라.

유형 Guide 선분의 내분점과 외분점을 구하는 공식을 이용하여 두 점 P, Q의 좌표를 구한 후, 선분 PQ의 중점의 좌표를 구한다.

유형 SSEN 선분의 내분점과 외분점 ⊙ 공식을 이용한다.

풀이 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot 9+2\cdot(-1)}{3+2},\ \frac{3\cdot(-3)+2\cdot 2}{3+2}\right),\ \text{즉 } (5,\ -1)$$

$\therefore P(5,\ -1)$

선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot 9-2\cdot(-1)}{3-2},\ \frac{3\cdot(-3)-2\cdot 2}{3-2}\right),\ \text{즉 } (29,\ -13)$$

$\therefore Q(29,\ -13)$

따라서 선분 PQ의 중점 M의 좌표는

$$\left(\frac{5+29}{2},\ \frac{-1+(-13)}{2}\right),\ \text{즉 } (17,\ -7)$$

$\therefore M(17,\ -7)$

답 $(17,\ -7)$

정답 및 풀이 • 84쪽

유제 106-1 두 점 $A(-2,\ 6)$, $B(1,\ -3)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점을 P, $4:3$으로 외분하는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하여라.

Plus 유제 106-2 두 점 $A(8,\ 3)$, $B(a,\ -5)$에 대하여 선분 AB를 $b:1$로 내분하는 점 P의 좌표가 $(5,\ -3)$일 때, 선분 AB를 $b:1$로 외분하는 점 Q의 좌표를 구하여라.

대표유형 107 선분의 내분점과 외분점 (2)

• 개념 101

두 점 A(1, 0), B(3, 2)에 대하여 선분 AB의 연장선 위에 $2\overline{AB}=\overline{BC}$를 만족시키는 점 C의 좌표를 구하여라. (단, 점 C의 x좌표는 양수이다.)

유형 Guide $2\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$이므로 이 조건을 만족시키면서 x좌표가 양수인 점 C의 위치를 선분 AB의 연장선 위에 나타내어 본다.

유형 SSEN $m\overline{AB}=n\overline{BC}\ (m>0,\ n>0)$ ○ $\overline{AB}:\overline{BC}=n:m$

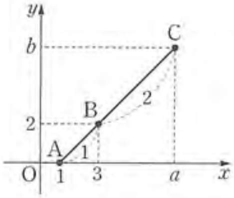
풀이 $2\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\quad\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$

점 C의 x좌표가 양수이므로 오른쪽 그림에서 점 C는 $\overline{AB}$를 3 : 2로 외분하는 점이다.

점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$$a=\frac{3\cdot3-2\cdot1}{3-2}=7,\ b=\frac{3\cdot2-2\cdot0}{3-2}=6$$

따라서 점 C의 좌표는 (7, 6)이다.



답 (7, 6)

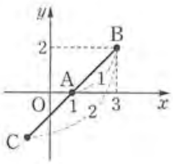
다른풀이 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$에서 점 B는 $\overline{AC}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$$\frac{1\cdot a+2\cdot1}{1+2}=3,\ \frac{1\cdot b+2\cdot0}{1+2}=2$$

$$\therefore a=7,\ b=6$$

따라서 점 C의 좌표는 (7, 6)이다.

Remark 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$일 때, 점 C가 $\overline{AB}$를 1 : 2로 외분하는 점인 경우도 있다. 이때 점 C의 x좌표는 음수이다.



정답 및 풀이 • 84쪽

유제 107-1 두 점 A(4, 2), B(1, 5)에 대하여 선분 AB의 연장선 위에 $\overline{AB}=3\overline{BC}$를 만족시키는 점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

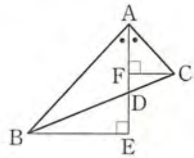
유제 107-2 두 점 A(2, 5), B(−6, 7)을 지나는 직선 위에 $3\overline{AB}=2\overline{BC}$를 만족시키는 점 C의 좌표를 구하여라. (단, 점 C의 x좌표는 음수이다.)

대표유형 108 선분의 내분점과 외분점의 삼각형에의 활용
• 개념 101

세 점 $A(1,\ 2)$, $B(-3,\ -2)$, $C(3,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 점 D의 좌표를 구하여라.

유형 Guide 점 D가 선분 BC의 내분점이므로 내분하는 비를 구하면 점 D의 좌표를 구할 수 있다. 삼각형의 내각의 이등분선과 변의 길이 사이의 관계는 중학교 도형의 닮음 단원에서 이미 학습한 바 있다. 여기서 다시 한 번 짚어 보자.

오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$에서 $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D, 두 점 B, C에서 $\overline{AD}$의 연장선과 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하면



$\triangle ABE \backsim \triangle ACF$이므로 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BE} : \overline{CF}$ ...... ㉠

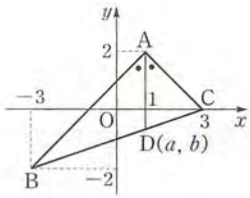
$\triangle BED \backsim \triangle CFD$이므로 $\overline{BE} : \overline{CF} = \overline{BD} : \overline{CD}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$, 즉 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$이다.

유형 SSEN 삼각형의 각의 이등분선 ⊙ 변의 길이 사이의 관계 이용!

풀이 삼각형의 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$이고,



$$\overline{AB} = \sqrt{(-3-1)^2 + (-2-2)^2} = 4\sqrt{2},$$
$$\overline{AC} = \sqrt{(3-1)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

이므로

$$\overline{BD} : \overline{DC} = 4\sqrt{2} : 2\sqrt{2} = 2 : 1$$

즉 점 D는 변 BC를 $2 : 1$로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$$a = \frac{2\cdot 3 + 1\cdot(-3)}{2+1} = 1,\ b = \frac{2\cdot 0 + 1\cdot(-2)}{2+1} = -\frac{2}{3}$$

따라서 점 D의 좌표는 $\left(1,\ -\frac{2}{3}\right)$이다.

답 $\left(1,\ -\frac{2}{3}\right)$

정답 및 풀이 • 85쪽

유제 108-1 두 점 $A(-2,\ 3)$, $B(4,\ 0)$을 잇는 선분 AB 위의 점 $P(a,\ b)$에 대하여 삼각형 OAP의 넓이가 삼각형 OBP의 넓이의 2배일 때, $a-b$의 값을 구하여라.

(단, O는 원점이다.)

대표유형 109 선분의 내분점과 외분점의 사각형에의 활용

• 개념 101

평행사변형 ABCD에서 세 꼭짓점이 A(1, 4), B(−1, −1), C(5, −2)일 때, 나머지 한 꼭짓점 D의 좌표를 구하여라.

유형 Guide 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 두 대각선의 중점이 일치한다. 따라서 점 D의 좌표를 (x, y)라 하고 두 대각선 AC, BD의 중점을 각각 구해 본다.

유형 SSEN 평행사변형 ⊙ 두 대각선의 중점이 일치!

풀이 $\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right) \quad \therefore (3, 1)$$

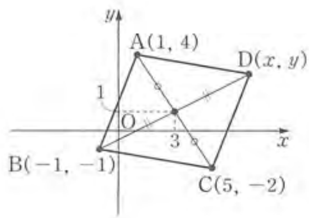
오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 D의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overline{BD}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-1+x}{2}, \frac{-1+y}{2}\right)$

$\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BD}$의 중점이 일치하므로

$$\frac{-1+x}{2}=3, \frac{-1+y}{2}=1 \qquad \therefore x=7, y=3$$

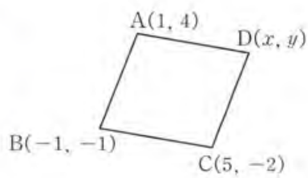
따라서 점 D의 좌표는 (7, 3)이다.



답 (7, 3)

다른풀이 **14 도형의 이동**에서 배우는 평행이동을 이용하면 점 D의 좌표를 쉽게 구할 수 있다. 오른쪽 그림과 같이 점 B를 점 C로 평행이동하려면 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 −1만큼 평행이동하면 된다. 점 A를 위와 같이 평행이동하면 점 D가 되므로 점 D의 좌표는

$(1+6, 4-1)$, 즉 $(7, 3)$



Remark 평행사변형이 되기 위한 조건

① 두 쌍의 대변이 각각 평행하다.
② 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.
③ 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.
④ 두 대각선이 서로를 이등분한다.
⑤ 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같다.

정답 및 풀이 • 85쪽

유제 109-1 네 점 $A(a, 3)$, $B(-4, b)$, C(1, 4), D(3, 3)을 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, a, b의 값을 구하여라.

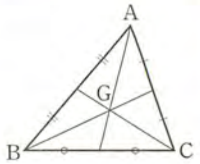
Plus 유제 109-2 네 점 A(5, 4), $B(1, a)$, $C(-3, b)$, D(1, 7)을 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 마름모일 때, a, b의 값을 구하여라.

개념 102 삼각형의 무게중심

세 꼭짓점의 좌표가 주어진 삼각형의 무게중심의 좌표는 다음과 같다.

좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

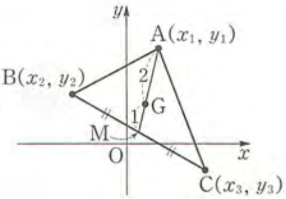


개념 Approach

삼각형의 무게중심은 세 중선을 각 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 내분하므로 내분점을 구하는 공식을 이용하여 세 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 구할 수 있다.

변 BC의 중점을 $\mathrm{M}(x',\ y')$이라 하면

$$x'=\frac{x_2+x_3}{2},\ y'=\frac{y_2+y_3}{2}$$



삼각형 ABC의 무게중심을 $\mathrm{G}(x,\ y)$라 하면 점 G는 중선 AM을 2 : 1로 내분하므로

$$x=\frac{2\cdot x'+1\cdot x_1}{2+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{x_2+x_3}{2}+\frac{x_1}{3}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{2\cdot y'+1\cdot y_1}{2+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{y_2+y_3}{2}+\frac{y_1}{3}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

$$\therefore \mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

개념 Check

다음을 구하여라.

(1) 세 점 $\mathrm{A}(2,\ 5)$, $\mathrm{B}(-4,\ 1)$, $\mathrm{C}(-1,\ -3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표

(2) 세 점 $\mathrm{A}(a,\ 4)$, $\mathrm{B}(0,\ b)$, $\mathrm{C}(6,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1,\ 1)$일 때, $a+b$의 값

풀이 (1) $\frac{2+(-4)+(-1)}{3}=-1$, $\frac{5+1+(-3)}{3}=1$ $\quad\therefore (-1,\ 1)$

(2) $\frac{a+0+6}{3}=1$, $\frac{4+b+1}{3}=1$이므로 $\quad a=-3,\ b=-2$

$\therefore a+b=-5$

답 (1) $(-1,\ 1)$ (2) -5

대표유형 110 삼각형의 무게중심

• 개념 102

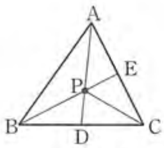
세 점 $A(1,\ 0)$, $B(-4,\ -6)$, $C(-3,\ -3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 내부의 한 점 $P(a,\ b)$에 대하여

$$\triangle PAB=\triangle PBC=\triangle PCA$$

가 성립할 때, $a-b$의 값을 구하여라.

유형 Guide 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$의 내부의 한 점 P에 대하여 $\overline{AP}$의 연장선이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 D라 하면 $\triangle PAB=\triangle PCA$에서 $\triangle PBD=\triangle PCD$이므로

$\overline{BD}=\overline{DC}$ …… ㉠



또 $\overline{BP}$의 연장선이 $\overline{AC}$와 만나는 점을 E라 하면 $\triangle PAB=\triangle PBC$에서 $\triangle PAE=\triangle PCE$이므로

$\overline{AE}=\overline{EC}$ …… ㉡

㉠에서 점 D는 $\overline{BC}$의 중점이고 ㉡에서 점 E는 $\overline{AC}$의 중점이다.
따라서 점 P는 $\triangle ABC$의 두 중선의 교점이므로 $\triangle ABC$의 무게중심이다.

유형 SSEN **$\triangle ABC$의 내부의 한 점 P에 대하여 $\triangle PAB=\triangle PBC=\triangle PCA$**
⊙ 점 P는 $\triangle ABC$의 무게중심

풀이 주어진 조건을 만족시키는 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$a=\frac{1+(-4)+(-3)}{3}=-2,\ b=\frac{0+(-6)+(-3)}{3}=-3$$

$\therefore a-b=1$

답 1

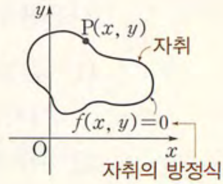
정답 및 풀이 • 85쪽

유제 110-1 세 점 $A(a,\ 2b)$, $B(b,\ -2a)$, $C(6,\ a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심이 원점일 때, ab의 값을 구하여라.

Plus 유제 110-2 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 중점의 좌표가 각각 $(3,\ -1)$, $(4,\ 6)$, $(8,\ 7)$일 때, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 구하여라.

특강 103 자취의 방정식

어떤 조건을 만족시키는 점들이 도형을 이룰 때, 이 도형을 주어진 조건을 만족시키는 점들의 **자취**라 한다.
이때 특정한 조건을 만족시키는 자취 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 x, y 사이의 조건을 x, y로 나타낸 식 $f(x,\ y)=0$을 **자취의 방정식**이라 한다.



점의 자취는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 좌표축의 도입 : 좌표축을 적당히 잡는다.
(ii) 좌표의 설정 : 조건을 만족시키는 점의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓는다.
(iii) 관계식의 형성 : 주어진 조건을 이용하여 x, y 사이의 관계식을 만든다.
(iv) 식의 정리 : x, y 이외의 문자는 소거하고 제한된 범위를 따져 본다.
(v) 자취의 해석 : x, y의 관계식에서 자취를 구한다. 이때 범위에 주의한다.

Remark • 좌표가 도입되어 있는 경우에는 위의 과정 중에서 (i), (v)를 생략할 수 있다.
• (iii), (iv)에서 구한 x, y 사이의 관계식과 제한 범위가 자취의 방정식이다.

예를 들어 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 0)$으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취를 구해 보자.

❶단계 좌표의 설정	점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면
❷단계 관계식의 형성	$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로 $(x+2)^2+y^2=(x-2)^2+y^2$
❸단계 식의 정리	양변을 전개하면 $x^2+4x+4+y^2=x^2-4x+4+y^2$ $8x=0 \qquad \therefore x=0$
❹단계 자취의 해석	따라서 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 0)$으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식은 $x=0$ 이므로 점 P의 자취는 $\boldsymbol{y}$**축**이다.

Remark 평면 위에서 서로 다른 두 점 A, B로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취는 선분 AB의 수직이등분선이다.

대표유형 111 자취의 방정식

• 특강 103

다음에 답하여라.

(1) 세 점 A(1, 0), B(4, −3), C(6, 2)에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2\overline{CP}^2$을 만족시키는 점 P의 자취의 방정식을 구하여라.

(2) 좌표평면 위의 두 점 A, B 사이의 거리가 6일 때, $\overline{AP}^2-\overline{BP}^2=12$인 점 P의 자취를 구하여라.

유형Guide (1) 구하려는 자취의 방정식 위의 임의의 점 P의 좌표를 (x, y)로 놓고, 주어진 조건을 이용하여 x, y 사이의 관계식을 세운다.

(2) 좌표가 주어져 있지 않으므로 먼저 좌표를 도입한 후, (1)과 같은 방법으로 푼다. 이때 좌표축을 잡는 방법에 따라 계산이 복잡해질 수 있으므로 계산이 간단하도록 좌표를 도입한다.

유형 SSEN 자취의 방정식 ⊙ 조건을 만족시키는 점의 좌표를 (x, y)로 놓는다.

풀이 (1) 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2\overline{CP}^2$에서

$$\{(x-1)^2+y^2\}+\{(x-4)^2+(y+3)^2\}=2\{(x-6)^2+(y-2)^2\}$$
$$(x^2-2x+1+y^2)+(x^2-8x+16+y^2+6y+9)=2(x^2-12x+36+y^2-4y+4)$$
$$\therefore\ 14x+14y-54=0$$

따라서 점 P의 자취의 방정식은

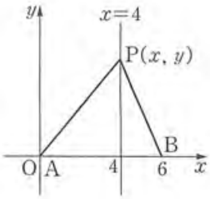
$$7x+7y-27=0$$

(2) 두 점 A, B 사이의 거리가 6이므로 오른쪽 그림과 같이 점 A를 원점, 점 B의 좌표를 (6, 0)으로 하는 좌표평면을 정한다.

이때 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overline{AP}^2-\overline{BP}^2=12$에서

$$(x^2+y^2)-\{(x-6)^2+y^2\}=12$$
$$12x=48 \qquad \therefore\ x=4$$

따라서 점 P의 자취는 $\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점을 지나고 $\overline{AB}$에 수직인 직선이다.



답 풀이 참조

Remark 위의 문제에서 (1)은 좌표가 도입되어 있으므로 점 P의 자취의 방정식을 x, y에 대한 식으로 나타내면 답이 완성된 것이다. 그러나 (2)에서는 좌표가 도입되지 않았으므로 마지막에 답을 좌표에 의존하지 않는 형태로 고쳐야 한다.

정답 및 풀이 • 86쪽

유제 111-1 두 점 A(2, 1), B(3, −2)에 대하여 $\overline{AP}^2-\overline{BP}^2=1$을 만족시키는 점 P의 자취의 방정식을 구하여라.

중단원 연습 문제

정답 및 풀이 • 86쪽

STEP 1 유형 Training

01 두 점 A$(0,\ 5)$, B$(2,\ 1)$과 직선 $y=x+1$ 위의 점 P$(a,\ b)$에 대하여 $\overline{\text{AP}}=\overline{\text{BP}}$일 때, a^2+b^2의 값은?

① 17 ② 20 ③ 25 ④ 32 ⑤ 40

서술형

02 세 점 A$(-a,\ 0)$, B$(0,\ -b)$, C$(b,\ a-b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하여라.

03 두 점 A$(0,\ 1)$, B$(2,\ k)$와 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\text{AP}}^2+\overline{\text{BP}}^2$의 최솟값이 12일 때, 양수 k의 값을 구하여라.

04 직사각형 ABCD와 점 P가 한 평면 위에 있을 때, $\overline{\text{AP}}^2+\overline{\text{CP}}^2=\overline{\text{BP}}^2+\overline{\text{DP}}^2$이 성립함을 확인하여라.

05 수직선 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB의 중점을 M, 선분 AB를 5 : 3으로 외분하는 점을 P라 할 때, 점 M은 선분 PB를 $a : b$로 외분하는 점이 된다. 이때 서로소인 두 자연수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하여라.

06 두 점 A$(0,\ 3)$, B$(4,\ 0)$을 잇는 선분 AB의 연장선 위에 $3\overline{\text{AB}}=\overline{\text{BC}}$를 만족시키는 점 C는 두 개가 있다. 이때 이 두 점 사이의 거리를 구하여라.

서술형

07 평행사변형 ABCD에서 꼭짓점 A의 좌표가 $(1,\ 2)$, 변 AB, BC의 중점의 좌표가 각각 $(5,\ 3)$, $(9,\ 10)$일 때, 꼭짓점 D의 좌표를 구하여라.

08 점 $A(5,\ 3)$과 직선 $x+2y-7=0$ 위를 움직이는 점 P를 잇는 선분 AP를 $1:3$으로 외분하는 점의 자취의 방정식은?

① $x-2y-15=0$ ② $x-2y-13=0$ ③ $x+2y-11=0$
④ $x+2y-13=0$ ⑤ $x+2y-15=0$

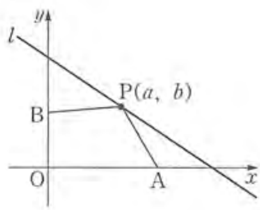
STEP 2 실전 Application

서술형

09 연립방정식 $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 \\ x^2+2xy-3y^2=20 \end{cases}$ 의 실수인 해 $(x,\ y)$는 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$이다. 이때 좌표평면 위의 두 점 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$ 사이의 거리를 구하여라.

교육청기출

10 그림과 같이 직선 $l:2x+3y=12$와 두 점 $A(4,\ 0)$, $B(0,\ 2)$가 있다. $\overline{AP}=\overline{BP}$가 되도록 직선 l 위의 점 $P(a,\ b)$를 잡을 때, $8a+4b$의 값을 구하여라.



11 직선 $y=-x$ 위의 점 P와 두 점 $A(-2,\ 6)$, $B(4,\ 4)$에 대하여 다음 중 삼각형 PAB가 이등변삼각형이 되는 점 P의 좌표가 아닌 것은?

① $(0,\ 0)$ ② $(-2,\ 2)$ ③ $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$
④ $(1,\ -1)$ ⑤ $(2,\ -2)$

교육청기출

12 좌표평면 위의 한 점 A(2, 1)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심은 변 BC 위에 있고 좌표가 (−1, −1)일 때, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$의 값은?

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

13 두 점 A(−4, 3), B(5, −2)를 잇는 선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하는 점 P가 제1사분면 위의 점일 때, 실수 t의 값의 범위를 구하여라.

교육청기출

14 좌표평면 위의 점 A, B, C, D, E가 한 직선 위에 있고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) B의 좌표는 (−1, 3)이고, D의 좌표는 (3, −1)이다.
(나) B는 선분 AC의 중점이다.
(다) C는 선분 AD를 2 : 1로 내분한다.
(라) E는 선분 CD를 3 : 2로 외분한다.

이때 $\overline{AE}^2$의 값을 구하여라.

15 좌표평면 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 삼등분한 점 중에서 점 A에 가까운 쪽의 점을 P, 점 B에 가까운 쪽의 점을 Q라 하고, 두 점 A, B 사이의 거리를 $d(\mathrm{A}, \mathrm{B})$라 할 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

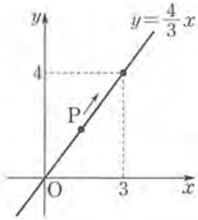
ㄱ. A(−5, 4), B(1, 1)이면 점 Q는 제2사분면 위의 점이다.
ㄴ. 점 A는 선분 PB를 1 : 2로 외분하는 점이다.
ㄷ. $d(\mathrm{A}, \mathrm{B})=d(\mathrm{A}, \mathrm{P})+d(\mathrm{A}, \mathrm{Q})$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16 두 점 A(4, 6), B(−2, −4)를 이은 선분이 x축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AC} : \overline{CB} = m : n$일 때, $\frac{m}{n}$의 값은?

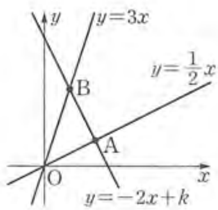
① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

17 오른쪽 그림과 같이 점 P는 원점 O를 출발하여 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 위를 일정한 속도로 움직인다. 출발한 지 5초 후의 점 P의 좌표가 (3, 4)일 때, 출발한 지 15초 후의 점 P의 좌표를 구하여라.



교육청기출

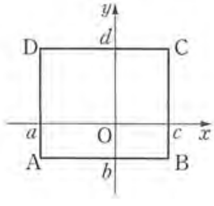
18 그림과 같이 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 $y=3x$가 직선 $y=-2x+k$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 원점 O와 두 점 A, B를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 무게중심의 좌표가 $\left(2, \frac{8}{3}\right)$일 때, 상수 k의 값은?



①2 ②4 ③6 ④8 ⑤10

서술형

19 오른쪽 그림과 같이 네 점 A(a, b), B(c, b), C(c, d), D(a, d)를 꼭짓점으로 하는 직사각형 ABCD를 $S(a, b, c, d)$로 나타내자. 세 직사각형 $S(1, 2, 3, 4)$, $S(-3, -4, -1, -2)$, $S(2, 1, 4, 3)$의 대각선의 중점을 각각 M_1, M_2, M_3이라 할 때, 삼각형 $M_1M_2M_3$의 무게중심의 좌표를 구하여라.



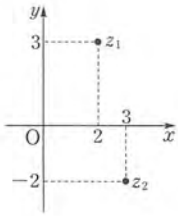
STEP 3 심화 Forwarding

서술형

20 세 점 A(0, 1), B(1, 0), C(a, b)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. 이때 서로소인 자연수 p, q에 대하여 pq의 값을 구하여라. (단, 점 C는 제1사분면 위의 점이다.)

21 복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)를 좌표평면 위의 점 (a, b)에 대응시킨다고 하자. 예를 들어 복소수 $z_1=2+3i$, $z_2=3-2i$를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

(단, $i=\sqrt{-1}$, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)



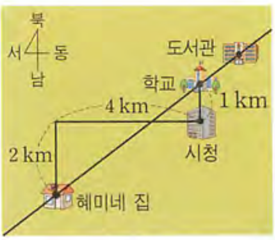
보기

ㄱ. 두 복소수 $1+3i$, $-1-i$에 대응하는 두 점 사이의 거리는 $2\sqrt{5}$이다.
ㄴ. 복소수 $z\bar{z}$에 대응하는 점은 x축 위에 있다.
ㄷ. 두 복소수 z, $-\bar{z}$에 대응하는 두 점을 잇는 선분의 중점은 y축 위에 있다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

교육청기출

22 그림과 같이 혜미네 집, 학교, 도서관은 일직선 위에 있다. 혜미네 집은 시청으로부터 서쪽으로 4 km, 남쪽으로 2 km 떨어진 지점에 있고 학교는 시청으로부터 북쪽으로 1 km 떨어진 지점에 있다. 혜미네 집에서 도서관까지의 거리는 학교에서 도서관까지의 거리의 3.5배이다. 도서관이 시청으로부터 동쪽으로 a km, 북쪽으로 b km 떨어진 지점에 있을 때, $a+b$의 값은?



(단, 혜미네 집, 학교, 도서관, 시청은 동일 평면 위에 있다.)

① 3 ② $\frac{19}{5}$ ③ $\frac{22}{5}$ ④ 5 ⑤ $\frac{28}{5}$

12

직선의 방정식

평면에서 두 직선이 만나지 않을 때 두 직선은 서로 '평행' 하다고 하고, 두 직선이 직각을 이루면서 만나는 경우를 '수직' 이라고 한다. 그동안 두 직선의 평행, 수직 관계는 문제에서 추상적으로 주어질 뿐 우리가 두 직선의 모양을 보고 단정할 수는 없었다. 그러나 두 직선의 기울기 조건을 이용하면 두 직선이 평행한지 수직인지를 명확하게 알아낼 수 있다.

이 단원에서는 여러 가지 조건을 이용하여 직선의 방정식을 구해 보자. 또 좌표평면에서 두 직선의 위치 관계를 살펴보고 한 점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식에 대하여 알아보자.

한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

35 직선의 방정식

- 주어진 조건을 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.

36 두 직선의 위치 관계

- 두 직선의 위치 관계와 그에 따른 조건을 이해한다.

37 정점을 지나는 직선

- 정점을 지나는 직선의 방정식을 이용하여 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.

38 점과 직선 사이의 거리

- 점과 직선 사이의 거리 공식을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

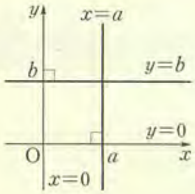
개념 & 특강	대표유형 & 유제		
104 직선의 방정식			
105 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식	112 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식		
106 두 점을 지나는 직선의 방정식 / 107 x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식	113 두 점 또는 절편이 주어진 직선의 방정식	114 세 점이 한 직선 위에 있을 조건	
특강 108 직선의 방정식의 일반형	115 직선의 개형		
109 표준형으로 표현된 두 직선의 위치 관계 / 110 두 직선이 수직일 조건 / 111 일반형으로 표현된 두 직선의 위치 관계	116 두 직선이 평행 또는 수직일 조건 / 117 한 직선에 평행 또는 수직인 직선	118 세 직선의 위치 관계	119 점에서 직선에 내린 수선의 발 / 120 선분의 수직이등분선의 방정식
112 정점을 지나는 직선	121 정점을 지나는 직선	122 정점을 지나는 직선의 활용	
113 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식	123 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식		
114 점과 직선 사이의 거리	124 점과 직선 사이의 거리	126 삼각형의 넓이	127 자취의 방정식
115 평행한 두 직선 사이의 거리	125 평행한 두 직선 사이의 거리		
특강 116 좌표평면 위의 삼각형의 넓이			

개념 104 직선의 방정식

(1) 좌표축에 평행한 직선의 방정식

① x절편이 a이고 y축에 평행한 직선의 방정식은 $x=a$

② y절편이 b이고 x축에 평행한 직선의 방정식은 $y=b$



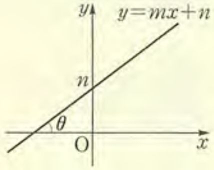
Remark y축의 방정식은 $x=0$, x축의 방정식은 $y=0$이다.

(2) 직선의 방정식의 표준형

기울기가 m이고 y절편이 n인 직선의 방정식은

$\boldsymbol{y=mx+n}$

특히 기울기가 m인 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ일 때, $m=\tan\theta$



Remark 기울기와 y절편을 쉽게 알 수 있는 $y=mx+n$ 꼴의 방정식을 **직선의 방정식의 표준형**이라 한다.

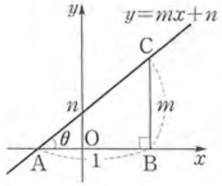
개념 Approach

직선 $y=mx+n$에서 m은 직선의 기울기를 나타내는데, 기울기는 x의 값이 1 증가할 때의 y의 값의 증가량이며, x의 값의 증가량에 대한 y의 값의 증가량의 비율과 같다.

이 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $m=\tan\theta$임을 확인해 보자.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$이 되도록 x축 위에 두 점 A, B를 잡고, 점 B를 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 $y=mx+n$과 만나는 점을 C라 하면

$\overline{\mathrm{BC}}=m$



이때 삼각형 ABC는 $\angle\mathrm{B}=90°$인 직각삼각형이므로

$$\tan\theta=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{m}{1}=m$$

Remark 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고

① $\begin{cases} y\text{축에 평행한 직선} \Rightarrow x=x_1 \\ x\text{축에 평행한 직선} \Rightarrow y=y_1 \end{cases}$

② $\begin{cases} x\text{축에 수직인 직선} \Rightarrow x=x_1 \\ y\text{축에 수직인 직선} \Rightarrow y=y_1 \end{cases}$

개념 Check

다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 기울기가 2이고 y절편이 1인 직선

(2) x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$이고 y절편이 5인 직선

(3) x축에 평행하고 점 $(1,\ 3)$을 지나는 직선

풀이 (2) $\tan 45°=1$이므로 $y=x+5$

답 (1) $y=2x+1$ (2) $y=x+5$ (3) $y=3$

개념 105 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식

직선이 지나는 한 점의 좌표와 기울기가 주어진 직선의 방정식은 다음과 같다.

> 기울기가 m이고 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나는 직선의 방정식은
> $$\boldsymbol{y-y_1=m(x-x_1)}$$

개념 Approach

좌표평면에서 기울기가 m이고 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나는 직선의 방정식을 다음 두 가지 방법으로 구해 보자.

방법 1 기울기가 m인 직선의 방정식을

$$y=mx+n \qquad \cdots\cdots ㉠$$

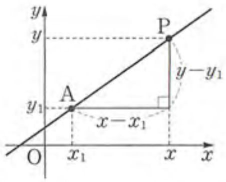
으로 놓으면 ㉠이 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나므로

$$y_1=mx_1+n \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠－㉡을 하면 구하는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

방법 2 오른쪽 그림과 같이 구하는 직선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$ $(x\neq x_1)$라 하면



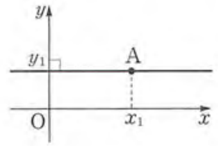
$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

$$\therefore\ y-y_1=m(x-x_1)$$

이 등식은 점 P가 점 A와 일치할 때, 즉 $x=x_1$일 때에도 성립한다.

Remark 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 x축에 평행한(y축에 수직인) 직선의 기울기는 0이므로 이 직선의 방정식은

$y-y_1=0\cdot(x-x_1)$, 즉 $y=y_1$



개념 Check

다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 기울기가 3이고 점 $(0,\ 1)$을 지나는 직선

(2) 기울기가 -1이고 점 $(4,\ -2)$를 지나는 직선

풀이 (1) $y-1=3\cdot(x-0)$이므로 $\quad y=3x+1$

(2) $y-(-2)=-1\cdot(x-4)$이므로 $\quad y+2=-x+4 \qquad \therefore\ y=-x+2$

답 (1) $y=3x+1$ (2) $y=-x+2$

대표유형 112 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식

• 개념 105

다음에 답하여라.

(1) 두 점 A$(-4,\ -5)$, B$(2,\ -2)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식을 구하여라.

(2) x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$이고 점 $(2\sqrt{3},\ 1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

유형 Guide (1) 두 점 A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$에 대하여 $\overline{\text{AB}}$를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$임을 이용한다.

(2) 직선 $y=mx+n$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ일 때, $m=\tan\theta$임을 이용하여 기울기를 구한다.

유형 SSEN 점 $(a,\ b)$를 지나고 기울기가 m인 직선 ○ $y-b=m(x-a)$

풀이 (1) 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot2+2\cdot(-4)}{1+2},\ \frac{1\cdot(-2)+2\cdot(-5)}{1+2}\right),\ \text{즉 } (-2,\ -4)$$

따라서 점 $(-2,\ -4)$를 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y+4=2(x+2)$, 즉 $y=2x$

(2) x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$이므로 구하는 직선의 기울기는

$\tan 60°=\sqrt{3}$

따라서 점 $(2\sqrt{3},\ 1)$을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선의 방정식은

$y-1=\sqrt{3}(x-2\sqrt{3})$, 즉 $y=\sqrt{3}x-5$

답 (1) $y=2x$ (2) $y=\sqrt{3}x-5$

정답 및 풀이 • 92쪽

유제 112-1 두 점 A$(5,\ -3)$, B$(-1,\ 5)$에 대하여 선분 AB의 중점을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식을 구하여라.

Plus 유제 112-2 두 직선 $x=1$, $y=2$가 이루는 각을 이등분하는 직선 중 기울기가 양수인 직선의 방정식을 구하여라.

개념 106 두 점을 지나는 직선의 방정식

직선이 지나는 두 점의 좌표가 주어진 직선의 방정식은 다음과 같다.

서로 다른 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

(i) $x_1 \neq x_2$일 때, $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

(ii) $x_1=x_2$일 때, $x=x_1$

개념 Approach

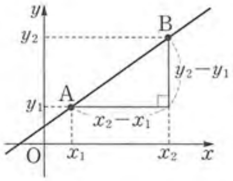
한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식을 구하는 방법을 이용하여 서로 다른 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식을 구해 보자.

(i) $x_1 \neq x_2$일 때, 직선 AB의 기울기를 m이라 하면

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

이고, 이 직선이 점 $A(x_1,\ y_1)$을 지나므로

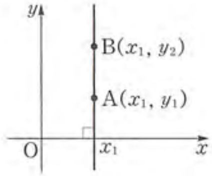
$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$



직선이 점 $B(x_2,\ y_2)$를 지남을 이용하여 직선의 방정식을 구해도 결과는 같다.

(ii) $x_1=x_2$일 때, 직선 AB는 y축에 평행하므로(x축에 수직이므로) 그 직선의 방정식은

$$x=x_1$$



개념 Check

다음 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

(1) $(1,\ 3)$, $(-1,\ 7)$　　(2) $(3,\ -2)$, $(-2,\ 2)$　　(3) $(-2,\ 3)$, $(-2,\ 8)$

풀이 (1) $y-3=\dfrac{7-3}{-1-1}(x-1)$　　$\therefore y=-2x+5$

(2) $y-(-2)=\dfrac{2-(-2)}{-2-3}(x-3)$　　$\therefore y=-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{2}{5}$

(3) 두 점 $(-2,\ 3)$, $(-2,\ 8)$을 지나는 직선은 y축에 평행한 직선이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은　$x=-2$

답 (1) $y=-2x+5$　(2) $y=-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{2}{5}$　(3) $x=-2$

개념 107

x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식

x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식은 다음과 같다.

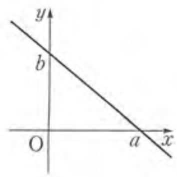
x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \ (\text{단, } a\neq0,\ b\neq0)$$

개념 Approach

x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식은 두 점의 좌표가 주어진 직선의 방정식의 특수한 경우이다. 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하는 방법을 이용하여 x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식을 구해 보자. (단, $a\neq0$, $b\neq0$)

x절편이 a, y절편이 b인 직선은 두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$를 지나는 직선과 같으므로 그 방정식은



$$y-b=\frac{b-0}{0-a}(x-0)$$

$$\therefore \frac{b}{a}x+y=b$$

양변을 b로 나누면

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Remark 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a\neq0,\ b\neq0)$과 좌표축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이 S는 $S=\frac{1}{2}|ab|$

개념 Check

다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) x절편이 3, y절편이 8인 직선

(2) 두 점 $(2,\ 0)$, $(0,\ -5)$를 지나는 직선

풀이 (1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{8}=1 \quad \therefore y=-\frac{8}{3}x+8$

(2) x절편이 2이고 y절편이 -5이므로 $\frac{x}{2}-\frac{y}{5}=1$

$\therefore y=\frac{5}{2}x-5$

답 (1) $y=-\frac{8}{3}x+8$ (2) $y=\frac{5}{2}x-5$

대표유형 113 두 점 또는 절편이 주어진 직선의 방정식 • 개념 106, 107

다음에 답하여라.

(1) 두 점 $A(-3, -2)$, $B(1, 6)$을 잇는 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점과 점 $(-1, 8)$을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

(2) 점 $(4, -6)$을 지나는 직선의 y절편이 x절편의 3배일 때, 이 직선의 방정식을 구하여라. (단, x절편은 0이 아니다.)

유형 Guide (1) 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 $\overline{AB}$를 $m:n(m>0, n>0, m\neq n)$으로 외분하는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}, \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$임을 이용한다.

(2) 직선의 y절편이 x절편의 3배이므로 x절편을 $a\,(a\neq 0)$, y절편을 $3a$로 놓는다.

유형 SSEN **두 점 (x_1, y_1), $(x_2, y_2)(x_1\neq x_2)$를 지나는 직선** ⊙ $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

풀이 (1) 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot1-2\cdot(-3)}{1-2}, \frac{1\cdot6-2\cdot(-2)}{1-2}\right),\ \text{즉 } (-7, -10)$$

따라서 두 점 $(-7, -10)$, $(-1, 8)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-8=\frac{8-(-10)}{-1-(-7)}(x+1), \qquad y-8=3(x+1)$$

$$\therefore y=3x+11$$

(2) 직선의 x절편을 $a(a\neq0)$라 하면 y절편은 $3a$이므로 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{3a}=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 직선이 점 $(4, -6)$을 지나므로

$$\frac{4}{a}+\frac{-6}{3a}=1, \qquad \frac{2}{a}=1 \qquad \therefore a=2$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 ㉠에서

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1 \qquad \therefore y=-3x+6$$

답 (1) $y=3x+11$ (2) $y=-3x+6$

정답 및 풀이 • 92쪽

유제 113-1 두 점 $(a, 3)$, $(5, b)$를 지나는 직선을 l이라 할 때, 두 점 $(2, -1)$, $(-4, 7)$은 모두 직선 l 위의 점이다. 이때 $a+b$의 값을 구하여라.

유제 113-2 x절편이 -3, y절편이 1인 직선이 점 $(12, a)$를 지날 때, a의 값을 구하여라.

대표유형 114 **세 점이 한 직선 위에 있을 조건** • 개념 106

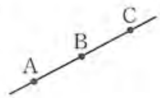
다음에 답하여라.

(1) 세 점 A$(2,\ 5)$, B$(-1,\ -4)$, C$(a,\ a-5)$가 한 직선 위에 있도록 하는 a의 값을 구하여라.

(2) 세 점 A$(1,\ 0)$, B$(2,\ 3)$, C$(5,\ a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 존재하지 않을 때, a의 값을 구하여라.

유형 Guide

(1) 주어진 세 점 중 어느 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구한 후, 나머지 점의 좌표를 대입하면 상수 a의 값을 구할 수 있다. 그러나 한 직선 위에 있는 세 점 중 두 점씩 짝을 지어 구한 직선의 기울기는 서로 같음을 이용하면 직선의 방정식을 구하지 않고도 문제를 해결할 수 있다. 즉



(직선 AB의 기울기)=(직선 AC의 기울기)

또는 (직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)

또는 (직선 BC의 기울기)=(직선 AC의 기울기)

(2) 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 존재하지 않으면 세 점은 한 직선 위에 있음을 이용한다.

유형 SSEN **세 점이 한 직선 위에 있을 조건 ⊙ 직선의 기울기 이용!**

풀이

(1) 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{-4-5}{-1-2}=\frac{(a-5)-5}{a-2},\ \text{즉 } 3=\frac{a-10}{a-2}$$

$$3(a-2)=a-10, \qquad 2a=-4$$

$$\therefore a=-2$$

(2) 세 점 A$(1,\ 0)$, B$(2,\ 3)$, C$(5,\ a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 존재하지 않으려면 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있어야 한다.

따라서 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{3-0}{2-1}=\frac{a-0}{5-1} \qquad \therefore a=12$$

답 (1) -2 (2) 12

정답 및 풀이 • 92쪽

유제 114-1 세 점 A$(4,\ -4)$, B$(k,\ -8)$, C$(1,\ 2k-2)$가 한 직선 위에 있도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하여라.

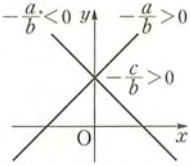
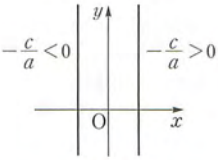
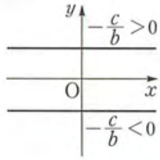
유제 114-2 점 A$(-4,\ 1-3a)$가 두 점 B$(2,\ -2)$, C$(a,\ 1)$을 지나는 직선 위에 있을 때, 직선 BC의 방정식을 구하여라. (단, $a>0$)

특강 108 직선의 방정식의 일반형

지금까지 배운 직선의 방정식은 모두 x, y에 대한 일차방정식이다.
실수 a, b 중 적어도 하나가 0이 아닐 때, x, y에 대한 일차방정식은

$$ax+by+c=0$$

꼴로 나타낼 수 있다. 이때 일차방정식이 나타내는 도형은 a, b의 값에 따라 다음과 같다.

$a\neq0$, $b\neq0$일 때	$a\neq0$, $b=0$일 때	$a=0$, $b\neq0$일 때
$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ ➡ 기울기가 $-\frac{a}{b}$, y절편이 $-\frac{c}{b}$인 직선	$ax+c=0$, 즉 $x=-\frac{c}{a}$ ➡ y축에 평행한 직선	$by+c=0$, 즉 $y=-\frac{c}{b}$ ➡ x축에 평행한 직선
		

이상에서 x, y에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0$ ($a\neq0$ 또는 $b\neq0$)을 **직선의 방정식의 일반형**이라 한다.
한편 방정식 $y=ax+b$는 a, b가 어떠한 값을 갖더라도 y항은 항상 남게 되므로 $x=x_1$ 꼴, 즉 y축에 평행한 직선을 나타낼 수는 없다.
따라서 방정식 $y=ax+b$는 직선의 방정식의 일반형이라고 말할 수 없다.

개념 SSEN

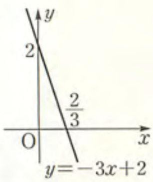
직선의 방정식의 일반형 →	$ax+by+c=0$ ($a\neq0$ 또는 $b\neq0$)
직선의 방정식의 표준형 →	$y=ax+b$

개념 Check

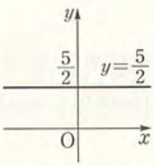
다음 일차방정식이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 그려라.

(1) $3x+y-2=0$　　(2) $2y-5=0$　　(3) $x+4=0$

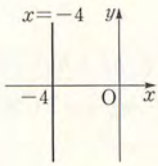
답 (1)



(2)



(3)



대표유형 115 직선의 개형

• 특강 108

$ab>0$, $bc>0$일 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

유형 Guide 일반형으로 주어진 직선의 방정식에서는 기울기와 y절편에 대한 정보를 얻기 불편하다. 따라서 직선의 방정식이 일반형 $ax+by+c=0(b\neq0)$으로 주어졌을 때에는 표준형 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$로 변형하여 기울기와 y절편의 부호를 알아보거나 x절편과 y절편의 부호를 알아보면 그래프의 개형을 쉽게 파악할 수 있다.

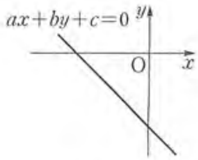
유형 SSEN 직선의 개형 ➲ 일반형 $ax+by+c=0$을 표준형 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ 꼴로 변형!

풀이 $b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

$ab>0$, $bc>0$에서 $-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}<0$이므로 직선 $ax+by+c=0$의 기울기와 y절편은 모두 음수이다.

따라서 직선 $ax+by+c=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지나지 않는다.



답 제1사분면

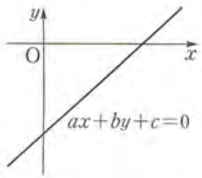
Remark ① $ab>0$이면 a, b의 부호가 서로 같으므로 $\frac{b}{a}>0$, $\frac{a}{b}>0$

② $ab<0$이면 a, b의 부호가 서로 다르므로 $\frac{b}{a}<0$, $\frac{a}{b}<0$

정답 및 풀이 • 92쪽

유제 115-1 $ab=0$, $bc<0$일 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나는 사분면을 모두 구하여라.

Plus 유제 115-2 직선 $ax+by+c=0$의 개형이 오른쪽 그림과 같을 때, 직선 $bx+cy+a=0$이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

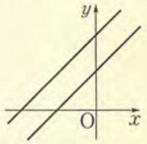


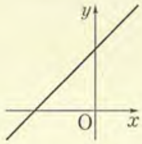
개념 109 표준형으로 표현된 두 직선의 위치 관계

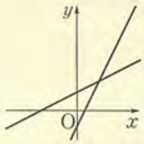
1 평면 위의 두 직선의 위치 관계

한 평면 위에서 두 직선 사이의 위치 관계는 다음과 같다.

① 평행하다.　　② 일치한다.　　③ 한 점에서 만난다.







Remark '한 평면 위에서' 라는 조건이 없으면 두 직선은 만나지도 않고 평행하지도 않은 '꼬인 위치' 일 수도 있다.

2 표준형으로 표현된 두 직선의 위치 관계

표준형으로 표현된 두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$의 위치 관계와 연립방정식

$\begin{cases} y=mx+n \\ y=m'x+n' \end{cases}$ 의 해의 개수는 다음과 같다.

두 직선의 위치 관계	조건	두 직선의 교점의 개수	연립방정식의 해의 개수
① 평행하다.	$m=m'$, $n\neq n'$	없다.	없다. (불능)
② 일치한다.	$m=m'$, $n=n'$	무수히 많다.	무수히 많다. (부정)
③ 한 점에서 만난다.	$m\neq m'$	한 개	한 쌍

Remark 두 직선이 만나는 점의 좌표는 두 직선의 방정식을 연립한 연립방정식의 해이다.

개념 Approach

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$의 위치 관계는 기울기와 y절편을 비교하여 알 수 있다.

① 두 직선이 평행하면 두 직선의 기울기는 같고 y절편은 다르다. 즉 $m=m'$이고 $n\neq n'$이다.
또 $m=m'$이고 $n\neq n'$이면 두 직선은 서로 평행하다.

② 두 직선이 일치하면 두 직선의 기울기도 같고 y절편도 같다. 즉 $m=m'$이고 $n=n'$이다.
또 $m=m'$이고 $n=n'$이면 두 직선은 일치한다.

③ 두 직선이 한 점에서 만나면 두 직선의 기울기는 다르다. 즉 $m\neq m'$이다.
또 $m\neq m'$이면 두 직선은 한 점에서 만난다.

개념 Check

두 직선 $y=(a-1)x+1$, $y=(5-2a)x-2$가 서로 평행하도록 하는 실수 a의 값을 구하여라.

풀이 두 직선이 서로 평행하려면　$a-1=5-2a$　　$\therefore a=2$

답 2

개념 110

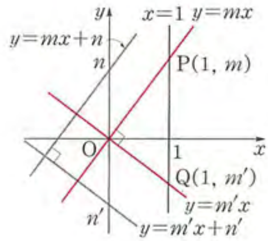
두 직선이 수직일 조건

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$에 대하여 다음이 성립한다.

① 두 직선이 서로 수직이면 $\quad mm'=-1$
② $mm'=-1$이면 두 직선은 서로 수직이다.

개념 Approach

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 서로 수직이면 두 직선에 각각 평행하고 원점을 지나는 두 직선 $y=mx$, $y=m'x$도 서로 수직이므로 두 직선 $y=mx$, $y=m'x$를 이용하여 두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$의 수직 조건을 알아보자.



오른쪽 그림에서 두 직선 $y=mx$, $y=m'x$와 직선 $x=1$의 교점을 각각 P, Q라 하면 $\quad \mathrm{P}(1,\ m)$, $\mathrm{Q}(1,\ m')$

이때 $\triangle\mathrm{POQ}$에서

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2=(1-1)^2+(m'-m)^2=(m-m')^2,$$
$$\overline{\mathrm{OP}}^2=1^2+m^2,\quad \overline{\mathrm{OQ}}^2=1^2+m'^2$$

이고, $\triangle\mathrm{POQ}$는 $\angle\mathrm{POQ}=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{OQ}}^2$에서 $\quad (m-m')^2=(1+m^2)+(1+m'^2)$

$\therefore mm'=-1$

거꾸로 $mm'=-1$이면 $\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{OQ}}^2$이 성립하므로 $\triangle\mathrm{POQ}$는 $\angle\mathrm{POQ}=90°$인 직각삼각형이다. 즉 $mm'=-1$이면 두 직선 $y=mx$, $y=m'x$가 서로 수직이다.

Remark 두 직선이 서로 수직인 경우는 두 직선이 한 점에서 만나는 경우의 특수한 경우이다.

개념 SSEN

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$			
	평행하다.	기울기는 같고, y절편은 다르다.	$m=m'$, $n\neq n'$
	일치한다.	기울기와 y절편이 각각 같다.	$m=m'$, $n=n'$
	한 점에서 만난다.	기울기가 다르다.	$m\neq m'$
	수직이다.	기울기의 곱이 -1이다.	$mm'=-1$

개념 Check

두 직선 $y=\dfrac{2a-1}{2}x-2$, $y=-\dfrac{1}{2a}x+1$이 서로 수직이 되도록 실수 a의 값을 정하여라.

풀이 주어진 두 직선이 서로 수직이려면 $\quad \dfrac{2a-1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2a}\right)=-1$

$2a-1=4a \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{2}$

답 $-\dfrac{1}{2}$

개념 111

일반형으로 표현된 두 직선의 위치 관계

일반형으로 표현된 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 위치 관계와 연립방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ 의 해의 개수는 다음과 같다.

두 직선의 위치 관계	조건	연립방정식의 해의 개수
① 평행하다.	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$	없다. (불능)
② 일치한다.	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$	무수히 많다. (부정)
③ 한 점에서 만난다.	$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$	한 쌍
④ 수직이다.	$aa'+bb'=0$	

개념 Approach

x, y의 계수가 모두 0이 아닐 때, 두 직선의 방정식 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$을 표준형으로 변형하면

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b},\ y=-\frac{a'}{b'}x-\frac{c'}{b'}$$

이므로 두 직선의 기울기는 각각 $-\frac{a}{b}$, $-\frac{a'}{b'}$이고, y절편은 각각 $-\frac{c}{b}$, $-\frac{c'}{b'}$이다.

개념 109, 110에 이를 적용해 보자.

① 두 직선이 서로 평행할 조건

$$-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'},\ -\frac{c}{b}\neq-\frac{c'}{b'}\text{이므로}\quad \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'},\ \frac{c}{c'}\neq\frac{b}{b'}$$

$$\therefore \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$$

② 두 직선이 일치할 조건

$$-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'},\ -\frac{c}{b}=-\frac{c'}{b'}\text{이므로}\quad \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'},\ \frac{c}{c'}=\frac{b}{b'}$$

$$\therefore \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

③ 두 직선이 한 점에서 만날 조건

$$-\frac{a}{b}\neq-\frac{a'}{b'}\text{이므로}\quad \frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$$

④ 두 직선이 서로 수직일 조건

$$\left(-\frac{a}{b}\right)\cdot\left(-\frac{a'}{b'}\right)=-1\text{이므로}\quad aa'=-bb'$$

$$\therefore aa'+bb'=0$$

개념 Check

두 직선 $(2a+1)x+2y+4a=0$, $x+2ay+1=0$에 대하여 다음 위치 관계를 만족시키는 실수 a의 값을 구하여라.

(1) 평행하다.

(2) 수직이다.

(3) 한 점에서 만난다.

풀이 (1) 주어진 두 직선이 서로 평행하려면

$$\frac{2a+1}{1}=\frac{2}{2a}\neq\frac{4a}{1},\ \text{즉 } 2a+1=\frac{1}{a}\neq 4a \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$2a+1=\frac{1}{a}$에서

$2a^2+a-1=0,\quad (a+1)(2a-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

(i) $a=-1$일 때,

㉠에서 $2\cdot(-1)+1=\frac{1}{-1}\neq 4\cdot(-1)$이므로 두 직선은 서로 평행하다.

(ii) $a=\frac{1}{2}$일 때,

㉠에서 $2\cdot\frac{1}{2}+1=2=4\cdot\frac{1}{2}$이므로 두 직선은 일치한다.

(i), (ii)에서 $a=-1$

(2) 주어진 두 직선이 서로 수직이려면

$(2a+1)\cdot 1+2\cdot 2a=0$

$2a+1+4a=0,\quad 6a+1=0$

$\therefore a=-\frac{1}{6}$

(3) 주어진 두 직선이 한 점에서 만나려면

$\frac{2a+1}{1}\neq\frac{2}{2a}$

$4a^2+2a\neq 2,\quad 2a^2+a-1\neq 0,\quad (a+1)(2a-1)\neq 0$

$\therefore a\neq -1,\ a\neq\frac{1}{2}$

답 (1) -1 (2) $-\frac{1}{6}$ (3) $a\neq-1$, $a\neq\frac{1}{2}$인 모든 실수

대표유형 116 두 직선이 평행 또는 수직일 조건

• 개념 109~111

다음을 구하여라.

(1) 두 직선 $y=(m^2+1)x+2m$, $y=(4m+6)x+m-1$이 서로 평행하도록 하는 실수 m의 값

(2) 두 직선 $ax+3y-2=0$, $-3x+by+c=0$이 점 $(-1,\ 3)$에서 수직으로 만나도록 하는 실수 a, b, c의 값

유형 Guide 표준형으로 표현된 직선의 평행, 수직 조건을 기억하고 있으면 일반형으로 표현된 직선의 위치 관계는 표준형으로 변형하여 적용할 수 있다. 그러나 직선의 방정식의 꼴에 따라 구분하여 기억하고 있으면 좀 더 빠르게 문제에 적용할 수 있다.

두 직선	$y=mx+n$, $y=m'x+n'$	$ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$
평행	$m=m'$, $n\neq n'$	$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$
수직	$mm'=-1$	$aa'+bb'=0$

유형 SSEN 두 직선의 위치 관계 ○ 직선의 방정식이 표준형인지 일반형인지 살펴라!

풀이 (1) 두 직선 $y=(m^2+1)x+2m$, $y=(4m+6)x+m-1$이 서로 평행하려면

표준형으로 표현된 직선

$m^2+1=4m+6$, $2m\neq m-1$

$m^2-4m-5=0$에서 $(m+1)(m-5)=0$ $\therefore m=-1$ 또는 $m=5$

이때 $m=-1$이면 $2m=m-1=-2$이므로 $m=5$

(2) 직선 $ax+3y-2=0$이 점 $(-1,\ 3)$을 지나므로 $a\cdot(-1)+3\cdot3-2=0$

일반형으로 표현된 직선

$\therefore a=7$

직선 $-3x+by+c=0$도 점 $(-1,\ 3)$을 지나므로 $-3\cdot(-1)+b\cdot3+c=0$

$\therefore 3b+c=-3$ ...... ㉠

한편 두 직선이 서로 수직이므로

$a\cdot(-3)+3\cdot b=0$, $-3a+3b=0$ $\therefore b=a=7$

$b=7$을 ㉠에 대입하면

$21+c=-3$ $\therefore c=-24$

답 (1) 5 (2) $a=7$, $b=7$, $c=-24$

정답 및 풀이 • 93쪽

유제 116-1 두 직선 $y=mx+1$, $y=(2m-3)x+2$가 서로 수직일 때, 실수 m의 값을 모두 구하여라.

대표유형 117 한 직선에 평행 또는 수직인 직선

• 개념 109~111

다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 두 점 $(2,\ 5)$, $(4,\ 1)$을 지나는 직선과 평행하고 x절편이 -3인 직선

(2) 점 $(3,\ -4)$를 지나고 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$과 수직인 직선

유형 Guide 구하는 직선이 어떤 직선과 평행 또는 수직이라는 조건은 그 직선의 기울기 조건을 대신하는 것이다. 따라서 주어진 조건에 맞게 직선의 기울기를 구한 다음 이 직선이 지나는 점의 좌표를 이용하여 직선의 방정식을 구한다.

유형 SSEN 한 직선과 평행 또는 수직인 직선 ⊙ 직선의 기울기 결정

풀이 (1) 두 점 $(2,\ 5)$, $(4,\ 1)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{1-5}{4-2}=-2$$

따라서 구하는 직선은 기울기가 -2이고 점 $(-3,\ 0)$을 지나므로

$$y=-2(x+3) \qquad \therefore y=-2x-6$$

(2) 구하는 직선의 기울기를 m이라 하면 이 직선이 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$과 수직이므로

$$\frac{1}{2}\cdot m=-1 \qquad \therefore m=-2$$

따라서 구하는 직선은 기울기가 -2이고 점 $(3,\ -4)$를 지나므로

$$y-(-4)=-2(x-3) \qquad \therefore y=-2x+2$$

답 (1) $y=-2x-6$ (2) $y=-2x+2$

정답 및 풀이 • 93쪽

유제 117-1 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) y절편이 1이고 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선과 평행하고, 원점을 지나는 직선

(2) 점 $(2,\ -1)$을 지나고 직선 $x-3y+6=0$에 수직인 직선

대표유형 118 세 직선의 위치 관계

• 개념 109, 111

세 직선 $y=2x+3$, $y=-x+6$, $y=ax-1$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 실수 a의 값을 모두 구하여라.

유형 Guide 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 세 직선의 위치 관계가 다음과 같을 때이다.

(i) 세 직선이 한 점에서 만날 때 ➡

(ii) 세 직선 중 두 직선이 서로 평행할 때 ➡

(iii) 세 직선이 모두 평행할 때 ➡ ///

이 문제에서 두 직선 $y=2x+3$과 $y=-x+6$이 한 점에서 만나므로 세 직선이 모두 평행한 경우는 없다. 따라서 (i) 또는 (ii)를 만족시키도록 a의 값을 정한다. 이때 (i)의 경우에는 다음을 이용한다.

유형 SSEN 세 직선이 한 점에서 만난다. ⭘ 한 직선이 다른 두 직선의 교점을 지난다.

풀이 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않으려면 세 직선이 한 점에서 만나거나 세 직선 중 두 직선이 평행해야 한다.

(i) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

직선 $y=ax-1$이 두 직선 $y=2x+3$, $y=-x+6$의 교점을 지나야 한다.

$y=2x+3$, $y=-x+6$을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=5$

따라서 직선 $y=ax-1$이 점 $(1, 5)$를 지나야 하므로

$5=a-1 \qquad \therefore a=6$

(ii) 세 직선 중 두 직선이 서로 평행하는 경우

직선 $y=ax-1$이 직선 $y=2x+3$ 또는 직선 $y=-x+6$과 평행해야 하므로

$a=2$ 또는 $a=-1$

(i), (ii)에서 $\quad a=-1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=6$

답 -1, 2, 6

정답 및 풀이 • 93쪽

유제 118-1 세 직선 $2x-y-2=0$, $ax+2y-5=0$, $3x-2y+a=0$이 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 모두 구하여라.

Plus 유제 118-2 서로 다른 세 직선 $3x-y+2=0$, $(a-1)x+2y+1=0$, $x+by-3=0$에 의하여 좌표평면이 네 부분으로 나누어질 때, 실수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

대표유형 119 점에서 직선에 내린 수선의 발

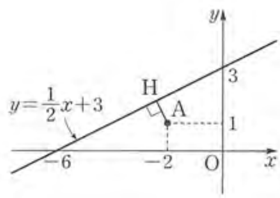
• 개념 105, 110

점 A$(-2,\ 1)$에서 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$에 내린 수선의 발 H의 좌표를 구하여라.

유형 Guide 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발 H는 직선 l과 직선 AH의 교점이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AH}}\perp l$임을 이용하여 직선 AH의 방정식을 구한 후, 직선 l의 방정식과 연립하여 풀면 점 H의 좌표를 구할 수 있다.

유형 SSEN 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발 H ○ $\overline{\mathrm{AH}}\perp l$

풀이 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$과 직선 AH가 서로 수직이므로 직선 AH의 기울기는 -2이다.



또 이 직선이 점 A$(-2,\ 1)$을 지나므로 직선 AH의 방정식은

$$y-1=-2(x+2) \qquad \therefore y=-2x-3$$

따라서 점 H는 두 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$과 $y=-2x-3$의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$$x=-\frac{12}{5},\ y=\frac{9}{5}$$

즉 구하는 점 H의 좌표는 $\left(-\frac{12}{5},\ \frac{9}{5}\right)$이다.

답 $\left(-\frac{12}{5},\ \frac{9}{5}\right)$

다른풀이 구하는 수선의 발 H는 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$ 위의 점이므로 점 H의 좌표를 $(2a,\ a+3)$으로 놓을 수 있다.

직선 AH의 기울기는 $\frac{(a+3)-1}{2a-(-2)}=\frac{a+2}{2a+2}$이고, 직선 AH는 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$에 수직이므로

$$\frac{a+2}{2a+2}=-2, \qquad a+2=-4a-4$$

$$\therefore a=-\frac{6}{5}$$

따라서 점 H의 좌표는 $\left(-\frac{12}{5},\ \frac{9}{5}\right)$이다.

정답 및 풀이 • 94쪽

유제 119-1 점 A$(-2,\ 0)$에서 직선 $3x+y-2=0$에 내린 수선의 발의 좌표를 구하여라.

대표유형 120 선분의 수직이등분선의 방정식 • 개념 110

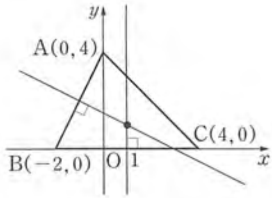
세 점 A(0, 4), B(−2, 0), C(4, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 각 변의 수직이등분선의 교점의 좌표를 구하여라.

유형 Guide 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점은 한 점에서 만나므로 두 변의 수직이등분선의 방정식을 각각 구한 후, 두 식을 연립하여 풀면 교점을 구할 수 있다. 이때 어떤 두 변의 수직이등분선의 방정식을 구할 것인가는 좌표평면 위에 그림으로 나타내어 보고 좀 더 간단한 것을 택한다.

유형 SSEN 선분 AB의 수직이등분선 ➡ 직선 AB와 수직이고 선분 AB의 중점을 지난다.

풀이 오른쪽 그림에서 변 BC의 수직이등분선은 y축에 평행하고 선분 BC의 중점 (1, 0)을 지나므로 그 직선의 방정식은

$x=1$ ...... ㉠



또 직선 AB의 기울기가 $\frac{0-4}{-2-0}=2$이므로 변 AB의 수직이등분선은 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고, 선분 AB의 중점 $(-1, 2)$를 지난다.

따라서 변 AB의 수직이등분선의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{2}(x+1)$ $\quad \therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad y=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $\quad (1, 1)$

답 (1, 1)

다른풀이 △ABC의 세 변의 수직이등분선의 교점은 △ABC의 외심이다.

외심에서 세 꼭짓점까지의 거리가 모두 같으므로 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\sqrt{(a-0)^2+(b-4)^2}=\sqrt{(a+2)^2+(b-0)^2}$에서 $\quad a+2b=3$

$\sqrt{(a+2)^2+(b-0)^2}=\sqrt{(a-4)^2+(b-0)^2}$에서 $\quad 12a=12$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=1, b=1 \quad \therefore (1, 1)$

정답 및 풀이 • 94쪽

유제 120-1 두 점 A(−3, 1), B(1, 2)에 대하여 선분 AB의 수직이등분선이 점 $(1, a)$를 지날 때, a의 값을 구하여라.

유제 120-2 두 점 A(0, 3), B(6, 0)에 대하여 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 지나고 직선 AB에 수직인 직선의 y절편을 구하여라.

개념 112 정점을 지나는 직선

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 한 점에서 만날 때, 방정식

$(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0$의 그래프는 실수 k의 값에 관계없이 두 직선

$$ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0$$

의 교점을 지나는 직선이다.

Remark 일반적으로 두 방정식 $f(x, y)=0$, $g(x, y)=0$의 그래프가 만날 때, 방정식 $f(x, y)+k\cdot g(x, y)=0$의 그래프는 실수 k의 값에 관계없이 두 그래프 $f(x, y)=0$, $g(x, y)=0$의 교점을 지난다.

개념 Approach

직선의 방정식의 일차항에 미정계수가 있으면 특별한 직선들을 나타낸다. 예를 들어 직선

$$(1+k)x+(1-k)y+2k=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

을 살펴보자. ㉠을 k에 대하여 정리하면

$$(x+y)+k(x-y+2)=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

(i) ㉡은 x, y에 대한 일차방정식이므로 직선을 나타낸다.

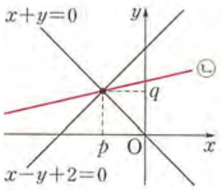
(ii) 직선 $x+y=0$과 직선 $x-y+2=0$의 교점을 $(p,\ q)$라 하면

$$p+q=0,\ p-q+2=0$$

이므로 k의 값에 관계없이 다음이 성립한다.

$$(p+q)+k(p-q+2)=0$$

즉 ㉡은 k의 값에 관계없이 점 $(p,\ q)$를 지난다.



(i), (ii)에서 ㉡은 k의 값에 관계없이 두 직선 $x+y=0$, $x-y+2=0$의 교점을 지나는 직선들을 나타냄을 알 수 있다.

Remark $(x+y)+k(x+y+1)=0 \quad \cdots\cdots ㉢$

과 같이 두 직선 $x+y=0$, $x+y+1=0$이 서로 평행한 경우에는 ㉢을 두 직선의 교점을 지나는 직선이라 말할 수 없으므로 **개념 112**는 두 직선 $ax+by+c=0$과 $a'x+b'y+c'=0$이 한 점에서 만나는 경우에만 생각할 수 있다.

참고로 $x+y+k(x+y+1)=0$은 직선 $x+y=0$ 또는 직선 $x+y=0$에 평행한 직선들을 나타낸다.

개념 Check

직선 $x+2ky+3-4k=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지날 때, 이 점의 좌표를 구하여라.

풀이 주어진 식을 k에 대하여 정리하면 $\quad (2y-4)k+(x+3)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면 $\quad 2y-4=0,\ x+3=0$

$\therefore\ x=-3,\ y=2$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-3,\ 2)$이다.

답 $(-3,\ 2)$

대표유형 121 정점을 지나는 직선

• 개념 112

직선 $(2+k)x+(1+2k)y+1-4k=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 점 $(a,\ b)$를 지날 때, ab의 값을 구하여라.

유형 Guide 'k의 값에 관계없이'라는 표현에서 자연스럽게 'k에 대한 항등식'임을 떠올리고, 식을 k에 대하여 정리할 수 있어야 한다. 즉 주어진 직선의 방정식을 $(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0$ 꼴로 정리한 후, 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점의 좌표를 구한다.

유형 SSEN k의 값에 관계없이 지난다. ⇨ k의 값에 관계없이 성립한다. ⇨ k에 대한 항등식

풀이 $(2+k)x+(1+2k)y+1-4k=0$을 k에 대하여 정리하면

$(x+2y-4)k+(2x+y+1)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$x+2y-4=0,\ 2x+y+1=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=-2,\ y=3$

따라서 $a=-2,\ b=3$이므로

$ab=-6$

답 -6

Remark $ax+b=0$이 x에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow$ $a=0,\ b=0$

$ax+by+c=0$이 $x,\ y$에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow$ $a=0,\ b=0,\ c=0$

$k\cdot f(x,\ y)+g(x,\ y)=0$이 k에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow$ $f(x,\ y)=0,\ g(x,\ y)=0$

$k\cdot$ ■ $+$ ● $=0$이 k에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow$ ■ $=0$, ● $=0$

정답 및 풀이 • 94쪽

유제 121-1 직선 $(3k+1)x-(2k+4)y-4k+2=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구하여라.

유제 121-2 직선 $2(m-1)x+(3m+1)y+m+3=0$이 실수 m의 값에 관계없이 항상 점 P를 지날 때, 점 P와 원점 사이의 거리를 구하여라.

대표유형 122 정점을 지나는 직선의 활용

• 개념 112

직선 $y=m(x+1)+3$이 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 2)$를 잇는 선분 AB와 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

유형 Guide 주어진 직선은 m의 값에 따라 기울기와 y절편이 모두 달라지므로 선분 AB와 만나기 위한 조건을 찾기 어렵다. 그러나 주어진 식을 m에 대한 식으로 정리하여 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 찾으면 기울기를 이용하여 m의 값의 범위를 찾을 수 있다.
이와 같이 미정계수를 포함한 직선의 방정식은 미정계수에 대한 식으로 정리하면 항등식의 성질에 의하여 그 직선이 지나는 정점의 좌표를 구할 수 있다.

유형 SSEN 직선 $m(x-a)+(y-b)=0$ ⊙ m의 값에 관계없이 점 $(a,\ b)$를 지난다.

풀이 $y=m(x+1)+3$을 m에 대하여 정리하면

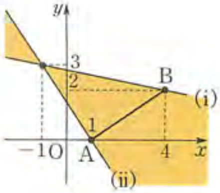
$$m(x+1)+(3-y)=0 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x+1=0,\ 3-y=0$$

$$\therefore x=-1,\ y=3$$

즉 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 3)$을 지난다.
m은 직선 ㉠의 기울기이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 선분 AB와 만나도록 움직여 보면



(i) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{B}(4,\ 2)$를 지날 때,

$$5m+1=0 \qquad \therefore m=-\frac{1}{5}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$을 지날 때,

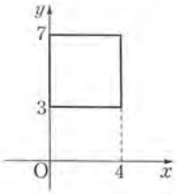
$$2m+3=0 \qquad \therefore m=-\frac{3}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는 $-\frac{3}{2}\le m\le -\frac{1}{5}$

답 $-\frac{3}{2}\le m\le -\frac{1}{5}$

정답 및 풀이 • 94쪽

유제 122-1 오른쪽 그림과 같이 한 변이 y축 위에 있는 정사각형이 있다. 직선 $y=mx+2m$이 이 정사각형과 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하여라.



유제 122-2 직선 $3x+2y=6$이 직선 $y=mx+m-2$와 제1사분면에서 만나도록 하는 모든 정수 m의 값의 합을 구하여라.

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선 중 $a'x+b'y+c'=0$을 제외한 직선의 방정식은

$$(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0 \ (k\text{는 실수})$$

꼴로 나타낼 수 있다.

개념 Approach

일반적으로 한 점에서 만나는 두 직선 $l: ax+by+c=0$, $l': a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 모든 직선의 방정식은 동시에 0은 아닌 임의의 상수 m, n에 대하여

$$m(ax+by+c)+n(a'x+b'y+c')=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

으로 나타내어진다. 이때 직선 ㉠은

(i) $m\neq0$, $n=0$이면 $m(ax+by+c)=0$ $\therefore ax+by+c=0$ ➡ 직선 l

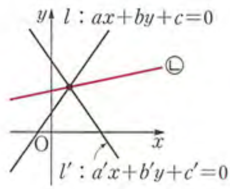
(ii) $m=0$, $n\neq0$이면 $n(a'x+b'y+c')=0$ $\therefore a'x+b'y+c'=0$ ➡ 직선 l'

(iii) $m\neq0$, $n\neq0$이면 두 직선 l, l'의 교점을 지나는 직선 중 l과 l'을 제외한 직선을 나타낸다.

여기서 식을 간단히 하기 위하여 $m\neq0$일 때, ㉠의 양변을 m으로 나누어 $\frac{n}{m}=k$로 놓으면 ㉠은

$$(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

으로 나타내어진다.



이때 $m\neq0$이므로 k가 어떠한 값을 갖더라도 ㉡은 두 직선 l, l'의 교점을 지나는 직선 중 $l': a'x+b'y+c'=0$은 표현할 수 없다.

Remark 두 직선 l, l'의 교점을 지나는 모든 직선은 ㉠ 꼴로 나타낼 수 있고, 두 직선 l, l'의 교점을 지나는 직선 중 l'을 제외한 직선은 ㉡ 꼴로 나타낼 수 있다.

개념 Check

두 직선 $2x-y+5=0$, $x-3y-5=0$의 교점과 원점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

풀이 직선 $x-3y-5=0$은 원점을 지나지 않으므로 구하는 직선의 방정식을

$$(2x-y+5)+k(x-3y-5)=0 \ (k\text{는 실수})$$

으로 놓을 수 있다.

이 직선이 원점을 지나므로 $5-5k=0$ $\therefore k=1$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $2x-y+5+1\cdot(x-3y-5)=0$

$\therefore 3x-4y=0$

답 $3x-4y=0$

두 직선 $3x-4y+6=0$, $x+2y-3=0$의 교점을 지나고 직선 $2x+3y+4=0$에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

유형 Guide 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은 직선 $a'x+b'y+c'=0$을 제외하면 실수 k에 대하여 $(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0$으로 나타낼 수 있다.

유형 SSEN 두 직선 $f(x, y)=0$, $g(x, y)=0$의 교점을 지나는 직선
⭘ $f(x, y)+k\cdot g(x, y)=0$ (k는 실수)

풀이 직선 $x+2y-3=0$은 직선 $2x+3y+4=0$에 수직이 아니므로 두 직선 $3x-4y+6=0$, $x+2y-3=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$3x-4y+6+k(x+2y-3)=0$, 즉

$(3+k)x+(-4+2k)y+6-3k=0$ (k는 실수) …… ㉠

으로 놓을 수 있다. 이 직선과 직선 $2x+3y+4=0$이 서로 수직이므로

$(3+k)\cdot 2+(-4+2k)\cdot 3=0$

$8k-6=0 \qquad \therefore k=\frac{3}{4}$

$k=\frac{3}{4}$을 ㉠에 대입하여 정리하면 구하는 직선의 방정식은

$3x-2y+3=0$

답 $3x-2y+3=0$

다른풀이 연립방정식 $\begin{cases} 3x-4y+6=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases}$을 풀면 $\quad x=0,\ y=\frac{3}{2}$

따라서 두 직선 $3x-4y+6=0$, $x+2y-3=0$의 교점은 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$이다.

한편 직선 $2x+3y+4=0$, 즉 $y=-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$의 기울기가 $-\frac{2}{3}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{3}{2}$이다.

따라서 구하는 직선은 기울기가 $\frac{3}{2}$이고 점 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$을 지나므로

$y-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}x \qquad \therefore 3x-2y+3=0$

정답 및 풀이 • 95쪽

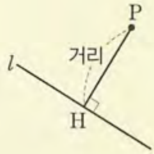
유제 123-1 두 직선 $x+4y-2=0$, $2x+y+3=0$의 교점과 점 $(-2, 3)$을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

유제 123-2 두 직선 $2x-3y+1=0$, $3x+2y-5=0$의 교점을 지나고 직선 $x-2y-6=0$과 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

개념 114 점과 직선 사이의 거리

1 점과 직선 사이의 거리

평면 위의 한 점 P에서 점 P를 지나지 않는 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 PH의 길이를 **점 P와 직선 l 사이의 거리**라 한다.



Remark 점 P와 직선 l 사이의 거리는 직선 l 위의 점 중에서 점 P와의 거리가 최소인 경우를 말하는 것으로 일반적으로 수직 거리가 된다.

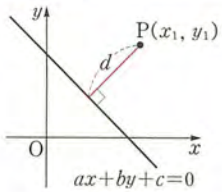
2 좌표평면에서 점과 직선 사이의 거리

점 $P(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

특히 원점과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

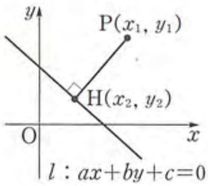


Remark 거리는 distance의 첫 글자를 따서 주로 d로 나타낸다.

개념 Approach

점 $P(x_1,\ y_1)$과 직선 $l : ax+by+c=0\ (a\neq0,\ b\neq0)$ 사이의 거리를 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 $H(x_2,\ y_2)$라 하면 직선 l의 기울기가 $-\frac{a}{b}$이고, $l\perp\overline{PH}$이므로 직선 PH의 기울기는 $\frac{b}{a}$이다. 따라서 직선 PH의 방정식은



$$y-y_1=\frac{b}{a}(x-x_1)$$

이때 점 H는 직선 PH 위의 점이므로

$$y_2-y_1=\frac{b}{a}(x_2-x_1)$$

$$\therefore b(x_2-x_1)-a(y_2-y_1)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 H는 직선 l 위의 점이기도 하므로

$$ax_2+by_2+c=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 변형하면

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+ax_1+by_1+c=0$$

$$\therefore a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=-(ax_1+by_1+c) \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉢을 연립하여 x_2-x_1, y_2-y_1을 각각 구하면

$$x_2-x_1=\frac{-a(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2},\quad y_2-y_1=\frac{-b(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$$

그런데 $\overline{\mathrm{PH}}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$이므로

$$\overline{\mathrm{PH}}^2=\left\{\frac{-a(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}\right\}^2+\left\{\frac{-b(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}\right\}^2$$

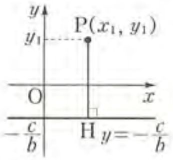
$$=\frac{(ax_1+by_1+c)^2}{a^2+b^2}$$

$$\therefore \overline{\mathrm{PH}}=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

이것은 $a=0$, $b\neq0$ 또는 $a\neq0$, $b=0$일 때에도 성립한다.

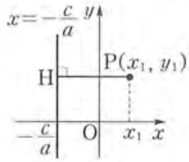
(i) $a=0$, $b\neq0$일 때, $y=-\frac{c}{b}$

$$\therefore \overline{\mathrm{PH}}=\left|y_1+\frac{c}{b}\right|=\frac{|by_1+c|}{\sqrt{b^2}}$$



(ii) $a\neq0$, $b=0$일 때, $x=-\frac{c}{a}$

$$\therefore \overline{\mathrm{PH}}=\left|x_1+\frac{c}{a}\right|=\frac{|ax_1+c|}{\sqrt{a^2}}$$



개념 Check

다음에 주어진 점과 직선 사이의 거리를 구하여라.

(1) 점 $(0,\ 0)$, 직선 $4x-3y+5=0$

(2) 점 $(-1,\ 3)$, 직선 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

풀이 (1) $\frac{|5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{5}{5}=1$

(2) $y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$에서 $x+2y+5=0$이므로 구하는 거리는

$$\frac{|-1+2\cdot3+5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

답 (1) 1　(2) $2\sqrt{5}$

대표유형 124 점과 직선 사이의 거리

• 개념 114

다음에 답하여라.

(1) 제1사분면 위의 점 $(a,\ 2)$와 직선 $3x+4y+1=0$ 사이의 거리가 3일 때, a의 값을 구하여라.

(2) 직선 $12x-5y-1=0$으로부터의 거리가 2인 y축 위의 점의 좌표를 구하여라.

12 직선의 방정식

유형 Guide 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하면 쉽게 해결되는 문제이다. (2)에서 y축 위의 점은 x좌표가 0이므로 구하는 점을 $(0,\ a)$로 놓고 공식을 이용한다.

유형 SSEN 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 ⊙ $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

풀이 (1) 제1사분면 위의 점 $(a,\ 2)$와 직선 $3x+4y+1=0$ 사이의 거리가 3이므로

$\dfrac{|3a+4\cdot 2+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3,\qquad |3a+9|=15$

$3a+9=\pm 15,\qquad 3a=6$ 또는 $3a=-24$

$\therefore a=2$ 또는 $a=-8$

점 $(a,\ 2)$가 제1사분면 위의 점이므로 $\quad a>0$

$\therefore a=2$

(2) 구하는 점의 좌표를 $(0,\ a)$라 하면 이 점과 직선 $12x-5y-1=0$ 사이의 거리가 2이므로

$\dfrac{|-5a-1|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=2,\qquad |5a+1|=26$

$5a+1=\pm 26,\qquad 5a=25$ 또는 $5a=-27$

$\therefore a=5$ 또는 $a=-\dfrac{27}{5}$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\quad (0,\ 5),\ \left(0,\ -\dfrac{27}{5}\right)$

답 (1) 2 (2) $(0,\ 5),\ \left(0,\ -\dfrac{27}{5}\right)$

정답 및 풀이 • 95쪽

유제 124-1 직선 $x-2y+5=0$에 수직이고 원점으로부터의 거리가 $\sqrt{5}$인 직선의 방정식을 구하여라.

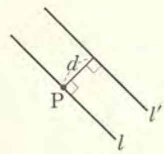
유제 124-2 직선 $x+(k+1)y+k=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 점 P를 지날 때, 점 P와 직선 $3x+y-4=0$ 사이의 거리를 구하여라.

개념 115

평행한 두 직선 사이의 거리

1 평행한 두 직선 사이의 거리

평면 위의 두 직선 l, l'이 서로 평행할 때, 직선 l 위의 임의의 점 P와 직선 l' 사이의 거리 d를 **평행한 두 직선 l과 l' 사이의 거리**라 한다.



Remark 두 직선 l과 l' 사이의 거리는 l과 l' 사이의 최단 거리인 수직 거리를 뜻한다.

2 좌표평면에서 평행한 두 직선 사이의 거리

좌표평면에서 평행한 두 직선 $l : ax+by+c=0$과 $l' : ax+by+c'=0$ 사이의 거리를 구하는 방법으로 다음 두 가지가 주로 쓰인다.

① 직선 위의 한 점을 이용
직선 l 위의 한 점과 직선 l' 사이의 거리를 구한다.

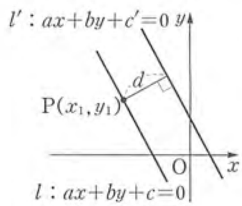
② 두 직선 l과 l' 사이의 거리 공식을 이용
평행한 두 직선 l과 l' 사이의 거리 d는 $\quad d=\dfrac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Remark ①에서 직선 l 위의 어떤 점을 잡아도 상관없지만, 좌표가 간단한 정수인 점이나 x축 또는 y축과의 교점을 이용하면 계산이 간편하다.

개념 Approach

평행한 두 직선 $l : ax+by+c=0$과 $l' : ax+by+c'=0$ 사이의 거리를 구해 보자.

오른쪽 그림에서 직선 l 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$과 직선 l' 사이의 거리 d는



$$d=\frac{|ax_1+by_1+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

그런데 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$은 직선 l 위의 점이므로

$$ax_1+by_1+c=0 \qquad \therefore ax_1+by_1=-c$$

따라서 ㉠에서 $\quad d=\dfrac{|c'-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(=\dfrac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

Remark 두 직선 l, l'은 서로 평행하므로 $\quad l : ax+by+c=0,\ l' : ax+by+c'=0$

다름
같음
같음

개념 Check

평행한 두 직선 $2x-y-3=0$, $2x-y+5=0$ 사이의 거리를 구하여라.

풀이 평행한 두 직선 $2x-y-3=0$, $2x-y+5=0$ 사이의 거리는 직선 $2x-y-3=0$ 위의 점 $(0,\ -3)$과 직선 $2x-y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2\cdot 0-(-3)+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$

답 $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

평행한 두 직선 사이의 거리

• 개념 115

평행한 두 직선 $x+3y-7=0$, $x+ay+b=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$일 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라. (단, $b>0$)

유형 Guide 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 임의의 점과 직선 l' 사이의 거리와 같음을 이용한다. 이때 직선 l 위의 점을 택할 때에는 좌표가 간단한 정수인 점을 잡는다.

유형 SSEN 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리 ➔ 직선 l 위의 한 점과 직선 l' 사이의 거리

풀이 두 직선 $x+3y-7=0$, $x+ay+b=0$이 서로 평행하므로

$$\frac{1}{1}=\frac{3}{a}\neq\frac{-7}{b} \qquad \therefore a=3,\ b\neq-7 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

두 직선 $x+3y-7=0$, $x+3y+b=0$ 사이의 거리는 직선 $x+3y-7=0$ 위의 한 점 $(1,\ 2)$와 직선 $x+3y+b=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|1+3\cdot2+b|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}, \qquad |7+b|=10$$

$$7+b=\pm10 \qquad \therefore b=3 \text{ 또는 } b=-17$$

$$\therefore b=3\ (\because b>0) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $a+b=6$

답 6

정답 및 풀이 • 95쪽

유제 125-1 두 직선 $x-2y+1=0$, $x-2y+6=0$ 사이의 거리를 구하여라.

유제 125-2 두 직선 $2x+ay-5=0$, $x-3y+2=0$이 서로 평행할 때, 실수 a의 값과 두 직선 사이의 거리를 각각 구하여라.

좌표평면 위의 두 점 $A(3,\ -4)$, $B(4,\ 4)$에 대하여 삼각형 OAB의 넓이를 구하여라. (단, O는 원점이다.)

유형 Guide 도형 문제 해결의 출발은 문제에 주어진 상황을 그림으로 나타내는 것이라 해도 과언이 아니다. 특히 좌표가 주어진 문제는 좌표평면을 그려서 생각해 보면 의외로 쉽게 문제에 접근할 수 있다. 삼각형의 넓이는 밑변의 길이와 높이에 의해 결정되는데, 밑변을 선분 OA로 하면 높이는 점 B와 직선 OA 사이의 거리이다. 이때 선분 OA의 길이는 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 구하고, 높이는 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하여 구한다.

유형 SSEN 좌표평면 위의 삼각형의 높이 ⊙ 점과 직선 사이의 거리 공식 이용

풀이 선분 OA의 길이는

$$\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$$

직선 OA의 방정식은

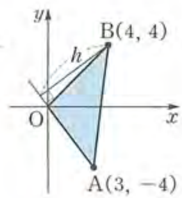
$$y=-\frac{4}{3}x,\ 즉\ 4x+3y=0$$

점 B와 직선 OA 사이의 거리를 h라 하면

$$h=\frac{|4\cdot4+3\cdot4|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{28}{5}$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\frac{28}{5}=14$$



답 14

Remark △ABC의 넓이의 기본 ➡ $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times$(밑변의 길이)$\times$(높이)

정답 및 풀이 • 96쪽

유제 126-1 직선 $x-3y+6=0$ 위에 길이가 $\sqrt{10}$인 선분 AB가 있다. 점 $C(-2,\ -2)$에 대하여 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.

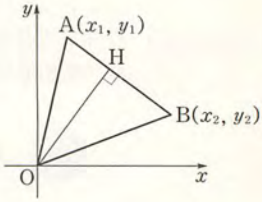
유제 126-2 세 점 $A(0,\ 2)$, $B(5,\ 4)$, $C(4,\ 8)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.

Plus 유제 126-3 세 직선 $y=x$, $y=2x$, $2x+y=12$로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하여라.

특강 116

좌표평면 위의 삼각형의 넓이

점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하면 좌표평면 위에서 세 꼭짓점의 좌표가 주어진 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.



오른쪽 그림과 같이 세 점 $O(0,\ 0)$, $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB에서

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

직선 AB의 방정식은

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

이므로 $\quad (y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0$

$$\therefore (y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y-(x_1y_2-x_2y_1)=0$$

한편 원점 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 OAB의 높이, 즉 $\overline{OH}$의 길이는 원점 O와 직선 AB 사이의 거리이므로

$$\overline{OH}=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이를 S라 하면 다음이 성립한다.

$$S=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{OH}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$

Remark $(x_1,\quad y_1)$

$(x_2,\quad y_2)$

$x_2y_1 \quad x_1y_2 \Rightarrow S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$ ← 절댓값이므로 빼는 순서는 상관없다.

대표유형 126을 위의 공식을 이용하여 풀어 보자.

원점 O와 두 점 $A(3,\ -4)$, $B(4,\ 4)$에 대하여

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}|3\cdot4-(-4)\cdot4|=\frac{1}{2}\cdot28=14$$

이므로 앞에서 구한 삼각형의 넓이와 서로 같음을 확인할 수 있다.

Remark 세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는 한 꼭짓점이 원점이 되도록 삼각형을 평행이동한 후 공식을 적용하여 구할 수 있다.

개념 Check

세 점 $O(0,\ 0)$, $A(-2,\ 4)$, $B\left(3,\ \frac{3}{2}\right)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이를 구하여라.

풀이 $\triangle OAB=\frac{1}{2}\left|-2\cdot\frac{3}{2}-4\cdot3\right|=\frac{1}{2}\cdot15=\frac{15}{2}$ 답 $\frac{15}{2}$

대표유형 127 자취의 방정식

• 개념 114

두 직선 $4x+3y-1=0$, $3x-4y-2=0$으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식을 구하여라.

유형 Guide 자취의 방정식을 구할 때에는 구하려는 도형 위의 임의의 점의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓고 주어진 조건을 이용하여 x, y 사이의 관계식을 구하면 된다.

유형 SSEN **자취 문제 ○ 조건을 만족시키는 점의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓고 관계식을 구한다.**

풀이 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 점 P에서 두 직선

$4x+3y-1=0$, $3x-4y-2=0$

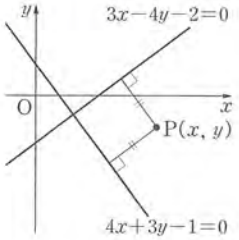
에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|4x+3y-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|3x-4y-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

$$|4x+3y-1|=|3x-4y-2|$$

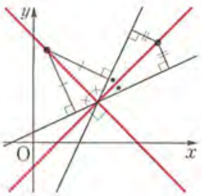
따라서 $4x+3y-1=\pm(3x-4y-2)$이므로

$x+7y+1=0$ 또는 $7x-y-3=0$



답 $x+7y+1=0$ 또는 $7x-y-3=0$

Remark 오른쪽 그림과 같이 좌표평면에서 한 점에서 만나는 두 직선으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취는 두 직선이 이루는 각의 이등분선이다. 이때 두 직선이 한 점에서 만나면 두 쌍의 맞꼭지각이 생기므로 두 직선으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취도 서로 수직인 두 개의 직선으로 나타난다.



정답 및 풀이 • 96쪽

유제 127-1 직선 $2x+y-1=0$ 위의 임의의 점 P에 대하여 선분 OP의 중점 M이 나타내는 자취의 방정식을 구하여라. (단, O는 원점이다.)

Plus 유제 127-2 두 직선 $x+2y-1=0$, $2x+y-3=0$이 만나서 생기는 예각의 이등분선의 방정식을 구하여라.

정답 및 풀이 • 97쪽

STEP 1 유형 Training

01 직선 $(a-2)x-y+b+1=0$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$이고, 점 $(-2,\ 2)$를 지날 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

02 두 점 $A(1,\ -1)$, $B(3,\ 5)$에 대하여 선분 AB를 $5:3$으로 외분하는 점과 점 $(5,\ 9)$를 지나는 직선의 x절편은?

① 3 ② $\frac{16}{5}$ ③ $\frac{17}{5}$ ④ $\frac{18}{5}$ ⑤ $\frac{19}{5}$

03 직선 $x+ay+b=0$이 y축에 평행하고 제1사분면과 제4사분면을 지날 때, 직선 $bx+(a+2)y-1=0$이 지나는 사분면을 모두 구하여라.

서술형

04 직선 $x-(a+1)y+a=0$과 직선 $ax-2ay+1=0$이 두 개 이상의 교점을 가질 때, 실수 a의 값을 구하여라.

05 직선 $3(k+1)x-(k+4)y-3k+15=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 P라 할 때, 기울기가 -2이고 점 P를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

서술형

06 직선 $y=mx+2m+1$이 두 점 $A(1,\ 5)$, $B(6,\ 3)$을 잇는 선분 AB와 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

07 두 직선 $2x-y+5=0$, $x+y-2=0$의 교점과 점 $(3,\ 5)$를 지나는 직선이 점 $(a,\ -1)$을 지날 때, a의 값은?

① -11 ② -9 ③ -7 ④ -5 ⑤ -3

08 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$의 교점과 직선 $4x-2y=1$ 사이의 거리는?

① $\frac{\sqrt{5}}{15}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{12}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

09 점 $(4,\ 1)$을 지나고 원점으로부터의 거리가 1인 직선의 방정식을 구하여라.

서술형

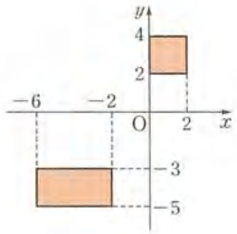
10 세 점 $\mathrm{A}(5,\ 0)$, $\mathrm{B}(-3,\ 3)$, $\mathrm{C}(2,\ 5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.

11 점 $\mathrm{A}(2,\ -1)$과 직선 $2x+4y-3=0$ 위를 움직이는 점 P를 잇는 선분 AP를 $2:1$로 내분하는 점의 자취의 방정식을 구하여라.

STEP 2 실전 Application

12 세 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 0)$, $\mathrm{C}(4,\ 2)$에 대하여 점 B를 지나면서 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 구하여라.

13 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 두 개의 직사각형이 있다. 직선 $ax+by+8=0$이 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분할 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?



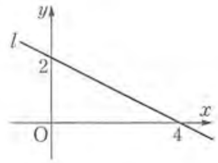
① -1　　② 0　　③ 1
④ 2　　⑤ 3

교육청기출

14 그림과 같이 두 점 $(4,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지나는 직선 l이 있다. 직선 l 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에 대하여 등식

$$x^2+ay^2+bx+c=0$$

이 성립하도록 실수 a, b, c를 정할 때, $|a|+|b|+|c|$의 값을 구하여라.



교육청기출

15 세 직선

$$l : x-ay+2=0,\quad m : 4x+by+2=0,\quad n : x-(b-3)y-2=0$$

에 대하여 두 직선 l과 m은 수직이고 두 직선 l과 n은 평행할 때, a^2+b^2의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수이다.)

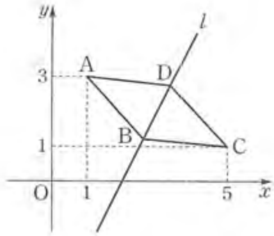
16 세 직선 $x-y=0$, $x+2y-4=0$, $2x-ky-10=0$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?

① $-\frac{11}{2}$　　② -6　　③ $-\frac{13}{2}$　　④ -7　　⑤ $-\frac{15}{2}$

17 삼각형의 각 꼭짓점에서 대변에 그은 수선은 한 점에서 만나고, 이 점을 삼각형의 수심이라 한다. 세 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 수심의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

교육청기출

18 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 마름모 ABCD가 있다. 두 점 A, C의 좌표가 각각 $(1,\ 3)$, $(5,\ 1)$이고, 두 점 B, D를 지나는 직선 l의 방정식이 $2x+ay+b=0$일 때, ab의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수이다.)



서술형

19 직선 $ax+y+2a+2=0$이 두 점 $A(-1,\ 4)$, $B(4,\ 1)$ 사이를 지나도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

20 좌표평면에서 원점과 직선 $x-y-2+k(x+y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$라 할 때, $f(k)$의 최댓값은? (단, k는 실수이다.)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

STEP 3 심화 Forwarding

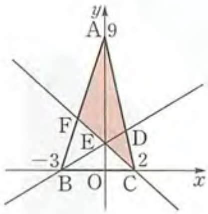
21 세 점 $O(0,\ 0)$, $A(0,\ 6)$, $B(3,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이를 S라 할 때, 다음이 성립한다.

> (가) 선분 AB 위의 점 P에 대하여 삼각형 BPO의 넓이는 $\frac{1}{3}S$이다.
>
> (나) 선분 OA 위의 점 Q에 대하여 삼각형 BQO의 넓이는 $\frac{1}{4}S$이다.

이때 두 직선 OP, BQ의 교점의 좌표를 구하여라.

서술형

22 오른쪽 그림과 같이 세 점 A$(0,\ 9)$, B$(-3,\ 0)$, C$(2,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. $\overline{\mathrm{AC}}$를 $3:1$로 내분하는 점을 D, 직선 BD와 y축의 교점을 E, 직선 CE와 $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점을 F라 할 때, 삼각형 AFC의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 몇 배인지 구하여라.



23 실수 k에 대하여 직선 l의 방정식이 $k(x+y+1)+(x-y-3)=0$일 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

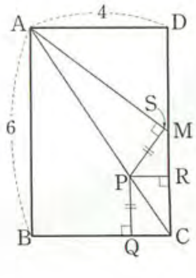
ㄱ. 직선 l은 항상 점 $(1,\ -2)$를 지난다.
ㄴ. 직선 $x+y+1=0$과 평행한 직선 l은 존재하지 않는다.
ㄷ. 두 점 $(1,\ 2)$, $(2,\ -1)$을 지나는 직선과 수직인 직선 l이 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

24 임의의 실수 k에 대하여 두 직선 $x+ky-3=0$, $kx-y+3k=0$의 교점을 P라 할 때, 점 P의 자취의 길이는 $p\pi$이다. 이때 p의 값을 구하여라.

교육청기출

25 그림과 같이 가로의 길이가 4, 세로의 길이가 6인 직사각형 ABCD가 있다. 선분 DC의 중점을 M이라 하고, 대각선 AC 위의 임의의 한 점 P에서 세 직선 BC, DC, AM에 내린 수선의 발을 각각 Q, R, S라 하자. 점 P가 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PS}}$를 만족시킬 때, 선분 PR의 길이는 $\dfrac{q}{p}$이다. 이때 $p+q$의 값을 구하여라.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



13

원의 방정식

동전, 깡통, 맨홀 뚜껑, 자동차 바퀴 등 원은 일상생활에서 가장 많이 쓰이는 도형 중 하나이다. 원은 평면 위의 한 점으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취이다. 여기서 '한 점'을 '중심'이라 하고, '같은 거리'를 '반지름의 길이'라 한다. 원을 좌표평면에 도입하면 원의 중심과 반지름의 길이를 이용하여 그 방정식을 구할 수 있는데, 이때 원의 방정식은 x, y에 관한 이차방정식이 된다.

이 단원에서는 원의 방정식에 대하여 알아보자. 또 좌표평면 위에서 두 원의 위치 관계, 원과 직선의 위치 관계에 대하여 살펴보자.

● 한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

39 원의 방정식

- 원의 방정식의 표준형과 일반형을 알고, 주어진 조건을 이용하여 원의 방정식을 구할 수 있다.

40 두 원의 위치 관계

- 두 원의 위치 관계와 그에 따른 조건을 이해한다.

41 원과 직선의 위치 관계

- 원과 직선의 위치 관계를 이해하고, 원과 직선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.

42 원의 접선의 방정식

- 주어진 조건을 이용하여 원의 접선의 방정식을 구할 수 있다.

43 두 원의 공통접선

- 두 원의 위치 관계에 따른 공통접선을 이해하고, 공통접선의 길이를 구할 수 있다.

개념 & 특강	대표유형 & 유제		
117 원의 방정식의 표준형	128 원의 방정식의 표준형		
118 원의 방정식의 일반형	129 원의 방정식의 일반형	130 세 점을 지나는 원의 방정식	
특강 119 여러 가지 원의 방정식	131 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식	132 좌표축에 접하는 원의 방정식	133 자취의 방정식
120 두 원의 위치 관계	134 두 원의 위치 관계		
121 공통현의 방정식	135 공통현의 방정식	136 공통현의 길이	
122 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식	137 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식		
123 원과 직선의 위치 관계 – 판별식 이용	138 원과 직선의 위치 관계 (1)		
124 원과 직선의 위치 관계 – 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용	139 원과 직선의 위치 관계 (2)	140 현의 길이	141 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최대 · 최소
125 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식	142 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식		
126 원 위의 점에서의 접선의 방정식	143 원 위의 점에서의 접선의 방정식		
127 원 밖의 점에서 원에 그은 접선의 방정식	144 원 밖의 점에서 원에 그은 접선의 방정식		
특강 128 원의 접선의 길이	145 원의 접선의 길이		
129 공통접선			
특강 130 공통접선의 길이	146 공통접선의 길이		

개념 117 원의 방정식의 표준형

중심의 좌표와 반지름의 길이가 주어진 원의 방정식은 다음과 같다.

(1) 중심이 점 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

(2) 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$x^2+y^2=r^2$$

Remark 원의 특징인 중심의 좌표와 반지름의 길이를 바로 알 수 있는 (1)의 형태를 **원의 방정식의 표준형**이라 한다.

개념 Approach

한 평면 위에서 한 정점으로부터 일정한 거리에 있는 점의 모임을 원이라고 한다. 이때 이 정점을 원의 중심, 일정한 거리를 원의 반지름의 길이라 한다.

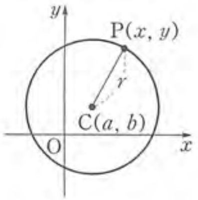
좌표평면 위에서 점 $C(a,\ b)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $r(r>0)$인 원의 방정식을 구해 보자.

(i) 원 위의 임의의 점을 $P(x,\ y)$라 하면 $\overline{CP}=r$이므로

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

양변을 제곱하면

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$



(ii) 거꾸로 ㉠을 만족시키는 점을 $P(x,\ y)$라 하면 $\overline{CP}=r$이므로 점 P는 중심이 $C(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원 위에 있다.

(i), (ii)에서 ㉠을 점 $C(a,\ b)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식이라 한다.

특히 좌표평면 위에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은 ㉠에서 $a=0,\ b=0$인 경우이므로 $\quad x^2+y^2=r^2$

Remark '한 평면 위'라는 조건이 없으면 한 정점으로부터 일정한 거리에 있는 점의 모임은 '구'가 된다.

개념 Check

다음 원의 방정식을 구하여라.

(1) 중심이 점 $(2,\ -1)$이고 반지름의 길이가 3인 원

(2) 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$인 원

풀이 (1) $(x-2)^2+\{y-(-1)\}^2=3^2 \quad \therefore (x-2)^2+(y+1)^2=9$

(2) $x^2+y^2=(\sqrt{6})^2 \quad \therefore x^2+y^2=6$

답 (1) $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ (2) $x^2+y^2=6$

대표유형 128 원의 방정식의 표준형

• 개념 117

중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 $(1,\ 1)$, $(-1,\ 5)$를 지나는 원의 방정식을 구하여라.

유형 Guide 원의 중심에 대한 조건이 주어져 있으므로 원의 방정식의 표준형을 이용하여 푼다. 이때 중심이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a)$로 놓고 식을 세우면 계산이 간편하다.

유형 SSEN 원의 중심에 대한 조건이 주어지면 ⊙ 원의 방정식의 표준형 이용!

풀이 원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a)^2=r^2$$

이 원이 두 점 $(1,\ 1)$, $(-1,\ 5)$를 지나므로

$$(1-a)^2+(1-a)^2=r^2 \qquad \therefore 2a^2-4a+2=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$(-1-a)^2+(5-a)^2=r^2 \qquad \therefore 2a^2-8a+26=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=6,\ r^2=50$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-6)^2+(y-6)^2=50$$

답 $(x-6)^2+(y-6)^2=50$

다른풀이 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a)$라 하면 점 $(a,\ a)$에서 두 점 $(1,\ 1)$, $(-1,\ 5)$에 이르는 거리가 같으므로

$$\sqrt{(a-1)^2+(a-1)^2}=\sqrt{(a+1)^2+(a-5)^2}$$

> 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$$2a^2-4a+2=2a^2-8a+26$$

$$4a=24 \qquad \therefore a=6$$

즉 원의 중심의 좌표는 $(6,\ 6)$이고, 원의 반지름의 길이는 두 점 $(6,\ 6)$, $(1,\ 1)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(1-6)^2+(1-6)^2}=5\sqrt{2}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-6)^2+(y-6)^2=50$$

정답 및 풀이 • 104쪽

유제 128-1 중심이 y축 위에 있고 두 점 $(-2,\ 0)$, $(2,\ 2)$를 지나는 원의 방정식을 구하여라.

유제 128-2 원 $(x+4)^2+(y-2)^2=1$과 중심이 같고 점 $(-2,\ 1)$을 지나는 원의 방정식을 구하여라.

개념 118 원의 방정식의 일반형

x, y에 대한 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2-4C>0)$은

$$\text{중심의 좌표} : \left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right),\ \text{반지름의 길이} : \frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$$

인 원을 나타낸다. 이때 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$을 **원의 방정식의 일반형**이라 한다.

Remark 일반형으로 주어진 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이는 원의 방정식을 표준형으로 변형하여 구한다.

개념 Approach

(i) 원의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$의 좌변을 전개하여 정리하면

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

여기서 $-2a=A$, $-2b=B$, $a^2+b^2-r^2=C$라 하면

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0\ (A,\ B,\ C\text{는 상수}) \quad \cdots\cdots ㉠$$

꼴로 나타낼 수 있다.

즉 원의 방정식은 x^2의 계수와 y^2의 계수가 서로 같고, xy항이 없는 x, y에 대한 이차방정식이다.

(ii) 거꾸로 ㉠을 x, y에 대한 완전제곱식의 합의 꼴로 변형하면

$$\left\{x^2+Ax+\left(\frac{A}{2}\right)^2\right\}+\left\{y^2+By+\left(\frac{B}{2}\right)^2\right\}=\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2-C$$

$$\therefore \left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$$

따라서 $A^2+B^2-4C>0$이면 방정식 ㉠은

$$\text{중심의 좌표가} \left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right),\ \text{반지름의 길이가}\ \frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$$

인 원의 방정식이 된다.

(i), (ii)에서 방정식 ㉠을 원의 방정식의 일반형이라 한다.

참고로 $A^2+B^2-4C=0$이면 ㉠은 한 점 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$를 나타내고, $A^2+B^2-4C<0$이면 ㉠을 만족시키는 점 $(x,\ y)$는 존재하지 않는다.

Remark 방정식 ㉠이 나타내는 도형을 $A^2+B^2-4C>0$일 때 실원, $A^2+B^2-4C=0$일 때 점원, $A^2+B^2-4C<0$일 때 허원이라 한다. 보통 원이라고 하면 $A^2+B^2-4C>0$인 경우, 즉 실원인 경우만 말한다.

개념 **Check 1**

다음 방정식이 나타내는 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 각각 구하여라.

(1) $x^2+y^2+2x=0$ (2) $x^2+y^2-6x+4y-3=0$

풀이 (1) 방정식 $x^2+y^2+2x=0$을 변형하면

$(x^2+2x+1)+y^2=1$

$\therefore (x+1)^2+y^2=1$

따라서 중심의 좌표는 $(-1,\ 0)$, 반지름의 길이는 1이다.

(2) 방정식 $x^2+y^2-6x+4y-3=0$을 변형하면

$(x^2-6x+9)+(y^2+4y+4)=16$

$\therefore (x-3)^2+(y+2)^2=16$

따라서 중심의 좌표는 $(3,\ -2)$, 반지름의 길이는 4이다.

답 (1) 중심의 좌표 : $(-1,\ 0)$, 반지름의 길이 : 1
(2) 중심의 좌표 : $(3,\ -2)$, 반지름의 길이 : 4

개념 **Check 2**

다음 방정식이 나타내는 도형이 원이 되도록 실수 k의 값의 범위를 정하여라.

(1) $x^2+y^2-8x+4y+k=0$ (2) $x^2+y^2+4kx+6ky+14k^2-k-6=0$

풀이 (1) 방정식 $x^2+y^2-8x+4y+k=0$을 변형하면

$(x-4)^2+(y+2)^2=20-k$

이 방정식이 나타내는 도형이 원이 되려면

$20-k>0 \qquad \therefore k<20$

(2) 방정식 $x^2+y^2+4kx+6ky+14k^2-k-6=0$을 변형하면

$(x+2k)^2+(y+3k)^2=-k^2+k+6$

이 방정식이 나타내는 도형이 원이 되려면

$-k^2+k+6>0, \qquad k^2-k-6<0$

$(k+2)(k-3)<0 \qquad \therefore -2<k<3$

답 (1) $k<20$ (2) $-2<k<3$

다음에 답하여라.

(1) 원 $x^2+y^2+2ax-6y+5=0$의 중심의 좌표가 $(-4,\ b)$이고 반지름의 길이가 r일 때, 실수 $a,\ b,\ r$의 값을 각각 구하여라.

(2) $x,\ y$에 대한 이차방정식 $x^2+y^2-6x+2y+k^2-5k=0$이 나타내는 도형이 반지름의 길이가 2 이상인 원이 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하여라.

유형 Guide 원의 방정식이 일반형으로 주어진 경우, 원의 중심의 좌표 또는 반지름의 길이를 구하려면 먼저 원의 방정식을 표준형으로 변형해야 한다.

유형 SSEN **원의 중심과 반지름의 길이 ⊙ 원의 방정식을 표준형으로 변형하여 구한다.**

풀이 (1) 방정식 $x^2+y^2+2ax-6y+5=0$을 변형하면

$$(x+a)^2+(y-3)^2=a^2+4$$

이 원의 중심의 좌표는 $(-a,\ 3)$이므로

$$-a=-4,\ 3=b \qquad \therefore a=4,\ b=3$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{a^2+4}$이므로

$$r=\sqrt{4^2+4}=2\sqrt{5}$$

(2) 방정식 $x^2+y^2-6x+2y+k^2-5k=0$을 변형하면

$$(x-3)^2+(y+1)^2=-k^2+5k+10$$

이 방정식이 나타내는 도형이 반지름의 길이가 2 이상인 원이 되려면

$$\sqrt{-k^2+5k+10}\ge 2$$

양변을 제곱하면

$$-k^2+5k+10\ge 4, \qquad k^2-5k-6\le 0$$

$$(k+1)(k-6)\le 0 \qquad \therefore -1\le k\le 6$$

따라서 정수 k는 $-1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 6$의 8개이다.

답 (1) $a=4,\ b=3,\ r=2\sqrt{5}$ (2) 8

정답 및 풀이 • 104쪽

유제 129-1 원 $x^2+y^2+4x-8y+a=0$의 중심의 좌표가 $(b,\ c)$이고 반지름의 길이가 5일 때, 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

유제 129-2 $x,\ y$에 대한 이차방정식 $x^2+y^2+8x+2ky+10k=0$이 나타내는 도형이 넓이가 9π인 원이 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱을 구하여라.

세 점 P(0, -6), Q(4, 2), R(7, 1)을 지나는 원의 방정식을 구하여라.

유형 Guide 원의 중심이나 반지름에 대한 조건이 없으면 원의 방정식의 일반형을 이용한다. 즉 구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고, 주어진 세 점의 좌표를 대입하여 상수 A, B, C의 값을 구한다.

유형 SSEN 원 위의 세 점이 주어지면 ⊙ 원의 방정식의 일반형 이용!

풀이 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고 세 점 P, Q, R의 좌표를 각각 대입하면

$36-6B+C=0 \quad \therefore 6B-C=36$

$16+4+4A+2B+C=0 \quad \therefore 4A+2B+C=-20$

$49+1+7A+B+C=0 \quad \therefore 7A+B+C=-50$

위의 세 식을 연립하여 풀면 $A=-8,\ B=6,\ C=0$

따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2-8x+6y=0$

답 $x^2+y^2-8x+6y=0$

다른풀이 세 점 P(0, -6), Q(4, 2), R(7, 1)을 지나는 원은 △PQR의 외접원이다.

따라서 원의 중심을 C(a, b)로 놓으면 $\overline{CP}=\overline{CQ}=\overline{CR}$이므로 $\overline{CP}^2=\overline{CQ}^2=\overline{CR}^2$

$\overline{CP}^2=(0-a)^2+(-6-b)^2=a^2+b^2+12b+36,$

$\overline{CQ}^2=(4-a)^2+(2-b)^2=a^2+b^2-8a-4b+20,$

$\overline{CR}^2=(7-a)^2+(1-b)^2=a^2+b^2-14a-2b+50$

$\overline{CP}^2=\overline{CQ}^2$에서 $a+2b=-2$

$\overline{CQ}^2=\overline{CR}^2$에서 $3a-b=15$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=-3$

이때 $\overline{CP}=\sqrt{(-4)^2+(-6+3)^2}=5$에서 구하는 원은 중심의 좌표가 (4, -3)이고 반지름의 길이가 5인 원이므로 그 방정식은

$(x-4)^2+(y+3)^2=25$

Remark 위의 두 풀이에서 답이 각각 $x^2+y^2-8x+6y=0$, $(x-4)^2+(y+3)^2=25$이다.
언뜻 다르게 보이지만 계산해 보면 두 방정식이 같은 식임을 알 수 있다. 이와 같이 구하는 원의 방정식은 표준형과 일반형 중 어떤 형식으로 답해도 좋다.

정답 및 풀이 • 104쪽

유제 130-1 세 점 (-1, -1), (0, 2), (1, 1)을 지나는 원의 반지름의 길이를 구하여라.

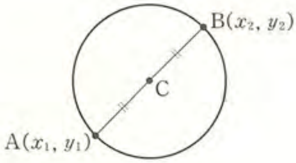
유제 130-2 네 점 (7, 4), (-5, 10), (-1, -2), (1, a)가 한 원 위에 있도록 하는 a의 값을 모두 구하여라.

여러 가지 원의 방정식

특수한 조건을 만족시키는 원의 방정식에 대하여 알아보자.

1 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식

오른쪽 그림과 같이 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원은 $\overline{AB}$의 중점을 중심으로 하고, 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}$이다.



따라서 이 원의 중심을 C, 반지름의 길이를 r라 하면

$$C\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right),\ r=\frac{1}{2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

이므로 표준형을 이용하여 원의 방정식을 구한다.

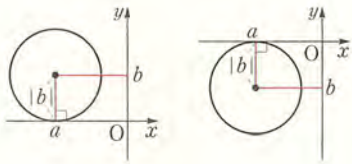
2 좌표축에 접하는 원의 방정식

좌표축에 접하는 원의 방정식은 중심의 좌표와 반지름의 길이 사이의 관계를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

(1) x축에 접하는 원의 방정식

중심이 (a, b)인 원이 x축에 접하면

$$\begin{aligned}(\text{반지름의 길이}) &= |(\text{중심의 } y\text{좌표})| \\ &= |b|\end{aligned}$$



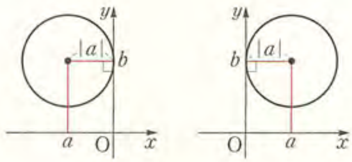
이므로 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$$

(2) y축에 접하는 원의 방정식

중심이 (a, b)인 원이 y축에 접하면

$$\begin{aligned}(\text{반지름의 길이}) &= |(\text{중심의 } x\text{좌표})| \\ &= |a|\end{aligned}$$



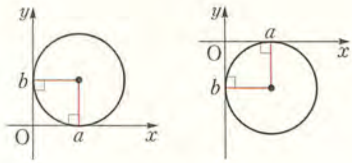
이므로 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$$

(3) x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식

중심이 (a, b)인 원이 x축, y축에 동시에 접하면

$$\begin{aligned}(\text{반지름의 길이}) &= |(\text{중심의 } x\text{좌표})| \\ &= |(\text{중심의 } y\text{좌표})| \\ &= |a| = |b|\end{aligned}$$



이므로 원의 방정식은

(i) $b=a$일 때, $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

(ii) $b=-a$일 때, $(x-a)^2+(y+a)^2=a^2$

대표유형 131 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식

• 특강 119

두 점 $A(-4, 2)$, $B(2, -6)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구하여라.

유형 Guide 선분 AB가 원의 지름이므로 $\overline{AB}$의 중점이 원의 중심임을 이용하여 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하고, 원의 방정식의 표준형을 이용한다.

유형 SSEN 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원 ⇨ 중심 : $\overline{AB}$의 중점, 반지름의 길이 : $\frac{1}{2}\overline{AB}$

풀이 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 선분 AB의 중점이므로 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{2+(-6)}{2}\right), \text{ 즉 } (-1, -2)$$

또 선분 AB가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(2+4)^2+(-6-2)^2}=\frac{1}{2}\cdot 10=5$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y+2)^2=25$$

답 $(x+1)^2+(y+2)^2=25$

Remark 원의 중심을 C, 반지름의 길이를 r라 하면 $r=\overline{AC}$ 또는 $r=\overline{BC}$임을 이용하여 반지름의 길이를 구할 수도 있다. 즉

$$r=\sqrt{(-1+4)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{(-1-2)^2+(-2+6)^2}=5$$

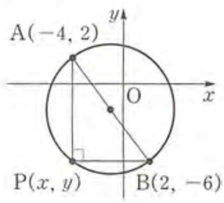
다른풀이 오른쪽 그림과 같이 원 위의 임의의 점을 $P(x, y)$라 하면 반원에 대한 원주각의 크기는 $90°$이므로

$$\angle APB=90°$$

따라서 $\triangle APB$에서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{AB}^2$이므로

$$(x+4)^2+(y-2)^2+(x-2)^2+(y+6)^2=100$$

$$\therefore (x+1)^2+(y+2)^2=25$$



정답 및 풀이 • 105쪽

유제 131-1 두 점 $A(5, 1)$, $B(-1, 3)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구하여라.

유제 131-2 두 점 $P(10, 1)$, $Q(8, 5)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 할 때, 상수 A, B, C에 대하여 $A+B+C$의 값을 구하여라.

대표유형 132 좌표축에 접하는 원의 방정식

• 특강 119

두 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$를 지나고 x축에 접하는 원의 방정식을 구하여라.

유형Guide 좌표축에 접하는 원은 그 중심의 좌표를 알면 반지름의 길이를 구할 수 있다. 따라서 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$로 놓고, 다음을 이용하여 원의 방정식을 세운다.

유형 55EN
- x축에 접하는 원 ⊙ (반지름의 길이) $=$ |(중심의 y좌표)|
- y축에 접하는 원 ⊙ (반지름의 길이) $=$ |(중심의 x좌표)|

풀이 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 이 원이 x축에 접하므로 반지름의 길이는 $|b|$이다.
따라서 원의 방정식을

$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ ······ ㉠

으로 놓을 수 있다.
이 원이 두 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$를 지나므로

$(0-a)^2+(1-b)^2=b^2$ $\quad\therefore a^2-2b+1=0$ ······ ㉡

$(1-a)^2+(2-b)^2=b^2$ $\quad\therefore a^2-2a-4b+5=0$ ······ ㉢

㉡에서 $2b=a^2+1$이므로 $\quad 4b=2a^2+2$
이것을 ㉢에 대입하여 정리하면

$a^2+2a-3=0,\quad (a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=1$

이것을 ㉡에 대입하면

$a=-3,\ b=5$ 또는 $a=1,\ b=1$

따라서 구하는 원의 방정식은 ㉠에서

$(x+3)^2+(y-5)^2=25,\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$

답 $(x+3)^2+(y-5)^2=25,\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$

정답 및 풀이 • 105쪽

유제 132-1 두 점 $(3,\ 0)$, $(9,\ 0)$을 지나고 y축에 접하는 두 원의 반지름의 길이의 합을 구하여라.

유제 132-2 점 $(2,\ 4)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 원은 두 개 존재한다. 이 두 원의 넓이의 합을 구하여라.

Plus 유제 132-3 중심이 직선 $y=-x+1$ 위에 있고, y축에 접하는 원이 점 $(2,\ 1)$을 지날 때, 이 원의 방정식을 구하여라.

두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$으로부터의 거리의 비가 $3:2$인 점 P의 자취의 방정식을 구하여라.

유형 Guide '자취'라는 단어에 겁먹을 필요는 없다. 이미 공부한 것처럼 점 P의 자취 문제는 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓고 주어진 조건을 식으로 나타내면 된다. 이 문제에서는 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 x, y 사이의 관계식을 구한다.

유형 SSEN **자취 문제 ○ 조건을 만족시키는 점의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓고 관계식을 구한다.**

풀이 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=3:2$이므로 $\quad 2\overline{\mathrm{AP}}=3\overline{\mathrm{BP}} \quad \therefore 4\overline{\mathrm{AP}}^2=9\overline{\mathrm{BP}}^2$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(x+2)^2+y^2,\ \overline{\mathrm{BP}}^2=(x-3)^2+y^2$

이므로 $\quad 4\{(x+2)^2+y^2\}=9\{(x-3)^2+y^2\}$

$x^2-14x+y^2+13=0 \quad \therefore (x-7)^2+y^2=36$

따라서 점 P의 자취의 방정식은

$(x-7)^2+y^2=36$

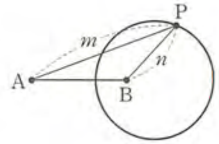
답 $(x-7)^2+y^2=36$

Remark 평면 위에서 두 점 A, B에 대하여

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$

인 점 P의 자취는 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점과 $m:n$으로 외분하는 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

이 원을 **아폴로니오스**(Apollonios)**의 원**이라 한다.



다른풀이 위의 **Remark**를 이용하여 다음과 같이 점 P의 자취의 방정식을 구할 수 있다.

$\overline{\mathrm{AB}}$를 $3:2$로 내분하는 점과 $3:2$로 외분하는 점을 각각 M, N이라 하면

$\mathrm{M}(1,\ 0)$, $\mathrm{N}(13,\ 0)$

이때 두 점 M, N을 지름의 양 끝 점으로 하는 원은 중심의 좌표가 $(7,\ 0)$, 반지름의 길이가 6이므로 점 P의 자취의 방정식은

$(x-7)^2+y^2=36$

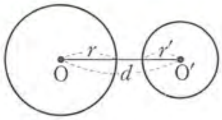
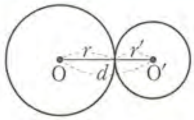
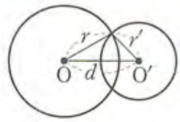
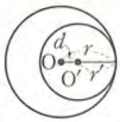
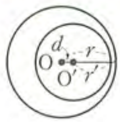
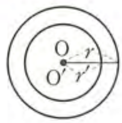
정답 및 풀이 • 106쪽

유제 133-1 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 3)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=1:2$인 점 P의 자취의 길이를 구하여라.

유제 133-2 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ -2)$에 대하여 점 P가 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2$을 만족시킬 때, 점 P의 자취의 방정식을 구하여라.

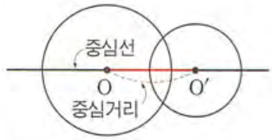
개념 120 두 원의 위치 관계

두 원 O, O′의 반지름의 길이를 각각 r, r' $(r>r')$, 중심거리를 d라 할 때, 두 원의 위치 관계에 따른 r, r', d 사이의 관계는 다음과 같다.

한 원이 다른 원의 외부에 있다.	두 원이 외접한다.	두 원이 두 점에서 만난다.
		
$d>r+r'$	$d=r+r'$	$r-r'<d<r+r'$
두 원이 내접한다.	**한 원이 다른 원의 내부에 있다.**	**두 원의 중심이 같다.**
		
$d=r-r'$	$d<r-r'$	$d=0$

Remark 중심이 같고 반지름의 길이가 다른 두 개 이상의 원을 **동심원**이라 한다. 동심원은 한 원이 다른 원의 내부에 있는 경우의 특수한 경우이다.

개념 Approach



두 원의 중심 O, O′을 지나는 직선을 **중심선**이라 하고, 선분 OO′의 길이를 **중심거리**라 한다.
또 두 원이 한 점에서 만날 때 두 원은 서로 **접한다**고 하고, 만나는 점을 두 원의 **접점**이라 한다. 이때 두 원이 서로 외부에서 접하면 두 원은 **외접**한다고 하고, 한 원이 다른 원의 내부에서 접하면 두 원은 **내접**한다고 하는데, 어느 경우나 접점은 두 원의 중심선 위에 있다.
일반적으로 한 평면 위에서 크기가 다른 두 원에 대하여 위의 위치 관계가 성립한다. 이것을 무작정 외우기보다는 두 원이 외접할 조건과 두 원이 내접할 조건만 기억하고, 나머지는 두 원의 중심거리를 늘이거나 줄이면서 유도하는 것이 바람직하다. 한마디로, 두 원의 위치 관계는 '외접과 내접'이 기준이 된다.

Remark 두 원의 교점의 개수에 따른 두 원의 위치 관계
① 교점이 2개 $\Longleftrightarrow$ 두 원이 서로 다른 두 점에서 만난다.
② 교점이 1개 $\Longleftrightarrow$ 두 원이 접한다.
$\Longleftrightarrow$ 두 원이 외접하거나 내접한다.
③ 교점이 0개 $\Longleftrightarrow$ 두 원이 만나지 않는다.
$\Longleftrightarrow$ 한 원이 다른 원의 외부에 있거나 내부에 있다.

대표유형 134 두 원의 위치 관계

• 개념 120

두 원 $(x-1)^2+y^2=4$, $(x-4)^2+y^2=r^2$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 양수 r의 값 또는 범위를 구하여라.

(1) 한 점에서 만난다. (2) 만나지 않는다.

유형 Guide 두 원의 반지름의 길이가 각각 r, r'이고 중심거리가 d일 때

(1) 한 점에서 만나려면 두 원이 외접하거나 내접해야 하므로

$r+r'=d$ 또는 $|r-r'|=d$

(2) 만나지 않으려면 한 원이 다른 원의 외부에 있거나 내부에 있어야 하므로

$r+r'<d$ 또는 $|r-r'|>d$

유형 SSEN **두 원의 위치 관계 ➡ 반지름의 길이와 중심거리 이용!**

풀이 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(1, 0)$, $(4, 0)$이므로 중심거리는 3이고, 두 원의 반지름의 길이는 각각 2, r이다.

(1) (i) 두 원이 외접할 때,

$r+2=3 \quad \therefore r=1$

(ii) 두 원이 내접할 때,

$|r-2|=3, \quad r-2=\pm 3$

$\therefore r=5$ 또는 $r=-1$

이때 $r>0$이므로 $\quad r=5$

(i), (ii)에서 $\quad r=1$ 또는 $r=5$

(2) (i) 한 원이 다른 원의 외부에 있을 때,

$r+2<3 \quad \therefore r<1$

이때 $r>0$이므로 $\quad 0<r<1$

(ii) 한 원이 다른 원의 내부에 있을 때,

$|r-2|>3, \quad r-2<-3$ 또는 $r-2>3$

$\therefore r<-1$ 또는 $r>5$

이때 $r>0$이므로 $\quad r>5$

(i), (ii)에서 $\quad 0<r<1$ 또는 $r>5$

답 (1) 1, 5 (2) $0<r<1$ 또는 $r>5$

정답 및 풀이 • 106쪽

유제 134-1 두 원 $x^2+y^2=9$, $(x+2)^2+(y-a)^2=1$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

개념 121

공통현의 방정식

서로 다른 두 점에서 만나는 두 원

$$x^2+y^2+ax+by+c=0,\ x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$$

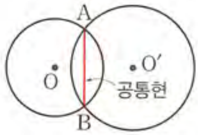
의 교점을 지나는 직선의 방정식, 즉 공통현의 방정식은 다음과 같다.

$$(a-a')x+(b-b')y+c-c'=0$$

Remark 공통현의 방정식은 두 원의 방정식에서 이차항을 소거한 식이다.

개념 Approach

오른쪽 그림과 같이 두 원이 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 선분 AB를 두 원의 **공통현**이라 한다. 공통현의 방정식을 유도해 보자.



두 점에서 만나는 두 원

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ ······ ㉠

$x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$ ······ ㉡

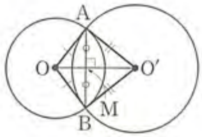
의 교점의 좌표는 방정식 ㉠, ㉡을 모두 만족시키므로 ㉠−㉡을 하여 얻은 방정식

$(a-a')x+(b-b')y+c-c'=0$ ······ ㉢

도 만족시킨다.

이때 ㉢은 $Ax+By+C=0$ 꼴이므로 직선의 방정식이고, 두 점을 지나는 직선은 단 하나이다.
따라서 방정식 ㉢은 주어진 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식, 즉 공통현의 방정식이 된다.

Remark 두 원 O, O′이 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 중심선 OO′은 공통현 AB를 수직이등분하는 성질이 있다.



오른쪽 그림의 △AOO′, △BOO′에서

$\overline{OA}=\overline{OB}$, $\overline{AO'}=\overline{BO'}$, $\overline{OO'}$은 공통

이므로 △AOO′≡△BOO′(SSS 합동)

$\therefore \angle AOO'=\angle BOO'$

따라서 선분 OO′은 이등변삼각형 OAB의 꼭지각의 이등분선이므로 밑변, 즉 공통현 AB를 수직이등분한다.

$\therefore \overline{OO'}\perp\overline{AB},\ \overline{AM}=\overline{BM}$

개념 Check

두 원 $x^2+y^2=9$, $(x-2)^2+(y+2)^2=5$의 공통현의 방정식을 구하여라.

풀이 두 원의 방정식을 각각 변형하면

$x^2+y^2-9=0$ ······ ㉠

$x^2+y^2-4x+4y+3=0$ ······ ㉡

㉠−㉡을 하면 $4x-4y-12=0$

$\therefore x-y-3=0$

답 $x-y-3=0$

두 원 $(x-1)^2+y^2=9$, $x^2+(y+a)^2=4$의 교점을 지나는 직선이 점 $(0, 2)$를 지날 때, 실수 a의 값을 구하여라.

유형 Guide 두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식, 즉 공통현의 방정식은 두 원의 방정식에서 이차항을 소거한 식

$$x^2+y^2+ax+by+c-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0, \text{ 즉 } (a-a')x+(b-b')y+c-c'=0$$

임을 이용한다.

유형 SSEN 공통현의 방정식 ○ 두 원의 방정식에서 이차항을 소거한다.

풀이 $(x-1)^2+y^2=9$에서

$$x^2+y^2-2x-8=0$$

$x^2+(y+a)^2=4$에서

$$x^2+y^2+2ay+a^2-4=0$$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-2x-8-(x^2+y^2+2ay+a^2-4)=0$$

$$\therefore 2x+2ay+a^2+4=0$$

이 직선이 점 $(0, 2)$를 지나므로

$$4a+a^2+4=0, \qquad (a+2)^2=0$$

$$\therefore a=-2$$

답 -2

정답 및 풀이 • 106쪽

유제 135-1 두 원 $x^2+y^2-2x+ay-4=0$, $x^2+y^2-4x-2y+4=0$의 교점을 지나는 직선과 직선 $y=x-1$이 서로 수직일 때, 실수 a의 값을 구하여라.

Plus 유제 135-2 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+6$이 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$의 둘레를 이등분할 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

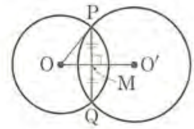
두 원 $x^2+y^2+2x+2y-2=0$, $x^2+y^2-2x-2y-6=0$의 공통현의 길이를 구하여라.

유형 Guide 오른쪽 그림의 두 원 O, O′에서 $\overline{OO'}$은 $\overline{PQ}$를 수직이등분하므로

$\overline{PQ}=2\overline{PM}$

또 △POM은 직각삼각형이므로 $\overline{PM}^2=\overline{OP}^2-\overline{OM}^2$

이때 $\overline{OP}$는 원 O의 반지름이고, $\overline{OM}$의 길이는 중심 O와 직선 PQ 사이의 거리임을 이용하면 공통현의 길이를 구할 수 있다.



유형 SSEN 두 원의 공통현의 길이 ◉ 두 원의 중심선은 공통현의 수직이등분선임을 이용한다.

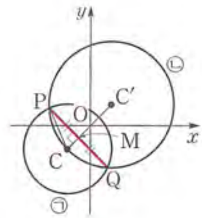
풀이 오른쪽 그림과 같이 두 원

$x^2+y^2+2x+2y-2=0$, 즉 $(x+1)^2+(y+1)^2=4$ ⋯ ㉠

$x^2+y^2-2x-2y-6=0$, 즉 $(x-1)^2+(y-1)^2=8$ ⋯ ㉡

의 중심을 각각 C, C′, 두 원의 교점을 각각 P, Q라 하고, $\overline{PQ}$의 중점을 M이라 하면 두 원의 중심선 CC′은 공통현 PQ를 수직이등분하므로 직각삼각형 PCM에서

$\overline{PM}^2=\overline{CP}^2-\overline{CM}^2$ ⋯⋯ ㉢



$\overline{CP}$는 원 ㉠의 반지름이므로 $\overline{CP}=2$

이때 두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2+2x+2y-2-(x^2+y^2-2x-2y-6)=0$

$4x+4y+4=0 \qquad \therefore x+y+1=0$

$\overline{CM}$의 길이는 원 ㉠의 중심 C$(-1,\ -1)$과 직선 $x+y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{CM}=\frac{|-1-1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

㉢에서 $\overline{PM}^2=\overline{CP}^2-\overline{CM}^2=2^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{7}{2}$

$$\therefore \overline{PM}=\sqrt{\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

따라서 구하는 공통현의 길이는 $\overline{PQ}=2\overline{PM}=2\cdot\frac{\sqrt{14}}{2}=\sqrt{14}$

답 $\sqrt{14}$

정답 및 풀이 • 107쪽

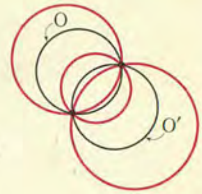
유제 136-1 두 원 $x^2+y^2=9$, $(x-3)^2+(y-4)^2=9$의 공통현의 길이를 구하여라.

개념 122 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식

서로 다른 두 점에서 만나는 두 원

$$\mathrm{O} : x^2+y^2+ax+by+c=0,$$

$$\mathrm{O}' : x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$$



의 교점을 지나는 원 중에서 원 O′을 제외한 원의 방정식은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0}$$

(단, $k\neq-1$인 실수)

Remark $k=-1$이면 두 원의 공통현의 방정식이 된다.

개념 Approach

서로 다른 두 점에서 만나는 두 원

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

의 교점의 좌표는 방정식 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키므로 방정식

$$x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0 \quad \cdots\cdots ㉢$$

도 만족시킨다. 즉 ㉢은 두 원의 교점을 지나는 도형의 방정식이다.

(i) $k=-1$일 때, ㉢은 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식, 즉 공통현의 방정식이다.

(ii) $k\neq-1$일 때, ㉢은 x^2의 계수와 y^2의 계수가 서로 같고, xy항이 없는 x, y에 대한 이차방정식이므로 원의 방정식이다.

따라서 ㉢은 두 원 ㉠, ㉡의 교점을 지나는 원의 방정식이다.

이때 원의 방정식 ㉢은 k가 어떠한 실수 값을 갖더라도 원 ㉡은 표현하지 못한다.

개념 Check

두 원 $x^2+y^2-6=0$, $x^2+y^2+6x+5y+1=0$의 교점과 점 $(1, -3)$을 지나는 원의 방정식을 구하여라.

풀이 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2-6+k(x^2+y^2+6x+5y+1)=0 \ (k\neq-1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이라 하면 이 원이 점 $(1, -3)$을 지나므로

$$1+9-6+k(1+9+6-15+1)=0 \qquad \therefore k=-2$$

따라서 구하는 원의 방정식은 ㉠에서 $x^2+y^2+12x+10y+8=0$

답 $x^2+y^2+12x+10y+8=0$

대표유형 137 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식

• 개념 122

두 원 $x^2+y^2-2x+a=0$, $x^2+y^2-4x-2y+4=0$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 원의 교점과 두 점 $(3,\ 0)$, $(0,\ 1)$을 지나는 원의 방정식을 구하여라.

(단, a는 상수이다.)

유형 Guide 두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 원의 방정식은 먼저 상수 k를 이용하여 $x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$ $(k\neq-1)$으로 나타낸 후, 이 원이 지나는 점의 좌표를 이용하면 구할 수 있다.

유형 SSEN **두 원 $f(x,\ y)=0$, $g(x,\ y)=0$의 교점을 지나는 원의 방정식**
➡ $f(x,\ y)+k\cdot g(x,\ y)=0$ $(k\neq-1)$

풀이 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2-2x+a+k(x^2+y^2-4x-2y+4)=0\ (k\neq-1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

으로 놓으면 이 원이 두 점 $(3,\ 0)$, $(0,\ 1)$을 지나므로

$$9-6+a+k(9-12+4)=0$$

$$\therefore a+k=-3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$$1+a+k(1-2+4)=0$$

$$\therefore a+3k=-1 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$a=-4,\ k=1$$

$a=-4$, $k=1$을 ㉠에 대입하면

$$x^2+y^2-2x-4+x^2+y^2-4x-2y+4=0$$

$$2x^2+2y^2-6x-2y=0$$

$$\therefore x^2+y^2-3x-y=0$$

답 $x^2+y^2-3x-y=0$

정답 및 풀이 • 107쪽

유제 137-1 두 원 $x^2+y^2+12x=0$, $x^2+y^2-4x+4y-2=0$의 교점을 지나고 중심이 y축 위에 있는 원의 방정식을 구하여라.

유제 137-2 두 점에서 만나는 두 원 $x^2+y^2+4x-4=0$, $x^2+y^2+ax-6y+2=0$의 교점과 원점을 지나는 원의 넓이가 5π일 때, 양수 a의 값을 구하여라.

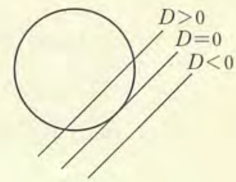
개념 123 원과 직선의 위치 관계 – 판별식 이용

원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

① $D>0$ $\Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 실근
$\Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $D=0$ $\Longleftrightarrow$ 중근
$\Longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다.(접한다.)

③ $D<0$ $\Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 허근
$\Longleftrightarrow$ 만나지 않는다.



개념 Approach

원과 직선의 위치 관계는 다음의 세 가지 경우가 있다.

① 서로 다른 두 점에서 만난다. ② 한 점에서 만난다. ③ 만나지 않는다.

원과 직선이 만나서 생기는 교점의 개수는 원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 실근의 개수와 같음을 이용하여 원 $x^2+y^2=r^2$과 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수를 구해 보자.

$y=mx+n$을 $x^2+y^2=r^2$에 대입하면 $x^2+(mx+n)^2=r^2$

$\therefore (m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0$ ······ ㉠

㉠의 판별식을 D라 할 때, 방정식 ㉠은

$D>0$이면 서로 다른 두 실근, $D=0$이면 중근, $D<0$이면 서로 다른 두 허근

을 갖는다. 이때 원과 직선의 교점의 개수는 방정식 ㉠의 실근의 개수와 같으므로

$D>0$이면 2개, $D=0$이면 1개, $D<0$이면 0개

가 된다.

개념 Check

원 $x^2+y^2=1$과 다음 직선의 위치 관계를 말하여라.

(1) $y=x+1$ (2) $y=\frac{1}{2}x+3$

풀이 (1) $y=x+1$을 $x^2+y^2=1$에 대입하면 $x^2+(x+1)^2=1$ $\therefore x^2+x=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=1^2-4\cdot1\cdot0=1>0$

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $y=\frac{1}{2}x+3$을 $x^2+y^2=1$에 대입하면 $x^2+\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2=1$ $\therefore 5x^2+12x+32=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=6^2-5\cdot32=-124<0$

따라서 원과 직선은 만나지 않는다.

답 풀이 참조

대표유형 138 원과 직선의 위치 관계 (1)

• 개념 123

원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=3x+k$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 접한다.

(3) 만나지 않는다.

유형 Guide 원과 직선의 위치 관계는 직선의 방정식을 원의 방정식에 대입하여 얻은 이차방정식의 판별식 D의 부호를 조사하면 알 수 있다.

유형 SSEN 원과 직선의 위치 관계 ➲ 판별식 D 이용!

풀이 $y=3x+k$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$$x^2+(3x+k)^2=1$$

$$\therefore 10x^2+6kx+k^2-1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(3k)^2-10(k^2-1)=-k^2+10$$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나면 $D>0$이므로

$$-k^2+10>0, \qquad k^2<10$$

$$\therefore -\sqrt{10}<k<\sqrt{10}$$

(2) 접하면 $D=0$이므로

$$-k^2+10=0, \qquad k^2=10$$

$$\therefore k=\pm\sqrt{10}$$

(3) 만나지 않으면 $D<0$이므로

$$-k^2+10<0, \qquad k^2>10$$

$$\therefore k<-\sqrt{10} \text{ 또는 } k>\sqrt{10}$$

답 (1) $-\sqrt{10}<k<\sqrt{10}$ (2) $-\sqrt{10}, \sqrt{10}$ (3) $k<-\sqrt{10}$ 또는 $k>\sqrt{10}$

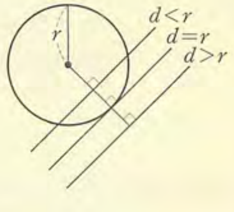
정답 및 풀이 • 107쪽

유제 138-1 원 $x^2+y^2=3$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 k의 개수를 구하여라.

유제 138-2 직선 $y=2x+k$가 원 $x^2+y^2=4$에 접할 때, 실수 k의 값을 모두 구하여라.

개념 124 원과 직선의 위치 관계 – 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용

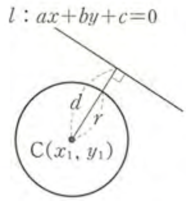
반지름의 길이가 r인 원에서 원의 중심과 직선 사이의 거리가 d 일 때, 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.



① **$d<r \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.**
② **$d=r \Longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다.(접한다.)**
③ **$d>r \Longleftrightarrow$ 만나지 않는다.**

개념 Approach

원 C : $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2\ (r>0)$과 직선 l : $ax+by+c=0$의 위치 관계는 원의 중심 C$(x_1,\ y_1)$과 직선 l 사이의 거리 d와 원의 반지름의 길이 r 사이의 대소 비교를 통하여 알 수 있다.



즉 $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$의 값과 원의 반지름의 길이 r 사이의 대소 관계에 따라 원과 직선의 위치 관계가 정해진다.

Remark d와 r 사이의 대소 관계에 따른 원과 직선의 교점의 개수는 다음과 같다.
$d<r \Longleftrightarrow$ 교점이 2개, $d=r \Longleftrightarrow$ 교점이 1개, $d>r \Longleftrightarrow$ 교점이 0개

개념 Check

다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

(1) $x^2+y^2=1,\ 2x+y-1=0$ (2) $(x+2)^2+y^2=5,\ x-2y+12=0$

풀이 (1) 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $2x+y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

원의 반지름의 길이가 1이고 $\frac{\sqrt{5}}{5}<1$이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.
따라서 교점의 개수는 2이다.

(2) 원의 중심 $(-2,\ 0)$과 직선 $x-2y+12=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2+12|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이고 $2\sqrt{5}>\sqrt{5}$이므로 원과 직선은 만나지 않는다.
따라서 교점의 개수는 0이다.

답 (1) 2 (2) 0

대표유형 139 **원과 직선의 위치 관계 (2)** • 개념 124

원 $x^2+y^2+4x-2y+4=0$과 직선 $x+y+k=0$이 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

유형 Guide 원과 직선의 위치 관계(또는 교점의 개수)는 다음 ① 또는 ②의 방법으로 따진다.
① 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식 D의 부호를 조사한다.
② 원의 반지름의 길이와 원의 중심과 직선 사이의 거리를 비교한다.

유형 SSEN **원과 직선의 위치 관계**
이차방정식의 판별식 또는 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용!

풀이 $x^2+y^2+4x-2y+4=0$에서 $\quad (x+2)^2+(y-1)^2=1$
원의 중심 $(-2,\ 1)$과 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|-2+1+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|k-1|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 만나려면 $d\le1$이어야 한다. 즉

$$\frac{|k-1|}{\sqrt{2}}\le1,\qquad |k-1|\le\sqrt{2},\qquad -\sqrt{2}\le k-1\le\sqrt{2}$$

$\therefore 1-\sqrt{2}\le k\le1+\sqrt{2}$

답 $1-\sqrt{2}\le k\le1+\sqrt{2}$

다른풀이 $x+y+k=0$에서 $\quad y=-x-k$
이 식을 $x^2+y^2+4x-2y+4=0$에 대입하면

$$x^2+(-x-k)^2+4x-2(-x-k)+4=0$$
$$\therefore 2x^2+2(k+3)x+k^2+2k+4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나야 하므로 $D\ge0$이다. 즉

$$\frac{D}{4}=(k+3)^2-2(k^2+2k+4)=-k^2+2k+1\ge0$$

$k^2-2k-1\le0$
$\{k-(1-\sqrt{2})\}\{k-(1+\sqrt{2})\}\le0$
$\therefore 1-\sqrt{2}\le k\le1+\sqrt{2}$

이차방정식 $k^2-2k-1=0$의 해는 $k=1\pm\sqrt{2}$이다.

정답 및 풀이 • 108쪽

유제 139-1 원 $(x+4)^2+(y-3)^2=16$과 직선 $ax-y-a=0$이 접하도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하여라.

대표유형 140 현의 길이

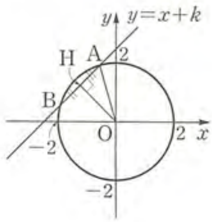
• 개념 124

원 $x^2+y^2=4$가 직선 $y=x+k$와 만나서 생기는 현의 길이가 2가 되도록 하는 실수 k의 값을 모두 구하여라.

유형 Guide 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 C에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 CH는 이등변삼각형 CAB의 꼭지각에서 밑변에 그은 수선이므로 현 AB를 이등분한다. 즉 $\overline{AH}=\overline{BH}$이다.

유형 SSEN 원의 중심에서 현에 그은 수선 ➡ 현을 이등분한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원과 직선이 만나는 두 점을 A, B라 하고, 원의 중심에서 직선 $y=x+k$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

직각삼각형 OAH에서

$$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 $\overline{OH}$의 길이는 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{OH}=\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\quad \sqrt{3}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}, \quad |k|=\sqrt{6}$

$$\therefore k=\pm\sqrt{6}$$

답 $-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$

Remark 현의 성질

① 한 원 또는 합동인 두 원에서 크기가 같은 두 중심각에 대한 현의 길이는 같다.
거꾸로 한 원 또는 합동인 두 원에서 길이가 같은 두 현에 대한 중심각의 크기는 같다.
그러나 중심각의 크기와 현의 길이가 정비례하는 것은 아니다.

② 원의 중심에서 현에 그은 수선은 그 현을 이등분한다.
거꾸로 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.

③ 한 원 또는 합동인 두 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 서로 같다.
거꾸로 한 원 또는 합동인 두 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

정답 및 풀이 • 108쪽

유제 140-1 직선 $y=2x+5$가 원 $x^2+y^2=16$에 의하여 잘려서 생기는 선분의 길이를 구하여라.

유제 140-2 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=r^2$이 직선 $y=x+4$와 만나서 생기는 현의 길이가 6일 때, 양수 r의 값을 구하여라.

대표유형 141 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최대 · 최소

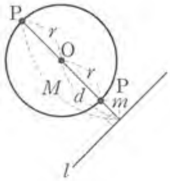
• 개념 124

원 $x^2+y^2+6x-8y+9=0$ 위의 점과 직선 $3x-4y-10=0$ 사이의 거리의 최댓값과 최솟값의 곱을 구하여라.

유형 Guide 직선 l이 반지름의 길이가 r인 원 O의 중심에서 $d\,(d>r)$만큼 떨어져 있을 때, 원 O 위의 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최댓값 M과 최솟값 m은

$M=d+r$, $m=d-r$

임을 이용한다.



유형 SSEN 원 위의 점과 직선 사이의 거리 ◐ 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용!

풀이 $x^2+y^2+6x-8y+9=0$에서

$(x+3)^2+(y-4)^2=16$

원의 중심 $(-3,\ 4)$와 직선 $3x-4y-10=0$ 사이의 거리는

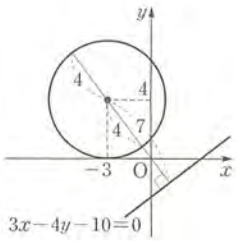
$$\frac{|3\cdot(-3)-4\cdot4-10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=7$$

원의 반지름의 길이가 4이므로 오른쪽 그림에서 원 위의 점과 직선 $3x-4y-10=0$ 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하면

$M=7+4=11$, $m=7-4=3$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은

$11\cdot3=33$

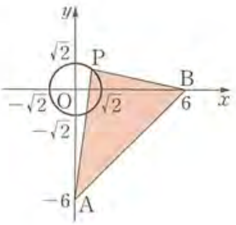


답 33

정답 및 풀이 • 108쪽

유제 141-1 원 $x^2+y^2-2x-4y-1=0$ 위의 점 P와 직선 $2x+y+k=0$ 사이의 거리의 최댓값과 최솟값의 합이 8이 되도록 하는 실수 k의 값을 모두 구하여라.

Plus 유제 141-2 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점 P와 두 점 A$(0,\ -6)$, B$(6,\ 0)$에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값을 구하여라.



개념 125 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$$

Remark 기울기가 m으로 정해져 있으므로 y절편만 주의하여 기억하면 된다.

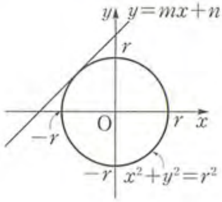
개념 Approach

원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 다음 두 가지 방법으로 구해 보자.

방법 1 판별식 $D=0$ 이용

구하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$으로 놓고 원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$에 대입하여 정리하면

$$(1+m^2)x^2+2mnx+n^2-r^2=0$$



이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(mn)^2-(1+m^2)(n^2-r^2)=r^2(1+m^2)-n^2$$

원과 직선이 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$$r^2(1+m^2)-n^2=0 \qquad \therefore n=\pm r\sqrt{1+m^2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$$

방법 2 중심과 접선 사이의 거리 $d=r$ 이용

구하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$, 즉 $mx-y+n=0$으로 놓으면 원 $x^2+y^2=r^2$의 중심 $(0,\ 0)$과 이 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 r와 같아야 하므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=r \qquad \therefore n=\pm r\sqrt{1+m^2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$$

Remark 방법 1 은 원과 접선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식 $D=0$임을 이용한 것이고, 방법 2 는 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음($d=r$)을 이용한 것이다.

개념 Check

원 $x^2+y^2=4$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식을 구하여라.

풀이 $y=3x\pm2\sqrt{1+3^2}$, 즉 $y=3x\pm2\sqrt{10}$

답 $y=3x-2\sqrt{10},\ y=3x+2\sqrt{10}$

대표유형 142 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

• 개념 125

원 $x^2+y^2=3$에 접하고 직선 $2x-y=0$에 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

유형 Guide 기울기가 m으로 주어진 접선의 방정식은 **개념 125**의 공식을 이용하거나, $y=mx+n$으로 놓은 후 공식의 유도 원리, 즉 원과 접선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식 $D=0$ 또는 (원의 중심과 접선 사이의 거리)=(반지름의 길이)임을 이용한다.

유형 SSEN **기울기가 m인 접선의 방정식**
- ① 공식 이용
- ② 판별식 $D=0$ 이용
- ③ 중심과 접선 사이의 거리 $d=r$ 이용

풀이 구하는 직선은 직선 $2x-y=0$, 즉 $y=2x$에 평행하므로 기울기가 2이다.
또 원 $x^2+y^2=3$의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y=2x\pm\sqrt{3}\sqrt{1+2^2}$$
$$\therefore y=2x\pm\sqrt{15}$$

답 $y=2x-\sqrt{15}$, $y=2x+\sqrt{15}$

다른풀이 1 기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+n$으로 놓고 원의 방정식 $x^2+y^2=3$에 대입하면

$$x^2+(2x+n)^2=3 \qquad \therefore 5x^2+4nx+n^2-3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 원과 직선이 접하면 $D=0$이므로

$$\frac{D}{4}=(2n)^2-5(n^2-3)=-n^2+15=0$$
$$\therefore n=\pm\sqrt{15}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=2x\pm\sqrt{15}$

다른풀이 2 기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+n$, 즉 $2x-y+n=0$으로 놓으면 이 직선이 원 $x^2+y^2=3$에 접하므로 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $2x-y+n=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{3}$과 같다. 즉

$$\frac{|n|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{3} \qquad \therefore n=\pm\sqrt{15}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=2x\pm\sqrt{15}$

정답 및 풀이 • 109쪽

유제 142-1 원 $x^2+y^2=10$에 접하고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$인 직선의 방정식을 구하여라.

Plus 유제 142-2 원 $x^2+y^2-6x+4y-12=0$에 접하고 직선 $x+3y-4=0$과 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

개념 126

원 위의 점에서의 접선의 방정식

원 위의 점에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

① 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=r^2$$

② 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

③ 원 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y+A\cdot\frac{x_1+x}{2}+B\cdot\frac{y_1+y}{2}+C=0$$

Remark 위의 접선의 방정식은 주어진 원의 방정식에 다음과 같이 대입하여 구한 것이다.

$x^2 \to x_1x,\quad y^2 \to y_1y,\quad (x-a)^2 \to (x_1-a)(x-a),\quad (y-b)^2 \to (y_1-b)(y-b),$

$x \to \frac{x_1+x}{2},\quad y \to \frac{y_1+y}{2},$ 상수 → '그대로'

이 방법을 기억하면 ①, ②, ③을 일일이 기억할 필요가 없다. 입으로 소리 내어 세 번 이상 읽어 보면 쉽게 기억될 것이다.

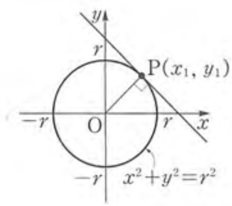
13 원의 방정식

개념 Approach

원 $x^2+y^2=r^2\,(r>0)$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

(i) $x_1y_1\neq0$일 때,

오른쪽 그림에서 직선 OP의 기울기는 $\frac{y_1}{x_1}$이고, 직선 OP와 점 P에서의 접선은 서로 수직이므로 접선의 기울기는 $-\frac{x_1}{y_1}$이다.



따라서 구하는 접선의 방정식은 $\quad y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$

$\therefore x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

그런데 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로 $\quad x_1^2+y_1^2=r^2$

이것을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$이다.

(ii) $x_1=0$ 또는 $y_1=0$일 때,

점 P가 좌표축 위에 있으므로 이때의 접선의 방정식은 $y=y_1$ 또는 $x=x_1$이 되어 $x_1x+y_1y=r^2$이 성립함을 알 수 있다.

(i), (ii)에서 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$이다.

개념 Check

원 $x^2+y^2=40$ 위의 점 $(2,\ -6)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 $2\cdot x+(-6)\cdot y=40 \quad \therefore x-3y-20=0$

답 $x-3y-20=0$

대표유형 143 원 위의 점에서의 접선의 방정식

• 개념 126

원 $(x+2)^2+(y-1)^2=10$ 위의 점 $(-3,\ 4)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

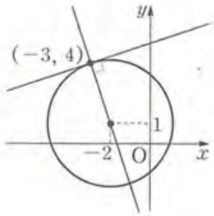
유형 Guide 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 **개념 126**의 방법을 이용하면 간단하게 구할 수 있다. 여기서는 접점과 원의 중심을 지나는 직선이 접선과 수직임을 이용하여 기울기를 구한 다음, 직선이 접점을 지남을 이용하여 접선의 방정식을 구해 보자.

유형 SSEN 원의 중심과 접점을 지나는 직선 ⊙ 접선과 수직

풀이 원의 중심 $(-2,\ 1)$과 접점 $(-3,\ 4)$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{4-1}{-3-(-2)}=-3$$

원의 중심과 접점을 지나는 직선은 접선에 수직이므로 접선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.



따라서 구하는 접선은 기울기가 $\frac{1}{3}$이고 점 $(-3,\ 4)$를 지나므로 접선의 방정식은

$$y-4=\frac{1}{3}(x+3)$$

$$\therefore y=\frac{1}{3}x+5$$

답 $y=\frac{1}{3}x+5$

다른풀이 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=10$ 위의 점 $(-3,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$$(-3+2)(x+2)+(4-1)(y-1)=10$$

$$-(x+2)+3(y-1)=10$$

$$\therefore x-3y+15=0$$

정답 및 풀이 • 109쪽

유제 143-1 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(2,\ -1)$에서의 접선이 x축 및 y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 구하여라. (단, O는 원점이다.)

유제 143-2 원 $(x-3)^2+(y+2)^2=25$ 위의 점 $(6,\ 2)$에서의 접선의 y절편을 구하여라.

개념 127 원 밖의 점에서 원에 그은 접선의 방정식

원 밖의 점 $(a,\ b)$에서 원에 그은 접선의 방정식을 구할 때에는 다음 세 가지 방법이 주로 쓰인다.

방법1 원 위의 점에서의 접선의 방정식 이용

접점을 $(x_1,\ y_1)$로 놓고, 원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하는 방법을 이용한다.

방법2 중심과 접선 사이의 거리 $d=r$ 이용

접선의 기울기를 m이라 하고, 점 $(a,\ b)$를 지나는 접선의 방정식을 세운 후, 원의 중심과 접선 사이의 거리가 반지름의 길이와 같음$(d=r)$을 이용한다.

방법3 판별식 $D=0$ 이용

접선의 기울기를 m이라 하고, 점 $(a,\ b)$를 지나는 접선의 방정식을 세운 후, 원의 방정식과 접선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식 $D=0$임을 이용한다.

개념 Approach

원 밖의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서 원에 그은 접선의 방정식은 방법1 과 같이 접점을 $\mathrm{T}(x_1,\ y_1)$로 놓거나 방법2, 방법3 과 같이 기울기를 m으로 놓고 구한다.

① 접점을 $\mathrm{T}(x_1,\ y_1)$로 놓는 경우

방법1 원 위의 점에서의 접선의 방정식 이용

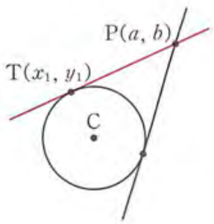
(i) 점 T에서의 접선의 방정식을 구한다.

(ii) 접선이 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 지남을 이용하여 식을 세운다.

(iii) 접점 T가 원 위에 있음을 이용하여 식을 세운다.

(iv) (ii)와 (iii)의 식을 연립하여 x_1, y_1의 값을 구한다.

(v) x_1, y_1의 값을 (i)의 식에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.



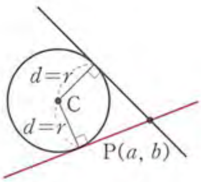
② 접선의 기울기를 m으로 놓는 경우

방법2 중심과 접선 사이의 거리 $d=r$ 이용

(i) 접선의 방정식을 $y-b=m(x-a)$로 놓는다.

(ii) 원의 중심에서 접선까지의 거리 d가 반지름의 길이 r와 같음을 이용하여 기울기 m의 값을 구한다.

(iii) m의 값을 (i)의 식에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.



방법3 판별식 $D=0$ 이용

(i) 접선의 방정식을 $y-b=m(x-a)$로 놓는다.

(ii) (i)의 식을 원의 방정식에 대입한 후 판별식 $D=0$임을 이용하여 기울기 m의 값을 구한다.

(iii) m의 값을 (i)의 식에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

Remark 위의 세 가지 방법을 무작정 외우기보다는 문제 속에서 그 풀이 방법을 익히는 것이 현명하다.

대표유형 144 원 밖의 점에서 원에 그은 접선의 방정식

• 개념 127

점 $(0,\ 3)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

유형 Guide 원 밖의 점에서 원에 그은 접선의 방정식을 구하는 3가지 방법을 모두 잘 기억하고, 실전에서는 각자 편리한 방법을 택하여 접선의 방정식을 구한다.

유형 SSEN 원 밖의 점에서 원에 그은 접선 →
- ① 원 위의 점에서의 접선의 방정식 이용
- ② 중심과 접선 사이의 거리 $d=r$ 이용
- ③ 판별식 $D=0$ 이용

풀이 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$로 놓으면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=4$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(0,\ 3)$을 지나므로 $3y_1=4$ $\quad\therefore y_1=\frac{4}{3}$

또 접점 $(x_1,\ y_1)$이 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로 $x_1^2+y_1^2=4$

$y_1=\frac{4}{3}$를 $x_1^2+y_1^2=4$에 대입하여 풀면 $x_1=\pm\frac{2\sqrt{5}}{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 ㉠에서

$\pm\frac{2\sqrt{5}}{3}x+\frac{4}{3}y=4$, 즉 $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x+3$

답 $y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x+3,\ y=\frac{\sqrt{5}}{2}x+3$

다른풀이 1 접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(0,\ 3)$을 지나는 접선의 방정식은

$y=mx+3$ $\quad\therefore mx-y+3=0$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $mx-y+3=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$\frac{|3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2,\quad m^2+1=\frac{9}{4}\quad\therefore m=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x+3$

다른풀이 2 접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(0,\ 3)$을 지나는 접선의 방정식은

$y=mx+3$

이것을 $x^2+y^2=4$에 대입하여 정리하면

$(m^2+1)x^2+6mx+5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(3m)^2-5(m^2+1)=4m^2-5=0\quad\therefore m=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

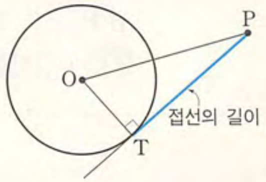
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x+3$

정답 및 풀이 • 110쪽

유제 144-1 원점에서 원 $x^2+y^2+4x-2y+4=0$에 그은 두 접선의 기울기의 합을 구하여라.

특강 128

원의 접선의 길이



오른쪽 그림과 같이 원 밖의 점 P에서 원에 그은 접선이 원과 만나는 점을 T라 할 때, $\overline{PT}$의 길이를 **접선의 길이**라 한다.

원의 접선은 원의 중심과 접점을 지나는 직선에 수직이다.

즉 $\overline{OT}\perp\overline{PT}$이므로 $\triangle OTP$는 $\angle T=90^\circ$인 직각삼각형이다.

따라서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{OP}^2=\overline{OT}^2+\overline{PT}^2$$

즉 $\overline{PT}^2=\overline{OP}^2-\overline{OT}^2$이므로 접선의 길이 $\overline{PT}$는

$$\mathbf{\overline{PT}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OT}^2}}$$

임을 알 수 있다.

이때 $\overline{OP}$의 길이는 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 구하고, $\overline{OT}$는 원의 반지름임을 이용하면 접선의 길이 $\overline{PT}$를 구할 수 있다.

Remark 원 밖의 점에서 원에 그을 수 있는 접선은 2개이고 두 접선의 길이는 항상 같으므로 접선의 길이를 구할 때에는 한 접선에 대해서만 생각해도 된다.

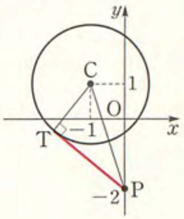
점 $P(0,\ -2)$에서 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=3$에 그은 접선의 길이를 구해 보자.

❶단계
점 P에서 원에 접선을 긋고 원의 중심과 접점, 점 P를 이어 직각삼각형을 만든다.

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C, 접점을 T라 하면

$$\overline{CT}\perp\overline{PT}$$

이므로 $\triangle CTP$는 $\angle CTP=90^\circ$인 직각삼각형이다.



❷단계
피타고라스 정리를 이용하여 접선의 길이를 구한다.

$C(-1,\ 1)$이므로

$$\overline{CP}=\sqrt{\{0-(-1)\}^2+(-2-1)^2}=\sqrt{10}$$

$\overline{CT}$는 원의 반지름이므로

$$\overline{CT}=\sqrt{3}$$

따라서 $\triangle CTP$에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{PT}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CT}^2}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$$

이므로 구하는 접선의 길이는 $\sqrt{7}$이다.

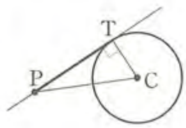
13 원의 방정식

대표유형 145 원의 접선의 길이

• 특강 128

점 P$(-3,\ 2)$에서 원 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$에 그은 접선의 접점을 T라 할 때, $\overline{\mathrm{PT}}$의 길이를 구하여라.

유형 Guide 원의 접선의 길이는 원의 중심과 접점을 잇는 직선이 접선에 수직임을 이용하여 구한다. 즉 중심이 C인 원 밖의 점 P에서 원에 그은 접선의 접점을 T라 하면 $\triangle$CTP가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여 접선의 길이는 $\overline{\mathrm{PT}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CP}}^2-\overline{\mathrm{CT}}^2}$이 된다.



유형 SSEN **원의 중심과 접점을 지나는 직선 ⊙ 접선과 수직**

풀이 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$, 즉 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$의 중심을 C라 하면

$\overline{\mathrm{CT}}\perp\overline{\mathrm{PT}}$

이므로 $\triangle$CTP는 $\angle$CTP$=90°$인 직각삼각형이다.

C$(2,\ -1)$이므로

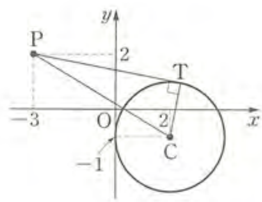
$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{\{2-(-3)\}^2+(-1-2)^2}=\sqrt{34}$

$\overline{\mathrm{CT}}$는 원의 반지름이므로

$\overline{\mathrm{CT}}=2$

따라서 $\triangle$CTP에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PT}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CP}}^2-\overline{\mathrm{CT}}^2}=\sqrt{(\sqrt{34})^2-2^2}=\sqrt{30}$



답 $\sqrt{30}$

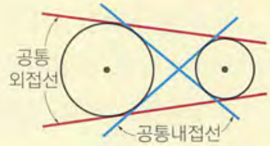
정답 및 풀이 • 110쪽

유제 145-1 점 P$(5,\ 6)$에서 중심이 점 C$(0,\ 2)$인 원에 그은 한 접선의 길이가 $4\sqrt{2}$일 때, 이 원의 반지름의 길이를 구하여라.

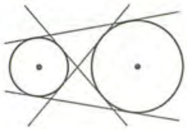
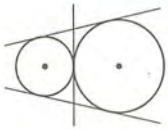
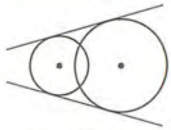
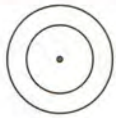
유제 145-2 x축 위의 점 P에서 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=6$에 그은 접선의 길이가 2일 때, 점 P의 좌표를 구하여라.

개념 129 공통접선

두 원에 동시에 접하는 직선을 **공통접선**이라 한다. 이때 두 원이 공통접선에 대하여 같은 쪽에 있으면 그 접선을 **공통외접선**이라 하고, 서로 반대쪽에 있으면 그 접선을 **공통내접선**이라 한다.



두 원의 위치 관계에 따른 공통접선의 개수는 각각 다음과 같다.

한 원이 다른 원의 외부에 있을 때	두 원이 외접할 때	두 원이 두 점에서 만날 때
		
공통외접선 : 2개 공통내접선 : 2개	공통외접선 : 2개 공통내접선 : 1개	공통외접선 : 2개 공통내접선 : 0개
두 원이 내접할 때	**한 원이 다른 원의 내부에 있을 때**	**두 원의 중심이 같을 때**
		
공통외접선 : 1개 공통내접선 : 0개	공통접선 : 0개	공통접선 : 0개

개념 **Approach**

두 원의 공통접선의 개수에 따른 두 원의 위치 관계는 다음과 같다.

① 공통접선이 4개 $\Longleftrightarrow$ 한 원이 다른 원의 외부에 있다.

② 공통접선이 3개 $\Longleftrightarrow$ 두 원이 외접한다.

③ 공통접선이 2개 $\Longleftrightarrow$ 두 원이 서로 다른 두 점에서 만난다.

④ 공통접선이 1개 $\Longleftrightarrow$ 두 원이 내접한다.

⑤ 공통접선이 0개 $\Longleftrightarrow$ 한 원이 다른 원의 내부에 있다. (동심원 포함)

개념 **Check**

두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-3)^2+(y+4)^2=4$의 공통외접선과 공통내접선의 개수를 각각 구하여라.

풀이 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,\ 0)$, $(3,\ -4)$이므로 중심거리는

$$\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$$

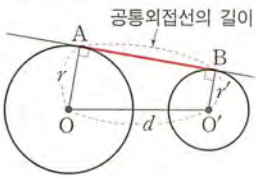
두 원의 반지름의 길이가 각각 1, 2이고 $1+2=3<5$이므로 한 원이 다른 원의 외부에 있다. 따라서 공통외접선이 2개, 공통내접선이 2개이다.

답 공통외접선 : 2개, 공통내접선 : 2개

공통접선의 길이

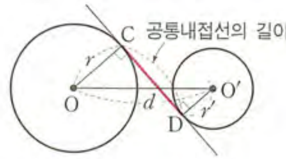
두 원의 공통접선의 두 접점 사이의 거리를 **공통접선의 길이**라 한다.
두 원 O, O′의 반지름의 길이가 각각 r, r' $(r>r')$이고 중심거리가 d일 때, 공통외접선과 공통내접선의 길이는 각각 다음과 같다.

(1) 공통외접선의 길이



$\overline{AB}=\sqrt{d^2-(r-r')^2}$

(2) 공통내접선의 길이

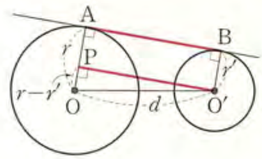


$\overline{CD}=\sqrt{d^2-(r+r')^2}$

(1) 공통외접선의 길이

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O′에서 $\overline{OA}$에 내린 수선의 발을 P라 하면 공통외접선의 길이는

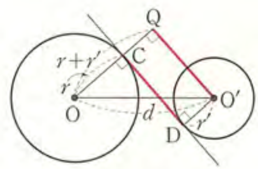
$$\overline{AB}=\overline{PO'}=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{PO}^2}=\sqrt{d^2-(r-r')^2}$$



(2) 공통내접선의 길이

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O′에서 $\overline{OC}$의 연장선에 내린 수선의 발을 Q라 하면 공통내접선의 길이는

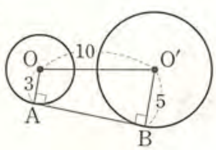
$$\overline{CD}=\overline{QO'}=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{QO}^2}=\sqrt{d^2-(r+r')^2}$$



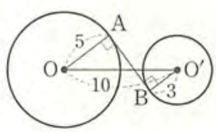
개념 Check

다음 그림의 두 원 O, O′에서 공통접선 AB의 길이를 구하여라.

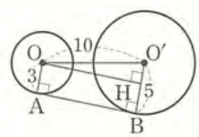
(1)



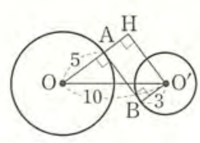
(2)



풀이 (1) 점 O에서 $\overline{BO'}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{O'H}=5-3=2$이므로 직각삼각형 OHO′에서
$\overline{AB}=\overline{OH}=\sqrt{10^2-2^2}=4\sqrt{6}$



(2) 점 O′에서 $\overline{OA}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{OH}=5+3=8$이므로 직각삼각형 OHO′에서
$\overline{AB}=\overline{HO'}=\sqrt{10^2-8^2}=6$



답 (1) $4\sqrt{6}$ (2) 6

대표유형 146 **공통접선의 길이** • 특강 130

두 원 $x^2+y^2+2y=0$, $x^2+y^2+6x-8y+16=0$의 공통외접선과 공통내접선의 길이를 각각 구하여라.

유형 Guide 두 원의 반지름의 길이가 각각 r, r'이고 중심거리가 d일 때,

공통외접선의 길이 ➡ $\sqrt{d^2-(r-r')^2}$, 공통내접선의 길이 ➡ $\sqrt{d^2-(r+r')^2}$

이다. 위의 공식을 잊었더라도 직각삼각형을 만들어 피타고라스 정리를 이용한다는 사실만 기억하고 있으면 보조선을 그어 공식을 유추하여 적용할 수 있다. 이때 공통외접선의 길이를 구할 때에는 작은 원의 중심에서 큰 원의 반지름에 수선의 발을 내려 직각삼각형을 만들고, 공통내접선의 길이를 구할 때에는 반지름의 연장선에 수선의 발을 내려 직각삼각형을 만든다.

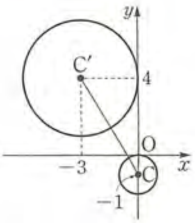
유형 SSEN **공통접선의 길이 ⭘ 보조선을 그어 직각삼각형을 만든다.**

풀이 $x^2+y^2+2y=0$에서 $x^2+(y+1)^2=1$ …… ㉠

$x^2+y^2+6x-8y+16=0$에서 $(x+3)^2+(y-4)^2=9$ … ㉡

두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이는 각각 1, 3이고, 중심을 각각 C, C′이라 하면 $C(0,\ -1)$, $C'(-3,\ 4)$

이므로 두 원의 중심거리는 $\overline{CC'}=\sqrt{(-3)^2+(4+1)^2}=\sqrt{34}$



[그림 1]과 같이 두 원의 공통외접선의 접점을 각각 A, B라 하고 점 C에서 $\overline{C'B}$에 내린 수선의 발을 P라 하면

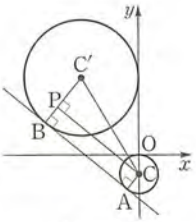
$$\overline{AB}=\overline{CP}=\sqrt{\overline{CC'}^2-\overline{C'P}^2}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{34})^2-(3-1)^2}=\sqrt{30}$$

따라서 공통외접선의 길이는 $\sqrt{30}$이다.

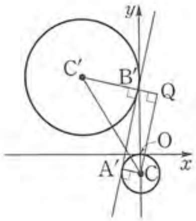
[그림 2]와 같이 두 원의 공통내접선의 접점을 각각 A′, B′이라 하고 점 C에서 $\overline{C'B'}$의 연장선에 내린 수선의 발을 Q라 하면

$$\overline{A'B'}=\overline{CQ}=\sqrt{\overline{CC'}^2-\overline{C'Q}^2}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{34})^2-(3+1)^2}=3\sqrt{2}$$

따라서 공통내접선의 길이는 $3\sqrt{2}$이다.



[그림 1]



[그림 2]

답 공통외접선의 길이 : $\sqrt{30}$, 공통내접선의 길이 : $3\sqrt{2}$

정답 및 풀이 • 110쪽

유제 146-1 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2+6x-4y+a=0$의 공통내접선의 길이가 2일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

중단원 연습 문제

STEP 1 유형 Training

01 중심이 직선 $y=2x+1$ 위에 있고 두 점 $(3,\ 2)$, $(-4,\ 3)$을 지나는 원의 반지름의 길이를 구하여라.

02 x, y에 대한 이차방정식 $x^2+ay^2+bxy-2y+c=0$이 나타내는 도형이 반지름의 길이가 2인 원이 되도록 하는 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

03 세 점 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 6)$, $(3,\ -1)$을 지나는 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$, 반지름의 길이를 r라 할 때, $a-b+r$의 값을 구하여라.

04 두 점 $(4,\ 4)$, $(12,\ -2)$를 지름의 양 끝 점으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 넓이를 직선 $y=mx-3$이 이등분할 때, 실수 m, r에 대하여 mr의 값을 구하여라.

05 중심이 직선 $y=2x-3$ 위에 있고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식을 구하여라. (단, 원의 중심은 제1사분면 위에 있다.)

06 두 원 $x^2+y^2+2x-6y+1=0$, $x^2+y^2-6x=k$가 서로 접하도록 하는 자연수 k의 값은?

① 28 ② 37 ③ 46 ④ 55 ⑤ 64

서술형

07 두 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$, $(x-a)^2+(y-2)^2=1$의 교점을 지나는 직선이 직선 $x+2y+5=0$에 평행할 때, 실수 a의 값을 구하여라.

08 원 $x^2+y^2=25$와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 자연수 k의 최댓값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

09 원 $x^2+y^2=8$에 접하고 직선 $2x+y+3=0$과 수직인 두 직선이 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.

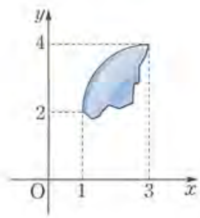
10 원 $x^2+y^2+6x-2y+2=0$ 위의 점 $(-1,\ 3)$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

교육청기출

11 원 $x^2+y^2-2x-4y-7=0$의 내부의 넓이와 네 직선 $x=-6$, $x=0$, $y=-4$, $y=-2$로 둘러싸인 직사각형의 넓이를 모두 이등분하는 직선의 방정식은?

① $y=\frac{4}{5}x+\frac{6}{5}$　② $y=\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$　③ $y=\frac{8}{5}x+\frac{2}{5}$
④ $y=4x-2$　⑤ $y=5x-3$

12 오른쪽 그림은 넓이가 10π인 원 모양의 접시가 깨진 조각의 일부를 좌표평면 위에 놓은 것이다. 좌표평면을 이용하여 깨지기 전의 접시를 나타내는 원의 방정식을 구하여라.



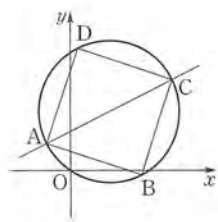
서술형

13 도형 $x^2+y^2=2|x|$와 $|x|=|y|$의 그래프의 교점의 개수를 구하여라.

서술형

14 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2-4x-6y=0$에 내접하는 정사각형 ABCD가 있다. 직선 AC의 기울기는 $\frac{1}{2}$이고, $D\left(\frac{a-\sqrt{65}}{5}, \frac{b+c\sqrt{65}}{5}\right)$일 때, 세 유리수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

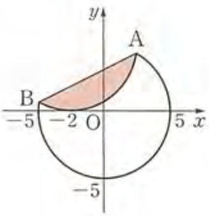
(단, 점 D의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.)



15 점 $A(-2,\ 4)$와 원 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 위의 점을 잇는 선분의 중점을 M이라 할 때, 점 M이 나타내는 도형의 길이는?

① 3π　② $\frac{7}{2}\pi$　③ 4π　④ $\frac{9}{2}\pi$　⑤ 5π

16 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=25$를 현 AB를 접는 선으로 하여 접었더니 점 $(-2,\ 0)$에서 x축에 접하였다. 직선 AB의 y절편은?



① $\frac{27}{10}$　② $\frac{29}{10}$　③ $\frac{31}{10}$
④ $\frac{33}{10}$　⑤ $\frac{37}{10}$

17 두 원 $x^2+y^2=18$, $(x-3)^2+y^2=24$의 두 교점을 A, B라 하고 원 $(x-3)^2+y^2=24$의 중심을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.

서술형

18 두 원 $(x+1)^2+y^2=16$, $x^2+(y-2)^2=16$의 교점을 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원의 중심의 좌표를 구하여라.

교육청기출

19 직선 $y=\sqrt{3}x+k$가 원 $x^2+y^2-6y-7=0$에 접할 때, 모든 실수 k의 값의 합을 구하여라.

13 원의 방정식

20 세 점 $A(0, 3)$, $B(-3, 0)$, $C(3, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 지나고 직선 AC에 평행한 직선을 l이라 할 때, 원 $x^2+y^2-8x-6y+23=0$ 위의 점 P에서 직선 l에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

서술형

21 원 $x^2+y^2=5$에 접하고 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=4$의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 구하여라.

22 점 $(0,\ a)$에서 원 $(x-2)^2+(y-2)^2=9$에 그은 두 접선이 서로 수직이 되도록 하는 양수 a의 값은?

① $2+\sqrt{10}$　② $2+\sqrt{11}$　③ $2(\sqrt{3}+1)$　④ $2+\sqrt{13}$　⑤ $2+\sqrt{14}$

서술형

23 점 $A(-4,\ 3)$에서 원 $x^2+y^2=10$에 그은 두 접선의 접점을 P, Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하여라.

24 두 원 $x^2+y^2+2x+2y-2=0$, $x^2+y^2-4x-6y+a=0$의 공통접선의 개수가 3일 때, 이 두 원의 공통외접선의 길이는? (단, a는 상수이다.)

① 2　② $2\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{3}$　④ $2\sqrt{6}$　⑤ $2\sqrt{10}$

STEP 3 심화 Forwarding

서술형

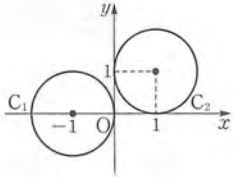
25 두 원 C : $(x+1)^2+(y-2)^2=1$, C′ : $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ 위를 움직이는 점을 각각 P, Q라 할 때, 선분 PQ의 길이의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

평가원기출

26 좌표평면 위에 두 원

$C_1 : (x+1)^2+y^2=1,\ C_2 : (x-1)^2+(y-1)^2=1$

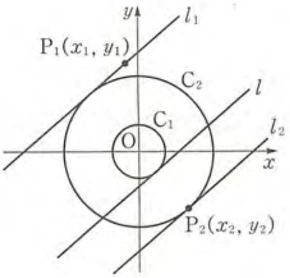
이 있다. 직선 $y=x+k$와 원 C_1의 교점의 개수를 a, 직선 $y=x+k$와 원 C_2의 교점의 개수를 b라 하자. $a+b=3$일 때, k의 값의 합은? (단, k는 실수이다.)



① $-1+\sqrt{2}$　② 1　③ $\sqrt{2}$　④ 2　⑤ $1+\sqrt{2}$

교육청기출

27 그림과 같이 두 원 $C_1 : x^2+y^2=1$과 $C_2 : x^2+y^2=8$이 있다. 원 C_1에 접하는 직선 l의 방정식은 $ax+by+1=0$이다. 직선 l에 평행하고 원 C_2에 접하는 두 직선을 각각 l_1, l_2라 하자. 점 $P_1(x_1, y_1)$은 직선 l_1 위에 있고, 점 $P_2(x_2, y_2)$는 직선 l_2와 원 C_2의 접점이다. $(ax_1+by_1+1)(ax_2+by_2+1)$의 값은?



① -7　② -4　③ -1
④ 2　⑤ 5

28 원 $x^2+y^2=1$ 밖의 점 P에서 이 원에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 $60°$ 이상이 되도록 하는 점 P의 자취의 넓이는?

① 2π　② 3π　③ 4π　④ 5π　⑤ 6π

14

도형의 이동

방에 있는 물건을 거실로 옮겨 놓아도 그 모양과 크기는 변하지 않는다. 마찬가지로 일차함수와 이차함수의 그래프를 평행이동하면 모양과 크기는 변하지 않고 그 위치만 달라진다는 것을 중학교에서 배웠다. 이제 좌표평면 위에서 도형을 이동한 결과를 방정식으로 나타내는 원리에 대하여 알아보자.

이 단원에서는 평행이동과 대칭이동의 의미를 이해하고, 좌표평면에서 평행이동하거나 대칭이동한 점의 좌표와 도형의 방정식을 구해 보자.

●한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

44 평행이동

- 평행이동의 뜻을 이해하고, 점 또는 도형을 평행이동할 수 있다.

45 대칭이동

- 대칭이동의 뜻을 이해하고, 점 또는 도형을 대칭이동할 수 있다.

개념 & 특강	대표유형 & 유제		
131 점의 평행이동	147 점의 평행이동		
132 도형의 평행이동	148 직선의 평행이동	149 원의 평행이동	152 도형의 평행이동과 대칭이동
133 점의 대칭이동	150 점의 대칭이동		
134 도형의 대칭이동	151 도형의 대칭이동		152 도형의 평행이동과 대칭이동
특강 135 점에 대한 대칭이동	153 점에 대한 대칭이동		
특강 136 직선에 대한 대칭이동	154 직선에 대한 대칭이동		
특강 137 선분의 길이의 합의 최솟값	155 선분의 길이의 합의 최솟값		

개념 131 점의 평행이동

1 평행이동

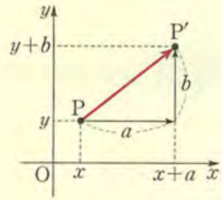
도형을 일정한 방향으로 일정한 거리만큼 평행하게 옮기는 것을 **평행이동**이라 한다.

2 점의 평행이동

좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점 P'은 $\mathbf{P}'(x+a,\ y+b)$이다.

이때 이 평행이동을 다음과 같이 나타낸다.

$$(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$$



Remark 'x축의 방향으로 a만큼'이라는 것은 $a>0$일 때에는 양의 방향으로, $a<0$일 때에는 음의 방향으로 $|a|$만큼 평행이동함을 뜻한다.

개념 Approach

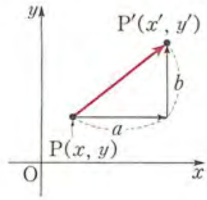
좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면 오른쪽 그림에서

$$x'=x+a,\ y'=y+b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

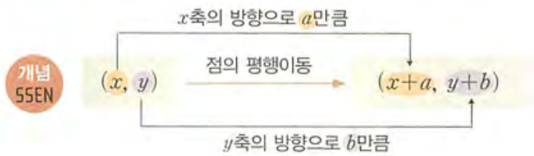
즉 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x',\ y')$은 ㉠에 의하여

$$(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$$

와 같이 표현할 수 있다.



Remark 도형은 평행이동에 의하여 모양과 크기가 바뀌지 않고 일정한 방향으로 일정한 거리만큼 옮겨지므로 평행이동에 의하여 점은 점으로, 직선은 기울기가 같은 직선으로, 원은 반지름의 길이가 같은 원으로 옮겨진다.



개념 Check

다음에 답하여라.

(1) 점 $(-1,\ 4)$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표를 구하여라.

(2) 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x-5,\ y+4)$에 의하여 점 $(7,\ 3)$이 옮겨지는 점의 좌표를 구하여라.

풀이 (1) $(-1+3,\ 4-2)$, 즉 $(2,\ 2)$　　(2) $(7-5,\ 3+4)$, 즉 $(2,\ 7)$

답 (1) $(2,\ 2)$　(2) $(2,\ 7)$

대표유형 147 점의 평행이동

• 개념 131

다음에 답하여라.

(1) 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x-1,\ y-5)$에 의하여 점 $(a,\ 9)$가 점 $(-9,\ b)$로 옮겨질 때, $a+b$의 값을 구하여라.

(2) 점 $(6,\ -1)$을 점 $(4,\ 0)$으로 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(3,\ 2)$가 옮겨지는 점의 좌표를 구하여라.

유형 Guide 점 $(x,\ y)$는 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 점 $(x+a,\ y+b)$로 옮겨진다. 즉 점의 평행이동은 이동하는 양만큼 그대로 계산하면 된다.

유형 SSEN 점의 평행이동 ⊙ 이동하는 양만큼 그대로 계산!

풀이 (1) 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x-1,\ y-5)$는 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이므로 이 평행이동에 의하여 점 $(a,\ 9)$가 옮겨지는 점의 좌표는

$(a-1,\ 9-5)$, 즉 $(a-1,\ 4)$

따라서 $a-1=-9$, $4=b$이므로 $a=-8$, $b=4$

$\therefore a+b=-4$

(2) 점 $(6,\ -1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(4,\ 0)$이라 하면

$6+a=4$, $-1+b=0$

$\therefore a=-2$, $b=1$

즉 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 이 평행이동에 의하여 점 $(3,\ 2)$가 옮겨지는 점의 좌표는

$(3-2,\ 2+1)$, 즉 $(1,\ 3)$

답 (1) -4 (2) $(1,\ 3)$

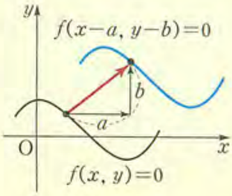
정답 및 풀이 • 119쪽

유제 147-1 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+7,\ y-2)$에 의하여 점 $(a,\ -1)$이 직선 $y=2x-1$ 위의 점으로 옮겨질 때, a의 값을 구하여라.

유제 147-2 점 $(1,\ -2)$를 점 $(9,\ 1)$로 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(3,\ -3)$으로 옮겨지는 점의 좌표를 구하여라.

개념 132 도형의 평행이동

좌표평면 위에서 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $\boldsymbol{f(x-a,\ y-b)=0}$이다. 즉



x축의 방향으로 a만큼

$$f(x,\ y)=0 \longrightarrow f(x-a,\ y-b)=0$$

y축의 방향으로 b만큼

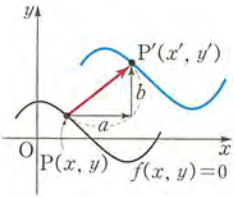
➡ x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$를 대입한다.

Remark 도형 $f(x,\ y)=0$은 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 도형 $f(x-a,\ y-b)=0$으로 옮겨진다.

개념 Approach

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 평행이동한 도형의 방정식을 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면



$$x'=x+a,\ y'=y+b$$

이므로 $\quad x=x'-a,\ y=y'-b$

이때 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$, 즉 $\mathrm{P}(x'-a,\ y'-b)$는 도형 $f(x,\ y)=0$ 위의 점이므로

$$f(x'-a,\ y'-b)=0$$

따라서 점 $\mathrm{P}'(x',\ y')$은 도형 $f(x-a,\ y-b)=0$ 위의 점이다.

즉 도형 $f(x,\ y)=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(x-a,\ y-b)=0$이다.

Remark x, y에 대한 식을 $f(x,\ y)$로 나타내면 일반적으로 $f(x,\ y)=0$은 도형의 방정식을 나타낸다. 예를 들어 $f(x,\ y)=x^2+y^2-1$일 때, 방정식 $f(x,\ y)=0$은 $x^2+y^2-1=0$, 즉 원 $x^2+y^2=1$을 나타낸다.

개념 SSEN

점 $(x,\ y)$	x축의 방향으로 a만큼,	점 $(x+a,\ y+b)$
도형 $f(x,\ y)=0$	y축의 방향으로 b만큼 평행이동	도형 $f(x-a,\ y-b)=0$

개념 Check 1

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+4,\ y-5)$에 의하여 다음 도형이 옮겨지는 도형의 방정식을 구하여라.

(1) $x-2y+7=0$　　(2) $(x-2)^2+(y+1)^2=5$　　(3) $y=-x^2+2$

풀이 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

(1) $x-2y+7=0$에 x 대신 $x-4$를, y 대신 $y+5$를 대입하면

$(x-4)-2(y+5)+7=0$

$\therefore x-2y-7=0$

(2) $(x-2)^2+(y+1)^2=5$에 x 대신 $x-4$를, y 대신 $y+5$를 대입하면

$(x-4-2)^2+(y+5+1)^2=5$

$\therefore (x-6)^2+(y+6)^2=5$

(3) $y=-x^2+2$에 x 대신 $x-4$를, y 대신 $y+5$를 대입하면

$y+5=-(x-4)^2+2$

$\therefore y=-x^2+8x-19$

답 (1) $x-2y-7=0$　(2) $(x-6)^2+(y+6)^2=5$　(3) $y=-x^2+8x-19$

14 도형의 이동

개념 Check 2

좌표평면에서 도형 $f(x,\ y)=0$을 도형 $f(x+3,\ y-6)=0$으로 옮기는 평행이동에 의하여 다음 도형이 옮겨지는 도형의 방정식을 구하여라.

(1) $3x+y-6=0$　　(2) $(x+1)^2+(y-1)^2=4$　　(3) $y=x^2+3x$

풀이 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다.

(1) $3x+y-6=0$에 x 대신 $x+3$을, y 대신 $y-6$을 대입하면

$3(x+3)+(y-6)-6=0$

$\therefore 3x+y-3=0$

(2) $(x+1)^2+(y-1)^2=4$에 x 대신 $x+3$을, y 대신 $y-6$을 대입하면

$(x+3+1)^2+(y-6-1)^2=4$

$\therefore (x+4)^2+(y-7)^2=4$

(3) $y=x^2+3x$에 x 대신 $x+3$을, y 대신 $y-6$을 대입하면

$y-6=(x+3)^2+3(x+3)$

$\therefore y=x^2+9x+24$

답 (1) $3x+y-3=0$　(2) $(x+4)^2+(y-7)^2=4$　(3) $y=x^2+9x+24$

대표유형 148 직선의 평행이동

• 개념 132

점 (3, 1)을 점 (−1, 7)로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+ay+b=0$이 직선 $x+5y-12=0$으로 옮겨질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

유형 Guide '점 (3, 1)을 점 (−1, 7)로 옮기는 평행이동'에서 주어진 평행이동이 x축, y축의 방향으로 각각 얼마만큼 평행이동한 것인지 파악할 수 있어야 한다. 도형을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 도형의 방정식은 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입한다.

유형 SSEN 도형의 평행이동 ⊙ 이동량의 부호를 바꾸어 대입!

풀이 점 (3, 1)을 점 (−1, 7)로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 −4만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이므로 $x+ay+b=0$에 x 대신 $x+4$를, y 대신 $y-6$을 대입하면

$(x+4)+a(y-6)+b=0 \quad \therefore x+ay-6a+b+4=0$

이 직선이 직선 $x+5y-12=0$과 일치하므로

$a=5,\ -6a+b+4=-12 \quad \therefore a=5,\ b=14$

$\therefore a+b=19$

답 19

다른풀이 주어진 평행이동은 $(x,\ y) \longrightarrow (x-4,\ y+6)$

이 평행이동에 의하여 직선 $x+ay+b=0$이 직선 $x+5y-12=0$으로 옮겨지므로 평행이동

$(x,\ y) \longrightarrow (x+4,\ y-6)$

에 의하여 직선 $x+5y-12=0$은 직선 $x+ay+b=0$으로 옮겨진다.

즉 $x+5y-12=0$에 x 대신 $x-4$를, y 대신 $y+6$을 대입하면

$(x-4)+5(y+6)-12=0 \quad \therefore x+5y+14=0$

이 직선이 직선 $x+ay+b=0$과 일치해야 하므로 $a=5,\ b=14$

$\therefore a+b=19$

Remark 직선은 평행이동해도 기울기가 변하지 않으므로 두 직선 $x+ay+b=0$, $x+5y-12=0$에서 $a=5$임을 쉽게 알 수 있다.

정답 및 풀이 • 119쪽

유제 148-1 직선 $4x+y-5=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선이 원점을 지날 때, 상수 a의 값을 구하여라.

유제 148-2 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+1,\ y-5)$에 의하여 직선 $2x-3y-1=0$이 직선 $2x+ay+b=0$으로 옮겨질 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라.

대표유형 149 원의 평행이동

• 개념 132

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+2,\ y-5)$에 의하여 원 $x^2+y^2-4x+2y+a=0$이 원 $(x-4)^2+(y+b)^2=3$으로 옮겨질 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

유형 Guide 일반형으로 주어진 원의 방정식은 표준형으로 변형하면 계산이 편리한 경우가 많다. 평행이동도 그중 하나이다. 즉 도형 $f(x,\ y)=0$은 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+m,\ y+n)$에 의하여 도형 $f(x-m,\ y-n)=0$으로 옮겨지므로 주어진 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 변형한 후, 여기에 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입하면 옮겨진 원의 방정식을 쉽게 구할 수 있다.

유형 SSEN 원의 평행이동 ➲ 표준형으로 변형 ➲ 이동량의 부호를 바꾸어 대입

풀이 $x^2+y^2-4x+2y+a=0$에서 $\quad (x-2)^2+(y+1)^2=5-a$

주어진 평행이동은 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이므로

원 $(x-2)^2+(y+1)^2=5-a$가 이 평행이동에 의하여 옮겨지는 원의 방정식은

$\{(x-2)-2\}^2+\{(y+5)+1\}^2=5-a$

$\therefore (x-4)^2+(y+6)^2=5-a$

이 원이 원 $(x-4)^2+(y+b)^2=3$과 일치해야 하므로 $\quad 5-a=3,\ b=6$

따라서 $a=2,\ b=6$이므로 $\quad ab=12$ 답 12

다른풀이 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=5-a$의 중심의 좌표는 $(2,\ -1)$이고, 이 점을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(2+2,\ -1-5)$, 즉 $(4,\ -6)$

이 점이 원 $(x-4)^2+(y+b)^2=3$의 중심 $(4,\ -b)$와 일치해야 하므로

$-b=-6 \quad \therefore b=6$

또 원은 평행이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로

$5-a=3 \quad \therefore a=2$

Remark 원 또는 포물선의 평행이동은 다음과 같이 점의 평행이동으로 바꾸어 생각할 수 있다.

① 원의 평행이동 ➡ 원의 중심의 평행이동

② 포물선의 평행이동 ➡ 포물선의 꼭짓점의 평행이동

정답 및 풀이 • 119쪽

유제 149-1 점 $(2,\ 1)$을 점 $(-1,\ 0)$으로 옮기는 평행이동에 의하여 원 $x^2+y^2-8x+2y+1=0$이 옮겨지는 원의 중심의 좌표를 구하여라.

유제 149-2 원 $x^2+y^2-2x-8=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 원 $x^2+y^2+2x-2y-7=0$과 겹쳐진다고 할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

개념 133 점의 대칭이동

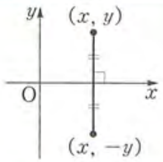
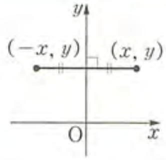
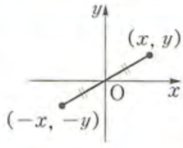
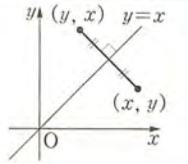
1 대칭이동

도형을 주어진 점 또는 직선에 대하여 대칭인 도형으로 이동하는 것을 **대칭이동**이라 한다.

Remark 주어진 점에 대한 대칭이동을 **점대칭이동**, 주어진 직선에 대한 대칭이동을 **선대칭이동**이라 한다. 이때 주어진 점을 **대칭의 중심**, 주어진 직선을 **대칭축**이라 한다.

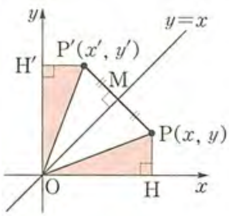
2 점의 대칭이동

점 $(x,\ y)$를 x축, y축, 원점 및 직선 $y=x$에 대하여 각각 대칭이동한 점은 다음과 같다.

(1) x축에 대한 대칭이동	(2) y축에 대한 대칭이동	(3) 원점에 대한 대칭이동	(4) 직선 $y=x$에 대한 대칭이동
			
$(x,\ y) \longrightarrow (x,\ -y)$ ➡ y좌표의 부호가 바뀐다.	$(x,\ y) \longrightarrow (-x,\ y)$ ➡ x좌표의 부호가 바뀐다.	$(x,\ y) \longrightarrow (-x,\ -y)$ ➡ x, y좌표의 부호가 바뀐다.	$(x,\ y) \longrightarrow (y,\ x)$ ➡ x, y좌표가 서로 바뀐다.

개념 Approach

2 에서 (1), (2), (3)은 직관적으로 이해될 것이다. 여기서는 (4)에 대하여 살펴보자.



(4) 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $P(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x',\ y')$, $\overline{PP'}$과 직선 $y=x$의 교점을 M이라 하면 $\triangle P'OM \equiv \triangle POM$ (SAS 합동)이므로

$$\overline{OP'}=\overline{OP},\quad \angle P'OM=\angle POM$$

또 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 점 P'에서 y축에 내린 수선의 발을 H'이라 하면 $\triangle P'OH' \equiv \triangle POH$ (ASA 합동)이므로

$$\overline{P'H'}=\overline{PH},\ \overline{OH'}=\overline{OH} \qquad \therefore x'=y,\ y'=x$$

따라서 점 $P(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $P'(y,\ x)$이다.

개념 Check

점 $(3,\ -1)$을 다음에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하여라.

(1) x축　　(2) y축　　(3) 원점　　(4) 직선 $y=x$

답 (1) $(3,\ 1)$ (2) $(-3,\ -1)$ (3) $(-3,\ 1)$ (4) $(-1,\ 3)$

대표유형 150 점의 대칭이동

• 개념 133

좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(4,\ k)$를 x축, y축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 Q, R라 하자. 선분 QR의 길이가 $4\sqrt{5}$일 때, 양수 k의 값을 구하여라.

유형 Guide 다음을 이용하여 점 Q와 점 R의 좌표를 각각 구한 후, 두 점 사이의 거리 공식을 이용한다.

유형 55EN

점 $(x,\ y)$ $\xrightarrow{x\text{축에 대한 대칭이동}}$ 점 $(x,\ -y)$

점 $(x,\ y)$ $\xrightarrow{y\text{축에 대한 대칭이동}}$ 점 $(-x,\ y)$

점 $(x,\ y)$ $\xrightarrow{\text{원점에 대한 대칭이동}}$ 점 $(-x,\ -y)$

점 $(x,\ y)$ $\xrightarrow{\text{직선 } y=x\text{에 대한 대칭이동}}$ 점 $(y,\ x)$

풀이 점 $\mathrm{P}(4,\ k)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 Q는 $\mathrm{Q}(4,\ -k)$

점 $\mathrm{P}(4,\ k)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점 R는 $\mathrm{R}(-4,\ k)$

선분 QR의 길이가 $4\sqrt{5}$이므로

$$\sqrt{(-4-4)^2+(k+k)^2}=4\sqrt{5}$$

$$\sqrt{4k^2+64}=4\sqrt{5}$$

양변을 제곱하면

$$4k^2+64=80,\qquad 4k^2=16,\qquad k^2=4$$

$$\therefore k=2\ (\because k>0)$$

답 2

정답 및 풀이 • 120쪽

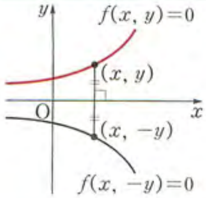
유제 150-1 점 $(5,\ -2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 P, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

유제 150-2 점 $(3,\ -4)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점이 직선 $ax+5y-2a^2=0$ 위의 점이 되도록 하는 실수 a의 값을 모두 구하여라.

개념 134 도형의 대칭이동

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축, y축, 원점 및 직선 $y=x$에 대하여 각각 대칭이동한 도형의 방정식은 다음과 같다.

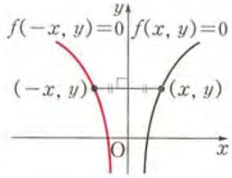
(1) x축에 대한 대칭이동



$f(x,\ y)=0 \longrightarrow f(x,\ -y)=0$

➡ y 대신 $-y$를 대입한다.

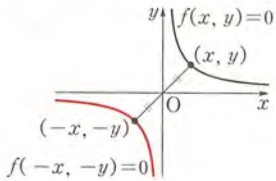
(2) y축에 대한 대칭이동



$f(x,\ y)=0 \longrightarrow f(-x,\ y)=0$

➡ x 대신 $-x$를 대입한다.

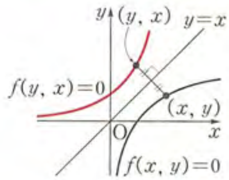
(3) 원점에 대한 대칭이동



$f(x,\ y)=0 \longrightarrow f(-x,\ -y)=0$

➡ x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입한다.

(4) 직선 $y=x$에 대한 대칭이동



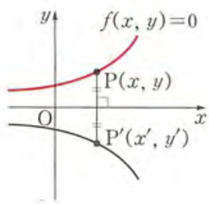
$f(x,\ y)=0 \longrightarrow f(y,\ x)=0$

➡ x 대신 y, y 대신 x를 대입한다.

개념 Approach

위의 모두를 확인하는 것은 번거로우므로 여기서는 (1)과 (4)를 확인하고 나머지는 여러분의 몫으로 남긴다.

(1) 오른쪽 그림과 같이 도형 $f(x,\ y)=0$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면



$$x'=x,\ y'=-y$$

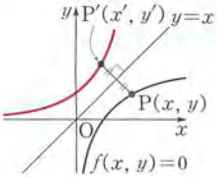
$$\therefore\ x=x',\ y=-y'$$

그런데 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 도형 $f(x,\ y)=0$ 위의 점이므로

$$f(x',\ -y')=0$$

따라서 점 $\mathrm{P}'(x',\ y')$은 도형 $f(x,\ -y)=0$ 위의 점이므로 도형 $f(x,\ y)=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x,\ -y)=0$이다.

(4) 오른쪽 그림과 같이 도형 $f(x,\ y)=0$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면



$$x'=y,\ y'=x$$

$$\therefore\ x=y',\ y=x'$$

그런데 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 도형 $f(x,\ y)=0$ 위의 점이므로

$$f(y',\ x')=0$$

따라서 점 $\mathrm{P}'(x',\ y')$은 도형 $f(y,\ x)=0$ 위의 점이므로 도형 $f(x,\ y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y,\ x)=0$이다.

개념 55EN

	점 $(x,\ y)$ / 도형 $f(x,\ y)=0$
x축에 대한 대칭이동	점 $(x,\ -y)$ / 도형 $f(x,\ -y)=0$
y축에 대한 대칭이동	점 $(-x,\ y)$ / 도형 $f(-x,\ y)=0$
원점에 대한 대칭이동	점 $(-x,\ -y)$ / 도형 $f(-x,\ -y)=0$
직선 $y=x$에 대한 대칭이동	점 $(y,\ x)$ / 도형 $f(y,\ x)=0$

Remark 대칭이동에 대한 3가지 기억법

① 점의 대칭이동과 도형의 대칭이동은 문자의 변화 형태가 같다. 예를 들어 x축에 대한 대칭이동의 경우,

- 점의 대칭이동 : $\mathrm{P}(x,\ y)$ ➡ $\mathrm{P}'(x,\ -y)$
- 도형의 대칭이동 : $f(x,\ y)=0$ ➡ $f(x,\ -y)=0$

← 둘 다 똑같이 y 대신 $-y$를 대입

이므로 둘 중 한 가지만 기억하면 된다.

② 점대칭이동은 선대칭이동 2회와 같다.

- 원점에 대한 대칭이동 ➡ x축에 대한 대칭이동과 y축에 대한 대칭이동을 거듭한 것과 같다.

③ 직선 $y=x$에 대한 대칭이동은 읽히는 대로 대입하면 된다.

- $y=x$에 대한 대칭이동 ➡ $\begin{cases} y=x & \leftarrow y \text{ 대신 } x\text{를 대입} \\ x=y & \leftarrow x \text{ 대신 } y\text{를 대입} \end{cases}$

개념 Check

직선 $x-2y+5=0$을 다음 직선 또는 점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하여라.

(1) x축 (2) y축

(3) 원점 (4) 직선 $y=x$

풀이 (1) $x-2(-y)+5=0$ $\quad\therefore\ x+2y+5=0$

(2) $(-x)-2y+5=0$ $\quad\therefore\ x+2y-5=0$

(3) $(-x)-2(-y)+5=0$ $\quad\therefore\ x-2y-5=0$

(4) $y-2x+5=0$ $\quad\therefore\ 2x-y-5=0$

답 풀이 참조

대표유형 151 도형의 대칭이동

• 개념 134

다음에 답하여라.

(1) 직선 $y=-2x+k$를 y축에 대하여 대칭이동한 직선이 점 $(4,\ 4)$를 지날 때, 상수 k의 값을 구하여라.

(2) 원 $x^2+(y-2)^2=1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 중심이 직선 $y=ax+2b$ 위에 있을 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

유형 Guide 한 도형을 평행이동 또는 대칭이동해도 도형의 크기와 모양은 변하지 않는다. 즉 평행이동이나 대칭이동에 의하여 원의 중심은 원의 중심으로, 포물선의 꼭짓점은 포물선의 꼭짓점으로 이동하므로 (2)에서는 도형 전체를 대칭이동할 필요없이 원의 중심만 대칭이동하면 된다.

유형 SSEN **평행이동 또는 대칭이동 ⊙ 도형의 크기와 모양은 변하지 않는다!**

풀이 (1) 직선 $y=-2x+k$를 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=-2\cdot(-x)+k \qquad \therefore y=2x+k$

이 직선이 점 $(4,\ 4)$를 지나므로

$4=2\cdot4+k$

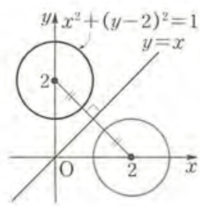
$\therefore k=-4$

(2) 원 $x^2+(y-2)^2=1$의 중심이 $(0,\ 2)$이므로 이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 중심은 $(2,\ 0)$이다.

점 $(2,\ 0)$이 직선 $y=ax+2b$ 위에 있으므로

$0=a\cdot2+2b$

$2(a+b)=0 \qquad \therefore a+b=0$



답 (1) -4 (2) 0

정답 및 풀이 • 120쪽

유제 151-1 직선 $y=kx+1$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선이 원 $x^2+y^2+4x-6y+9=0$의 넓이를 이등분할 때, 상수 k의 값을 구하여라.

유제 151-2 포물선 $y=x^2-2mx+m^2-1$을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ k)$일 때, mk의 값을 구하여라. (단, m은 상수이다.)

대표유형 152 도형의 평행이동과 대칭이동

• 개념 132, 134

직선 $y=mx+2$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선이 점 $(4,\ 3)$을 지날 때, 상수 m의 값을 구하여라.

유형 Guide 평행이동과 대칭이동을 연이어 할 때에는 도형의 이동 순서에 특히 주의하면서 다음과 같이 구한다.

$$f(x,\ y)=0 \xrightarrow[y\text{축의 방향으로 }-3\text{만큼 평행이동}]{x\text{축의 방향으로 }2\text{만큼,}} f(x-2,\ y+3)=0 \xrightarrow[\text{대하여 대칭이동}]{\text{직선 }y=x\text{에}} f(y-2,\ x+3)=0$$

유형 SSEN 평행이동과 대칭이동을 연이어 할 때 ⊙ 순서대로 적용하라!

풀이 직선 $y=mx+2$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+3=m(x-2)+2 \qquad \therefore y=mx-2m-1$

이 직선을 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$x=my-2m-1$

이 직선이 점 $(4,\ 3)$을 지나므로

$4=3m-2m-1 \qquad \therefore m=5$

답 5

Remark 직선 $y=mx+2$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면

$$y=mx+2 \xrightarrow[\text{대하여 대칭이동}]{\text{직선 }y=x\text{에}} x=my+2 \xrightarrow[y\text{축의 방향으로 }-3\text{만큼 평행이동}]{x\text{축의 방향으로 }2\text{만큼,}} x-2=m(y+3)+2$$

즉 $x=my+3m+4$로 틀린 답이 구해지므로 도형의 이동 순서에 주의한다.

정답 및 풀이 • 120쪽

유제 152-1 직선 $y=3x-4$를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식을 구하여라.

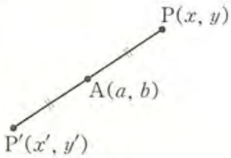
유제 152-2 원 $x^2+y^2=r^2$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원이 y축에 접할 때, 양수 r의 값을 구하여라.

특강 135

점에 대한 대칭이동

평면 위의 점 또는 도형을 한 점에 대하여 대칭이동하는 방법을 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면 점 A에서 두 점 P, P′에 이르는 거리가 서로 같으므로 점 A는 선분 PP′의 중점이 된다.



$$\therefore a=\frac{x+x'}{2},\ b=\frac{y+y'}{2}$$

즉 $x'=2a-x,\ y'=2b-y$이므로 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{P}'(2a-x,\ 2b-y)$이다.

또 도형 $f(x,\ y)=0$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면

$$x'=2a-x,\ y'=2b-y \qquad \therefore x=2a-x',\ y=2b-y'$$

이것을 $f(x,\ y)=0$에 대입하면 $\quad f(2a-x',\ 2b-y')=0$

따라서 점 $\mathrm{P}'(x',\ y')$은 도형 $f(2a-x,\ 2b-y)=0$ 위의 점이므로 도형 $f(x,\ y)=0$을 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(2a-x,\ 2b-y)=0$임을 알 수 있다.

(1) 점 $(x,\ y)$를 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이동하면

$$\boldsymbol{(x,\ y) \longrightarrow (2a-x,\ 2b-y)}$$

(2) 도형 $f(x,\ y)=0$을 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이동하면

$$\boldsymbol{f(x,\ y)=0 \longrightarrow f(2a-x,\ 2b-y)=0}$$

Remark 점대칭이동은 선대칭이동 2회와 같다. 즉 점 $(a,\ b)$에 대한 대칭이동은 직선 $x=a$에 대한 대칭이동과 직선 $y=b$에 대한 대칭이동을 거듭한 것과 같다. 참고로 직선 $x=a$에 대한 대칭이동은 $(x,\ y) \longrightarrow (2a-x,\ y)$, 직선 $y=b$에 대한 대칭이동은 $(x,\ y) \longrightarrow (x,\ 2b-y)$이다.

개념 Check

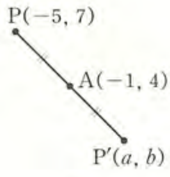
점 $\mathrm{P}(-5,\ 7)$을 점 $\mathrm{A}(-1,\ 4)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하여라.

풀이 점 $\mathrm{P}(-5,\ 7)$을 점 $\mathrm{A}(-1,\ 4)$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(a,\ b)$라 하면 점 $\mathrm{A}(-1,\ 4)$가 선분 PP′의 중점이므로

$$\frac{-5+a}{2}=-1,\ \frac{7+b}{2}=4$$

$$\therefore a=3,\ b=1$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(3,\ 1)$이다.



답 $(3,\ 1)$

대표유형 153 점에 대한 대칭이동 • 특강 135

원 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$을 점 $(-1,\ -1)$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하여라.

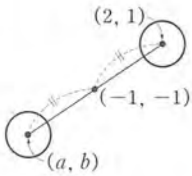
유형 Guide 보통 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이동하는 것은

$$f(x,\ y)=0 \longrightarrow f(2a-x,\ 2b-y)=0$$

임을 이용하여 해결한다. 그러나 원과 포물선의 대칭이동은 각각 원의 중심과 포물선의 꼭짓점의 대칭이동과 관계가 깊으므로 점의 대칭이동으로도 해결할 수 있다.

유형 SSEN 원 또는 포물선의 대칭이동 ⊙ 점의 대칭이동

풀이 주어진 원을 점 $(-1,\ -1)$에 대하여 대칭이동한 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$의 중심 $(2,\ 1)$과 점 $(a,\ b)$는 점 $(-1,\ -1)$에 대하여 대칭이므로 점 $(-1,\ -1)$은 두 점 $(2,\ 1)$, $(a,\ b)$를 잇는 선분의 중점이다.



즉 $\dfrac{2+a}{2}=-1$, $\dfrac{1+b}{2}=-1$이므로

$a=-4$, $b=-3$

따라서 대칭이동한 원은 중심의 좌표가 $(-4,\ -3)$이고 반지름의 길이가 1이므로 구하는 도형의 방정식은

$(x+4)^2+(y+3)^2=1$ 답 $(x+4)^2+(y+3)^2=1$

다른풀이 주어진 원을 점 $(-1,\ -1)$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 주어진 원의 방정식에 x 대신 $2\cdot(-1)-x$, y 대신 $2\cdot(-1)-y$를 대입하면 된다. 즉

$$\{(-2-x)-2\}^2+\{(-2-y)-1\}^2=1$$

에서 $(x+4)^2+(y+3)^2=1$

정답 및 풀이 • 120쪽

유제 153-1 점 $(-3,\ a)$를 점 $(9,\ 5)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(b,\ 2)$일 때, $2a-b$의 값을 구하여라.

유제 153-2 포물선 $y=x^2-8x+19$를 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이동하였더니 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(0,\ -3)$이 되었다. 이때 $a+b$의 값을 구하여라.

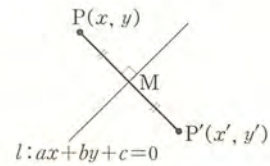
Plus 유제 153-3 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=4$를 점 $(2,\ -3)$에 대하여 대칭이동한 원이 직선 $y=mx-3$과 접할 때, 모든 실수 m의 값의 합을 구하여라.

특강 136

직선에 대한 대칭이동

평면 위의 점 또는 도형을 한 직선 l에 대하여 대칭이동하는 방법에 대하여 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $l : ax+by+c=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하고, $\overline{\mathrm{PP}'}$과 직선 l의 교점을 M이라 하면 직선 l은 $\overline{\mathrm{PP}'}$의 수직이등분선이므로 $\overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{P}'\mathrm{M}},\ \overline{\mathrm{PP}'}\perp l$



즉 점 P′의 좌표는 다음의 두 조건을 이용하여 구할 수 있다.

(i) 중점 조건 : $\overline{\mathrm{PP}'}$의 중점 $\left(\dfrac{x+x'}{2},\ \dfrac{y+y'}{2}\right)$이 직선 l 위의 점이다.

➡ $a\cdot\dfrac{x+x'}{2}+b\cdot\dfrac{y+y'}{2}+c=0$

(ii) 수직 조건 : 직선 PP′과 직선 l은 서로 수직이다.

➡ $\dfrac{y'-y}{x'-x}\cdot\left(-\dfrac{a}{b}\right)=-1$

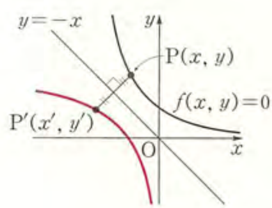
직선에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 때에도 같은 방법을 이용한다. 즉 도형 $f(x,\ y)=0$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $\mathrm{P}'(x',\ y')$으로 놓고, 위의 방법을 이용하면 된다.

개념 SSEN

점 P를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점 P′	⟶	(i) $\overline{\mathrm{PP}'}$의 중점은 직선 l 위의 점 (ii) $\overline{\mathrm{PP}'}\perp l$

위의 중점 조건과 수직 조건을 이용하여 도형 $f(x,\ y)=0$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구해 보자.

도형 $f(x,\ y)=0$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면



(i) 중점 조건 : $\overline{\mathrm{PP}'}$의 중점 $\left(\dfrac{x+x'}{2},\ \dfrac{y+y'}{2}\right)$이 직선 $y=-x$ 위의 점이므로

$$\frac{y+y'}{2}=-\frac{x+x'}{2}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

(ii) 수직 조건 : 직선 PP′이 직선 $y=-x$와 수직이므로 직선 PP′의 기울기는 1이다.

$$\therefore \frac{y'-y}{x'-x}=1\qquad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 $x,\ y$에 대하여 풀면 $x=-y',\ y=-x'$

그런데 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 도형 $f(x,\ y)=0$ 위의 점이므로 $f(-y',\ -x')=0$이다.

따라서 점 $P'(x', y')$은 도형 $f(-y, -x)=0$ 위의 점이므로 도형 $f(x, y)=0$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(-y, -x)=0$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

(1) 점 $P(x, y)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점 P'은

$$\mathbf{P'(-y, -x)}$$

(2) 도형 $f(x, y)=0$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$\boldsymbol{f(-y, -x)=0}$$

일반적으로 기울기가 1 또는 -1인 직선에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 다음과 같다.

① 직선 $\boldsymbol{y=x+a}$에 대한 대칭이동 : $f(x, y)=0 \Rightarrow \boldsymbol{f(y-a, x+a)=0}$

② 직선 $\boldsymbol{y=-x+a}$에 대한 대칭이동 : $f(x, y)=0 \Rightarrow \boldsymbol{f(a-y, a-x)=0}$

Remark 위의 ①, ②는 외울 필요없이 주어진 식을 변형하여 대입한다고 생각하면 된다.

① $y=x+a$에 대한 대칭이동 ➡ $\begin{cases} y=x+a & \leftarrow y \text{ 대신 } x+a\text{를 대입} \\ x=y-a & \leftarrow x \text{ 대신 } y-a\text{를 대입} \end{cases}$

② $y=-x+a$에 대한 대칭이동 ➡ $\begin{cases} y=-x+a & \leftarrow y \text{ 대신 } -x+a\text{를 대입} \\ x=-y+a & \leftarrow x \text{ 대신 } -y+a\text{를 대입} \end{cases}$

개념 **Check**

다음을 구하여라.

(1) 점 $(3, -2)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표

(2) 직선 $3x-2y+1=0$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식

풀이 (1) $(2, -3)$

(2) $3x-2y+1=0$에 x 대신 $-y$를, y 대신 $-x$를 대입하면

$3(-y)-2(-x)+1=0$

$\therefore 2x-3y+1=0$

답 (1) $(2, -3)$ (2) $2x-3y+1=0$

14 도형의 이동

대표유형 154 직선에 대한 대칭이동

• 특강 136

다음을 구하여라.

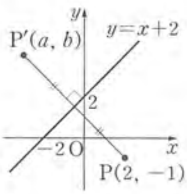
(1) 점 $\mathrm{P}(2,\ -1)$을 직선 $y=x+2$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표

(2) 직선 $y=-2x$를 직선 $y=-x-1$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식

유형 Guide 직선 $x=a$나 직선 $y=b$, 직선 $y=\pm x$가 아닌 직선에 대하여 대칭이동할 때에는 중점 조건과 수직 조건을 이용하여 해결한다.

유형 55EN **직선에 대한 대칭이동 ◐ 중점 조건, 수직 조건 이용!**

풀이 (1) 점 $\mathrm{P}(2,\ -1)$을 직선 $y=x+2$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(a,\ b)$라 하자.



(i) $\overline{\mathrm{PP}'}$의 중점 $\left(\dfrac{a+2}{2},\ \dfrac{b-1}{2}\right)$은 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로

$$\frac{b-1}{2}=\frac{a+2}{2}+2 \qquad \therefore a-b=-7 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

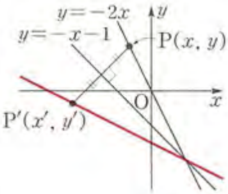
(ii) 직선 PP'이 직선 $y=x+2$와 수직이므로 직선 PP'의 기울기는 -1이다.

즉 $\dfrac{b-(-1)}{a-2}=-1$이므로 $\quad a+b=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-3,\ b=4$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\quad (-3,\ 4)$

(2) 직선 $y=-2x$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $y=-x-1$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하자.



(i) $\overline{\mathrm{PP}'}$의 중점 $\left(\dfrac{x+x'}{2},\ \dfrac{y+y'}{2}\right)$은 직선 $y=-x-1$ 위의 점이므로 $\quad \dfrac{y+y'}{2}=-\dfrac{x+x'}{2}-1$

$$\therefore x+y=-x'-y'-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) 직선 PP'이 직선 $y=-x-1$과 수직이므로

$$\frac{y'-y}{x'-x}\cdot(-1)=-1 \qquad \therefore x-y=x'-y' \ \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 $x,\ y$에 대하여 풀면 $\quad x=-y'-1,\ y=-x'-1$

그런데 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 직선 $y=-2x$ 위의 점이므로

$$-x'-1=-2(-y'-1) \qquad \therefore x'+2y'+3=0$$

따라서 $x',\ y'$을 각각 $x,\ y$로 바꾸면 구하는 직선의 방정식은

$$x+2y+3=0$$

답 (1) $(-3,\ 4)$ (2) $x+2y+3=0$

정답 및 풀이 • 121쪽

유제 154-1 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$을 직선 $x+2y-2=0$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하여라.

특강 137 선분의 길이의 합의 최솟값

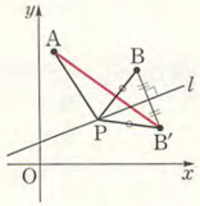
좌표평면 위에서 두 점 A, B가 직선 l에 대하여 같은 쪽에 있고, 점 P가 직선 l 위를 움직일 때, $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값을 구하는 방법을 알아보자.

[그림 1]과 같이 점 B를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

$$\overline{BP}=\overline{B'P}$$

이므로

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$$
$$\geq\overline{AB'}$$



[그림 1]

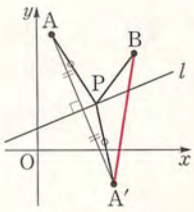
따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\overline{AB'}$의 길이와 같다.

또 [그림 2]와 같이 점 A를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

$$\overline{AP}=\overline{A'P}$$

이므로

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$$
$$\geq\overline{A'B}$$



[그림 2]

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\overline{A'B}$의 길이와 같다.

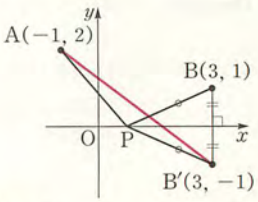
이때 $\overline{AB'}=\overline{A'B}$이므로 점 B를 직선 l에 대하여 대칭이동하거나 점 A를 직선 l에 대하여 대칭이동해도 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 같다.

위의 방법을 이용하여 두 점 A$(-1,\ 2)$, B$(3,\ 1)$과 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값을 구해 보자.

❶단계 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한다.

오른쪽 그림과 같이 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

B′$(3,\ -1)$



❷단계 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값을 찾는다.

$\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}\geq\overline{AB'}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\overline{AB'}$의 길이와 같다.

❸단계 $\overline{AB'}$의 길이를 구한다.

$$\overline{AB'}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(-1-2)^2}$$
$$=5$$

이므로 구하는 최솟값은 5이다.

대표유형 155 선분의 길이의 합의 최솟값

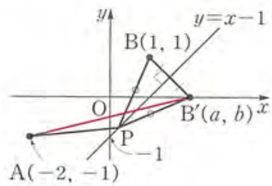
• 특강 137

두 점 $\mathrm{A}(-2,\ -1)$, $\mathrm{B}(1,\ 1)$과 직선 $y=x-1$ 위의 임의의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구하여라.

유형 Guide 문제에서 두 점 A, B가 직선 $y=x-1$에 대하여 같은 쪽에 있으므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 직접 구할 수는 없다. 이와 같은 경우에는 한 점을 주어진 직선에 대하여 대칭이동하면 쉽게 해결된다. 즉 점 B를 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 할 때, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 선분 AB′의 길이와 같음을 이용한다. 이때 점 B′의 좌표는 **특강 138**의 중점 조건과 수직 조건을 이용하여 구한다.

유형 SSEN $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값 ➡ 대칭이동을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{B}(1,\ 1)$을 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{B}'(a,\ b)$라 하자.



$\overline{\mathrm{BB}'}$의 중점 $\left(\dfrac{1+a}{2},\ \dfrac{1+b}{2}\right)$가 직선 $y=x-1$ 위의 점이므로

$$\frac{1+b}{2}=\frac{1+a}{2}-1 \qquad \therefore a-b=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 BB′이 직선 $y=x-1$과 수직이므로

$$\frac{b-1}{a-1}=-1 \qquad \therefore a+b=2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=0$

$\therefore \mathrm{B}'(2,\ 0)$

$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}&=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}\\&\geq\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+\{0-(-1)\}^2}=\sqrt{17}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{17}$이다.

답 $\sqrt{17}$

Remark 점 B를 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이동한 점 B′의 좌표를 구할 때, 대칭이동

$(x,\ y) \longrightarrow (y+1,\ x-1)$

을 이용하여 $(1,\ 1) \longrightarrow (1+1,\ 1-1) \quad \therefore \mathrm{B}'(2,\ 0)$

이와 같이 간단하게 구할 수도 있으나, 서술형 문제에서는 이 방법보다는 풀이와 같이 서술하는 것이 더 바람직하다.

정답 및 풀이 • 121쪽

유제 155-1 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 5)$, $\mathrm{B}(2,\ 3)$과 직선 $y=-x$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구하여라.

Plus 유제 155-2 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ -2)$, $\mathrm{B}(1,\ -4)$와 x축 위의 임의의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값을 최소가 되게 하는 점 P의 좌표를 구하여라.

중단원 연습 문제

정답 및 풀이 • 122쪽

STEP 1 유형 Training

01 점 $(1,\ -3)$을 점 $(5,\ -7)$로 옮기는 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 점 $(1,\ -3)$으로 옮겨지는 점의 좌표를 $(c,\ d)$라 할 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

02 직선 $y=4x-3$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 직선 $y=mx+4$와 일치한다고 할 때, 상수 $a,\ m$에 대하여 $a+m$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

03 원 $x^2+(y-1)^2=4$를 원 $(x-1)^2+y^2=4$로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $y=-3x+1$로 옮겨지는 직선의 y절편을 구하여라.

서술형

04 점 $\mathrm{P}(-1,\ -4)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 Q, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 R라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이를 구하여라.

05 원 $x^2+y^2+6x-4y-12=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 중심의 좌표가 $(a,\ b)$, 반지름의 길이가 c일 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

06 점 $(-2,\ 1)$을 지나는 직선을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후, x축에 대하여 대칭이동하면 점 $(1,\ -2)$를 지난다고 한다. 이때 처음 직선의 기울기는?

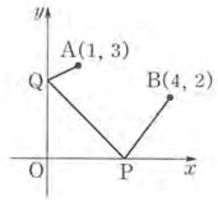
① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{2}$

서술형

07 점 $(2,\ 3)$을 직선 l에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(0,\ 1)$일 때, 직선 l의 방정식을 구하여라.

서술형

08 좌표평면 위의 두 점 $A(1,\ 3)$, $B(4,\ 2)$와 x축 위의 임의의 점 P, y축 위의 임의의 점 Q에 대하여 $\overline{AQ}+\overline{QP}+\overline{PB}$의 최솟값을 구하여라.

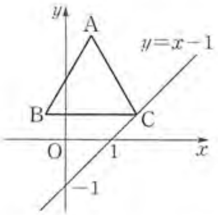


STEP 2 실전 Application

서술형

09 직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하였더니 직선 $y=-\frac{1}{2}x-4$와 x축 위에서 수직으로 만났다고 한다. 이때 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

10 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC가 있다. 변 BC가 x축과 평행하고 꼭짓점 C가 직선 $y=x-1$ 위를 움직일 때, 점 A의 자취의 방정식을 구하여라. (단, 점 A의 y좌표는 점 C의 y좌표보다 크다.)



교육청기출

11 좌표평면에서 포물선 $y=x^2-2x$를 포물선 $y=x^2-12x+30$으로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $l : x-2y=0$이 직선 l'으로 옮겨진다. 두 직선 l, l' 사이의 거리를 d라 할 때, d^2의 값을 구하여라.

교육청기출

12 좌표평면에서 점 A$(1,\ 3)$을 x축, y축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 B, C라 하고, 점 D$(a,\ b)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 E라 하자. 세 점 B, C, E가 한 직선 위에 있을 때, 직선 AD의 기울기는? (단, $a \neq \pm 1$)

① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 3

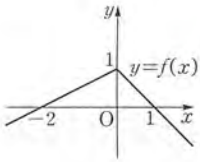
평가원기출

13 원 $(x+1)^2+(y+3)^2=4$를 원점에 대하여 대칭이동한 원을 C라 하고, 직선 $mx-y+6=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선을 l이라 하자. 직선 l이 원 C의 중심을 지날 때, 상수 m의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

서술형

14 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $x=f(-y)$의 그래프를 그려라.



15 직선 $4x-3y-7=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하였더니 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하였다. 이때 양수 r의 값은?

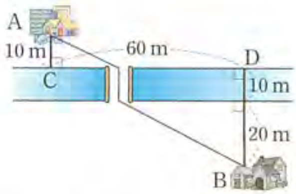
① $\frac{1}{2}$　② $\frac{\sqrt{2}}{2}$　③ 1　④ $\sqrt{2}$　⑤ 2

16 직선 $2x-y-1=0$을 점 $(0,\ 2)$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식이 $ax-y+b=0$일 때, 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하여라.

17 두 점 A(1, 3), B(4, 2)와 직선 $y=-x+2$ 위의 임의의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은?

① 5 ② $\sqrt{26}$ ③ $3\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $\sqrt{29}$

18 오른쪽 그림과 같이 두 마을 A, B가 폭이 10 m로 일정한 강을 사이에 두고 있다. A마을과 B마을에서 강변에 이르는 거리는 각각 10 m, 20 m이고, C지점에서 D지점까지의 거리는 60 m이다. 이 강에 수직으로 다리를 놓아 두 마을 사이를 오가는 거리가 최소가 되도록 할 때, C지점에서 D지점 쪽으로 몇 m 떨어진 곳에 다리를 건설해야 하는지 구하여라. (단, 강은 직선으로 흐르고, 다리의 폭은 무시한다.)



STEP 3 심화 Forwarding

19 도형 $|x|+|y|=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 도형의 방정식을 $f(x,\ y)=0$이라 하자. 두 방정식 $f(x,\ y)=0$, $kx-y+k-1=0$을 동시에 만족시키는 실수 x, y가 존재하도록 하는 실수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $16M^2m^2$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

서술형

20 좌표평면 위의 점 P$(-2,\ 1)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 P_1, 점 P_1을 원점에 대하여 대칭이동한 점을 P_2, 점 P_2를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 P_3, 점 P_3을 원점에 대하여 대칭이동한 점을 P_4라 하자. 이와 같은 방법으로 계속 할 때, 점 P_{2014}와 직선 $3x+4y+5=0$ 사이의 거리를 구하여라.

21 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후, 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 $g(x,\ y)=0$이라 할 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 도형 $f(x,\ y)=0$을 평행이동하면 도형 $g(x,\ y)=0$이 될 수 있다.
ㄴ. 도형 $f(x,\ y)=0$을 원점에 대하여 대칭이동하면 도형 $g(x,\ y)=0$이 된다.
ㄷ. 도형 $f(x,\ y)=0$이 원이고 두 방정식 $f(x,\ y)=0$, $g(x,\ y)=0$이 서로 일치하면 그 원의 중심은 원점이다.

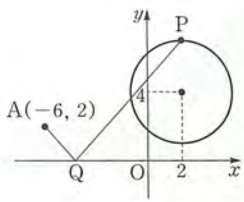
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

교육청기출

22 좌표평면 위에 중심의 좌표가 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$이고 반지름의 길이가 1인 원 O_1이 있다. 원 O_1을 y축에 대하여 대칭이동한 원을 O_2라 하고 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원을 O_3이라 하자. 원 O_1의 내부와 원 O_2의 내부의 공통부분의 넓이와 원 O_2의 내부와 원 O_3의 내부의 공통부분의 넓이의 합은?

① $\frac{4}{3}\pi-2\sqrt{3}$ ② $\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$
④ $\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

23 오른쪽 그림과 같이 원 $(x-2)^2+(y-4)^2=9$ 위를 움직이는 점 P와 x축 위를 움직이는 점 Q가 있다. 점 A$(-6,\ 2)$에 대하여 $\overline{AQ}+\overline{QP}$의 최솟값을 구하여라.



15

부등식의 영역

좌표평면에서 두 미지수 x, y에 대한 일차방정식은 직선으로 나타내어지고, 이차방정식은 포물선, 원 등으로 나타내어짐을 배웠다.
그렇다면 부등식은 좌표평면에서 어떻게 나타내어질까?

이 단원에서는 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내는 방법과 좌표평면 위에 나타내어진 영역을 부등식으로 나타내는 방법에 대하여 알아보자. 또 부등식의 영역에서 최댓값 또는 최솟값을 구하는 방법을 알아보고, 실생활의 여러 가지 문제를 해결해 보자.

● 한눈에 보는 개념 & 유형 map

소단원 & 학습목표

46 부등식의 영역

- 부등식의 영역의 의미를 이해하고, 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타낼 수 있다.

47 연립부등식의 영역

- 연립부등식과 다항식의 곱으로 표현된 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타낼 수 있다.

48 부등식의 영역의 활용

- 부등식의 영역에서 최댓값 또는 최솟값을 구할 수 있다.

개념 & 특강 | 대표유형 & 유제

138 부등식의 영역 — 156 부등식의 영역
139 원의 내부와 외부 — 157 원의 내부와 외부
156, 157 — 158 부등식의 영역의 포함 관계
140 부등식의 영역을 좌표평면에 나타내는 방법

141 연립부등식의 영역 — 159 연립부등식의 영역 — 160 연립부등식의 영역의 넓이
142 다항식의 곱으로 표현된 부등식의 영역
160, 142 — 161 영역을 나타내는 부등식 구하기
특강 143 다항식의 곱으로 표현된 부등식의 영역을 좌표평면에 나타내는 방법 — 162 다항식의 곱으로 표현된 부등식의 영역

144 부등식의 영역에서의 최대 · 최소 — 163 부등식의 영역에서 일차식의 최대 · 최소 — 164 부등식의 영역에서 이차식의 최대 · 최소
특강 145 부등식의 영역과 최대 · 최소의 활용 — 165 부등식의 영역과 최대 · 최소의 활용

개념 138 부등식의 영역

1 부등식의 영역

좌표평면에서 x, y에 대한 어떤 부등식을 만족시키는 모든 점 (x, y)를 그 **부등식의 영역**이라 한다.

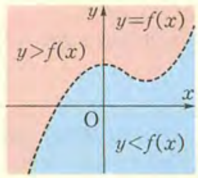
2 기본적인 부등식의 영역

(1) 부등식 $y>f(x)$의 영역

➡ 곡선 $y=f(x)$의 윗부분

(2) 부등식 $y<f(x)$의 영역

➡ 곡선 $y=f(x)$의 아랫부분

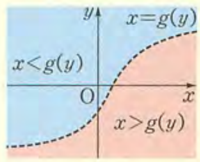


(3) 부등식 $x>g(y)$의 영역

➡ 곡선 $x=g(y)$의 오른쪽 부분

(4) 부등식 $x<g(y)$의 영역

➡ 곡선 $x=g(y)$의 왼쪽 부분



Remark 2의 (1), (2)에서 곡선 $y=f(x)$와 (3), (4)에서 곡선 $x=g(y)$는 영역을 나누는 경계선을 나타낸다.

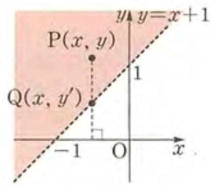
개념 Approach

좌표평면에서 부등식 $y>x+1$의 영역을 알아보자.

(i) 직선 $y=x+1$의 윗부분에 있는 임의의 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 지나고 x축에 수직인 직선과 직선 $y=x+1$의 교점을 $\mathrm{Q}(x, y')$이라 하면 $y'=x+1$이고 $y>y'$이므로

$y>x+1$ ······ ㉠

즉 직선 $y=x+1$의 윗부분에 있는 모든 점 $\mathrm{P}(x, y)$는 부등식 ㉠을 만족시킨다.



(ii) 거꾸로 부등식 ㉠을 만족시키는 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면

$y>x+1$

점 P를 지나고 x축에 수직인 직선과 직선 $y=x+1$의 교점을 $\mathrm{Q}(x, y')$이라 하면 $y>x+1$, $y'=x+1$에서 $y>y'$이므로 점 $\mathrm{P}(x, y)$는 직선 $y=x+1$의 윗부분에 있다.

(i), (ii)에서 부등식 $y>x+1$의 영역은 직선 $y=x+1$의 윗부분이다.

같은 방법으로 부등식 $y<x+1$의 영역은 직선 $y=x+1$의 아랫부분임을 알 수 있다.

Remark $y>x+1$을 $x<y-1$로 보아서 경계선의 왼쪽 부분이라고 할 수도 있다. 마찬가지로 $y<x+1$을 $x>y-1$로 보아서 경계선의 오른쪽 부분이라고 할 수도 있다.

일반적으로 부등식 $y>f(x)$ 또는 $y<f(x)$와 같이 부등호 $>$, $<$로 나타내어지는 영역은 경계선 $y=f(x)$를 포함하지 않는다. 이때 경계선 $y=f(x)$는 보통 점선으로 나타내며 경계선이 포함되지 않음을 명확히 나타내어야 한다.
반대로 부등식 $y\geq f(x)$ 또는 $y\leq f(x)$와 같이 부등호 $\geq$, $\leq$로 나타내어지는 영역은 경계선 $y=f(x)$를 포함한다. 이때 경계선 $y=f(x)$는 보통 실선으로 나타내며 경계선이 포함됨을 명확히 나타내는 것이 좋다.

개념 SSEN

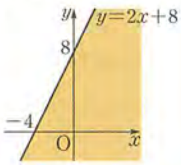
$>$, $<$ → 경계선 제외 → 경계선을 점선으로 나타낸다.
$\geq$, $\leq$ → 경계선 포함 → 경계선을 실선으로 나타낸다.

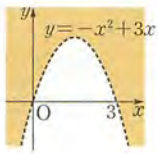
개념 Check 1

다음 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $y\leq 2x+8$　　　　(2) $y>-x^2+3x$

풀이 (1) 주어진 부등식의 영역은 직선 $y=2x+8$의 아랫부분(경계선 포함)이다.
(2) 주어진 부등식의 영역은 포물선 $y=-x^2+3x$의 윗부분(경계선 제외)이다.

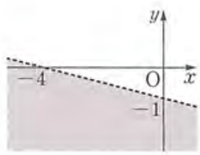
(1)


(2)


답 풀이 참조

개념 Check 2

오른쪽 그림의 색칠한 영역을 부등식으로 나타내어라.
(단, 경계선은 제외한다.)



풀이 경계선을 나타내는 직선은 두 점 $(-4,\ 0)$, $(0,\ -1)$을 지나므로 그 방정식은

$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{-1}=1 \qquad \therefore y=-\frac{1}{4}x-1$$

따라서 색칠한 부분은 직선 $y=-\frac{1}{4}x-1$의 아랫부분(경계선 제외)이므로 구하는 부등식은　$y<-\frac{1}{4}x-1$

답 $y<-\frac{1}{4}x-1$

개념 139

원의 내부와 외부

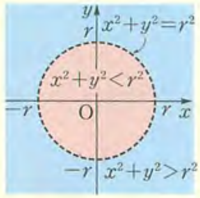
원 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$은 좌표평면을 다음과 같이 두 부분으로 나눈다.

① 부등식 $x^2+y^2<r^2$의 영역

➡ 원 $x^2+y^2=r^2$의 내부

② 부등식 $x^2+y^2>r^2$의 영역

➡ 원 $x^2+y^2=r^2$의 외부



Remark 평면 위에서 원과 같은 폐곡선은 평면을 두 부분으로 나누는데, 일반적으로 넓이가 유한한 쪽이 폐곡선의 내부이고, 무한한 쪽이 외부이다.

개념 Approach

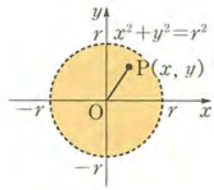
좌표평면에서 부등식 $x^2+y^2<r^2$ $(r>0)$의 영역을 알아보자.

(i) 원의 내부에 있는 임의의 한 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

$$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{x^2+y^2}<r$$

$$\therefore\ x^2+y^2<r^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

따라서 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 부등식 $x^2+y^2<r^2$을 만족시킨다.



(ii) 거꾸로 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 부등식 ㉠을 만족시키면 $\overline{\mathrm{OP}}<r$이므로 점 P는 원의 내부에 있다.

(i), (ii)에서 부등식 $x^2+y^2<r^2$의 영역은 원 $x^2+y^2=r^2$의 내부이다.

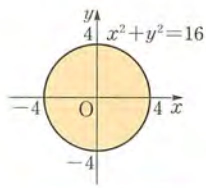
같은 방법으로 부등식 $x^2+y^2>r^2$의 영역은 원 $x^2+y^2=r^2$의 외부임을 알 수 있다.

개념 Check

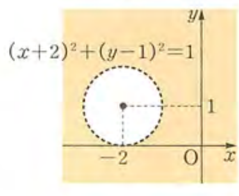
다음 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $x^2+y^2\le 16$ (2) $(x+2)^2+(y-1)^2>1$

풀이 (1) 주어진 부등식의 영역은 원 $x^2+y^2=16$의 내부(경계선 포함)이므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



(2) 주어진 부등식의 영역은 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=1$의 외부(경계선 제외)이므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



답 풀이 참조

개념 140

부등식의 영역을 좌표평면에 나타내는 방법

다음 순서를 따르면 부등식 $f(x,\ y)>0$ 또는 $f(x,\ y)<0$의 영역을 좌표평면 위에 쉽게 나타낼 수 있다.

(i) 경계선 $f(x,\ y)=0$의 그래프를 그린다.
(ii) 경계선 위에 있지 않은 한 점의 좌표를 주어진 부등식에 대입한다.
① 부등식이 성립하면 ➡ 그 점이 속하는 영역이 구하는 부등식의 영역이다.
② 부등식이 성립하지 않으면
➡ 그 점이 속하는 영역에 이웃하는 영역이 구하는 부등식의 영역이다.

Remark (ii)에서 한 점의 좌표를 부등식에 대입할 때, 경계선 $f(x,\ y)=0$ 위에 있지 않은 어떤 점을 대입해도 상관없지만 점 $(0,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$과 같이 간단히 계산할 수 있는 점을 대입하는 것이 좋다.

개념 Approach

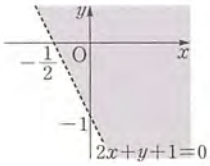
위의 방법을 이용하여 부등식 $2x+y+1>0$의 영역을 좌표평면 위에 나타내어 보자.

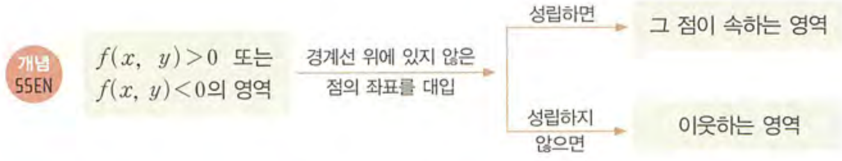
(i) 경계선 $2x+y+1=0$의 그래프, 즉 직선 $y=-2x-1$을 그린다.
(ii) 직선 $2x+y+1=0$ 위에 있지 않은 점 $(0,\ 0)$의 좌표를 주어진 부등식에 대입하면

$$2\cdot0+0+1>0$$

으로 부등식이 성립한다.

따라서 점 $(0,\ 0)$이 속하는 부분이 구하는 부등식의 영역이므로 부등식 $2x+y+1>0$의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 제외)과 같다.





대표유형 156 부등식의 영역 • 개념 138

다음에 답하여라.

(1) 점 $(k,\ 1)$이 곡선 $y=x^2-3x+3$의 윗부분에 있을 때, k의 값의 범위를 구하여라.

(2) 두 점 $(1,\ 4)$, $(3,\ -8)$이 직선 $y=ax-5$에 대하여 서로 반대쪽에 있도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

유형 Guide (1) 점 $(a,\ b)$가 곡선 $y=f(x)$의 윗부분에 있으면 그 점은 부등식 $y>f(x)$를 만족시킨다.

(2) 두 점 P, Q가 도형 $f(x,\ y)=0$을 경계로 서로 반대쪽에 있다는 것은 점 P가 경계선의 윗부분에 있으면 점 Q는 경계선의 아랫부분에 있고, 점 P가 경계선의 아랫부분에 있으면 점 Q는 경계선의 윗부분에 있다는 뜻이다.

즉 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$가 도형 $f(x,\ y)=0$을 경계로 서로 반대쪽에 있으면

$f(a,\ b)>0,\ f(c,\ d)<0$ 또는 $f(a,\ b)<0,\ f(c,\ d)>0$

이므로 부등식 $f(a,\ b)f(c,\ d)<0$을 만족시킨다.

유형 SSEN **두 점 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$가 $f(x,\ y)=0$을 경계로 서로 반대쪽에 존재**
⇨ $f(a,\ b)f(c,\ d)<0$

풀이 (1) 곡선 $y=x^2-3x+3$의 윗부분을 나타내는 부등식은

$y>x^2-3x+3$

점 $(k,\ 1)$이 이 부등식의 영역에 속해야 하므로

$1>k^2-3k+3,\qquad k^2-3k+2<0$

$(k-1)(k-2)<0\qquad \therefore 1<k<2$

(2) $y=ax-5$에서

$f(x,\ y)=ax-y-5$

라 하면 두 점 $(1,\ 4)$, $(3,\ -8)$이 직선 $f(x,\ y)=0$을 경계로 서로 반대쪽에 있으므로

$f(1,\ 4)f(3,\ -8)<0$

$(a-4-5)(3a+8-5)<0,\qquad 3(a+1)(a-9)<0$

$\therefore -1<a<9$

답 (1) $1<k<2$ (2) $-1<a<9$

정답 및 풀이 • 128쪽

유제 156-1 점 $(1,\ a)$가 직선 $x+y-1=0$의 아랫부분에 있도록 하는 a의 값의 범위를 구하여라.

유제 156-2 두 점 $(2,\ 0)$, $(4,\ 3)$이 직선 $y=mx-m+1$에 대하여 서로 반대쪽에 있을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

대표유형 157 원의 내부와 외부 • 개념 139

다음에 답하여라.

(1) 점 $(-2,\ 1)$이 원 $x^2+(y-a)^2=8$의 내부에 있도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

(2) 점 $(-1,\ a)$가 원 $(x+1)^2+y^2=25$의 외부에 있도록 하는 a의 값의 범위를 구하여라.

유형 Guide 원 $x^2+y^2=r^2(r>0)$에 대하여 부등식 $x^2+y^2<r^2$의 영역은 원의 내부를 나타내고, 부등식 $x^2+y^2>r^2$의 영역은 원의 외부를 나타낸다. 마찬가지로 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$에 대하여 부등식 $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$은 원의 내부를, $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$은 원의 외부를 나타낸다.

유형 SSEN
- **원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$의 내부 ⇨ $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$**
- **원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$의 외부 ⇨ $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$**

풀이 (1) 원 $x^2+(y-a)^2=8$의 내부를 나타내는 부등식은

$$x^2+(y-a)^2<8$$

점 $(-2,\ 1)$이 이 부등식의 영역에 속해야 하므로

$$(-2)^2+(1-a)^2<8, \quad 4+a^2-2a+1<8$$
$$a^2-2a-3<0, \quad (a+1)(a-3)<0$$
$$\therefore -1<a<3$$

(2) 원 $(x+1)^2+y^2=25$의 외부를 나타내는 부등식은

$$(x+1)^2+y^2>25$$

점 $(-1,\ a)$가 이 부등식의 영역에 속해야 하므로

$$(-1+1)^2+a^2>25, \quad a^2-25>0$$
$$(a+5)(a-5)>0 \quad \therefore a<-5 \text{ 또는 } a>5$$

답 (1) $-1<a<3$ (2) $a<-5$ 또는 $a>5$

정답 및 풀이 • 128쪽

유제 157-1 점 $(-1,\ 6)$이 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=k$의 외부에 있도록 하는 자연수 k의 개수를 구하여라.

유제 157-2 직선 $3x-y=6$이 x축과 만나는 점이 원 $x^2+y^2+2x-4y=a$의 내부에 있도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

대표유형 158 부등식의 영역의 포함 관계

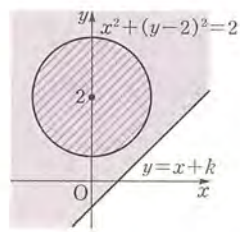
• 개념 138, 139

부등식 $x^2+(y-2)^2\le 2$의 영역이 부등식 $y\ge x+k$의 영역에 포함되도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

유형 Guide 확정된 부등식의 영역 A가 미정인 부등식의 영역 B에 포함되도록 하려면 먼저 영역 A를 좌표평면 위에 나타내고, 영역 B의 경계선을 움직여서 조건을 만족시키는 위치를 찾아야 한다. 즉 부등식 $x^2+(y-2)^2\le 2$의 영역을 좌표평면 위에 나타낸 후 직선 $y=x+k$를 움직여 본다. 이때 주어진 두 영역의 경계선이 각각 원과 직선이므로 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 k의 값의 범위를 구한다.

유형 SSEN 부등식의 영역의 포함 관계 ◎ 좌표평면 위에 그림으로 나타낸다.

풀이 부등식 $x^2+(y-2)^2\le 2$의 영역은 원 $x^2+(y-2)^2=2$의 내부(경계선 포함)이고, 부등식 $y\ge x+k$의 영역은 직선 $y=x+k$의 윗부분(경계선 포함)이다.



따라서 부등식 $x^2+(y-2)^2\le 2$의 영역이 부등식 $y\ge x+k$의 영역에 포함되려면 직선 $y=x+k$가 원 $x^2+(y-2)^2=2$의 아래쪽에서 접하거나 원의 아래쪽에 있어야 한다.

이때 원과 직선이 접하려면 원의 중심 $(0,\ 2)$와 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{2}$와 같아야 하므로

$$\frac{|-2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2},\qquad |k-2|=2$$

$$k-2=\pm 2\qquad \therefore k=0 \text{ 또는 } k=4$$

따라서 구하는 실수 k의 값의 범위는 $\quad k\le 0$

답 $k\le 0$

다른풀이

$$\begin{cases} x^2+(y-2)^2=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ y=x+k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad x^2+(x+k-2)^2=2$

$$\therefore 2x^2+2(k-2)x+k^2-4k+2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 접할 때 $D=0$이므로

$$\frac{D}{4}=(k-2)^2-2(k^2-4k+2)=0$$

$$-k^2+4k=0,\qquad k(k-4)=0\qquad \therefore k=0 \text{ 또는 } k=4$$

$x^2+(y-2)^2\le 2$의 영역이 $y\ge x+k$의 영역에 포함되려면 직선 ㉡이 원 ㉠의 아래쪽에서 접하거나 원 ㉠의 아래쪽에 있어야 하므로 $\quad k\le 0$

정답 및 풀이 • 129쪽

유제 158-1 부등식 $(x+1)^2+(y+2)^2\le 1$의 영역이 부등식 $x^2+(y+2)^2\le a$의 영역에 포함되도록 하는 양수 a의 값의 범위를 구하여라.

개념 141 연립부등식의 영역

두 개 이상의 부등식을 동시에 만족시키는 모든 점을 **연립부등식의 영역**이라 한다.

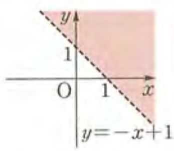
즉 연립부등식 $\begin{cases} f(x,\ y)>0 \\ g(x,\ y)>0 \end{cases}$ 의 영역은 부등식 $f(x,\ y)>0$의 영역과 부등식 $g(x,\ y)>0$의 영역의 공통부분이다.

개념 Approach

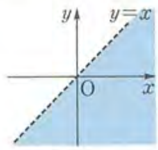
연립부등식의 영역을 구할 때에는 각 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타낸 다음 공통부분을 찾는다.

예를 들어 연립부등식 $\begin{cases} y>-x+1 \\ y<x \end{cases}$ 의 영역을 좌표평면 위에 나타내어 보자.

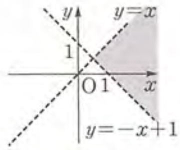
두 부등식 $y>-x+1$, $y<x$의 영역은 각각 [그림 1], [그림 2]의 색칠한 부분과 같으므로 주어진 연립부등식의 영역은 두 영역의 공통부분인 [그림 3]의 색칠한 부분이다. (단, 경계선은 제외한다.)



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

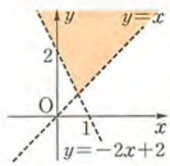
개념 Check

다음 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

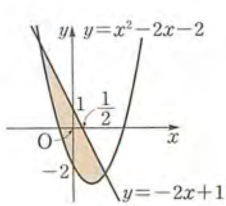
(1) $\begin{cases} -x+y>0 \\ 2x+y>2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y\ge x^2-2x-2 \\ 2x+y-1\le 0 \end{cases}$

풀이 (1) 부등식 $-x+y>0$, 즉 $y>x$의 영역은 직선 $y=x$의 윗부분(경계선 제외)이고, 부등식 $2x+y>2$, 즉 $y>-2x+2$의 영역은 직선 $y=-2x+2$의 윗부분(경계선 제외)이므로 구하는 연립부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 제외)과 같다.



(2) 부등식 $y\ge x^2-2x-2$의 영역은 포물선 $y=x^2-2x-2$의 윗부분(경계선 포함)이고, 부등식 $2x+y-1\le 0$, 즉 $y\le -2x+1$의 영역은 직선 $y=-2x+1$의 아랫부분(경계선 포함)이므로 구하는 연립부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



답 풀이 참조

대표유형 159 연립부등식의 영역 • 개념 141

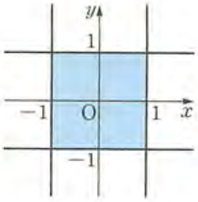
다음 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $\begin{cases} |x| \le 1 \\ |y| \le 1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2+2x-2y-14 \le 0 \\ x^2+y+2 \ge 0 \end{cases}$

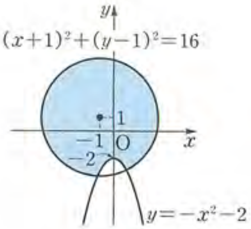
유형 Guide (1)은 $|x| \le a$ $(a>0)$이면 $-a \le x \le a$임을 이용하고, (2)는 $\begin{cases} (x-m)^2+(y-n)^2 \le r^2 \\ y \ge a(x-p)^2+q \end{cases}$ 꼴로 변형하여 각 부등식이 나타내는 영역의 공통부분을 찾는다.

유형 55EN 연립부등식의 영역 ⊙ 각 부등식의 영역의 공통부분

풀이 (1) 부등식 $|x| \le 1$에서　$-1 \le x \le 1$
부등식 $|y| \le 1$에서　$-1 \le y \le 1$
따라서 주어진 연립부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



(2) 부등식 $x^2+y^2+2x-2y-14 \le 0$에서
$(x+1)^2+(y-1)^2 \le 16$이므로 이 부등식의 영역은 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=16$의 내부(경계선 포함)이다.
부등식 $x^2+y+2 \ge 0$에서 $y \ge -x^2-2$이므로 이 부등식의 영역은 포물선 $y=-x^2-2$의 윗부분(경계선 포함)이다.
따라서 주어진 연립부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



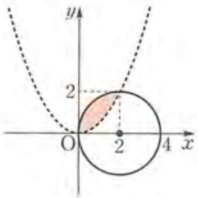
답 풀이 참조

정답 및 풀이 • 129쪽

유제 159-1 다음 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $3x+3 \le y \le x^2$　　(2) $|x-y|<4$

Plus 유제 159-2 오른쪽 그림의 색칠한 영역을 연립부등식으로 나타내어라.
(단, 경계선은 원과 포물선이고, 점선인 경계선은 제외한다.)



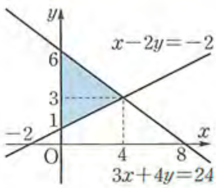
대표유형 160 연립부등식의 영역의 넓이 • 개념 141

연립부등식 $\begin{cases} x\ge 0 \\ 3x+4y\le 24 \\ x-2y\le -2 \end{cases}$ 의 영역의 넓이를 구하여라.

유형 Guide 연립부등식의 영역은 항상 좌표평면 위에 나타내어 생각한다. 먼저 세 부등식의 영역의 경계선을 좌표평면 위에 각각 그리고, 경계선에 대한 상 · 하, 좌 · 우를 따져서 세 부등식을 모두 만족시키는 영역을 찾으면 된다.

유형 SSEN 연립부등식의 영역 ➡ 각 부등식의 영역의 공통부분

풀이 부등식 $x\ge 0$의 영역은 직선 $x=0$ (y축)의 오른쪽 부분(경계선 포함)이고, 부등식 $3x+4y\le 24$, 즉 $y\le -\frac{3}{4}x+6$의 영역은 직선 $y=-\frac{3}{4}x+6$의 아랫부분(경계선 포함)이다.
또 부등식 $x-2y\le -2$, 즉 $y\ge \frac{1}{2}x+1$의 영역은 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$의 윗부분(경계선 포함)이므로 주어진 연립부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



이때 연립방정식 $\begin{cases} 3x+4y=24 \\ x-2y=-2 \end{cases}$ 의 해가 $x=4$, $y=3$이므로 두 직선 $3x+4y=24$, $x-2y=-2$의 교점의 좌표는 $(4,\ 3)$이다.
따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot(6-1)\cdot 4=10$$

답 10

정답 및 풀이 • 129쪽

유제 160-1 세 부등식 $y\ge 0$, $y-x\le 5$, $y\le ax$를 모두 만족시키는 실수 x, y에 대하여 점 $(x,\ y)$가 나타내는 영역의 넓이가 10일 때, 음수 a의 값을 구하여라.

Plus 유제 160-2 연립부등식 $\begin{cases} y-\sqrt{3}|x|+1\ge 0 \\ x^2+y^2+2y\le 0 \end{cases}$ 의 영역의 넓이를 구하여라.

개념 142

다항식의 곱으로 표현된 부등식의 영역

두 개 이상의 다항식의 곱으로 표현된 부등식의 영역은 다음과 같다.

(1) 부등식 $f(x,\ y)g(x,\ y)>0$의 영역

두 연립부등식 $\begin{cases} f(x,\ y)>0 \\ g(x,\ y)>0 \end{cases}$과 $\begin{cases} f(x,\ y)<0 \\ g(x,\ y)<0 \end{cases}$의 영역을 합친 부분이다.

(2) 부등식 $f(x,\ y)g(x,\ y)<0$의 영역

두 연립부등식 $\begin{cases} f(x,\ y)>0 \\ g(x,\ y)<0 \end{cases}$과 $\begin{cases} f(x,\ y)<0 \\ g(x,\ y)>0 \end{cases}$의 영역을 합친 부분이다.

Remark • $AB>0 \iff \begin{cases} A>0 \\ B>0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} A<0 \\ B<0 \end{cases}$

• $AB<0 \iff \begin{cases} A>0 \\ B<0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} A<0 \\ B>0 \end{cases}$

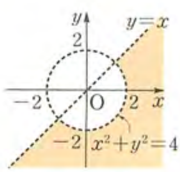
개념 Approach

부등식 $(x-y)(x^2+y^2-4)>0$의 영역을 좌표평면 위에 나타내어 보자.

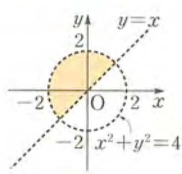
주어진 부등식은

$$(x-y)(x^2+y^2-4)>0 \iff \begin{cases} x-y>0 \\ x^2+y^2-4>0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x-y<0 \\ x^2+y^2-4<0 \end{cases}$$

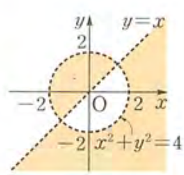
이때 연립부등식 $\begin{cases} x-y>0 \\ x^2+y^2-4>0 \end{cases}$과 $\begin{cases} x-y<0 \\ x^2+y^2-4<0 \end{cases}$의 영역은 각각 [그림 1], [그림 2]의 색칠한 부분과 같으므로 부등식 $(x-y)(x^2+y^2-4)>0$의 영역은 [그림 1], [그림 2]의 두 영역을 합친 [그림 3]의 색칠한 부분이다. (단, 경계선은 제외한다.)



[그림 1]



[그림 2]



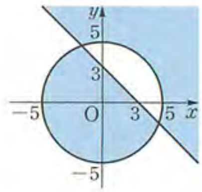
[그림 3]

대표유형 161 영역을 나타내는 부등식 구하기

• 개념 141, 142

오른쪽 그림의 색칠한 영역을 부등식으로 나타내어라.

(단, 경계선은 포함한다.)



유형 Guide 좌표평면에 나타내어진 영역을 부등식으로 표현하는 방법은 다음과 같다.

(i) 경계선의 방정식을 구한다.

(ii) 곡선 또는 직선의 윗부분 · 아랫부분, 원의 내부 · 외부에 따라 부등호의 방향을 정한다.

(iii) 경계선의 제외 · 포함에 따라 등호의 포함 여부를 정한다.

유형 SSEN **영역을 부등식으로 표현하려면 ⊙ 먼저 경계선의 방정식을 구한다.**

풀이 주어진 그림에서 경계선의 방정식을 구하면

$x^2+y^2=25$ ······ ㉠

$y=-x+3$ ······ ㉡

이때 색칠한 부분은 원 ㉠의 외부와 직선 ㉡의 윗부분(모두 경계선 포함) 또는 원 ㉠의 내부와 직선 ㉡의 아랫부분(모두 경계선 포함)이므로

$\begin{cases} x^2+y^2\geq 25 \\ y\geq -x+3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x^2+y^2\leq 25 \\ y\leq -x+3 \end{cases}$, 즉

$\begin{cases} x^2+y^2-25\geq 0 \\ x+y-3\geq 0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x^2+y^2-25\leq 0 \\ x+y-3\leq 0 \end{cases}$

따라서 구하는 부등식은

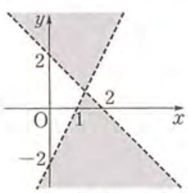
$(x^2+y^2-25)(x+y-3)\geq 0$

답 $(x^2+y^2-25)(x+y-3)\geq 0$

정답 및 풀이 • 130쪽

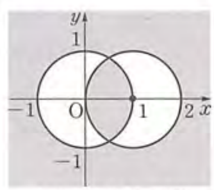
유제 161-1 다음 그림의 색칠한 영역을 부등식으로 나타내어라.

(1)



(단, 경계선 제외)

(2)



(단, 경계선 포함)

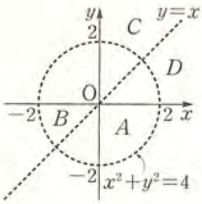
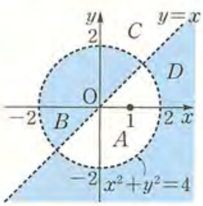
특강 143 다항식의 곱으로 표현된 부등식의 영역을 좌표평면에 나타내는 방법

다음 순서를 따르면 부등식 $f(x,\ y)g(x,\ y)>0$ 또는 $f(x,\ y)g(x,\ y)<0$의 영역을 좌표평면 위에 쉽게 나타낼 수 있다.

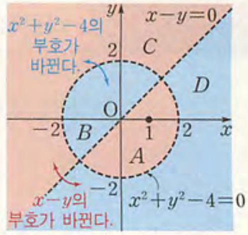
> (i) 경계선 $f(x,\ y)=0$과 $g(x,\ y)=0$의 그래프를 그린다.
> (ii) 경계선 위에 있지 않은 한 점의 좌표를 주어진 부등식에 대입한다.
> ① 부등식이 성립하면 ➡ 그 점이 속하는 영역이 구하는 영역에 적합하다.
> ② 부등식이 성립하지 않으면
> ➡ 그 점이 속하는 영역에 이웃하는 영역이 구하는 영역에 적합하다.
> (iii) ① 적합한 영역에 이웃하는 영역 ➡ 부적합
> ② 부적합한 영역에 이웃하는 영역 ➡ 적합

Remark $f(x,\ y)g(x,\ y)$는 완전제곱식의 꼴을 포함하지 않은 경우만 생각한다.

위의 방법으로 **개념 142**의 부등식 $(x-y)(x^2+y^2-4)>0$의 영역을 좌표평면 위에 나타내어 보자.

(i) 경계선의 그래프를 그린다.	$x-y=0$에서 $y=x$ …… ㉠ $x^2+y^2-4=0$에서 $x^2+y^2=4$ …… ㉡ ㉠, ㉡의 그래프를 그리면 경계선은 오른쪽 그림과 같이 좌표평면을 A, B, C, D의 4개의 영역으로 나눈다. 
(ii) 한 점의 좌표를 부등식에 대입하고 그 영역의 적합성을 판정한다.	경계선 위에 있지 않은 점 중에서 계산이 간단한 점인 점 $(1,\ 0)$의 좌표를 주어진 부등식 $(x-y)(x^2+y^2-4)>0$의 좌변에 대입하면 $(1-0)(1+0-4)=-3<0$ 이므로 주어진 부등식을 만족시키지 않는다. 즉 점 $(1,\ 0)$이 속하는 영역 A에 이웃하는 영역인 B와 D가 구하는 부등식의 영역에 적합하다.
(iii) 이웃하는 영역들의 적합성을 판정한다.	영역 B와 D가 구하는 부등식의 영역에 적합하므로 이웃한 영역 C는 부등식의 영역으로 적합하지 않다. 이상에서 구하는 부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 제외)과 같다. 

앞의 (ii)에서 부등식 $(x-y)(x^2+y^2-4)>0$에 점 $(1,\ 0)$의 좌표를 대입하여 성립하지 않으므로 영역 A는 부등식의 영역으로 적합하지 않음을 알았다. 이때 영역 A와 B는 직선 $x-y=0$을 경계로 나누어진 영역이므로 x^2+y^2-4의 값의 부호는 서로 같지만 $x-y$의 값의 부호는 서로 다르다. 즉 영역 A가 부등식의 영역으로 적합하지 않으면 영역 B는 부등식을 만족시키는 적합한 영역이 됨을 알 수 있다.



마찬가지로 영역 A와 D는 x^2+y^2-4의 부호만 서로 다르며 영역 C는 영역 B, D와 각각 x^2+y^2-4, $x-y$의 값의 부호가 서로 다르다.

즉 위와 같이 좌표평면이 경계선에 의하여 나누어졌을 때 적합한 영역에 이웃하는 영역은 부적합한 영역이고, 거꾸로 부적합한 영역에 이웃하는 영역은 적합한 영역이 된다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타낼 때에는 다음을 기억하자.

개념 SSEN

경계선을 넘으면 → 부등호의 방향이 바뀐다!

개념 Check

부등식 $(x^2-y)(x^2+y^2-1)<0$의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

풀이 $x^2-y=0$에서 $\quad y=x^2$

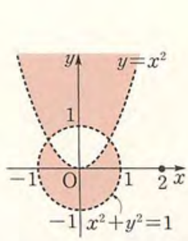
$x^2+y^2-1=0$에서 $\quad x^2+y^2=1$

경계선 위에 있지 않은 한 점 $(2,\ 0)$의 좌표를 주어진 부등식의 좌변에 대입하면

$$(4-0)(4+0-1)=12>0$$

이므로 주어진 부등식을 만족시키지 않는다.

따라서 구하는 부등식의 영역은 점 $(2,\ 0)$을 포함하는 영역에 경계선으로 이웃하는 영역이므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 제외)과 같다.



답 풀이 참조

15 부등식의 영역

대표유형 162 다항식의 곱으로 표현된 부등식의 영역

• 특강 143

부등식 $(4x^2-y^2)(x^2+y^2-9)<0$의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

유형 Guide 두 개 이상의 식의 곱으로 표현된 부등식 $f(x,\ y)g(x,\ y)<0$의 영역을 좌표평면 위에 나타내기 위해서는 먼저 경계선의 그래프를 그려야 한다. 이때 $4x^2-y^2=(2x+y)(2x-y)$와 같이 인수분해되는 식은 인수분해하여 경계선의 그래프를 찾는다.

유형 55EN

부등식 $f(x,\ y)g(x,\ y)<0$의 영역
→ 먼저 경계선 $f(x,\ y)=0$, $g(x,\ y)=0$의 그래프를 그린다.

풀이 $(4x^2-y^2)(x^2+y^2-9)<0$에서

$$(2x+y)(2x-y)(x^2+y^2-9)<0$$

이므로 경계선의 방정식은

$$2x+y=0,\ 2x-y=0,\ x^2+y^2-9=0$$

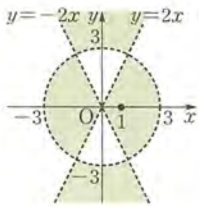
$$\therefore y=-2x,\ y=2x,\ x^2+y^2=9$$

이때 경계선 위에 있지 않은 점 $(1,\ 0)$의 좌표를 주어진 부등식의 좌변에 대입하면

$$(4\cdot 1-0)(1+0-9)=-32<0$$

즉 부등식이 성립하므로 점 $(1,\ 0)$이 속하는 영역은 구하는 부등식의 영역에 적합하다.

따라서 구하는 부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 제외)과 같다.



답 풀이 참조

Remark 부등식 $(2x+y)(2x-y)(x^2+y^2-9)<0$은

$$\begin{cases}2x+y>0\\2x-y>0\\x^2+y^2-9<0\end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases}2x+y>0\\2x-y<0\\x^2+y^2-9>0\end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases}2x+y<0\\2x-y>0\\x^2+y^2-9>0\end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases}2x+y<0\\2x-y<0\\x^2+y^2-9<0\end{cases}$$

이므로 **개념 142**를 이용하여 부등식의 영역을 구할 수도 있지만 이는 매우 복잡하다.
일반적으로 다항식의 곱으로 표현된 부등식의 영역을 나타낼 때에는 **특강 143**을 이용하는 것이 간편하다.

정답 및 풀이 • 130쪽

유제 162-1 다음 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $y(x^2-y)(x^2+y^2-4)\geq 0$

(2) $xy(x^2+y^2-4y)(x^2+y^2-4x)\leq 0$

개념 144

부등식의 영역에서의 최대 · 최소

부등식의 영역 D에 속하는 모든 점 $(x,\ y)$에 대하여 식 $f(x,\ y)$의 최댓값 또는 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 주어진 부등식의 영역 D를 좌표평면 위에 나타낸다. ⇐ 조건식 표현

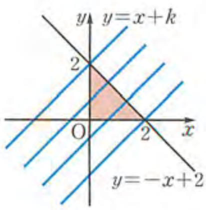
(ii) $f(x,\ y)=k$ (k는 상수)로 놓고, 이 그래프를 영역 D와 만나도록 하면서 움직여 본다. ⇐ 목적함수 설정

(iii) k의 최댓값 또는 최솟값을 구한다. ⇐ 문제 해결

Remark 일반적으로 경계를 포함하는 부등식의 영역에서 식 $f(x,\ y)$의 값을 최대 또는 최소로 하는 점은 그 영역과 접하는 점 또는 꺾이는 점이며, 다각형의 영역에서는 꼭짓점 또는 변 위의 점이다.

개념 Approach

연립부등식 $x\geq0,\ y\geq0,\ x+y-2\leq0$의 영역에 속하는 점 $(x,\ y)$에 대하여 $y-x$의 최댓값, 최솟값을 위의 순서에 따라 구해 보자.



(i) 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다. ⇐ 조건식 표현

(ii) $y-x=k$ (k는 상수) ······ ㉠ ⇐ 목적함수 설정

로 놓으면 $y=x+k$이므로 ㉠은 기울기가 1이고 y절편이 k인 직선이다.

따라서 ㉠을 (i)의 영역과 만나도록 하면서 움직일 때, 이 직선의 y절편 k가 최대일 때와 최소일 때를 구하면 된다.

(iii) 직선 ㉠의 y절편 k는

점 $(0,\ 2)$를 지날 때 최대이므로 최댓값은 $2-0=2$

점 $(2,\ 0)$을 지날 때 최소이므로 최솟값은 $0-2=-2$

이상에서 주어진 연립부등식의 영역에 속하는 점 $(x,\ y)$에 대하여 $y-x$의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이다. ⇐ 문제 해결

Remark 부등식의 영역에서 $f(x,\ y)$의 최댓값 또는 최솟값을 구할 때, $f(x,\ y)=k$ (k는 상수)로 놓으면 그 그래프는 다음과 같다.

$f(x,\ y)$	$f(x,\ y)=k$	$f(x,\ y)=k$의 그래프
$y-x$	$y-x=k \Rightarrow y=x+k$	기울기가 1이고 y절편이 k인 직선
x^2+y^2	$x^2+y^2=k\ (k\geq0)$	중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\sqrt{k}$인 원
$\dfrac{y}{x}$	$\dfrac{y}{x}=k \Rightarrow y=kx$	원점을 지나고 기울기가 k인 직선
$y-x^2$	$y-x^2=k \Rightarrow y=x^2+k$	포물선 $y=x^2$을 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 포물선
xy	$xy=k \Rightarrow y=\dfrac{k}{x}$	$k\neq0$일 때, 반비례 그래프

대표유형 163 부등식의 영역에서 일차식의 최대 · 최소

• 개념 144

연립부등식

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2x+3y \leq 12,\ x+y \leq 5$$

를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $3x+4y$의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

유형 Guide 부등식의 영역에서 식 $f(x,\ y)$의 최대 · 최소를 구할 때에는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 주어진 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타낸다.

(ii) $f(x,\ y)=k$(k는 상수)로 놓고, $f(x,\ y)=k$가 어떤 도형을 나타내는지, 상수 k는 그 도형에서 무엇을 나타내는지를 파악한 후, 그래프를 (i)의 영역과 만나도록 하면서 움직여 본다.

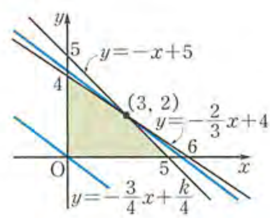
(iii) k의 최댓값(또는 최솟값)을 찾는다.

유형 SSEN $f(x,\ y)$의 최대 · 최소 ◎ $f(x,\ y)=k$ (k는 상수)로 놓아라!

풀이 $2x+3y \leq 12$에서 $\quad y \leq -\dfrac{2}{3}x+4$

$x+y \leq 5$에서 $\quad y \leq -x+5$

이므로 주어진 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



$3x+4y=k$ (k는 상수)로 놓으면

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{k}{4} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠의 y절편이 $\dfrac{k}{4}$이므로 직선 ㉠이 두 직선 $y=-\dfrac{2}{3}x+4$, $y=-x+5$의 교점 $(3,\ 2)$를 지날 때 k의 값이 최대이다.

즉 $3x+4y$의 최댓값은 $\quad 3\cdot3+4\cdot2=17$

또 직선 ㉠이 점 $(0,\ 0)$을 지날 때 k의 값이 최소이므로 $3x+4y$의 최솟값은 0이다.

답 최댓값 : 17, 최솟값 : 0

Remark 일반적으로 경계선을 포함하는 부등식의 영역에서 일차식 $ax+by$가 최대 · 최소가 되는 경우는 다음과 같다. (단, k는 상수이다.)

① 경계선이 다각형이면 ➡ 직선 $ax+by=k$가 다각형의 꼭짓점을 지날 때

② 경계선이 곡선이면 ➡ 직선 $ax+by=k$가 곡선에 접할 때 또는 꺾이는 점을 지날 때

정답 및 풀이 • 130쪽

유제 163-1 연립부등식 $y \leq x+1$, $x+4y \geq 4$, $2x+y \leq 4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2y-x$의 최댓값을 구하여라.

유제 163-2 부등식 $x^2+y^2 \leq 4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2x+y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하여라.

대표유형 164 부등식의 영역에서 이차식의 최대 · 최소

• 개념 144

연립부등식

$$x \le 2,\ y \le 2x,\ y \ge -x+2$$

를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 x^2+y^2의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

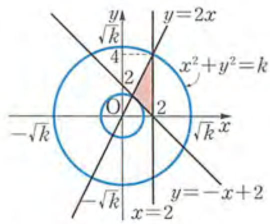
유형 Guide 부등식의 영역에서 x^2+y^2의 값이 최대 또는 최소가 되는 점은 원 $x^2+y^2=k\ (k\ge 0)$와 부등식의 영역의 경계선의 접점인 경우가 많다. 이때 x^2+y^2의 값은 두 점 $(0,\ 0)$과 $(x,\ y)$ 사이의 거리의 제곱이므로 점 $(0,\ 0)$에서 경계선에 이르는 거리를 구한다.

유형 55EN **부등식의 영역에서 이차식의 최대 · 최소 ⊙ 접할 때를 조사한다.**

풀이 주어진 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다. 이때

$$x^2+y^2=k\ (k\ge 0) \qquad \cdots\cdots \ ㉠$$

로 놓으면 $\sqrt{k}$는 중심이 원점인 이 원의 반지름의 길이이다.



원 ㉠이 두 직선 $x=2$, $y=2x$의 교점 $(2,\ 4)$를 지날 때 k의 값이 최대이므로 x^2+y^2의 최댓값은

$$2^2+4^2=20$$

또 원 ㉠이 직선 $y=-x+2$에 접할 때 k의 값이 최소이고, 이때 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=-x+2$, 즉 $x+y-2=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{k}$와 같으므로

$$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{k}, \qquad \sqrt{k}=\sqrt{2} \qquad \therefore k=2$$

따라서 x^2+y^2의 최댓값은 20, 최솟값은 2이다.

답 최댓값 : 20, 최솟값 : 2

Remark 원 $x^2+y^2=k$가 두 직선 $y=2x$, $y=-x+2$의 교점 $\left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right)$를 지날 때, k의 값은 $\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{20}{9}$이므로 최소가 아님에 주의한다.

정답 및 풀이 • 131쪽

유제 164-1 연립부등식 $1\le x\le 3$, $1\le y\le -x+5$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $3y-x^2$의 최솟값을 구하여라.

유제 164-2 연립부등식 $y\ge x^2-4x$, $y\le -x+4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x^2+(y-5)^2$의 최솟값을 구하여라.

특강 145

부등식의 영역과 최대 · 최소의 활용

부등식의 영역과 최대 · 최소의 활용 문제는 실생활에서 그 소재를 많이 찾아볼 수 있는데, 특히 한정된 자원으로 최대의 이익을 얻고자 할 때나 최소의 비용으로 일정 수준 이상의 효과를 얻고자 할 때와 같이 기업의 이윤 추구나 가계의 최소 지출 등과 관련이 있다.
부등식의 영역과 관련된 최대 · 최소의 활용 문제는 주로 다음과 같은 순서로 해결한다.

(ⅰ) **문제 이해** : 문제의 상황을 파악하여 무엇을 미지수 x, y로 놓을지 결정한다.
(ⅱ) **조건식 표현** : 주어진 제한 조건을 이용하여 x, y에 대한 연립부등식을 세우고, 그 영역을 좌표평면 위에 나타낸다.
(ⅲ) **목적함수 설정** : 최댓값 또는 최솟값을 구하려는 식을 상수 k로 놓는다.
(ⅳ) **문제 해결** : 부등식의 영역과 최대 · 최소에 대한 이론을 바탕으로 문제를 해결한다.

위의 순서에 따라 다음 문제를 해결해 보자.

어느 공장에서 두 종류의 제품 P, Q를 각각 1개씩 만드는 데 필요한 부품 A, B의 개수 및 제품 1개당 얻을 수 있는 이익은 오른쪽 표와 같다. 하루에 부품 A, B를 각각 최대 140개, 280개 사용할 수 있다고 할 때, 이 공장에서 하루 동안 얻을 수 있는 최대 이익을 구하여라.

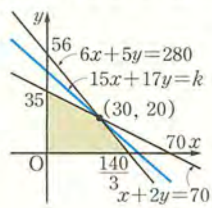
	A (개)	B (개)	이익(만 원)
P	2	6	15
Q	4	5	17

(ⅰ) 문제 이해
미지수 x, y를 결정한다.

하루에 제품 P, Q를 각각 x개, y개 만든다고 하면 하루 동안 얻을 수 있는 총이익은 $15x+17y$(만 원)이다.

(ⅱ) 조건식 표현
x, y에 대한 연립부등식을 세우고, 그 영역을 좌표평면 위에 나타낸다.

x, y는 각각 제품 P, Q의 개수이므로 $x\geq 0,\ y\geq 0$ …… ㉠
하루에 필요한 부품 A는 $2x+4y$(개)이고 최대 140개를 사용할 수 있으므로 $2x+4y\leq 140$ $\therefore x+2y\leq 70$ … ㉡
또 하루에 필요한 부품 B는 $6x+5y$(개)이고 최대 280개를 사용할 수 있으므로
$6x+5y\leq 280$ …… ㉢
부등식 ㉠, ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



(ⅲ) 목적함수 설정
최댓값을 구하려는 식을 상수 k로 놓는다.

$15x+17y=k$ (k는 상수)로 놓으면 $y=-\frac{15}{17}x+\frac{k}{17}$

(ⅳ) 문제 해결
k의 최댓값을 구한다.

이 직선이 두 직선 $x+2y=70$, $6x+5y=280$의 교점 $(30,\ 20)$을 지날 때 k의 값이 최대가 되므로 이 공장에서 하루 동안 얻을 수 있는 최대 이익은 $15\cdot 30+17\cdot 20=$ **790 (만 원)**

Remark 주어진 제한 조건에 대한 식이 일차식(선형식)이고, 최대 · 최소를 구하려는 식도 선형식일 때, 위와 같이 최적의 해를 찾는 방법을 선형계획법(linear programming)이라고 한다.

대표유형 165 부등식의 영역과 최대 · 최소의 활용

• 특강 145

어느 공장에서 두 제품 A, B를 각각 1개씩 만드는 데 필요한 원료 M, N의 양은 오른쪽 표와 같다. 이 공장에서 원료 M, N은 하루에 각각 130 kg, 110 kg씩 공급되고, 제품 A, B를 1개씩 만들면 각각 3만 원, 2만 원의 이익이 생긴다고 한다. 이 공장에서 두 제품 A, B를 만들어 하루 동안 얻을 수 있는 최대 이익을 구하여라.

원료 / 제품	M(kg)	N(kg)
A	3	1
B	1	2

유형 Guide 원료 M, N의 사용량과 이익은 모두 제품 A, B의 생산량에 따라 결정된다. 따라서 제품 A와 B의 생산량을 각각 미지수 x, y로 놓고 부등식의 영역을 이용하여 최댓값을 구한다.

유형 SSEN 제한된 조건에서의 최대 · 최소 문제 ⊙ 제한 조건을 부등식의 영역으로 나타낸다.

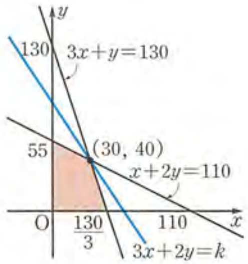
풀이 하루에 제품 A, B를 각각 x개, y개 만든다고 하면 하루 동안 얻을 수 있는 총이익은 $3x+2y$(만 원)이다.

x, y는 각각 제품 A, B의 개수이므로 $x \geq 0$, $y \geq 0$ …… ㉠

원료 M, N은 하루에 각각 130 kg, 110 kg씩 공급되므로

$3x+y \leq 130$, $x+2y \leq 110$ …… ㉡

부등식 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



$3x+2y=k$ (k는 상수)로 놓으면 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{k}{2}$

이 직선의 y절편이 $\frac{k}{2}$이므로 직선이 두 직선 $3x+y=130$, $x+2y=110$의 교점 (30, 40)을 지날 때, k의 값이 최대가 된다.

따라서 이 공장에서 하루 동안 얻을 수 있는 최대 이익은

$3 \cdot 30+2 \cdot 40=170$ (만 원)

답 170만 원

Remark 두 직선의 교점의 x좌표, y좌표가 정수가 아닌 경우에는 영역에서 교점에 가까운 점 중 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점을 찾아 최댓값을 구한다.

정답 및 풀이 • 131쪽

유제 165-1 어느 동물원에 하루 동안 단백질을 700 g 이상, 탄수화물을 400 g 이상 섭취해야 하는 동물이 있다. 이 동물에게 두 종류의 사료 A, B를 제공해 주는데 각 사료 100 g에 들어 있는 단백질과 탄수화물의 양과 각 사료 100 g당 가격은 오른쪽 표와 같다. 이 동물에게 하루 동안 제공되는 사료의 비용의 최솟값을 구하여라.

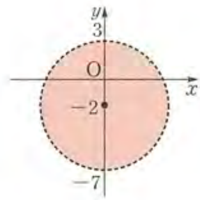
	A	B
단백질(g)	10	20
탄수화물(g)	10	10
가격(원)	110	120

STEP 1 유형 Training

01 점 $(4,\ a)$는 직선 $y=-x+7$의 아랫부분에 있고, 점 $(2a,\ 3a-1)$은 직선 $y=\frac{1}{2}x-5$의 윗부분에 있도록 하는 모든 정수 a의 값의 합을 구하여라.

서술형

02 점 $(3,\ -a)$가 오른쪽 그림의 색칠한 영역에 속하도록 하는 정수 a의 개수를 구하여라. (단, 경계선은 제외한다.)

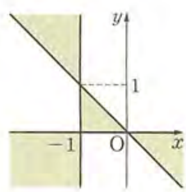


03 연립부등식 $\begin{cases} |x|\le 1 \\ |y|\le 1 \end{cases}$의 영역이 부등식 $x^2+y^2\le a$의 영역에 포함되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하여라.

서술형

04 연립부등식 $\begin{cases} x-y-1\ge 0 \\ x^2+y^2-2x-3\le 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$의 영역의 넓이를 구하여라.

05 다음 중 오른쪽 그림의 색칠한 영역을 나타내는 부등식은? (단, 경계선은 포함한다.)



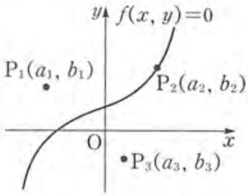
① $(x+1)(x-y)\ge 0$
② $x(x+1)(x+y)\le 0$
③ $x(x+1)(x-y)\ge 0$
④ $y(x+1)(x+y)\ge 0$
⑤ $y(x+1)(x+y)\le 0$

서술형

06 연립부등식 $\begin{cases} y \geq 0 \\ x^2-2x+y^2 \leq 0 \end{cases}$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하여라.

STEP 2 실전 Application

07 좌표평면에서 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형에 대하여 세 점 $P_1(a_1, b_1)$, $P_2(a_2, b_2)$, $P_3(a_3, b_3)$의 위치가 오른쪽 그림과 같을 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. $f(a_1, b_1)<f(a_3, b_3)$

ㄴ. $\{f(a_1, b_1)\}^2>\{f(a_2, b_2)\}^2$

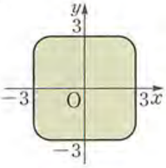
ㄷ. $\dfrac{f(a_1, b_1)}{f(a_3, b_3)}<0$

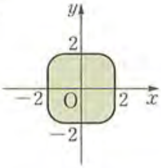
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

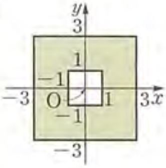
교육청기출

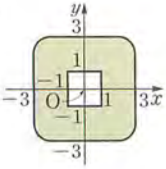
08 좌표평면에서 연립부등식 $\begin{cases} |x| \leq 2 \\ |y| \leq 2 \end{cases}$를 만족시키는 모든 점 (a, b)에 대하여 부등식 $(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 1$을 만족시키는 영역을 바르게 나타낸 것은?

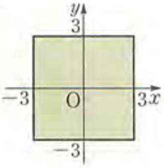
(단, 경계선은 포함한다.)

①


②


③


④


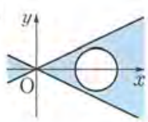
⑤


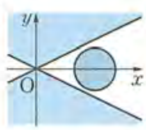
09 직선 $x+2y+3=0$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선을 l이라 하자. 점 $(4,\ a)$가 직선 l의 윗부분에 있도록 하는 정수 a의 최솟값은?

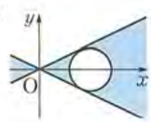
① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

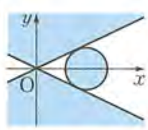
10 연립부등식 $y\le\frac{1}{2}x+1$, $y\le -x+2$, $y\ge 0$의 영역의 넓이를 직선 $y=kx$가 이등분할 때, 상수 k의 값을 구하여라.

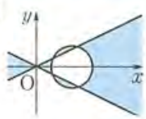
11 부등식 $(x^2-4y^2)(x^2-6x+y^2+8)\le 0$의 영역을 좌표평면에 나타내면? (단, 경계선은 포함한다.)

①


②


③


④


⑤


12 서술형

연립부등식 $\begin{cases} x+2y\le 6 \\ x\ge 1 \\ y\ge 1 \end{cases}$ 을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $\dfrac{y+1}{x+2}$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

13 부등식 $|x|+|y|\le 2$를 만족시키는 점 $(x,\ y)$에 대하여 x^2+y^2의 최댓값을 구하여라.

교육청기출

14 두 제품 P와 Q의 한 알에 함유되어 있는 비타민 B_1, 비타민C의 양과 한 알의 가격은 표와 같다. 어느 수험생이 이 두 제품 P, Q 만을 이용하여 하루에 비타민 B_1을 60 mg 이상, 비타민C를 80 mg 이상 섭취하고자 할 때, 필요한 최소 비용은 a(원)이다. 이때 a의 값을 구하여라.

제품	비타민 B_1 (mg)	비타민C (mg)	한 알의 가격(원)
P	20	20	150
Q	10	20	100

STEP 3 심화 Forwarding

서술형

15 연립부등식 $\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ (x-1)^2+y^2\le 1 \end{cases}$ 의 영역을 포함하는 원 중에서 넓이가 가장 작은 원의 반지름의 길이를 r_1, 연립부등식의 영역에 포함되는 원 중에서 넓이가 가장 큰 원의 반지름의 길이를 r_2라 할 때, r_1r_2의 값을 구하여라.

16 연립부등식 $\begin{cases} x^2+y^2\le 9 \\ (ax-y)y\ge 0 \end{cases}$ 의 영역의 넓이가 3π가 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 곱을 구하여라.

교육청기출

17 등식

$$\sqrt{x-y+1}\sqrt{x^2+y^2-2}=-\sqrt{(x-y+1)(x^2+y^2-2)}$$

를 만족시키는 두 실수 x, y의 순서쌍 (x, y)를 좌표평면 위에 모두 나타낸 영역을 D라 하자. 이때 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 점 $(-1, 1)$은 D에 속한다.

ㄴ. 점 (a, b)가 D에 속하면 점 $(-b, -a)$도 D에 속한다.

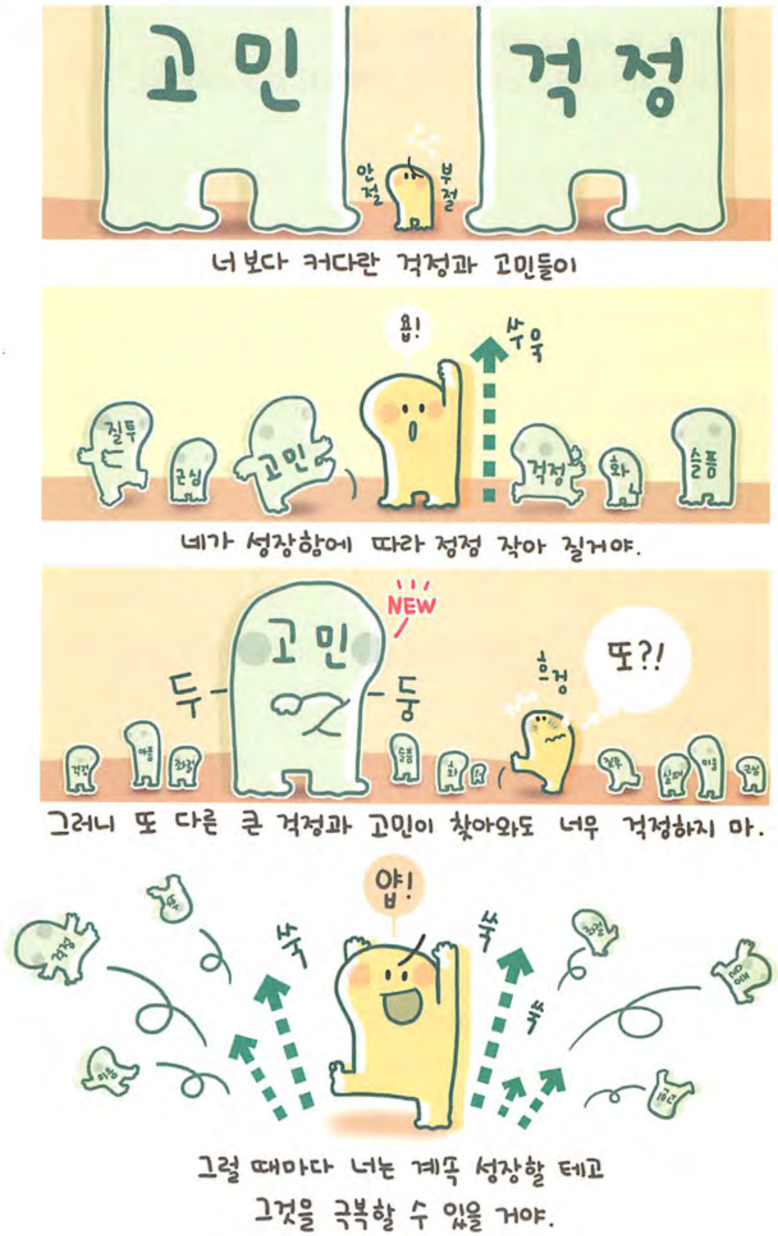
ㄷ. D에 속하는 점 (a, b)에 대하여 a^2+b^2의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15 부등식의 영역

NaBaToon

나를 바꾸는 힘



찾아보기

찾아보기

ㅈ

MEMO

비상교기 SINSAGO

좋은책 신사고

새롭게 바뀌는 2014 수능,
오감으로 디자인하라!

이(理)·해(解)·감(感)·상(想)·론(論)
5가지 언어 감각으로 숨은 언어 실력을 찾아주는 오감도!
새롭게 바뀌는 2014 수능에서도 최고의 점수를 디자인합니다.

2014 新수능, 新오감도의 오감학습법으로 대비한다!

新오감도 시리즈(6종)

바뀐 수능에 맞춰 개념이 강화된 실전 대비서!
수능 A형과 B형을 완벽하게 구현한 영역별 실전서!
자학자습이 가능한 친절한 해설서!

비문학·독서편 (A형, B형)　　문학편 (A형, B형)　　화법·작문·문법편 (A형, B형)

좋은책 신사고
대한민국 1등 교육 브랜드 기업

한국산업의 브랜드파워 교육서비스 부문 1위 3회 수상
학부모가 뽑은 교육브랜드대상 참고서/문제집 부문 6회 수상
대한민국 교육기업대상 중·고등참고서 부문 5회 수상
한국교육산업대상 출판물 분야 참고서 부문 6회 수상
대한민국 교육브랜드대상 참고서/문제집 부문 5회 수상

개념쎈 수학 I

발행일 2013년 9월(1판1쇄)

PD	신동미
PM	이선옥
개발	김선아, 김혜정, 김유나
BI	김선자, 탁애란, 황가람
표지디자인	신사고 디자인팀
제작책임	이철원, 조철옥, 김보경
펴낸이	홍범준
펴낸곳	(주)좋은책신사고
등록번호	제16-1156호
주소	서울시 서초구 동작대로 212 (방배동 764-30)
대표전화	1661-5590
팩스	(02) 3481-5762
ISBN	978-89-283-1017-3 53410