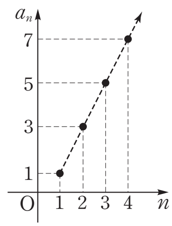
정답 및 풀이

01 수열의 극한

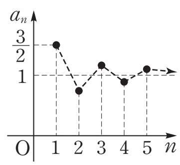
유제

본책 11~28쪽

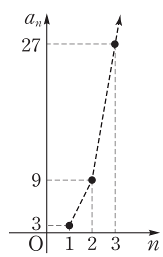
001-1 (1) n의 값에 따른 a_n의 값의 변화를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다.



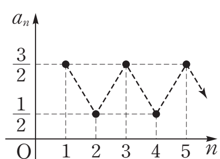
(2) n의 값에 따른 a_n의 값의 변화를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 n이 한없이 커질 때 $1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 수열 $\{a_n\}$은 수렴하고, 그 극한값은 1이다.



(3) n의 값에 따른 a_n의 값의 변화를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다.



(4) n의 값에 따른 a_n의 값의 변화를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다.



답 (1) 발산 (2) 수렴, 1 (3) 발산 (4) 발산

002-1 (1) 분모의 최고차항인 n^3으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+1}{2n^3-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2-\frac{2}{n^2}}=\frac{0-0+0}{2-0}=0$$

(2) 분모의 최고차항인 n으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+1}{7n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3+\frac{1}{n}}{7-\frac{5}{n}}=\infty$$

(3) 분모의 최고차항인 n으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{\sqrt{n+1}+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+3}=\frac{1-0}{0+3}=\frac{1}{3}$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-n)(3n+5)}{(n+3)(2n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^2-2n+5}{2n^2+5n-3}$$

분모의 최고차항인 n^2으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^2-2n+5}{2n^2+5n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{5}{n}-\frac{3}{n^2}}=\frac{-3-0+0}{2+0-0}=-\frac{3}{2}$$

답 (1) 수렴, 0 (2) 발산 (3) 수렴, $\frac{1}{3}$ (4) 수렴, $-\frac{3}{2}$

다른 풀이 (1) (분자의 차수) < (분모의 차수)이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+1}{2n^3-2n}=0$$

(2) (분자의 차수) > (분모의 차수)이고, 분자의 최고차항이 양수이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+1}{7n-5}=\infty$$

(3) (분자의 차수) = (분모의 차수)이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{\sqrt{n+1}+3n}=\frac{1}{3}$$

(4) (분자의 차수) = (분모의 차수)이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-n)(3n+5)}{(n+3)(2n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^2-2n+5}{2n^2+5n-3}=-\frac{3}{2}$$

002-2 (1) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}$$

분모의 최고차항인 n^2으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}$$

분모의 최고차항인 n으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$

003-1 (1) 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}$$
$$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(2) 분모를 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4n}-n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}+n}{(\sqrt{n^2+4n}-n)(\sqrt{n^2+4n}+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}+n}{4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}{4}$$
$$=\frac{1+1}{4}=\frac{1}{2}$$

(3) 최고차항인 n^3으로 묶으면

$$\lim_{n\to\infty}(3n^3+2n^2-n+1)$$
$$=\lim_{n\to\infty}n^3\left(3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)=\infty$$

답 (1) 수렴, $\frac{1}{2}$ (2) 수렴, $\frac{1}{2}$ (3) 발산

004-1 (1) 주어진 등식의 좌변에서 분모의 최고차항인 n^2으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-3n+4}{3n^2-n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{a}{3}$$

따라서 $\frac{a}{3}=\frac{2}{3}$이므로 $a=2$

(2) 주어진 등식의 좌변에서 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+an}-\sqrt{2n^2-n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2n^2+an}-\sqrt{2n^2-n})(\sqrt{2n^2+an}+\sqrt{2n^2-n})}{\sqrt{2n^2+an}+\sqrt{2n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+an-(2n^2-n)}{\sqrt{2n^2+an}+\sqrt{2n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)n}{\sqrt{2n^2+an}+\sqrt{2n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a+1}{\sqrt{2+\frac{a}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}$$
$$=\frac{a+1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{a+1}{2\sqrt{2}}$$

따라서 $\frac{a+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$a+1=2$ $\quad\therefore a=1$

답 (1) 2 (2) 1

004-2 극한값이 0이 아니므로

$a=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{an^2-2n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{-2n+4}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{1}{n}}{-2+\frac{4}{n}}=\frac{b}{-2}$$

따라서 $-\frac{b}{2}=3$이므로 $b=-6$

$\therefore a-b=6$

답 6

005-1 (1) $\dfrac{3a_n+5}{7-2a_n}=b_n$으로 놓으면

$$3a_n+5=b_n(7-2a_n)$$
$$(3+2b_n)a_n=7b_n-5$$
$$\therefore\ a_n=\frac{7b_n-5}{3+2b_n}$$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{7b_n-5}{3+2b_n}=\frac{7\cdot1-5}{3+2\cdot1}=\frac{2}{5}$$

(2) $(2n+3)a_n=b_n$으로 놓으면

$$a_n=\frac{b_n}{2n+3}$$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(n+5)a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+5)b_n}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{2n+3}\cdot\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}\cdot2=1$$

답 (1) $\frac{2}{5}$ (2) 1

다른 풀이 (1) 수열 $\{a_n\}$이 수렴한다고 가정하고 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (α는 실수)로 놓으면 주어진 등식에서

$$\frac{3\alpha+5}{7-2\alpha}=1 \qquad \therefore\ \alpha=\frac{2}{5}$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{5}$$

006-1 $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}<a_n<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$에서

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}}<na_n<\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=1,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}na_n=1$$

답 1

006-2 $\dfrac{n^2+2}{n+1}<\dfrac{a_n}{n+3}<\dfrac{n^2+4}{n+1}$에서

$$\frac{(n^2+2)(n+3)}{(n+1)(n^2+3)}<\frac{a_n}{n^2+3}<\frac{(n^2+4)(n+3)}{(n+1)(n^2+3)}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2)(n+3)}{(n+1)(n^2+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+2n+6}{n^3+n^2+3n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{6}{n^3}}{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n^3}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+4)(n+3)}{(n+1)(n^2+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+4n+12}{n^3+n^2+3n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{12}{n^3}}{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n^3}}=1$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+3}=1$$

답 1

007-1 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+1}{2^{2n+1}+2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+1}{2\cdot4^n+2^n}$

분모에서 밑이 가장 큰 거듭제곱인 4^n으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+1}{2\cdot4^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{2+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{0+0}{2+0}=0$$

(2) 분모에서 밑이 가장 큰 거듭제곱인 3^n으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{8^n}-3^{n-1}}{3^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^n-\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{0-\frac{1}{3}}{1-0}=-\frac{1}{3}$$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-5^n}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-5^n}{2\cdot2^n}$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n-\left(\frac{5}{2}\right)^n\right\}$

밑이 가장 큰 거듭제곱인 $\left(\frac{5}{2}\right)^n$으로 묶으면

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n-\left(\frac{5}{2}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-1\right\}=-\infty$$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot9^n-5^{n+1}}{5^n+3^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot9^n-5\cdot5^n}{5^n+9^n}$

분모에서 밑이 가장 큰 거듭제곱인 9^n으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot9^n-5\cdot5^n}{5^n+9^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-5\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n+1}$$

$$=\frac{4-0}{0+1}=4$$

답 (1) 수렴, 0 (2) 수렴, $-\frac{1}{3}$

(3) 발산 (4) 수렴, 4

007-2 $\lim_{n\to\infty}(5^n-3^n)^{\frac{1}{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[5^n\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(5^n)^{\frac{1}{n}}\cdot\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}5\cdot\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}=5$$

답 5

008-1 (i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(iii) $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$$

주어진 수열의 일반항의 분모, 분자를 r^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}-1}{\frac{1}{r^n}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

답 $\begin{cases}|r|<1\text{일 때,} & 1\\ r=1\text{일 때,} & 0\\ |r|>1\text{일 때,} & -1\end{cases}$

008-2 (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n-1}}{1+x^{2n}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n-1}}{1+x^{2n}}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$$

주어진 수열의 일반항의 분모, 분자를 x^{2n}으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n-1}}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2n}}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^{2n}}+1}$$

$$=\frac{0-\frac{1}{x}}{0+1}=-\frac{1}{x}$$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=-1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n-1}}{1+x^{2n}}=\frac{1-(-1)}{1+1}=1$$

이상에서 극한값이 1이 되도록 하는 x의 값의 범위는

$-1\le x<1$

답 $-1\le x<1$

009-1 (1) 등비수열 $\left\{\left(\frac{x^2-x}{2}\right)^n\right\}$은 첫째항과 공비가 모두 $\frac{x^2-x}{2}$이므로 이 수열이 수렴하려면

$$-1<\frac{x^2-x}{2}\le1\qquad\therefore -2<x^2-x\le2$$

(i) $-2<x^2-x$에서 $x^2-x+2>0$이고

$$x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$

따라서 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $x^2-x\le 2$에서 $x^2-x-2\le 0$이므로

$$(x+1)(x-2)\le 0$$

$$\therefore\ -1\le x\le 2$$

(i), (ii)에서 구하는 x의 값의 범위는

$$-1\le x\le 2$$

(2) 등비수열 $\{x(x-1)^n\}$은 첫째항이 $x(x-1)$, 공비가 $x-1$이므로 이 수열이 수렴하려면

$$x(x-1)=0 \text{ 또는 } -1<x-1\le 1$$

따라서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $0<x\le 2$이므로

$$0\le x\le 2$$

답 (1) $-1\le x\le 2$ (2) $0\le x\le 2$

010-1 $a_{n+1}=2a_n+1$을 $a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$로 놓으면

$$a_{n+1}=2a_n-\alpha$$

$-\alpha=1$이므로 $\alpha=-1$

$$\therefore\ a_{n+1}+1=2(a_n+1)$$

따라서 수열 $\{a_n+1\}$은 첫째항이 $a_1+1=1+1=2$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n+1=2\cdot 2^{n-1}\qquad \therefore\ a_n=2^n-1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{4^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=0$$

답 0

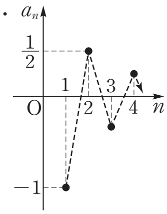
중단원 연습 문제

본책 29~33쪽

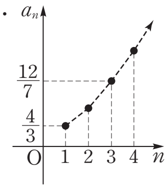
01 ⑤	**02** (1) $\frac{1}{3}$ (2) $-\frac{2016}{2015}$			**03** 12
04 2	**05** ③	**06** $\frac{5}{8}$	**07** ③	**08** $\frac{2}{3}$
09 $\frac{1}{2}$	**10** ①	**11** ②	**12** 2	**13** $\frac{1}{4}$
14 30	**15** -26	**16** -2	**17** 19	**18** $\frac{2}{3}$
19 ①	**20** 2	**21** ①	**22** $\sqrt{2}$	**23** 12
24 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$				

01 전략 n의 값에 따른 수열의 항 a_n의 값의 변화를 그림으로 나타낸다.

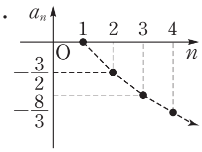
풀이 주어진 수열의 일반항에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 대입하여 수열의 항 a_n의 값의 변화를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

ㄱ.


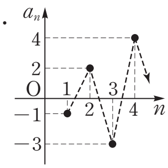
➡ 0으로 수렴

ㄴ.


➡ 양의 무한대로 발산

ㄷ.


➡ 음의 무한대로 발산

ㄹ.


➡ 발산(진동)

이상에서 수열 $\{a_n\}$이 발산하는 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

02 전략 (1) 분자의 식을 간단히 한 후 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나누어 구한다.

(2) 분모, 분자를 모두 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.

풀이 (1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6}$$

$$=\frac{2+0+0}{6}=\frac{1}{3}$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt{n^2-2016}}{\sqrt{n^2-2015}-n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n^2-2016})(n+\sqrt{n^2-2016})(\sqrt{n^2-2015}+n)}{(\sqrt{n^2-2015}-n)(\sqrt{n^2-2015}+n)(n+\sqrt{n^2-2016})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2016(\sqrt{n^2-2015}+n)}{-2015(n+\sqrt{n^2-2016})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2016\left(\sqrt{1-\frac{2015}{n^2}}+1\right)}{-2015\left(1+\sqrt{1-\frac{2016}{n^2}}\right)}$$

$$=\frac{2016(1+1)}{-2015(1+1)}=-\frac{2016}{2015}$$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $-\frac{2016}{2015}$

03 전략 좌변에서 분모를 1로 보고 유리화하여 구한 극한값을 우변의 값과 비교한다.

풀이 $\lim_{n\to\infty} an(\sqrt{4n^2+1}-2n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an(\sqrt{4n^2+1}-2n)(\sqrt{4n^2+1}+2n)}{\sqrt{4n^2+1}+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{\sqrt{4n^2+1}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+2}$$

$$=\frac{a}{2+2}=\frac{a}{4}$$

따라서 $\frac{a}{4}=3$이므로 $a=12$

답 12

04 해결과정 • $(3n+1)a_n=b_n$으로 놓으면

$$a_n=\frac{b_n}{3n+1}$$ ➔ 20% 배점

이때 $\lim_{n\to\infty} b_n=4$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3a_n}{2n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3\cdot\frac{b_n}{3n+1}}{2n^2+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3b_n}{(2n^2+5)(3n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3b_n}{6n^3+2n^2+15n+5}$$

➔ 40% 배점

답구하기 • 분모의 최고차항인 n^3으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3b_n}{6n^3+2n^2+15n+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3b_n}{6+\frac{2}{n}+\frac{15}{n^2}+\frac{5}{n^3}}$$

$$=\frac{3\cdot4}{6}=2$$ ➔ 40% 배점 답 2

05 전략 $x\neq-1$이므로 x의 값의 범위를 $|x|<1$, $x=1$, $|x|>1$로 나누어 극한을 조사한다.

풀이 ①, ⑤ $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|x^n|=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

주어진 수열의 일반항의 분모, 분자를 x^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+x^{2n}}{1-2x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^n}+x^n}{\frac{1}{x^n}-2}$$

따라서 $x<-1$ 또는 $x>1$이면 발산한다.

②, ③ $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+x^{2n}}{1-2x^n}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

따라서 $-1<x<0$ 또는 $0<x<1$이면 1에 수렴한다.

④ $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+x^{2n}}{1-2x^n}=\frac{1+1}{1-2}=-2$$

답 ③

06 문제이해 • $5a_{n+2}-2a_{n+1}-3a_n=0$에서

$5(a_{n+2}-a_{n+1})=-3(a_{n+1}-a_n)$

$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{3}{5}(a_{n+1}-a_n)$ ➔ 20% 배점

해결과정 • 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 $a_2-a_1=1$, 공비가 $-\frac{3}{5}$인 등비수열이므로

$$a_{n+1}-a_n=\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$ ➔ 30% 배점

위의 식의 양변에 n 대신 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
a_2-a_1&=1\\
a_3-a_2&=-\frac{3}{5}\\
a_4-a_3&=\left(-\frac{3}{5}\right)^2\\
&\vdots\\
+\big)\ a_n-a_{n-1}&=\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-2}\\
\hline
a_n-a_1&=1+\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-2}
\end{aligned}$$

$$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1}=0+\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}$$

$$=\frac{5}{8}\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$$ ➔ 30% 배점

답구하기 • $\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{8}\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}=\frac{5}{8}$

➔ 20% 배점

답 $\frac{5}{8}$

07 전략 각 수열의 일반항을 구하거나 항을 나열하여 수렴하는지 알아본다.

풀이 ㄱ. $a_{2n}=\frac{(-1)^{2n+1}}{2n}=-\frac{1}{2n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n}\right)=0$$

ㄴ. $|a_n|=\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|=\frac{1}{n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

ㄷ. $[a_n]=\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$이므로 수열 $\{[a_n]\}$을 첫째항부터 차례대로 나열하면

$$[1]=1, \left[-\frac{1}{2}\right]=-1, \left[\frac{1}{3}\right]=0,$$

$$\left[-\frac{1}{4}\right]=-1, \left[\frac{1}{5}\right]=0, \cdots$$

따라서 수열 $\{[a_n]\}$은 발산(진동)한다.

이상에서 수렴하는 수열은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

08 전략 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 이용하여 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로

$$a_n=2+(n-1)\cdot 3=3n-1$$

$b_n=\frac{a_n+a_{n+1}}{3}$이므로

$$b_n=\frac{3n-1+3(n+1)-1}{3}=\frac{6n+1}{3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6n+1}{3}}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{9n-3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{1}{n}}{9-\frac{3}{n}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

09 해결과정 • $(2n)^2<4n^2+2n+1<(2n+1)^2$이므로

$$2n<\sqrt{4n^2+2n+1}<2n+1$$ ➔ 20% 배점

따라서 $\sqrt{4n^2+2n+1}$의 정수 부분이 $2n$이므로

$$a_n=\sqrt{4n^2+2n+1}-2n$$ ➔ 30% 배점

답구하기 • $\therefore \lim_{n\to\infty} a_n$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+2n+1}-2n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+2n+1}-2n)(\sqrt{4n^2+2n+1}+2n)}{\sqrt{4n^2+2n+1}+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{4n^2+2n+1}+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+2}$$

$$=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}$$ ➔ 50% 배점

답 $\frac{1}{2}$

10 전략 $a_n-b_n=c_n$으로 놓고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} c_n=5$임을 이용한다.

풀이 $a_n-b_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=a_n-c_n$

이때 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} c_n=5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-3b_n}{2a_n+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-3(a_n-c_n)}{2a_n+(a_n-c_n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2a_n+3c_n}{3a_n-c_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{3c_n}{a_n}}{3-\frac{c_n}{a_n}}=-\frac{2}{3}$$

답 ①

11 전략 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 옳은 것은 증명하고, 옳지 않은 것은 반례를 든다.

풀이 ㄱ. [반례] $a_n=n+1$, $b_n=n$이면

$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$이지만

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}(n+1-n)=1$$

ㄴ. [반례] $a_n=n$, $b_n=\frac{1}{n}$이면

$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이지만

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=1$$

ㄷ. $a_n-b_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=a_n-c_n$

이때 $\lim_{n\to\infty} c_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n-c_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} c_n$$
$$=\alpha-0=\alpha$$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

12 해결과정 • 수열 $\{a_n\}$에서

$2<a_1<3,\ 3<a_2<4,\ 4<a_3<5,\ \cdots,$

$n+1<a_n<n+2$

이므로 변끼리 더하면

$$2+3+\cdots+(n+1)<a_1+a_2+\cdots+a_n<3+4+\cdots+(n+2)$$

➔ 20% 배점

$$\frac{n\cdot\{2+(n+1)\}}{2}<\sum_{k=1}^{n}a_k<\frac{n\cdot\{3+(n+2)\}}{2}$$

$$\therefore \frac{n^2+3n}{2}<S_n<\frac{n^2+5n}{2}$$

$$\therefore \frac{2n^2+2n}{n^2+5n}<\frac{n^2+n}{S_n}<\frac{2n^2+2n}{n^2+3n}$$

➔ 40% 배점

답구하기 • 이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n}{n^2+5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{2}{n}}{1+\frac{5}{n}}=2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n}{n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}=2$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{S_n}=2$$

➔ 40% 배점

답 2

13 전략 $\frac{n}{4}-1<\left[\frac{n}{4}\right]\le\frac{n}{4}$에서 수열의 극한의 대소 관계를 이용한다.

풀이 $\frac{n}{4}-1<\left[\frac{n}{4}\right]\le\frac{n}{4}$이므로

$$\frac{1}{n}\left(\frac{n}{4}-1\right)<\frac{1}{n}\left[\frac{n}{4}\right]\le\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{4}-\frac{1}{n}<\frac{1}{n}\left[\frac{n}{4}\right]\le\frac{1}{4}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{n}{4}\right]=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

14 전략 두 직선의 방정식을 연립하여 구한 x, y가 각각 a_n, b_n임을 이용한다.

풀이 $2x+y=4^n$ ⋯ ㉠ $x-2y=2^n$ ⋯ ㉡

$2\times$㉠$+$㉡을 하면 $5x=2\cdot4^n+2^n$

$$\therefore x=\frac{2\cdot4^n+2^n}{5}$$

㉠$-2\times$㉡을 하면 $5y=4^n-2^{n+1}$

$$\therefore y=\frac{4^n-2^{n+1}}{5}$$

이때 두 직선의 교점의 좌표가 $(a_n,\ b_n)$이므로

$$a_n=\frac{2\cdot4^n+2^n}{5},\ b_n=\frac{4^n-2^{n+1}}{5}$$

$$\therefore p=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^n-2^{n+1}}{5}}{\frac{2\cdot4^n+2^n}{5}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-2^{n+1}}{2\cdot4^n+2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore 60p=60\cdot\frac{1}{2}=30$$

답 30

15 전략 함수 $f(x)$에 $x=\frac{1}{3}$, $x=3$을 각각 대입한다.

풀이 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+3}+3\cdot\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}+1}=\frac{0+1}{0+1}=1$

$$f(3)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n+3}+3\cdot3}{3^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^3+\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}}$$

$$=\frac{27+0}{1+0}=27$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right)-f(3)=1-27=-26$$

답 -26

Remark

x의 값의 범위를 $|x|<1$, $x=1$, $x=-1$, $|x|>1$로 나누어 $f(x)$를 구하면

$$f(x)=\begin{cases}3x & (|x|<1)\\ 2 & (x=1)\\ -2 & (x=-1)\\ x^3 & (|x|>1)\end{cases}$$

16 해결과정 • $f(x)=2^nx^2+3^{n-1}x-1$로 놓으면 나머지정리에 의하여

$a_n=f(-1)=2^n-3^{n-1}-1,$

$b_n=f(2)=2^{n+2}+2\cdot3^{n-1}-1$ ➜ 40% 배점

답구하기 • $\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}+2\cdot3^{n-1}-1}{2^n-3^{n-1}-1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+2-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$

$=-2$ ➜ 60% 배점

답 -2

Remark 나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면 $R=f(\alpha)$

17 해결과정 • (i) $a<5$일 때,

분모에서 밑이 가장 큰 거듭제곱인 5^n으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot a^n+5^{n+1}}{a^{n+1}+b\cdot5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot\left(\frac{a}{5}\right)^n+5}{a\cdot\left(\frac{a}{5}\right)^n+b}=\frac{5}{b}$$

이때 $\frac{5}{b}>1$이려면 $b<5$

따라서 $a<5$, $b<5$를 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 $4\cdot4=16$ ➜ 30% 배점

(ii) $a=5$일 때,

분모에서 밑이 가장 큰 거듭제곱인 5^n으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot5^n+5^{n+1}}{5^{n+1}+b\cdot5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+5}{5+b}=\frac{9}{5+b}$$

이때 $\frac{9}{5+b}>1$이려면 $5+b<9$

$\therefore b<4$

따라서 $a=5$, $b<4$를 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 $1\cdot3=3$ ➜ 30% 배점

(iii) $a>5$일 때,

분모에서 밑이 가장 큰 거듭제곱인 a^n으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot a^n+5^{n+1}}{a^{n+1}+b\cdot5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+5\cdot\left(\frac{5}{a}\right)^n}{a+b\cdot\left(\frac{5}{a}\right)^n}=\frac{4}{a}$$

이때 $\frac{4}{a}>1$이려면 $a<4$

그런데 $a>5$이므로 이것을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다. ➜ 30% 배점

답구하기 • 이상에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$16+3=19$ ➜ 10% 배점

답 19

18 해결과정 • 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하면 원 C_n의 중심 $(3^n, r_n)$과 직선 $3x-4y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|3\cdot3^n-4r_n|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=r_n,\quad |3^{n+1}-4r_n|=5r_n$

이때 $3^{n+1}-4r_n=-5r_n$이면 $r_n=-3^{n+1}<0$이 되어 모순이므로

$3^{n+1}-4r_n=5r_n,\quad 9r_n=3^{n+1}$

$\therefore r_n=\frac{3^{n+1}}{9}=3^{n-1}$ ➜ 50% 배점

답구하기 • $\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{\pi(3^n+2^n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi\cdot3^{n-1}}{\pi(3^n+2^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot3^{n-1}}{3^n+2^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{2}{3}$ ➜ 50% 배점

답 $\frac{2}{3}$

Remark 점과 직선 사이의 거리

좌표평면에서 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

19 전략 주어진 수열의 규칙성을 찾아 a_n과 b_n을 구한다.

풀이 제n행의 수를 차례대로 나열하면

$\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \frac{5}{2^n}, \cdots, \frac{2^n-1}{2^n}$

이므로 $a_n=\frac{2^n-1}{2^n}$

각 행의 항의 개수를 차례대로 나열하면

1, 2, 4, 8, $\cdots$

따라서 제n행의 항의 개수는 2^{n-1}이므로

$$b_n=\frac{1}{2^n}+\frac{3}{2^n}+\frac{5}{2^n}+\cdots+\frac{2^n-1}{2^n}$$
$$=\frac{1}{2^n}\{1+3+5+\cdots+(2^n-1)\}$$
$$=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2^{n-1}\{1+(2^n-1)\}}{2}=\frac{2^n}{4}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{(2^n+1)a_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{4}}{(2^n+1)\cdot\frac{2^n-1}{2^n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 2^n}{4(2^n+1)(2^n-1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{4(4^n-1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}=\frac{1}{4}$$

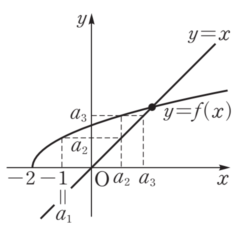
답 ①

20 전략 $a_{n+1}=y$, $a_n=x$로 놓고 주어진 그래프에서 n이 한없이 커질 때의 a_n의 값을 추정한다.

풀이 $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$에서 $a_{n+1}=y$, $a_n=x$로 놓으면

$y=\sqrt{x+2}$ ······ ㉠

$a_1=-1$이므로 a_1, a_2, a_3, …의 위치를 x축 위에 추정해 보면 오른쪽 그림과 같다.



즉 n이 한없이 커질 때 a_n은 곡선 $y=\sqrt{x+2}$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

$\sqrt{x+2}=x$의 양변을 제곱하면

$x+2=x^2$, $\quad x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

그런데 $\sqrt{x+2}=x$에서 $x\geq 0$이므로 $\quad x=2$

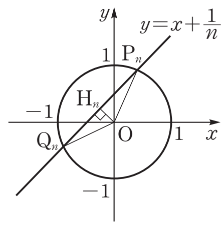
따라서 두 그래프의 교점의 x좌표가 2이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=2$

답 2

21 전략 원점 O에서 직선 $y=x+\frac{1}{n}$에 내린 수선의 발을 H_n이라 하고 $\overline{OH_n}$, $\overline{P_nQ_n}$의 길이를 구한다.

풀이 원점 O에서 직선 $y=x+\frac{1}{n}$, 즉 $nx-ny+1=0$에 내린 수선의 발을 H_n이라 하면



$$\overline{OH_n}=\frac{1}{\sqrt{n^2+(-n)^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2n^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2n}$$

$\overline{OP_n}=1$이므로 직각삼각형 OP_nH_n에서

$$\overline{P_nH_n}=\sqrt{\overline{OP_n}^2-\overline{OH_n}^2}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2n}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{4n^2-2}{4n^2}}=\frac{\sqrt{4n^2-2}}{2n}$$
$$\therefore \overline{P_nQ_n}=2\overline{P_nH_n}=2\cdot\frac{\sqrt{4n^2-2}}{2n}=\frac{\sqrt{4n^2-2}}{n}$$

따라서 $\triangle OP_nQ_n$의 넓이 A_n은

$$A_n=\frac{1}{2}\cdot\overline{P_nQ_n}\cdot\overline{OH_n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{4n^2-2}}{n}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2n}$$
$$=\frac{2\sqrt{2n^2-1}}{4n^2}=\frac{\sqrt{2n^2-1}}{2n^2}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}(n\cdot A_n)=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{\sqrt{2n^2-1}}{2n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2-1}}{2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ①

22 문제이해 • $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^2=\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$이고

$0<\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}<1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\right)^n=0 \cdots ㉠$$

➔ 30% 배점

해결과정 • $\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}=b_n$으로 놓으면

$a_n-\sqrt{2}=a_nb_n+\sqrt{2}b_n$

$(1-b_n)a_n=\sqrt{2}(1+b_n)$

$$\therefore a_n=\frac{\sqrt{2}(1+b_n)}{1-b_n}$$ ➔ 30% 배점

답구하기 • ㉠에서 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}(1+b_n)}{1-b_n}=\frac{\sqrt{2}(1+0)}{1-0}=\sqrt{2}$$

➔ 40% 배점

답 $\sqrt{2}$

23

전략 주어진 식을 이용하여 $a_{n+1}-a_n$을 구한다.

풀이 $(a_{n+1}-a_n)^2$

$$=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)^2$$

$$=2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)-2\left(1-\frac{1}{9^{n-1}}\right)=\frac{16}{9^n}\ (n\ge 2)$$

이때 $n=1$이면

$$(a_2-a_1)^2=2\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{16}{9}$$

이므로

$$(a_{n+1}-a_n)^2=\frac{16}{9^n}$$

$$\therefore a_{n+1}-a_n=\frac{4}{3^n}\ (\because a_n<a_{n+1})$$

위의 식의 양변에 n 대신 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} a_2-a_1&=\frac{4}{3}\\ a_3-a_2&=\frac{4}{3^2}\\ a_4-a_3&=\frac{4}{3^3}\\ &\vdots\\ +\big)\ a_n-a_{n-1}&=\frac{4}{3^{n-1}}\\ \hline a_n-a_1&=\frac{4}{3}+\frac{4}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\cdots+\frac{4}{3^{n-1}} \end{aligned}$$

$$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4}{3^k}$$

$$=10+\frac{\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=12-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{12-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=12$$ 답 12

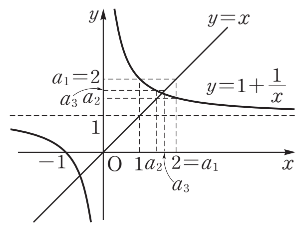
24

전략 기능키를 n번 누른 후에 화면에 나타나는 수를 a_n으로 놓고 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

풀이 처음 화면에 1이 나타났을 때 기능키를 n번 누른 후 화면에 나타나는 수를 a_n이라 하면

$$a_1=1+\frac{1}{1}=2,\ a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$$

이므로 $y=1+\frac{1}{x}$로 놓고 $y=1+\frac{1}{x}$과 $y=x$의 그래프를 이용하여 x축 위에 $a_1, a_2, a_3, \cdots$의 위치를 추정해 보면 다음 그림과 같다.



즉 n이 한없이 커질 때 a_n은 제 1 사분면에서 곡선 $y=1+\frac{1}{x}$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

$1+\frac{1}{x}=x$에서 $x^2-x-1=0$

$$\therefore x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ (\because x>0)$$

따라서 두 그래프의 교점의 x좌표가 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

즉 기능키를 한없이 누르면 화면에 나타나는 수는 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$에 한없이 가까워진다.

답 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

02 급수

유제 본책 39~57쪽

011-1 주어진 급수의 제n항을 a_n, 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하자.

(1) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$

$=\dfrac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}$

$=\dfrac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}$

이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$$
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)=\infty$$

(2) $a_n=\log\dfrac{n^2}{n^2-1}$

$=\log\dfrac{n^2}{(n-1)(n+1)}$

$=\log\left(\dfrac{n}{n-1}\cdot\dfrac{n}{n+1}\right)$

이므로

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\log\left(\frac{k}{k-1}\cdot\frac{k}{k+1}\right)$$
$$=\log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)+\log\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)+\cdots+\log\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)$$
$$=\log\left\{\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdots\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\log\frac{2n}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log\frac{2n}{n+1}=\log 2$$

(3) $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

답 (1) 발산 (2) 수렴, $\log 2$ (3) 수렴, 1

012-1 $S_n=\dfrac{3\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=6\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}(6-S_k)=\sum_{k=1}^{n}6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k=6\cdot\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=6\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(6-S_k)=\lim_{n\to\infty}6\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$
$$=6$$

답 6

012-2 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_n=n^2$이므로

$n=1$일 때, $a_1=S_1=1$

$n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2$

$=2n-1$ …… ㉠

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 $a_n=2n-1$

따라서

$$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

013-1 (1) 주어진 급수의 제n항을 b_n이라 하면

$b_n = a_n - 4$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$b_n = a_n - 4$에서 $a_n = b_n + 4$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n+4)$$
$$= 0+4=4$$

(2) 주어진 급수의 제n항을 b_n이라 하면

$$b_n = a_n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$b_n = a_n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$에서 $a_n = b_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left\{b_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\} = 0+0=0$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} (a_n+3) = 0+3=3$$

답 (1) 4 (2) 3

013-2 주어진 급수의 제n항을 b_n이라 하면

$b_n = na_n - 2$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$b_n = na_n - 2$에서 $na_n = b_n + 2$

$\therefore n^2 a_n = nb_n + 2n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 a_n}{5n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{nb_n+2n}{5n-2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b_n+2}{5-\frac{2}{n}}$$
$$= \frac{0+2}{5-0} = \frac{2}{5}$$

답 $\frac{2}{5}$

014-1 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$로 놓으면

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = -4$에서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = -4$

$\therefore \alpha+\beta = -4$ ······ ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-b_n) = 8$에서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 8$

$\therefore \alpha-\beta = 8$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=2$, $\beta=-6$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 3b_n) = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n - 3\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
$$= 2\cdot 2 - 3\cdot(-6)$$
$$= 22$$

답 22

014-2 $2a_n + b_n = c_n$이라 하면 $a_n = \frac{c_n - b_n}{2}$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -2$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 10$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n-b_n}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 10 - \frac{1}{2}\cdot(-2)$$
$$= 6$$

답 6

015-1 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} 8^n 10^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} 8^n 10^{-n}$은

첫째항과 공비가 모두 $\frac{4}{5}$인 등비급수이다.

이때 $\left|\frac{4}{5}\right| < 1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} 8^n 10^{-n} = \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}} = 4$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{4^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{4^{n-1}}$은 첫째

항이 4, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비급수이다.

이때 $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{4^{n-1}} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^n$은 첫째항이

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2-1} = 1$$

이고, 공비가

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$$

인 등비급수이다.

이때 $|\sqrt{2}-1|<1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^n$$
$$=\frac{1}{1-(\sqrt{2}-1)}=\frac{1}{2-\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{3^n}=\frac{0}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{0}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\cdots$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{3^n}$은 첫째항이 $\frac{2}{9}$, 공비가 $\frac{1}{9}$인 등비급수이다.

이때 $\left|\frac{1}{9}\right|<1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{3^n}=\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4}$$

답 (1) 4 (2) 8 (3) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ (4) $\frac{1}{4}$

016-1 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(11\cdot 10^{-2n}+8\cdot 10^{-n})$

$$=11\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n+8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n$$
$$=11\cdot\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}}+8\cdot\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}$$
$$=11\cdot\frac{1}{99}+8\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{9}+\frac{8}{9}=1$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\{2^n+(-2)^n\}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}+\frac{-\frac{2}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}$$
$$=2-\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$$

답 (1) 1 (2) $\frac{8}{5}$

016-2 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$에서 $-1<r<1$이고

$$\frac{a}{1-r}=2 \quad\cdots\cdots ㉠$$

수열 $\{a_n{}^2\}$의 첫째항은 a^2, 공비는 r^2이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2=3$에서 $\frac{a^2}{1-r^2}=3$

$$\therefore \frac{a^2}{(1-r)(1+r)}=3 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $2\cdot\frac{a}{1+r}=3$

$$\therefore \frac{a}{1+r}=\frac{3}{2} \quad\cdots\cdots ㉢$$

㉠÷㉢을 하면

$\frac{1+r}{1-r}=\frac{4}{3}$, $3(1+r)=4(1-r)$

$7r=1$ $\therefore r=\frac{1}{7}$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 공비는 $\frac{1}{7}$이다. 답 $\frac{1}{7}$

017-1 주어진 등비급수의 첫째항과 공비가 모두 $1-x^2$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$-1<1-x^2<1$, $-2<-x^2<0$

$\therefore 0<x^2<2$

(i) $x^2>0$에서 $x\neq 0$

(ii) $x^2<2$에서 $x^2-2<0$

$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})<0$

$\therefore -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 $-\sqrt{2}<x<0$ 또는 $0<x<\sqrt{2}$

답 $-\sqrt{2}<x<0$ 또는 $0<x<\sqrt{2}$

017-2 주어진 등비급수의 첫째항이 $(x-1)(x-4)$, 공비가 $x-4$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$(x-1)(x-4)=0$ 또는 $-1<x-4<1$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$ 또는 $3<x<5$

(i) $x=1$ 또는 $x=4$이면 주어진 등비급수의 합이 0이므로 $x\neq 1$, $x\neq 4$

(ii) $3<x<5$일 때, 주어진 등비급수의 합이 3이므로

$$\frac{(x-1)(x-4)}{1-(x-4)}=3$$

$x^2-5x+4=3(-x+5)$

$x^2-2x-11=0$

$\therefore x=1+2\sqrt{3}$ ($\because 3<x<5$)

(i), (ii)에서 $x=1+2\sqrt{3}$ 답 $1+2\sqrt{3}$

018-1 점 P_n이 점 (a, b)에 한없이 가까워진다고 하면

$a=\overline{\mathrm{OP_1}}-\overline{\mathrm{P_2P_3}}+\overline{\mathrm{P_4P_5}}-\overline{\mathrm{P_6P_7}}+\cdots$

$=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^4-\left(\frac{3}{4}\right)^6+\cdots$

$=\dfrac{1}{1-\left\{-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}}=\dfrac{16}{25}$

$b=\overline{\mathrm{P_1P_2}}-\overline{\mathrm{P_3P_4}}+\overline{\mathrm{P_5P_6}}-\overline{\mathrm{P_7P_8}}+\cdots$

$=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^5-\left(\frac{3}{4}\right)^7+\cdots$

$=\dfrac{\frac{3}{4}}{1-\left\{-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}}=\dfrac{12}{25}$

따라서 점 P_n은 점 $\left(\frac{16}{25}, \frac{12}{25}\right)$에 가까워진다.

답 $\left(\frac{16}{25}, \frac{12}{25}\right)$

019-1 $\angle \mathrm{P_1OP}=60°$이므로

$\overline{\mathrm{PP_1}}=\overline{\mathrm{OP}}\sin 60°=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

$\angle \mathrm{P_1PP_2}=60°$이므로

$\overline{\mathrm{P_1P_2}}=\overline{\mathrm{PP_1}}\sin 60°=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

$\angle \mathrm{P_2P_1P_3}=60°$이므로

$\overline{\mathrm{P_2P_3}}=\overline{\mathrm{P_1P_2}}\sin 60°=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\angle \mathrm{P_3P_2P_4}=60°$이므로

$\overline{\mathrm{P_3P_4}}=\overline{\mathrm{P_2P_3}}\sin 60°=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{4}$

$\vdots$

$\therefore \overline{\mathrm{P_1P_2}}+\overline{\mathrm{P_2P_3}}+\overline{\mathrm{P_3P_4}}+\cdots$

$=3+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{4}+\cdots=\dfrac{3}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{6}{2-\sqrt{3}}$

$=6(2+\sqrt{3})$

답 $6(2+\sqrt{3})$

020-1 $\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n \backsim \triangle \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$ (SSS 닮음)
이고 닮음비가 $2:1$이므로

$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n : \triangle \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}=4:1$

따라서 $\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 넓이를 S_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$이라 하면

$S_1=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2},\quad S_{n+1}=\frac{1}{4}S_n$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로 $\quad S_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore \triangle \mathrm{A_1B_1C_1}+\triangle \mathrm{A_2B_2C_2}+\triangle \mathrm{A_3B_3C_3}+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

021-1 $0.1\dot{7}$을 분수로 나타내면

$0.1\dot{7}=0.1+0.07+0.007+0.0007+\cdots$

$=\frac{1}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{100}\cdot\frac{1}{10}+\frac{7}{100}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2+\cdots$

$=\frac{1}{10}+\dfrac{\frac{7}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{10}+\frac{7}{90}=\frac{8}{45}$

$0.1\dot{7}a-0.17a=28$이므로

$\frac{8}{45}a-\frac{17}{100}a=28,\qquad \frac{7}{900}a=28$

$\therefore a=3600$

답 3600

021-2 $0.\dot{x}=\frac{x}{10}+\frac{x}{100}+\frac{x}{1000}+\cdots$

$=\dfrac{\frac{x}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\dfrac{x}{9}$

$0.0\dot{y}=\frac{y}{100}+\frac{y}{1000}+\frac{y}{10000}+\cdots$

$=\dfrac{\frac{y}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\dfrac{y}{90}$

$0.00\dot{z}=\frac{z}{1000}+\frac{z}{10000}+\frac{z}{100000}+\cdots$

$=\dfrac{\frac{z}{1000}}{1-\frac{1}{10}}=\dfrac{z}{900}$

즉 세 수 $\frac{x}{9}, \frac{y}{90}, \frac{z}{900}$가 이 순서로 등비수열을 이루므로 $\quad \left(\frac{y}{90}\right)^2=\frac{x}{9}\cdot\frac{z}{900}$

$\therefore y^2=xz \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $1<x<y<z<9$이므로 ㉠을 만족시키는 정수 x, y, z는 $x=2$, $y=4$, $z=8$

답 $x=2$, $y=4$, $z=8$

Remark 등비중항

세 수 x, y, z가 이 순서로 등비수열을 이루면 y는 x와 z의 등비중항이고 $y^2=xz$이다.

021-3 3^n을 10으로 나누었을 때의 나머지는 3^n의 일의 자리의 숫자와 같으므로

$$a_1=3,\ a_2=9,\ a_3=7,\ a_4=1,$$
$$a_5=3,\ a_6=9,\ a_7=7,\ a_8=1,\ \cdots$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$$
$$=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\frac{a_4}{10^4}$$
$$+\frac{a_5}{10^5}+\frac{a_6}{10^6}+\frac{a_7}{10^7}+\frac{a_8}{10^8}+\cdots$$
$$=0.3+0.09+0.007+0.0001+0.00003$$
$$+0.000009+\cdots$$
$$=0.\dot{3}97\dot{1}$$
$$=0.3971+0.00003971+0.000000003971+\cdots$$
$$=\frac{3971}{10000}+\frac{3971}{10000}\cdot\frac{1}{10000}$$
$$+\frac{3971}{10000}\cdot\left(\frac{1}{10000}\right)^2+\cdots$$
$$=\frac{\frac{3971}{10000}}{1-\frac{1}{10000}}$$
$$=\frac{3971}{9999}=\frac{361}{909}$$

답 $\frac{361}{909}$

중단원 연습 문제

본책 58~62쪽

01 ④	**02** $-\frac{7}{5}$	**03** 3	**04** $\frac{13}{6}$	**05** 60
06 40	**07** -1	**08** ①	**09** ①	**10** ③
11 ②	**12** 6	**13** $\frac{3}{4}$	**14** ①	**15** ⑤
16 12	**17** 7	**18** $\frac{9}{8}\pi$	**19** ⑤	
20 $A<B=C$		**21** 4	**22** 66	**23** ②

01 전략 주어진 급수의 부분합 S_n을 구하고 $\lim_{n\to\infty}S_n$의 수렴, 발산을 조사한다.

풀이 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하자.

ㄱ. $S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})$$
$$+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=\sqrt{n+1}-1$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$$

ㄴ. $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}=\frac{1}{4}$$

ㄷ. $S_n=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k+1}{k}$

$$=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\cdots+\log\frac{n+1}{n}$$
$$=\log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{n+1}{n}\right)=\log(n+1)$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n+1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log(n+1)=\infty$$

ㄹ. $S_n=\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}\right)$

$$=2-\frac{n+2}{n+1}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n+2}{n+1}\right)=2-1=1$$

이상에서 수렴하는 급수는 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

02 (전략) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$임을 이용한다.

(풀이) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 3으로 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n=3$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+7S_n}{3a_n-5S_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n+7\lim_{n\to\infty} S_n}{3\lim_{n\to\infty} a_n-5\lim_{n\to\infty} S_n}$$

$$=\frac{0+7\cdot3}{3\cdot0-5\cdot3}$$

$$=-\frac{21}{15}=-\frac{7}{5}$$

답 $-\frac{7}{5}$

03 해결과정 • 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\beta$로 놓으면

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=3$에서 $\quad 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n=3$

$\therefore 2\alpha+\beta=3$ ······ ㉠ ➔ 30% 배점

$\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n+2b_n)=-4$에서

$-\sum_{n=1}^{\infty} a_n+2\sum_{n=1}^{\infty} b_n=-4$

$\therefore -\alpha+2\beta=-4$ ······ ㉡ ➔ 30% 배점

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=2,\ \beta=-1$ ➔ 20% 배점

답구하기 • $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$=\alpha-\beta=2-(-1)$

$=3$ ➔ 20% 배점

답 3

04 (전략) 주어진 급수를 수렴하는 두 등비급수로 나누어 각각의 합을 구한다.

(풀이) $\frac{2+3}{5}+\frac{2^2+3^2}{5^2}+\frac{2^3+3^3}{5^3}+\cdots$

$$=\left\{\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$+\left\{\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}+\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{13}{6}$$

답 $\frac{13}{6}$

05 (전략) 공이 움직인 거리를 등비급수로 나타낸다.

(풀이) 공이 움직인 거리의 합은

$$20+\frac{1}{2}\cdot20\cdot2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot20\cdot2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot20\cdot2+\cdots$$

$$=20+40\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=20+40\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=60$$

답 60

06 문제이해 • 넓이가 S_n인 정사각형의 한 변의 길이를 a_n이라 하면 a_{n+1}은 넓이가 T_n인 직각이등변 삼각형의 빗변이 아닌 한 변의 길이이므로

$$a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}a_n$$

이때 $a_1=4$이므로 $\quad a_n=4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$ ➔ 30% 배점

해결과정 • $S_n={a_n}^2$, $T_n=\frac{1}{2}{a_{n+1}}^2$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n=\frac{1}{2}{a_2}^2+\frac{1}{2}{a_3}^2+\frac{1}{2}{a_4}^2+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a_1\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a_2\right)^2$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a_3\right)^2+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}{a_n}^2$$ ➔ 40% 배점

답구하기 • $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left({a_n}^2+\frac{1}{4}{a_n}^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{4}{a_n}^2$$

$$=\frac{5}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right\}^2$$

$$=\frac{5}{4}\cdot16\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=20\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=20\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=40$$ ➔ 30% 배점

답 40

07 문제이해 • $x^2-(n-2)x-(n^2+3n)=0$의 두 근이 α_n, β_n이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=n-2,\ \alpha_n\beta_n=-n^2-3n$ ➔ 20% 배점

해결과정 • $\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_n+2)(\beta_n+2)}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n\beta_n+2(\alpha_n+\beta_n)+4}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-n^2-3n+2(n-2)+4}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-n^2-n}$$ ➔ 30% 배점

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{-k^2-k}$이라 하면

$$S_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}-1$$ ➔ 30% 배점

답구하기 • $\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_n+2)(\beta_n+2)}$

$$= \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}-1\right)$$

$$= -1$$ ➔ 20% 배점

답 -1

08 전략 a_n을 a_{n+1}과 a_{n+2}에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$에서 $a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}a_{k+2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+2}-a_{k+1}}{a_{k+1}a_{k+2}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$

$$= \frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+2}} = \frac{1}{2}-\frac{1}{a_{n+2}}$$

이때 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n>2a_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+2}=\infty$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

답 ①

Remark

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$a_3=2+1=3,\ a_4=3+2=5,\ a_5=5+3=8,\ \cdots$

따라서 $a_{n+1}>a_n$이므로

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n>a_n+a_n=2a_n$

09 전략 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=0$임을 이용한다.

풀이 $b_n=na_n-\dfrac{n^2+1}{2n+1}$이라 하면 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty} b_n=0$$

$b_n=na_n-\dfrac{n^2+1}{2n+1}$에서 $a_n=\dfrac{b_n}{n}+\dfrac{n^2+1}{2n^2+n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{n}+\frac{n^2+1}{2n^2+n}\right)=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n{}^2+2a_n+2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}+2$$

$$=\frac{13}{4}$$

답 ①

10 전략 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n-a_{n+1})$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 대입하여 합의 꼴로 나타낸다.

풀이 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n-a_{n+1})$

$$=1^2(a_1-a_2)+2^2(a_2-a_3)+3^2(a_3-a_4)+\cdots$$

$$=(1^2-0^2)a_1+(2^2-1^2)a_2+(3^2-2^2)a_3+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\{n^2-(n-1)^2\}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)a_n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} 2na_n-\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty} na_n-\sum_{n=1}^{\infty} a_n=2\beta-\alpha$$

답 ③

11 전략 급수의 성질은 수렴하는 급수에서 성립하고, 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=0$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\alpha,\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\beta$라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n-b_n)+b_n\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)+\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\beta+\alpha$$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n=0$

ㄷ. [반례] $a_n=3^n$, $b_n=-3^n$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 각각 발산하지만

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}(3^n-3^n)=0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

12 전략 S와 S_n을 각각 구하여 $S-S_n<\frac{1}{3000}$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

풀이 $S=\sum_{n=1}^{\infty} 1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$

$S_n=\sum_{k=1}^{n} 1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}=\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}}$

$=\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$

이때 $S>S_n$이므로

$S-S_n=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n<\frac{1}{3000}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}<\frac{1}{1000}$, $4^{n-1}>1000$

$4^4=256$, $4^5=1024$이므로 $n-1\ge 5$ $\therefore n\ge 6$

따라서 구하는 자연수 n의 값은 6이다. 답 6

Remark

첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열에 대하여

$S_n=1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$,

$S=1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\cdots$

이므로 $S>S_n$

13 전략 $a_1=S_1$이고, $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge 2)$임을 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구한다.

풀이 $3^{n-1}S_n=3^n-1$에서

$S_n=3-\frac{1}{3^{n-1}}=3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

$n=1$일 때, $a_1=S_1=3\left(1-\frac{1}{3}\right)=2$

$n\ge 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

$=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ …… ㉠

$a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$

$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

14 전략 n이 짝수일 때와 홀수일 때로 경우를 나누어 본다.

풀이 (i) $n=2k+1\ (k=1, 2, 3, \cdots)$일 때,

$(-3)^{n-1}=(-3)^{2k}=3^{2k}>0$이므로

$a_{2k+1}=1$

(ii) $n=2k\ (k=1, 2, 3, \cdots)$일 때,

$(-3)^{n-1}=(-3)^{2k-1}=-3^{2k-1}<0$이므로

$a_{2k}=0$

(i), (ii)에서

$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_4}{2^4}+\frac{a_5}{2^5}+\frac{a_6}{2^6}+\cdots$

$=\frac{1}{2^3}+0+\frac{1}{2^5}+0+\cdots$

$=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\cdots$

$=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{6}$ 답 ①

15 전략 각 등비급수의 공비를 구하여 $|$공비$|<1$인지 확인한다.

풀이 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하므로 $|r|<1$

① $0\le r^2<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$은 수렴한다.

따라서 급수의 성질에 의하여

$\sum_{n=1}^{\infty}(r^n+r^{2n})=\sum_{n=1}^{\infty} r^n+\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$도 수렴한다.

② $0 \le r^2 < 1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$은 수렴한다.

따라서 급수의 성질에 의하여

$\sum_{n=1}^{\infty}(r^n - 2r^{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$도 수렴한다.

③ $-1 < -r < 1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$은 수렴한다.

따라서 급수의 성질에 의하여

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n+(-r)^n}{2} = \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} r^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n\right\}$도 수렴한다.

④ $-1 < \frac{r-1}{2} < 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-1}{2}\right)^n$은 수렴한다.

⑤ $-\frac{3}{2} < \frac{r}{2} - 1 < -\frac{1}{2}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}-1\right)^n$은 반드시 수렴한다고 할 수 없다.

답 ⑤

16 전략 $3a_{n+1} - 2a_n = \alpha$를 $a_{n+1} - \alpha = \frac{2}{3}(a_n - \alpha)$로 변형하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구한다.

풀이 $3a_{n+1} - 2a_n = \alpha$에서 $\quad a_{n+1} - \alpha = \frac{2}{3}(a_n - \alpha)$

수열 $\{a_n - \alpha\}$는 첫째항이 $4-\alpha$, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로 $\quad a_n - \alpha = (4-\alpha)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n = (4-\alpha)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \alpha$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

즉 $\lim_{n\to\infty}\left\{(4-\alpha)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \alpha\right\} = 0$에서 $\quad \alpha = 0$

$\therefore a_n = 4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{4}{1-\frac{2}{3}} = 12 = \beta$

$\therefore \alpha + \beta = 12$

답 12

17 전략 a, b의 값을 각각 등비급수로 나타낸다.

풀이 $a = \overline{P_1P_2} + \overline{P_3P_4} + \overline{P_5P_6} + \cdots$

$= \frac{6}{7} + \left(\frac{6}{7}\right)^3 + \left(\frac{6}{7}\right)^5 + \cdots$

$= \frac{\frac{6}{7}}{1-\left(\frac{6}{7}\right)^2} = \frac{\frac{6}{7}}{\frac{13}{49}} = \frac{42}{13}$

$b = \overline{OP_1} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_4P_5} + \cdots = 1 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^4 + \cdots$

$= \frac{1}{1-\left(\frac{6}{7}\right)^2} = \frac{1}{\frac{13}{49}} = \frac{49}{13}$

$\therefore a + b = \frac{42}{13} + \frac{49}{13} = 7$

답 7

18 해결과정 • 처음 만들어지는 두 반원의 지름의 길이는 각각

$3 \cdot \frac{2}{3} = 2,\ 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

$\therefore S_1 = \frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 + \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{2}\pi\left\{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$ ➔ 20% 배점

두 번째로 만들어지는 두 반원의 지름의 길이는 각각

$2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3},\ 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\therefore S_2 = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$= \frac{1}{2}\pi\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}$ ➔ 20% 배점

세 번째로 만들어지는 두 반원의 지름의 길이는 각각

$\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9},\ \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$

$\therefore S_3 = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^2$

$= \frac{1}{2}\pi\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{9}\right)^2\right\}$

$\vdots$ ➔ 20% 배점

답구하기 • $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n$

$= \frac{1}{2}\pi\left[\left\{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} + \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right\} + \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{9}\right)^2\right\} + \cdots\right]$

$= \frac{1}{2}\pi\left[\left\{1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \cdots\right\} + \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \cdots\right\}\right]$

$= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{1-\frac{4}{9}} + \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{4}{9}}\right)$

$= \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{8}\pi$ ➔ 40% 배점

답 $\frac{9}{8}\pi$

02 급수

19 전략 등비급수를 이용하여 순환소수를 분수로 나타낸 후, 연립방정식을 푼다.

풀이 $0.\dot{3}$, $1.\dot{1}$, $0.\dot{2}$를 각각 분수로 나타내면

$$0.\dot{3}=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{3}$$

$$1.\dot{1}=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots$$
$$=1+\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}$$

$$0.\dot{2}=\frac{2}{10}+\frac{2}{100}+\frac{2}{1000}+\cdots=\frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{2}{9}$$

따라서 $2x+0.\dot{3}y=1.\dot{1}$에서

$$2x+\frac{1}{3}y=\frac{10}{9}$$

$\therefore 18x+3y=10$ ...... ㉠

$0.\dot{2}x+3y=1.\dot{1}$에서

$$\frac{2}{9}x+3y=\frac{10}{9}$$

$\therefore 2x+27y=10$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$

$\therefore a+b=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ 답 ⑤

20 전략 a_n, a_{2n}을 구한 다음 등비수열의 합의 공식에 대입하여 R_n, S_n, T_n을 구한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{2n}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-1}=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)}$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$R_n=\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=\sum_{k=1}^{n}\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\right\}$$
$$=\frac{-\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}}=-\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

$$\therefore A=\lim_{n\to\infty}R_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}\right]=-\frac{2}{3}$$

$$S_n=\sum_{k=n+1}^{2n}a_k=\sum_{k=1}^{2n}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{2n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$
$$=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}-\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$=\frac{2}{3}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

$$\therefore B=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{3}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}\right]=0$$

$$T_n=\sum_{k=n}^{2n-1}a_{2k}=\sum_{k=1}^{2n-1}a_{2k}-\sum_{k=1}^{n-1}a_{2k}$$
$$=\sum_{k=1}^{2n-1}\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\right\}-\sum_{k=1}^{n-1}\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\right\}$$
$$=\frac{-\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1}\right\}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{-\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

$$\therefore C=\lim_{n\to\infty}T_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}\right]=0$$

$\therefore A<B=C$ 답 $A<B=C$

21 문제이해 • $f(1)=\frac{1}{2^1}$

$$f(2)=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^2}$$

$$f(3)=\frac{1}{2^3}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^3}$$

$\vdots$ ➔ 30% 배점

해결과정 • $\therefore f(n)$

$$=\frac{1}{2^n}+\frac{3}{2^n}+\frac{5}{2^n}+\cdots+\frac{2^n-1}{2^n}$$
$$=\frac{1}{2^n}\{1+3+5+\cdots+(2^n-1)\}$$
$$=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2^{n-1}\{1+(2^n-1)\}}{2}$$
$$=\frac{2^{2n-1}}{2^{n+1}}=2^{n-2}$$

➔ 50% 배점

답구하기 • $\therefore \dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(3)}+\cdots$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-2}}=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$$ ➔ 20% 배점

답 4

Remark

수열 $\dfrac{1}{2^n}, \dfrac{2}{2^n}, \dfrac{3}{2^n}, \cdots, \dfrac{2^n-1}{2^n}, \dfrac{2^n}{2^n}$의 항의 개수는 2^n이므로 $\dfrac{1}{2^n}, \dfrac{3}{2^n}, \dfrac{5}{2^n}, \cdots, \dfrac{2^n-1}{2^n}$의 항의 개수는 $\dfrac{2^n}{2}$, 즉 2^{n-1}이다.

22

문제이해 • p가 소수이므로 $p>1$이고 $0<\dfrac{1}{p}<1$이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p^n}$이 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{p^{n-1}}+\frac{3}{p^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{p^{n-1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{p^n}$$

$$=\frac{2}{1-\frac{1}{p}}+\frac{\frac{3}{p}}{1-\frac{1}{p}}$$

$$=\frac{2p+3}{p-1}$$

$\dfrac{2p+3}{p-1}=\dfrac{k}{2}$이므로

$2(2p+3)=k(p-1)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠ ➔ 30% 배점

해결과정 • (i) $p=2$일 때,

$2\cdot7=k$에서 $\quad k=14$ ➔ 10% 배점

(ii) $p\neq2$일 때,

㉠에서 $\quad 4p+6=kp-k$

$\therefore p=\dfrac{k+6}{k-4}$

$p>0$이므로 $\quad k-4>0$

$\therefore k>4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

p는 2가 아닌 소수이므로 $\quad p\geq3$

즉 $\dfrac{k+6}{k-4}\geq3$이므로

$k+6\geq3(k-4)$, $\quad 2k\leq18$

$\therefore k\leq9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 $\quad 4<k\leq9$

한편 p가 홀수이므로 $2p+3$은 홀수, $p-1$은 짝수이다. 따라서 ㉠에서 k는 홀수이다.

$k=5$이면 $\quad p=\dfrac{5+6}{5-4}=11$

$k=7$이면 $\quad p=\dfrac{7+6}{7-4}=\dfrac{13}{3}$

➡ p는 소수가 아니다.

$k=9$이면 $\quad p=\dfrac{9+6}{9-4}=3$ ➔ 50% 배점

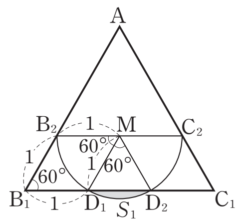
답구하기 • (i), (ii)에서 소수 p의 값은 2, 3, 11이므로 구하는 곱은 66이다. ➔ 10% 배점

답 66

23

전략 S_1을 구할 수 있도록 보조선을 긋는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 선분 B_2C_2의 중점을 M, 선분 B_2C_2를 지름으로 하는 원과 선분 B_1C_1이 만나는 점을 각각 D_1, D_2라 하면 두 사각형 $B_1D_1MB_2$, $C_1C_2MD_2$는 각각 한 변의 길이가 1인 마름모이므로 $\triangle MD_1D_2$는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.



$$\therefore S_1=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot1^2$$

$$=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

이때 $\triangle AB_nC_n$과 $\triangle AB_{n+1}C_{n+1}$의 닮음비가 $3:2$이므로 넓이의 비는 $9:4$이다.

따라서 $S_{n+1}=\dfrac{4}{9}S_n$이므로

$$S_n=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{6\pi-9\sqrt{3}}{20}$$

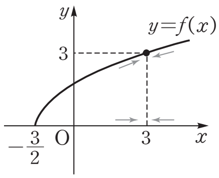
답 ②

03 함수의 극한

유제

본책 68~90쪽

022-1 (1) $f(x)=\sqrt{2x+3}$으로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 3에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 $\sqrt{9}$, 즉 3에 한없이 가까워지므로

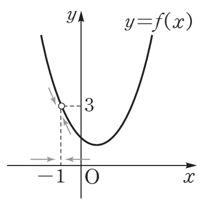


$$\lim_{x\to 3}\sqrt{2x+3}=3$$

(2) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$로 놓으면 $x\neq -1$일 때,

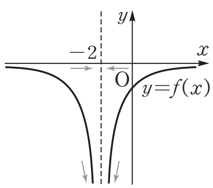
$$f(x)=\frac{x^3+1}{x+1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}$$
$$=x^2-x+1$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로



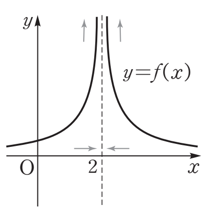
$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=3$$

(3) $f(x)=-\dfrac{1}{(x+2)^2}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 -2에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로



$$\lim_{x\to -2}\left\{-\frac{1}{(x+2)^2}\right\}=-\infty$$

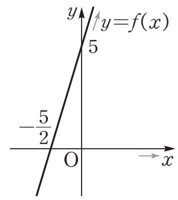
(4) $f(x)=\dfrac{1}{|x-2|}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 2에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 한없이 커지므로



$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{|x-2|}=\infty$$

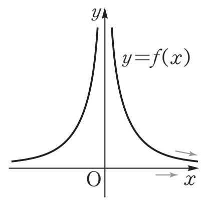
답 (1) 3 (2) 3 (3) $-\infty$ (4) ∞

023-1 (1) $f(x)=2x+5$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값도 한없이 커지므로



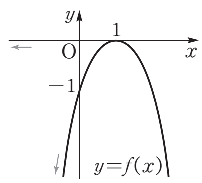
$$\lim_{x\to\infty}(2x+5)=\infty$$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x|}=0$



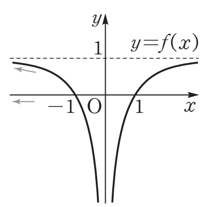
(3) $f(x)=-x^2+2x-1$
$=-(x-1)^2$

으로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값도 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로



$$\lim_{x\to -\infty}(-x^2+2x-1)=-\infty$$

(4) $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로



$$\lim_{x\to -\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1$$

답 (1) ∞ (2) 0 (3) $-\infty$ (4) 1

024-1 (1) $x\to -2+$에서 $x+2>0$이므로

$$\frac{x^2-4}{|x+2|}=\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}=x-2$$

$$\therefore \lim_{x\to -2+}\frac{x^2-4}{|x+2|}=\lim_{x\to -2+}(x-2)$$
$$=-4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to -2-$에서 $x+2<0$이므로

$$\frac{x^2-4}{|x+2|}=\frac{(x+2)(x-2)}{-(x+2)}=-x+2$$

$$\therefore \lim_{x\to-2-}\frac{x^2-4}{|x+2|}=\lim_{x\to-2-}(-x+2)$$

$$=4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to-2+}\frac{x^2-4}{|x+2|}\neq\lim_{x\to-2-}\frac{x^2-4}{|x+2|}$이므로 $\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{|x+2|}$의 값은 존재하지 않는다.

(2) $x\to 3+$에서 $x-3>0$이므로 $|x-3|=x-3$

$$\therefore \lim_{x\to3+}|x-3|=\lim_{x\to3+}(x-3)=0 \cdots ㉠$$

$x\to 3-$에서 $x-3<0$이므로

$|x-3|=-x+3$

$$\therefore \lim_{x\to3-}|x-3|=\lim_{x\to3-}(-x+3)$$

$$=0 \qquad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to3+}|x-3|=\lim_{x\to3-}|x-3|$이므로

$\lim_{x\to3}|x-3|=0$

(3) $x>-1$일 때, $|x+1|=x+1$

$1<x<2$에서 $[x]=1$이므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{[x]-1}{|x+1|}=\lim_{x\to1+}\frac{1-1}{x+1}=0 \quad \cdots ㉠$$

$0<x<1$에서 $[x]=0$이므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{[x]-1}{|x+1|}=\lim_{x\to1-}\frac{0-1}{x+1}$$

$$=-\frac{1}{2} \qquad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to1+}\frac{[x]-1}{|x+1|}\neq\lim_{x\to1-}\frac{[x]-1}{|x+1|}$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{[x]-1}{|x+1|}$의 값은 존재하지 않는다.

답 (1) 존재하지 않는다. (2) 0으로 존재한다.
(3) 존재하지 않는다.

025-1 주어진 식의 분모, 분자를 x로 나누면

$$\lim_{x\to0}\frac{3x^2+4f(x)}{2x^2-f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{3x+\frac{4f(x)}{x}}{2x-\frac{f(x)}{x}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to0}3x+4\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}}{\lim_{x\to0}2x-\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}}$$

$$=\frac{0+4\cdot2}{0-2}=-4$$

답 -4

026-1 (1) $$\lim_{x\to1}\frac{2x^2-3x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(2x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x-1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+2x}-1)(\sqrt{1+2x}+1)}{x(\sqrt{1+2x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+2x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+2x}+1}=1$$

(3) $$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}(\sqrt{x+4}+2)=4$$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) 4

026-2 $$\lim_{x\to-1}\frac{ax^2+(a+b)x+b}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(ax+b)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{ax+b}{x-1}$$

$$=\frac{-a+b}{-2}=\frac{a-b}{2}$$

답 $\frac{a-b}{2}$

027-1 (1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$$

$$=0$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x-4x^2}{2x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-4x}{2-\frac{5}{x}}=-\infty$$

(3) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{t\to\infty}\frac{-6t}{\sqrt{t^2+1}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-6}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}+1}=-3$$

답 (1) 0 (2) $-\infty$ (3) -3

028-1 (1) $\lim_{x\to\infty}(-3x^3+4x^2+x-2)$

$$=\lim_{x\to\infty}x^3\left(-3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)=-\infty$$

(2) $x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-5x+6}+x)$$
$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+5t+6}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+5t+6}-t)(\sqrt{t^2+5t+6}+t)}{\sqrt{t^2+5t+6}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{5t+6}{\sqrt{t^2+5t+6}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{5+\frac{6}{t}}{\sqrt{1+\frac{5}{t}+\frac{6}{t^2}}+1}=\frac{5}{2}$$

답 (1) $-\infty$ (2) $\frac{5}{2}$

028-2 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax})}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1-\frac{a}{x}}}=a$$

$\therefore\ a=4$

답 4

029-1 (1) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{1-\frac{1}{(x-1)^2}\right\}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-2x}{x(x-1)^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x-2}{(x-1)^2}=-2$$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{3-x}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{3}-(\sqrt{3-x})}{\sqrt{3}(\sqrt{3-x})}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{3}(\sqrt{3-x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3-x})}=\frac{1}{3}$$

답 (1) -2 (2) $\frac{1}{3}$

029-2 $x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\sqrt{4x^2+2}}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}t^2\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{\sqrt{4t^2+2}}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2(\sqrt{4t^2+2}-2t)}{2\sqrt{4t^2+2}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2(\sqrt{4t^2+2}-2t)(\sqrt{4t^2+2}+2t)}{2\sqrt{4t^2+2}(\sqrt{4t^2+2}+2t)}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{4t^2+2+\sqrt{16t^4+8t^2}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{4+\frac{2}{t^2}+\sqrt{16+\frac{8}{t^2}}}=\frac{1}{8}$$

답 $\frac{1}{8}$

030-1 (1) $x\longrightarrow3$일 때, (분자) $\longrightarrow0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}(x^2-ax+b)=0$이므로

$9-3a+b=0\qquad\therefore\ b=3a-9$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-ax+3a-9}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-a+3)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x+3}{x-a+3}=\frac{6}{6-a}$$

따라서 $\frac{6}{6-a}=6$이므로 $\quad a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=6$

(2) $x\longrightarrow-2$일 때, (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to-2}(a\sqrt{x+3}+b)=0$이므로

$a+b=0\qquad\therefore\ b=-a$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{a\sqrt{x+3}-a}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{a(\sqrt{x+3}-1)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{a(\sqrt{x+3}-1)(\sqrt{x+3}+1)}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{a(x+2)}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{a}{\sqrt{x+3}+1}=\frac{a}{2}$$

따라서 $\dfrac{a}{2}=1$이므로 $\quad a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=-2$

답 (1) $a=5,\ b=6$ (2) $a=2,\ b=-2$

031-1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+4}=3$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차식임을 알 수 있다. …… ㉠

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{f(x)}=\dfrac{1}{6}$에서 $x\longrightarrow 2$일 때, (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0$이므로

$f(2)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=3(x-2)(x+a)$(a는 상수)로 놓을 수 있으므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{f(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{3(x-2)(x+a)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{3(x+a)}$$
$$=\frac{4}{3(2+a)}$$

$\dfrac{4}{3(2+a)}=\dfrac{1}{6}$에서

$a=6$

따라서 $f(x)=3(x-2)(x+6)$이므로

$f(3)=3\cdot 1\cdot 9=27$

답 27

032-1 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(6x-5)=13$,

$\lim\limits_{x\to 3}g(x)=\lim\limits_{x\to 3}(x^2+4)=13$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x\to 3}h(x)=13$

답 13

032-2 $x>0$이므로 $x^2+1\le f(x)\le x^2+3$의 각 변을 x^2으로 나누면

$$\frac{x^2+1}{x^2}\le\frac{f(x)}{x^2}\le\frac{x^2+3}{x^2}$$
$$\therefore\ 1+\frac{1}{x^2}\le\frac{f(x)}{x^2}\le 1+\frac{3}{x^2}$$

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)=1$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$

답 1

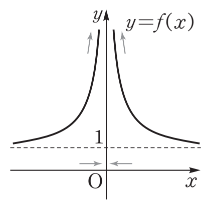
중단원 연습 문제

본책 91~95쪽

01 ③	02 3	03 $\frac{5}{2}$	04 ①	05 -2
06 16	07 ③	08 ④	09 $\frac{1}{2}$	10 1
11 -1	12 ②	13 2	14 3	15 0
16 -16	17 9	18 10	19 ⑤	20 ⑤
21 ③				

01 전략 함수의 정의역에 주의하여 그래프를 그린 후, x가 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값의 변화를 조사한다.

풀이 ㄱ. $f(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 0에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

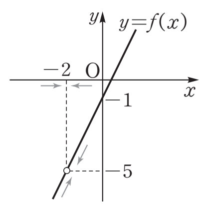


$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\infty$$

ㄴ. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{x+2}$로 놓으면 $x\ne -2$일 때,

$$f(x)=\frac{(2x-1)(x+2)}{x+2}=2x-1$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 -2에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 -5에 한없이 가까워지므로

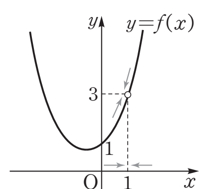


$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+3x-2}{x+2}$$
$$=-5$$

ㄷ. $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$로 놓으면 $x\ne 1$일 때,

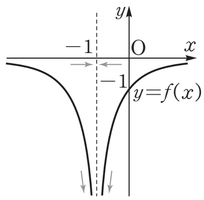
$$f(x)=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=x^2+x+1$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로



$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3$$

ㄹ. $f(x)=-\dfrac{1}{|x+1|}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로



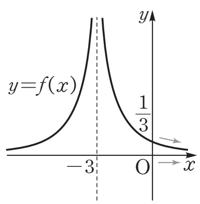
$$\lim_{x\to -1}\left(-\frac{1}{|x+1|}\right)=-\infty$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

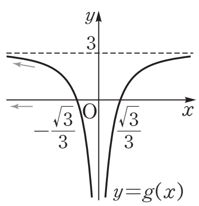
02 전략 함수의 정의역에 주의하여 그래프를 그린 후, $x\longrightarrow\infty$, $x\longrightarrow-\infty$일 때 $f(x)$의 값의 변화를 조사한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{1}{|x+3|}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로



$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x+3|}=0$$

또 $g(x)=3-\dfrac{1}{x^2}$로 놓으면 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때 $g(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로



$$\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{1}{x^2}\right)=3$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x+3|}+\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{1}{x^2}\right)=3$$

답 3

03 문제이해 • $x-a=t$로 치환하면 $x\longrightarrow a$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x-a)}{x-a}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$$

➔ 40% 배점

해결과정 • 주어진 식의 분모와 분자를 x로 나누면

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+4f(x)}{3x^2+2f(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+4\cdot\dfrac{f(x)}{x}}{3x+2\cdot\dfrac{f(x)}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}1+4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}}{3\lim\limits_{x\to 0}x+2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}}$$

➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 극한값은

$$\frac{1+4\cdot 1}{3\cdot 0+2\cdot 1}=\frac{5}{2}$$

➔ 20% 배점

답 $\dfrac{5}{2}$

04 전략 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴은 분모의 최고차항으로 분모와 분자를 나누고, 분모 또는 분자에 $\sqrt{}$가 있는 경우 $\sqrt{}$가 있는 쪽을 유리화하여 극한값을 구한다.

풀이 $A=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-1}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x^2}}=0$

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$$

$$C=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=2$$

$$\therefore A<B<C$$

답 ①

다른 풀이 $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{(1+x)-1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$$

05 전략 주어진 식에서 $x\longrightarrow 1$일 때, (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$임을 이용한다.

풀이 $x\longrightarrow 1$일 때, (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$이므로

$1+a+b=0 \qquad \therefore b=-a-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax-a-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+a+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+a+1}=\frac{1}{a+2}$$

따라서 $\frac{1}{a+2}=\frac{1}{3}$이므로 $\qquad a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $\qquad b=-2$

$\therefore ab=-2$

답 -2

06 해결과정 • 조건 (가)에서 $f(x)-x^3$은 이차항의 계수가 3인 이차식임을 알 수 있다.

$f(x)-x^3=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f(x)=x^3+3x^2+ax+b \qquad \cdots\cdots$ ㉠ ➔ 30% 배점

조건 (나)에서 $x\longrightarrow 0$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to0}(x^3+3x^2+ax+b)=0$

$\therefore b=0$ ➔ 30% 배점

$b=0$을 ㉠에 대입하면 $\qquad f(x)=x^3+3x^2+ax$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x^2+3x+a)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(x^2+3x+a)=a$$

$\therefore a=-2$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 $f(x)=x^3+3x^2-2x$이므로

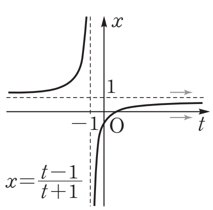
$f(2)=2^3+3\cdot2^2-2\cdot2=16$ ➔ 10% 배점

답 16

07 전략 $\frac{t-1}{t+1}$과 $\frac{4t-1}{t+1}$을 각각 치환하여 그 그래프를 조사한다.

풀이 (i) $x=\frac{t-1}{t+1}$로 놓으면

$$\frac{t-1}{t+1}=\frac{t+1-2}{t+1}$$
$$=1-\frac{2}{t+1}$$



이므로 $x=\frac{t-1}{t+1}$의 그래프는 위의 그림과 같고,

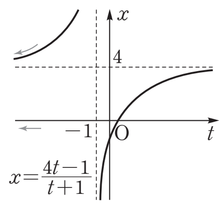
$t\longrightarrow\infty$일 때, $x\longrightarrow 1-$이다.

따라서 x가 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워질 때 주어진 그래프에서 $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)=\lim_{x\to1-}f(x)=2$$

(ii) $x=\frac{4t-1}{t+1}$로 놓으면

$$\frac{4t-1}{t+1}$$
$$=\frac{4(t+1)-5}{t+1}$$
$$=4-\frac{5}{t+1}$$



이므로 $x=\frac{4t-1}{t+1}$의 그래프는 위의 그림과 같고,

$t\longrightarrow-\infty$일 때, $x\longrightarrow 4+$이다.

따라서 x가 4보다 크면서 4에 한없이 가까워질 때 주어진 그래프에서 $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=\lim_{x\to4+}f(x)=3$$

(i), (ii)에서

$$\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$$
$$=2+3=5$$

답 ③

08 전략 $x=a$에서의 우극한과 좌극한을 각각 구하고, 그 값이 서로 같은지 확인한다.

풀이 ㄱ. $x\longrightarrow 0+$에서 $x>0$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{|x|}=\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}x=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow 0-$에서 $x<0$이므로

$$\lim_{x\to0-}\frac{x^2}{|x|}=\lim_{x\to0-}\frac{x^2}{-x}$$
$$=\lim_{x\to0-}(-x)=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{|x|}=\lim_{x\to0-}\frac{x^2}{|x|}$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{|x|}$의 값은 존재한다.

ㄴ. $-1<x<0$일 때, $[x]=-1$이므로

$$\frac{[x]}{[x]^2-x}=\frac{-1}{(-1)^2-x}=\frac{1}{x-1}$$

$$\therefore \lim_{x\to -1+}\frac{[x]}{[x]^2-x}=\lim_{x\to -1+}\frac{1}{x-1}$$

$$=-\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$-2<x<-1$일 때, $[x]=-2$이므로

$$\frac{[x]}{[x]^2-x}=\frac{-2}{(-2)^2-x}=\frac{2}{x-4}$$

$$\therefore \lim_{x\to -1-}\frac{[x]}{[x]^2-x}=\lim_{x\to -1-}\frac{2}{x-4}$$

$$=-\frac{2}{5} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\lim_{x\to -1+}\frac{[x]}{[x]^2-x}\neq\lim_{x\to -1-}\frac{[x]}{[x]^2-x}$$

이므로 $\lim_{x\to -1}\frac{[x]}{[x]^2-x}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $x\longrightarrow 2+$에서 $x-2>0$이므로

$$\frac{(x-2)^3}{|x-2|}=\frac{(x-2)^3}{x-2}=(x-2)^2$$

$$\therefore \lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)^3}{|x-2|}=\lim_{x\to 2+}(x-2)^2$$

$$=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow 2-$에서 $x-2<0$이므로

$$\frac{(x-2)^3}{|x-2|}=\frac{(x-2)^3}{-(x-2)}=-(x-2)^2$$

$$\therefore \lim_{x\to 2-}\frac{(x-2)^3}{|x-2|}=\lim_{x\to 2-}\{-(x-2)^2\}$$

$$=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)^3}{|x-2|}=\lim_{x\to 2-}\frac{(x-2)^3}{|x-2|}$이므로 $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^3}{|x-2|}$의 값은 존재한다.

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

09 문제이해 • 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극한값을 가지려면 $\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)$이어야 한다.

➜ 10% 배점

해결과정 • (i) $0<x<1$일 때, $[x]=0$이므로

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(a[x]^3+2b[x]^2+1)$$

$$=a\cdot 0^3+2b\cdot 0^2+1=1$$ ➜ 30% 배점

(ii) $-1<x<0$일 때, $[x]=-1$이므로

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}(a[x]^3+2b[x]^2+1)$$

$$=a\cdot(-1)^3+2b\cdot(-1)^2+1$$

$$=-a+2b+1$$ ➜ 30% 배점

답구하기 • (i), (ii)에서 $1=-a+2b+1$이므로

$a=2b \qquad \therefore \frac{b}{a}=\frac{1}{2}\ (\because a\neq 0)$ ➜ 30% 배점

답 $\frac{1}{2}$

10 전략 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+4g(x)}{-2f(x)+6g(x)}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2\{3f(x)-2g(x)\}+7f(x)}{-3\{3f(x)-2g(x)\}+7f(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2\{3f(x)-2g(x)\}}{f(x)}+7}{\frac{-3\{3f(x)-2g(x)\}}{f(x)}+7}=1$$

답 1

다른 풀이 $3f(x)-2g(x)=h(x)$로 놓으면 $2g(x)=3f(x)-h(x)$이고, $\lim_{x\to\infty}h(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+4g(x)}{-2f(x)+6g(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+2\{3f(x)-h(x)\}}{-2f(x)+3\{3f(x)-h(x)\}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7f(x)-2h(x)}{7f(x)-3h(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{7-\frac{2h(x)}{f(x)}}{7-\frac{3h(x)}{f(x)}}=1$$

11 전략 합성함수 $(f\circ g)(x)$, $(g\circ f)(x)$를 구하여 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한을 구하는 방법을 이용한다.

풀이 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-1)=(x^2-1)^2$,
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=x^4-1$
$=(x^2+1)(x^2-1)$

이므로 $\lim_{x\to 1}\frac{(f\circ g)(x)-(g\circ f)(x)}{x^4-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)^2-(x^2+1)(x^2-1)}{x^4-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)\{(x^2-1)-(x^2+1)\}}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-2}{x^2+1}=-1$$

답 -1

12 (전략) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때, $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)=\alpha\beta$임을 이용한다.

(풀이) ㄱ. [반례] $f(x)=g(x)=\begin{cases} 1 & (x\ge 0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$ 일 때,

$\lim_{x\to 0}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to 0} 0=0$이지만

$\lim_{x\to 0+} f(x)=1$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=-1$이므로

$$\lim_{x\to 0+} f(x)\ne \lim_{x\to 0-} f(x)$$

또 $\lim_{x\to 0+} g(x)=1$, $\lim_{x\to 0-} g(x)=-1$이므로

$$\lim_{x\to 0+} g(x)\ne \lim_{x\to 0-} g(x)$$

따라서 $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 0} g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to\infty} g(x)=\alpha$, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=\beta$ (α, β는 실수)로 놓으면

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty} g(x)\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\beta$$

이므로 $\lim_{x\to\infty} f(x)$는 수렴한다.

ㄷ. [반례] $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x^2$일 때,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=0$$

이지만

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty} x^2=\infty$$

이므로 $\lim_{x\to\infty} g(x)$는 수렴하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. (답) ②

13 해결과정 • 점 P의 좌표를 $(a, \sqrt{a})$ $(a>0)$라 하면 $\overline{OP}=\sqrt{a^2+a}$이므로 점 Q의 좌표는 $(0, \sqrt{a^2+a})$이다.

따라서 직선 PQ의 방정식은

$$y-\sqrt{a^2+a}=\frac{\sqrt{a^2+a}-\sqrt{a}}{-a}x$$ ➔ 30% 배점

점 R의 좌표를 $(t, 0)$이라 하면 점 R는 직선 PQ 위의 점이므로 $-\sqrt{a^2+a}=\frac{\sqrt{a^2+a}-\sqrt{a}}{-a}\cdot t$

$$\therefore t=\frac{a\sqrt{a^2+a}}{\sqrt{a^2+a}-\sqrt{a}}$$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 점 P가 원점 O에 한없이 가까워질 때, $a \longrightarrow 0+$이므로

$$\alpha=\lim_{a\to 0+} t=\lim_{a\to 0+}\frac{a\sqrt{a^2+a}}{\sqrt{a^2+a}-\sqrt{a}}$$
$$=\lim_{a\to 0+}\frac{a\sqrt{a^2+a}(\sqrt{a^2+a}+\sqrt{a})}{(\sqrt{a^2+a}-\sqrt{a})(\sqrt{a^2+a}+\sqrt{a})}$$
$$=\lim_{a\to 0+}\frac{\sqrt{a^2+a}(\sqrt{a^2+a}+\sqrt{a})}{a}$$
$$=\lim_{a\to 0+}\frac{a^2+a+a\sqrt{a+1}}{a}$$
$$=\lim_{a\to 0+}(a+1+\sqrt{a+1})=2$$ ➔ 40% 배점

(답) 2

14 해결과정 • 주어진 등식의 좌변의 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2+bx}-x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{ax^2+bx}-x)(\sqrt{ax^2+bx}+x)}{\sqrt{ax^2+bx}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-1)x^2+bx}{\sqrt{ax^2+bx}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-1)x+b}{\sqrt{a+\frac{b}{x}}+1}\quad\cdots\cdots ㉠$$ ➔ 30% 배점

이때 ㉠의 극한값이 존재하므로 $a-1=0$

$\therefore a=1$ ➔ 30% 배점

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $\lim_{x\to\infty}\frac{b}{\sqrt{1+\frac{b}{x}}+1}=\frac{b}{2}$

따라서 $\frac{b}{2}=1$이므로 $b=2$ ➔ 30% 배점

답구하기 • $\therefore a+b=3$ ➔ 10% 배점

(답) 3

15 (전략) $\infty-\infty$ 꼴의 극한에서 무리식인 경우 분모를 1로 보고 분자를 유리화하고, $\infty\times 0$ 꼴은 통분하거나 인수분해하여 극한값을 구한다.

(풀이) $a=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}$$
$$=2$$

$$b=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2x+1}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{1-(2x+1)}{2x+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{-2x}{2x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{2x+1}=-2$$

$\therefore a+b=0$ 답 0

16 전략 $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$ (α는 0이 아닌 실수)일 때, $\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=\infty$이려면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이어야 함을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{2}$에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{px^2+qx+r}=\frac{1}{p}=\frac{1}{2} \qquad \therefore p=2$$

또 $\lim_{x\to 1}(x^2+2x-1)=2$, $\lim_{x\to -2}(x^2+2x-1)=-1$

이므로 $\lim_{x\to 1}|f(x)|=\infty$, $\lim_{x\to -2}|f(x)|=\infty$이려면

$\lim_{x\to 1}(2x^2+qx+r)=0$,

$\lim_{x\to -2}(2x^2+qx+r)=0$

$\therefore 2+q+r=0,\ 8-2q+r=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$q=2,\ r=-4$

$\therefore pqr=2\cdot 2\cdot(-4)=-16$ 답 -16

17 해결과정 • $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+6x-12}{x^2-1}=6$에서

분모, 분자의 차수가 같아야 하므로

$a=0$ ➔ 30% 배점

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{bx^2+6x-12}{x^2-1}=6$에서 분모와 분자의 최고차항의 계수의 비가 6이므로 $b=6$ ➔ 30% 배점

답구하기 • $\therefore \lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{6x^2+6x-12}{x^2-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{6(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{6(x+2)}{x+1}=9$$

➔ 40% 배점

답 9

18 해결과정 • 조건 (가)에서 $x\longrightarrow 3$일 때,

(분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 3}f(x)=0$이므로

$f(3)=0$ ······ ㉠

조건 (나)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{3}{2}$에 대하여 대칭이므로 $f\left(\frac{3}{2}-x\right)=f\left(\frac{3}{2}+x\right)$

$f\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)$에서

$f(0)=f(3)=0$ ($\because$ ㉠) ······ ㉡ ➔ 40% 배점

㉡, 조건 (나)에서 $f(x)=ax(x-3)$ $(a>0)$으로 놓을 수 있으므로

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{ax(x-3)}{x-3}=3a$$

따라서 $3a=6$이므로 $a=2$

$\therefore f(x)=2x(x-3)$ ➔ 30% 배점

답구하기 • $\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(2x+1)}{x}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(2x+1)(2x+1-3)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4(2x+1)(x-1)}{x}$$

$=10$ ➔ 30% 배점

답 10

Remark

$f(a-x)=f(a+x)$ (a는 상수)

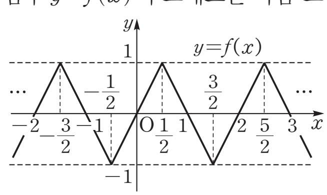
$\Longleftrightarrow$ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.

19 전략 모든 실수 x에 대하여 $f(x+a)=f(x)$가 성립하는 함수 $f(x)$는 주기가 a인 함수임을 이용하여 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후 $g(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\begin{cases} 2\left(x-\frac{1}{2}\right)+1 & \left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}\right) \\ -2\left(x-\frac{1}{2}\right)+1 & \left(\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}\right)\end{cases}$ 에서

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}\right) \\ -2x+2 & \left(\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}\right)\end{cases}$$

또 $f(x+2)=f(x)$에서 $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\{1+f(x)\}^n-1}{\{1+f(x)\}^n+1}$에서

(i) $x=k$ (k는 정수)일 때,

$f(x)=0$이므로 $\quad 1+f(x)=1$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\{1+f(x)\}^n=1$이므로

$$g(x)=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(ii) $2k-1<x<2k$ (k는 정수)일 때,

$-1\le f(x)<0$이므로 $\quad 0\le 1+f(x)<1$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\{1+f(x)\}^n=0$이므로

$$g(x)=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

(iii) $2k<x<2k+1$ (k는 정수)일 때,

$0<f(x)\le 1$이므로 $\quad 1<1+f(x)\le 2$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\{1+f(x)\}^n=\infty$이므로

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{\{1+f(x)\}^n}}{1+\dfrac{1}{\{1+f(x)\}^n}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

이상에서 정수 k에 대하여

$$g(x)=\begin{cases}-1 & (2k-1<x<2k)\\ 0 & (x=k)\\ 1 & (2k<x<2k+1)\end{cases}$$

이때 $14<10\sqrt{2}=\sqrt{200}<15,\ 1<\sqrt{3}<2$이므로

$g(10\sqrt{2})=1,\ g(\sqrt{3})=-1$

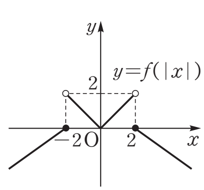
$\therefore\ g(10\sqrt{2})-g(\sqrt{3})=1-(-1)=2$

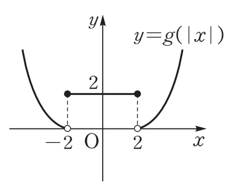
답 ⑤

20 전략 $\lim\limits_{x\to c+}f(x)=\lim\limits_{x\to c-}f(x)=\alpha$

$\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to c}f(x)=\alpha$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $y=f(|x|)$와 $y=g(|x|)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로





$\lim\limits_{x\to -2+}f(|x|)=2,\ \lim\limits_{x\to -2-}g(|x|)=0$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to -2+}f(|x|)+\lim\limits_{x\to -2-}g(|x|)=2$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 2+}g(x)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 2+}\{f(x)-g(x)\}$

$=\lim\limits_{x\to 2+}f(x)-\lim\limits_{x\to 2+}g(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to 2-}g(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to 2-}\{f(x)-g(x)\}$

$=\lim\limits_{x\to 2-}f(x)-\lim\limits_{x\to 2-}g(x)=0$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 2}\{f(x)-g(x)\}=0$

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 2+$일 때 $t\longrightarrow 0-$이고, $x\longrightarrow 2-$일 때 $t\longrightarrow 2-$이므로

$\lim\limits_{x\to 2+}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to 2+}g(f(x))$

$=\lim\limits_{t\to 0-}g(t)=2,$

$\lim\limits_{x\to 2-}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to 2-}g(f(x))$

$=\lim\limits_{t\to 2-}g(t)=2$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 2}(g\circ f)(x)=2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

21 전략 점 P를 지나고 직선 $y=x+1$에 수직인 직선의 방정식을 구하여 점 Q의 좌표를 찾고, 구하는 극한을 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 $\mathrm{P}(t,\ t+1)$을 지나고 직선 $y=x+1$에 수직인 직선의 방정식은

$y-(t+1)=-(x-t)$, 즉 $y=-x+2t+1$

이므로 이 직선이 y축과 만나는 점 Q의 좌표는

$(0,\ 2t+1)$

따라서

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(t+1)^2+(t+1)^2$

$=2t^2+4t+2,$

$\overline{\mathrm{AQ}}^2=1^2+(2t+1)^2=4t^2+4t+2$

이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t+2}{2t^2+4t+2}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4+\dfrac{4}{t}+\dfrac{2}{t^2}}{2+\dfrac{4}{t}+\dfrac{2}{t^2}}=2$$

답 ③

04 함수의 연속

유제 본책 100~111쪽

033-1 (1) (i) $x=1$에서 함숫값은 $f(1)=3$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}(x+2)=3$

(i), (ii)에서 $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(2) $1<x<2$일 때, $[x]=1$에서 $x-[x]=x-1$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x-[x])$

$\displaystyle=\lim_{x\to1+}(x-1)=0$

$0<x<1$일 때, $[x]=0$에서 $x-[x]=x-0=x$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x-[x])=\lim_{x\to1-}x=1$

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$에서 $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

답 (1) 연속 (2) 불연속

034-1 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이다.

$f(1)=a$이고

$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)=3$

이므로 $a=3$

답 3

034-2 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로 $\displaystyle\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$이다.

$\displaystyle\therefore\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+3ax+b}{x+1}=a-2$ ······ ㉠

㉠에서 $x\to-1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to-1}(2x^2+3ax+b)=0$이므로

$2-3a+b=0$

$\therefore b=3a-2$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+3ax+3a-2}{x+1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(2x-2+3a)}{x+1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-1}(2x-2+3a)$

$=-4+3a=a-2$

따라서 $2a=2$이므로 $a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면 $b=1$

답 $a=1$, $b=1$

035-1 (1) (i) $|x|<1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

(ii) $x=\pm1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$이므로

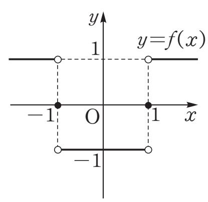
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(iii) $|x|>1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}$$

$$=\frac{1-0}{1+0}=1$$

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이고, 그 밖의 모든 실수 x의 값에서 연속이다.

(2) (i) $|x|<1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n-1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-x}{x^{n-1}+2}=\frac{0-x}{0+2}$$

$$=-\frac{1}{2}x$$

(ii) $x=1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n-1}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-x}{x^{n-1}+2}=\frac{1-1}{1+2}=0$$

(iii) $x=-1$일 때, $f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

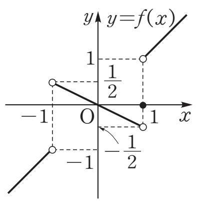
(iv) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|x^n|=\lim_{n\to\infty}|x^{n-1}|=\infty$

이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-x}{x^{n-1}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x-\frac{1}{x^{n-2}}}{1+\frac{2}{x^{n-1}}}$$

$$=\frac{x-0}{1+0}=x$$

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이고, 그 밖의 모든 실수 x의 값에서 연속이다.

답 풀이 참조

035-2 (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n-1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+2x-a}{x^{n-1}+1}=\frac{0+2x-a}{0+1}$$

$$=2x-a$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n-1}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+2x-a}{x^{n-1}+1}=\frac{1+2-a}{1+1}$$

$$=\frac{3-a}{2}$$

(iii) $x=-1$일 때, $f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

(iv) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|x^n|=\lim_{n\to\infty}|x^{n-1}|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+2x-a}{x^{n-1}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{2}{x^{n-2}}-\frac{a}{x^{n-1}}}{1+\frac{1}{x^{n-1}}}=x$$

이상에서

$$f(x)=\begin{cases}2x-a & (|x|<1)\\ \frac{3-a}{2} & (x=1)\\ x & (|x|>1)\end{cases}$$

이므로 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to1+}x=\lim_{x\to1-}(2x-a)=\frac{3-a}{2}$$

$$1=2-a=\frac{3-a}{2} \qquad \therefore a=1$$

답 1

036-1 (i) $x=0$일 때,

$$f(0)=0+0+0+\cdots=0$$

(ii) $x\neq0$일 때,

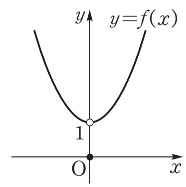
함수 $f(x)$는 첫째항이 x^2, 공비가 $\frac{1}{1+x^2}$인 등비급수이고 $0<\frac{1}{1+x^2}<1$이므로

$$f(x)=\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1+x^2$$

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases}1+x^2 & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

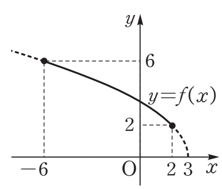


따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

답 0

037-1 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[-6, 2]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

구간 $[-6, 2]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=-6$일 때 최댓값 6을 갖고, $x=2$일 때 최솟값 2를 갖는다.



답 최댓값: 6, 최솟값: 2

038-1 (1) $f(x)=x^3+3x^2-2x-4$로 놓으면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[1, 2]$에서 연속이고

$$f(1)=-2<0,\ f(2)=12>0$$

이므로 사이값 정리에 의하여 $f(x)=0$인 x가 열린 구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^3+3x^2-2x-4=0$은 열린 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(2) $f(x)=x^5-4x+2$로 놓으면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 연속이고

$$f(0)=2>0,\ f(1)=-1<0$$

이므로 사이값 정리에 의하여 $f(x)=0$인 x가 열린 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^5-4x+2=0$은 열린 구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

038-2 $F(x)=f(x)-2x$로 놓으면 $f(x)$와 $2x$가 연속함수이므로 $F(x)$도 연속함수이다.
이때

$$F(0)=f(0)-0=-1-0=-1<0,$$
$$F(1)=f(1)-2=-3-2=-5<0,$$
$$F(2)=f(2)-4=5-4=1>0,$$
$$F(3)=f(3)-6=-4-6=-10<0,$$
$$F(4)=f(4)-8=-2-8=-10<0$$

이므로 사이값 정리에 의하여 $F(x)=0$은 구간 $(1, 2)$, $(2, 3)$에서 각각 적어도 하나씩의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)-2x=0$은 구간 $(0, 4)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다. 답 2

중단원 연습 문제

본책 112~114쪽

01 ④	**02** -1	**03** 4	**04** 1	**05** ②
06 ②	**07** 3	**08** 6		
09 $a<-2$ 또는 $a>5$			**10** 9	**11** 13
12 ⑤	**13** 37			

01 전략 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$이어야 한다.

풀이 ① $x=0$일 때 함수 $f(x)$가 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

② $0<x<1$일 때, $[x]=0$이므로

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}([x]-1)=-1$$

$-1<x<0$일 때, $[x]=-1$이므로

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}([x]-1)=-2$$

$$\therefore \lim_{x\to 0+} f(x)\neq \lim_{x\to 0-} f(x)$$

따라서 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$가 존재하지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

③ $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}(x+2)=2$,

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}(-x)=0$이므로

$$\lim_{x\to 0+} f(x)\neq \lim_{x\to 0-} f(x)$$

따라서 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$가 존재하지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

④ $f(0)=1$이고

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2+1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(x^2+1)=1$$

이므로

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

따라서 $x=0$에서 연속이다.

⑤ $f(0)=3$이고

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+3)}{x(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x-1}=-3$$

이므로

$$\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$$

따라서 $x=0$에서 불연속이다. 답 ④

02 전략 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$임을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+a}{x-2}=b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x\longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.
즉 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x+a)=0$이므로

$$4+2+a=0 \qquad \therefore a=-6$$

$a=-6$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x+3)=5$$

$$\therefore b=5$$
$$\therefore a+b=-1$$ 답 -1

03 전략 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이어야 하므로 $x=3$에서 연속이어야 한다.

풀이 $(x-3)f(x)=x^2+ax-3$에서 $x\neq 3$일 때

$$f(x)=\frac{x^2+ax-3}{x-3}$$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)$$

$$\therefore \lim_{x\to3}\frac{x^2+ax-3}{x-3}=f(3) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x \longrightarrow 3$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to3}(x^2+ax-3)=0$에서

$$9+3a-3=0 \qquad \therefore a=-2$$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} f(3)&=\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x-3} \\ &=\lim_{x\to3}\frac{(x+1)(x-3)}{x-3} \\ &=\lim_{x\to3}(x+1)=4 \end{aligned}$$

답 4

04 문제이해 • 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이어야 한다. ➔ 20% 배점

해결과정 • 이때

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to0}f(x) \\ &=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \\ &=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\ &=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\ &=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1 \end{aligned}$$

이므로 $f(0)=1$ ➔ 70% 배점

답구하기 • $\therefore a=1$ ➔ 10% 배점

답 1

05 전략 함수 $y=\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to0}\{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$이 성립함을 이용한다.

풀이 $f(x+1)=(x+1)^2-(x+1)+a$

$$=x^2+x+a,$$

$f(x-1)=(x-1)^2-(x-1)+a$

$$=x^2-3x+a+2$$

이므로

$$g(x)=\begin{cases} x^2+x+a & (x\le0) \\ x^2-3x+a+2 & (x>0) \end{cases}$$

이때 함수 $y=\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0-}\{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$이 성립한다.

$\{g(0)\}^2=a^2$이고

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0+}\{g(x)\}^2&=\lim_{x\to0+}(x^2-3x+a+2)^2 \\ &=(a+2)^2, \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to0-}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0-}(x^2+x+a)^2=a^2$$

이므로 $(a+2)^2=a^2$

$$4a+4=0 \qquad \therefore a=-1$$

답 ②

06 전략 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이어야 하므로 $x=1$에서 연속이어야 한다.

풀이 $x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로

$$\begin{aligned} f(x)&=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{n+1}+3x^n}{x^n+1} \\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{2x+3}{1+\frac{1}{x^n}} \\ &=2x+3 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} x+a & (x\le1) \\ 2x+3 & (x>1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$$

$$\lim_{x\to1+}(2x+3)=\lim_{x\to1-}(x+a)=1+a$$

$$5=1+a \qquad \therefore a=4$$

답 ②

07 해결과정 • $0<x<2$이면 $0<x^2<4$이므로

(i) $0<x^2<1$, 즉 $0<x<1$일 때,

$$f(x)=[x^2]=0$$

(ii) $1\le x^2<2$, 즉 $1\le x<\sqrt{2}$일 때,

$$f(x)=[x^2]=1$$

(iii) $2\le x^2<3$, 즉 $\sqrt{2}\le x<\sqrt{3}$일 때,

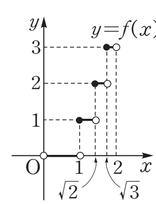
$$f(x)=[x^2]=2$$

(iv) $3\le x^2<4$, 즉 $\sqrt{3}\le x<2$일 때,

$$f(x)=[x^2]=3$$

➔ 70% 배점

답구하기 • 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $x=1$, $x=\sqrt{2}$, $x=\sqrt{3}$에서 불연속이므로 구간 $(0,\ 2)$에서 불연속이 되는 x의 값의 개수는 3이다.



➔ 30% 배점

답 3

08 전략 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 함수 $g(x)$가 $x=f(a)$에서 연속이면 합성함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

풀이 함수 $f(x)$는 $x\neq1$인 모든 실수 x의 값에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x\neq1$인 모든 실수 x의 값에서 합성함수 $(g\circ f)(x)$는 연속이다.

따라서 함수 $(g\circ f)(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$f(x)=t$로 놓으면

$x\longrightarrow1+$일 때 $t\longrightarrow2+$이므로

$$\lim_{x\to1+}g(f(x))=\lim_{t\to2+}g(t)=8+4a+2b$$

$x\longrightarrow1-$일 때 $t\longrightarrow0+$이므로

$$\lim_{x\to1-}g(f(x))=\lim_{t\to0+}g(t)=0$$

$\displaystyle\lim_{x\to1+}g(f(x))=\lim_{x\to1-}g(f(x))$이어야 하므로

$8+4a+2b=0$

$\therefore 2a+b=-4$ ...... ㉠

이때 $f(1)=1$이므로

$g(f(1))=g(1)=1+a+b$

$\displaystyle\lim_{x\to1}g(f(x))=g(f(1))$이어야 하므로

$1+a+b=0 \quad \therefore a+b=-1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=2$

따라서 $g(x)=x^3-3x^2+2x$이므로

$g(3)=27-27+6=6$

답 6

09 전략 $f(x)$가 연속함수이므로 사이값 정리를 이용한다.

풀이 $f(x)$가 연속함수이고 $f(1)>0$, $f(4)>0$이므로 $f(3)<0$이면 사이값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 $(1,3)$, $(3,4)$에서 각각 적어도 하나씩의 실근을 갖는다.

따라서 $-a^2+3a+10<0$에서

$a^2-3a-10>0$

$(a+2)(a-5)>0$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>5$

답 $a<-2$ 또는 $a>5$

10 해결과정 • 조건 (나)에서 $f(x)=f(x+3)$이므로

$f(0)=f(3)$

$f(0)=a$, $f(3)=4b+6$이므로

$a=4b+6$

$\therefore a-4b=6$ ...... ㉠ ➔ 30% 배점

또 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=1$에서 연속이다. 즉

$\displaystyle\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$이므로

$$\lim_{x\to1+}\{b(x-1)^2+6\}=\lim_{x\to1-}(4x+a)=4+a$$

$6=4+a \quad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$2-4b=6 \quad \therefore b=-1$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}4x+2 & (0\le x\le1)\\ -(x-1)^2+6 & (1<x\le3)\end{cases}$$

➔ 40% 배점

답구하기 • 조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned}f(-4)&=f(-4+3)=f(-1)\\&=f(-1+3)=f(2)\\&=-(2-1)^2+6=5\end{aligned}$$

이고, $f\left(\frac{1}{2}\right)=4\cdot\frac{1}{2}+2=4$이므로

$f(-4)+f\left(\frac{1}{2}\right)=9$ ➔ 30% 배점

답 9

11 전략 a의 값의 범위를 $a>0$, $a=0$, $a<0$일 때로 나누어 본다.

풀이 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to a}f(x)f(x-a)=f(a)f(0)$$

이어야 한다.

(i) $a>0$일 때,

$f(a)f(0)=f(a)=-\frac{1}{2}a+7$이고,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a+}f(x)f(x-a)&=\left(-\frac{1}{2}a+7\right)\cdot7\\&=-\frac{7}{2}a+49\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a-}f(x)f(x-a)&=\left(-\frac{1}{2}a+7\right)\cdot1\\&=-\frac{1}{2}a+7\end{aligned}$$

이므로

$-\frac{1}{2}a+7=-\frac{7}{2}a+49 \quad \therefore a=14$

(ii) $a=0$일 때,

$f(x)f(x-a)=\{f(x)\}^2$이므로

$$\lim_{x\to0+}\{f(x)\}^2=7^2=49,\ \lim_{x\to0-}\{f(x)\}^2=1$$

따라서 $\lim_{x\to 0+}\{f(x)\}^2 \neq \lim_{x\to 0-}\{f(x)\}^2$이므로

$\lim_{x\to 0}\{f(x)\}^2$의 값이 존재하지 않는다. 즉 함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=a$에서 연속이 아니다.

(iii) $a<0$일 때,

$f(a)f(0)=f(a)=a+1$이고,

$$\lim_{x\to a+} f(x)f(x-a)=(a+1)\cdot 7=7a+7,$$

$$\lim_{x\to a-} f(x)f(x-a)=(a+1)\cdot 1=a+1$$

이므로

$$a+1=7a+7 \qquad \therefore a=-1$$

이상에서 모든 실수 a의 값의 합은

$14+(-1)=13$ 답 13

12 전략 x의 값의 범위를 $|x|<1$, $x=\pm1$, $|x|>1$로 나누어 함수 $f(x)$를 각각 구하고, 그래프를 그려 본다.

풀이 (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = \lim_{n\to\infty} x^{2n+2}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}+5x^2-1}{x^{2n}+4}=\frac{5}{4}x^2-\frac{1}{4}$$

(ii) $x=\pm1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = \lim_{n\to\infty} x^{2n+2}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}+5x^2-1}{x^{2n}+4}=1$$

(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = \lim_{n\to\infty} x^{2n+2}=\infty$이므로

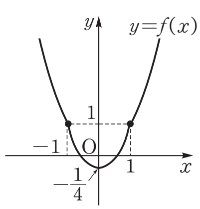
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}+5x^2-1}{x^{2n}+4}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+\frac{5}{x^{2n-2}}-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{4}{x^{2n}}}=x^2$$

이상에서

$$f(x)=\begin{cases} \frac{5}{4}x^2-\frac{1}{4} & (|x|<1) \\ 1 & (x=\pm1) \\ x^2 & (|x|>1) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $f(-x)=f(x)$를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때, 최솟값 $-\frac{1}{4}$을 갖는다.

ㄷ. $\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고 ㄱ에서 $f(-x)=f(x)$를 만족시키므로 $x=-1$에서도 연속이다. 따라서 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

13 문제이해 • 함수 $g(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이고, 함수 $f(x)$는 $x\neq-2$, $x\neq3$인 닫힌 구간 $[-4, 4]$에서 연속이므로 함수 $h(x)$가 닫힌 구간 $[-4, 4]$에서 연속이려면 $x=-2$, $x=3$에서 연속이어야 한다. ➔ 20% 배점

해결과정 • 함수 $h(x)$가 $x=-2$에서 연속이려면

$\lim_{x\to -2} f(x)g(x)=f(-2)g(-2)$이어야 한다.

$f(-2)=4$, $g(-2)=4-2a+b$에서

$f(-2)g(-2)=4(4-2a+b)$이고,

$$\lim_{x\to -2+} f(x)g(x)=4(4-2a+b),$$

$$\lim_{x\to -2-} f(x)g(x)=3(4-2a+b)$$

이므로 $4(4-2a+b)=3(4-2a+b)$

$4-2a+b=0$

$\therefore 2a-b=4$ …… ㉠ ➔ 30% 배점

또 함수 $h(x)$가 $x=3$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 3} f(x)g(x)=f(3)g(3)$이어야 한다.

$f(3)=3$, $g(3)=9+3a+b$에서

$f(3)g(3)=3(9+3a+b)$이고,

$$\lim_{x\to 3+} f(x)g(x)=3(9+3a+b),$$

$$\lim_{x\to 3-} f(x)g(x)=4(9+3a+b)$$

이므로 $3(9+3a+b)=4(9+3a+b)$

$9+3a+b=0$

$\therefore 3a+b=-9$ …… ㉡ ➔ 30% 배점

답구하기 • ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-6$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+(-6)^2=37$ ➔ 20% 배점

답 37

05 미분계수와 도함수

유제
본책 120~139쪽

039-1 함수 $f(x)=x^3-x$에서 x의 값이 a에서 $a+\varDelta x$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{f(a+\varDelta x)-f(a)}{a+\varDelta x-a}$$
$$=\frac{\{(a+\varDelta x)^3-(a+\varDelta x)\}-(a^3-a)}{\varDelta x}$$
$$=\frac{3a^2\varDelta x+3a(\varDelta x)^2+(\varDelta x)^3-\varDelta x}{\varDelta x}$$
$$=3a^2+3a\varDelta x+(\varDelta x)^2-1$$

답 $3a^2+3a\varDelta x+(\varDelta x)^2-1$

039-2 함수 $f(x)=x^2-x+1$에서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{7-1}{2}=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 함수 $f(x)$의 $x=a$ $(1<a<3)$에서의 미분계수는

$$f'(a)$$
$$=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{f(a+\varDelta x)-f(a)}{\varDelta x}$$
$$=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\{(a+\varDelta x)^2-(a+\varDelta x)+1\}-(a^2-a+1)}{\varDelta x}$$
$$=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{(\varDelta x)^2+2a\varDelta x-\varDelta x}{\varDelta x}$$
$$=\lim_{\varDelta x\to 0}(\varDelta x+2a-1)=2a-1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $3=2a-1$이므로

$a=2$

답 2

040-1 (1) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\cdot 3$$
$$=f'(a)\cdot 3=2\cdot 3=6$$

(2) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\cdot 2$$
$$=f'(a)\cdot 2=2\cdot 2=4$$

(3) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h^3)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h^3)-f(a)}{-h^3}\cdot(-h^2)$$
$$=f'(a)\cdot 0=0$$

(4) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a+h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)+f(a)-f(a+h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\cdot(-1)$$
$$-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=-f'(a)-\frac{1}{2}f'(a)=-\frac{3}{2}f'(a)=-\frac{3}{2}\cdot 2=-3$$

답 (1) 6 (2) 4 (3) 0 (4) -3

041-1 (1) $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\cdot(x^2+x+1)$$
$$=f'(1)\cdot 3=1\cdot 3=3$$

(2) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2f(1)-f(x^2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2f(1)-f(1)+f(1)-f(x^2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)f(1)}{x-1}-\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x+1)f(1)-\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)$$
$$=2f(1)-f'(1)\cdot 2=2\cdot 3-1\cdot 2=4$$

답 (1) 3 (2) 4

다른 풀이 (2) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2f(1)-f(x^2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2f(1)-x^2f(x^2)+x^2f(x^2)-f(x^2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}\cdot(-x^2)$$
$$+\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}\cdot f(x^2)$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)\cdot(-x^2)$$
$$+\lim_{x\to 1}(x+1)\cdot f(x^2)$$
$$=f'(1)\cdot 2\cdot(-1)+2f(1)$$
$$=1\cdot 2\cdot(-1)+2\cdot 3=4$$

042-1 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy-2$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+0-2 \qquad \therefore f(0)=2$$

따라서

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-2}{h}=-1$$

이므로

$$\begin{aligned}f'(3)&=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(3)+f(h)+3h-2-f(3)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)-2}{h}+3\right\}\\&=-1+3=2\end{aligned}$$

답 2

042-2 $f(x+y)=2f(x)f(y)$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면 $f(0)=2f(0)f(0)$

$f(0)>0$이므로 $f(0)=\frac{1}{2}$

따라서

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-\frac{1}{2}}{h}=4$$

이므로

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{2f(x)f(h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{2f(x)\left\{f(h)-\frac{1}{2}\right\}}{h}\\&=2f(x)\lim_{h\to0}\frac{f(h)-\frac{1}{2}}{h}\\&=2f(x)\cdot4=8f(x)\end{aligned}$$

$f(x)>0$이므로

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{8f(x)}{f(x)}=8$$

답 8

043-1 (1) $f(x)=x|x-1|$에서

(i) $f(1)=0$, $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}x|x-1|=0$이므로

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(1+h)|h|}{h}$

그런데

$$\lim_{h\to0+}\frac{(1+h)|h|}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{(1+h)h}{h}=\lim_{h\to0+}(1+h)=1,$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{(1+h)|h|}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{(1+h)\cdot(-h)}{h}=\lim_{h\to0-}\{-(1+h)\}=-1$$

이므로 $\lim_{h\to0}\frac{(1+h)|h|}{h}$는 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

(2) $f(x)=\begin{cases}2x^2-x & (x\ge1)\\ 3x-2 & (x<1)\end{cases}$에서

(i) $f(1)=1$이고

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(2x^2-x)=1$,

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(3x-2)=1$에서

$\lim_{x\to1}f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $$\begin{aligned}&\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{\{2(1+h)^2-(1+h)\}-(2\cdot1^2-1)}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{3h+2h^2}{h}=\lim_{h\to0+}(3+2h)=3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0-}\frac{\{3(1+h)-2\}-(2\cdot1^2-1)}{h}\\&=\lim_{h\to0-}\frac{3h}{h}=3\end{aligned}$$

따라서 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=3$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고 미분가능하다.

답 풀이 참조

044-1 (1) $y'=(x^2+3)'(x^2-1)+(x^2+3)(x^2-1)'$

$=2x(x^2-1)+(x^2+3)\cdot 2x$

$=2x(x^2-1+x^2+3)$

$=4x^3+4x$

(2) $y'=(x^2-1)'(2x+1)(3x^2-1)$

$+(x^2-1)(2x+1)'(3x^2-1)$

$+(x^2-1)(2x+1)(3x^2-1)'$

$=2x(2x+1)(3x^2-1)+(x^2-1)\cdot 2\cdot(3x^2-1)$

$+(x^2-1)(2x+1)\cdot 6x$

$=(12x^4+6x^3-4x^2-2x)+(6x^4-8x^2+2)$

$+(12x^4+6x^3-12x^2-6x)$

$=30x^4+12x^3-24x^2-8x+2$

(3) $y'=3(x^2-x+1)^2(x^2-x+1)'$

$=3(x^2-x+1)^2(2x-1)$

(4) $y'=\{(x+1)^3\}'(x^2+1)^2+(x+1)^3\{(x^2+1)^2\}'$

$=3(x+1)^2\cdot 1\cdot(x^2+1)^2$

$+(x+1)^3\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x$

$=(x+1)^2(x^2+1)\{3(x^2+1)+4x(x+1)\}$

$=(x+1)^2(x^2+1)(7x^2+4x+3)$

답 풀이 참조

다른 풀이 (1) $y=(x^2+3)(x^2-1)=x^4+2x^2-3$

이므로 $y'=4x^3+4x$

045-1 $\lim_{x\to 3}\frac{3f(x)-xf(3)}{x-3}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{3f(x)-3f(3)+3f(3)-xf(3)}{x-3}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{3\{f(x)-f(3)\}-(x-3)f(3)}{x-3}$

$=3\cdot\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}-\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)f(3)}{x-3}$

$=3f'(3)-f(3)$

$f(x)=(x-1)^3$에서 $f'(x)=3(x-1)^2$이므로

$f(3)=8,\ \ f'(3)=12$

따라서 구하는 값은

$3\cdot 12-8=28$

답 28

045-2 $f(x)=x^n+x^2+x$로 놓으면 $f(1)=3$이므로

$(\text{주어진 식})=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$f'(x)=nx^{n-1}+2x+1$이고 $f'(1)=10$이므로

$n+3=10 \qquad \therefore n=7$

답 7

Remark

$f(x)=x^n+x^2+x-3$으로 놓으면 $f(1)=0$이므로 주어진 식은 마찬가지로 $f'(1)$을 나타낸다.

046-1 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하면 $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 2}(4x+b)=f(2)$

$\therefore 8+b=4a$ ...... ㉠

또 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수가 존재하므로

$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+}\frac{ax^2-4a}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+}\frac{a(x+2)(x-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+}a(x+2)=4a,$

$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2-}\frac{4x+b-4a}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2-}\frac{4x+b-(8+b)}{x-2}$ ($\because$ ㉠)

$=\lim_{x\to 2-}\frac{4x-8}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2-}\frac{4(x-2)}{x-2}=4$

에서 $4a=4 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-4$

답 $a=1,\ b=-4$

다른 풀이 $f_1(x)=ax^2\ (x\ge 2)$,

$f_2(x)=4x+b\ (x<2)$로 놓으면

$f_1'(x)=2ax\ (x>2),\ f_2'(x)=4\ (x<2)$

$f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$f_1(2)=f_2(2) \qquad \therefore 4a=8+b$ ...... ㉠

또 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수가 존재하므로

$f_1'(2)=f_2'(2)$

$4a=4 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$4=8+b \qquad \therefore b=-4$

046-2 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1}(x^3-2x^2+bx)=f(1)$

$1-2+b=a-4+3 \qquad \therefore a=b$ ...... ㉠

또 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{ax^2-4x+3-(a-4+3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{a(x^2-1)-4(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)\{a(x+1)-4\}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\{a(x+1)-4\}=2a-4,$$
$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{x^3-2x^2+bx-(a-4+3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{x^3-2x^2+bx+1-a}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{x^3-2x^2+ax+1-a}{x-1}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x^2-x-1+a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(x^2-x-1+a)=-1+a$$

에서 $2a-4=-1+a$ $\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $b=3$

답 $a=3,\ b=3$

다른 풀이 $f_1(x)=ax^2-4x+3\ (x\ge1)$,

$f_2(x)=x^3-2x^2+bx\ (x<1)$로 놓으면

$f_1'(x)=2ax-4\ (x>1)$

$f_2'(x)=3x^2-4x+b\ (x<1)$

$f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$f_1(1)=f_2(1)$

$a-4+3=1-2+b$

$\therefore a=b$ …… ㉠

또 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$f_1'(1)=f_2'(1)$

$2a-4=3-4+b$

$\therefore 2a-b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=3$

047-1 $f'(x)f(x)$

$=f'(x)+f(x)+2x^3-4x^2+2x-1$

에서

$f'(x)f(x)-f'(x)-f(x)$

$=2x^3-4x^2+2x-1$ …… ㉠

$f(x)$의 차수를 n (n은 자연수)이라 하면 $f'(x)$의 차수는 $n-1$이므로 ㉠의 좌변의 차수는

$(n-1)+n=2n-1$

이고, ㉠의 우변의 차수는 3이다. 즉

$2n-1=3$ $\therefore n=2$

따라서 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

이므로 $f(x)$, $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$(2ax+b)(ax^2+bx+c)$

$=(2ax+b)+(ax^2+bx+c)+2x^3-4x^2+2x-1$

$\therefore 2a^2x^3+3abx^2+(2ac+b^2)x+bc$

$=2x^3+(a-4)x^2+(2a+b+2)x+b+c-1$

이 등식이 임의의 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a^2=2,\ 3ab=a-4,$

$2ac+b^2=2a+b+2,\ bc=b+c-1$

위의 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-1,\ c=1$

$\therefore f(x)=x^2-x+1$ 답 $f(x)=x^2-x+1$

048-1 다항식 $f(x)=x^4-4x+a$를 $(x-b)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $g(x)$라 하면

$x^4-4x+a=(x-b)^2g(x)$ …… ㉠

양변에 $x=b$를 대입하면

$b^4-4b+a=0$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$4x^3-4=2(x-b)g(x)+(x-b)^2g'(x)$

양변에 $x=b$를 대입하면

$4b^3-4=0,$ $4(b-1)(b^2+b+1)=0$

그런데 b는 실수이므로 $b=1$

$b=1$을 ㉡에 대입하면

$1-4+a=0$ $\therefore a=3$ 답 $a=3,\ b=1$

048-2 다항식 x^9-1을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $g(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^9-1=(x-1)^2g(x)+ax+b$ …… ㉠

양변을 x에 대하여 미분하면

$9x^8=2(x-1)g(x)+(x-1)^2g'(x)+a$ …… ㉡

$x=1$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$0=a+b,\ 9=a$ $\therefore a=9,\ b=-9$

따라서 구하는 나머지는

$9x-9$ 답 $9x-9$

중단원 연습 문제

본책 140~143쪽

01 3	**02** $\frac{1}{2}$	**03** ②	**04** -44	
05 240	**06** ③	**07** 10	**08** ①	**09** ⑤
10 6	**11** $2\sqrt{10}$	**12** 5	**13** 8	**14** 3
15 ㄴ, ㄷ	**16** ②	**17** 33	**18** -17	**19** ③
20 19				

01 전략 평균변화율과 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=-2x^2+1$에서 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{-31-(-7)}{2}=-12$$

또 $f(x)$의 $x=c$ $(2<c<4)$에서의 미분계수는

$$f'(c)=\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{-2(c+h)^2+1\}-(-2c^2+1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-4ch-2h^2}{h}=\lim_{h\to0}(-4c-2h)$$
$$=-4c$$

따라서 $-4c=-12$이므로 $c=3$ 답 3

02 전략 $f'(a)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a)-f(a+h)}{2h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}f'(a)=-\frac{1}{2}\cdot(-1)=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

03 전략 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$을 만족시키지만 $f'(0)$의 값이 존재하지 않는 함수 $f(x)$를 찾는다.

풀이 ① $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x^3=0$이므로

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$$

또 $f(x)=x^3$에서 $f'(x)=3x^2$이므로

$$f'(0)=0$$

따라서 $f(x)=x^3$은 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

② $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x^2}=0$이므로

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$$

또 $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$에서

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h}{h}=1,$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h}{h}=-1$$

이므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\neq\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

따라서 $f(x)=\sqrt{x^2}$은 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

③ $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}|x|^2=0$이므로

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$$

또 $f(x)=|x|^2=x^2$이므로 $f'(x)=2x$

$$\therefore f'(0)=0$$

따라서 $f(x)=|x|^2$은 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

④ $f(x)=\frac{|x|}{x}$에서 $f(0)$의 값이 존재하지 않으므로

$f(x)=\frac{|x|}{x}$는 $x=0$에서 불연속이다.

⑤ $\lim\limits_{h\to0+}[x]=0$, $\lim\limits_{h\to0-}[x]=-1$이므로

$$\lim_{h\to0+}[x]\neq\lim_{h\to0-}[x]$$

따라서 $f(x)=[x]$는 $x=0$에서 불연속이다.

이상에서 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ②이다. 답 ②

04 전략 $y=f(x)g(x)$의 도함수는 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=(1-2x)(x^2-x)^2$에서

$$f'(x)=(1-2x)'(x^2-x)^2+(1-2x)\{(x^2-x)^2\}'$$
$$=-2(x^2-x)^2+(1-2x)\cdot2(x^2-x)(2x-1)$$
$$=-2(x^2-x)\{x^2-x+(2x-1)^2\}$$
$$=-2(x^2-x)(5x^2-5x+1)$$
$$\therefore f'(2)=-2(2^2-2)\cdot(5\cdot2^2-5\cdot2+1)$$
$$=-44$$

답 -44

05 **해결과정 •** $\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(2)\}^2}{x-2}$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)+f(2)\}\{f(x)-f(2)\}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\{f(x)+f(2)\}\cdot\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=\{f(2)+f(2)\}f'(2)$$
$$=2f(2)f'(2)$$

➜ 50% 배점

이때 $f(x)=x^4-3x^2+2$에서 $f'(x)=4x^3-6x$이므로

$f(2)=2^4-3\cdot2^2+2=6$,

$f'(2)=4\cdot2^3-6\cdot2=20$

➜ 30% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 값은

$2\cdot6\cdot20=240$

➜ 20% 배점

답 240

다른 풀이 $g(x)=\{f(x)\}^2$이라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(2)\}^2}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$$

이때 $g'(x)=2f(x)f'(x)$이므로

(구하는 값)$=g'(2)$

$=2f(2)f'(2)$

$=2\cdot6\cdot20=240$

06 **전략** $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이고,

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

이 성립하도록 상수 a, b의 값을 정한다.

풀이 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1-}(x^3+ax)=f(1)$$

$\therefore 1+a=b+2$ ...... ㉠

또 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{b(1+h)^2+(1+h)+1-(b+2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{bh^2+(2b+1)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}(bh+2b+1)$$
$$=2b+1,$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{(1+h)^3+a(1+h)-(b+2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{(1+h)^3+a(1+h)-(1+a)}{h}\quad(\because ㉠)$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{h^3+3h^2+(a+3)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}(h^2+3h+a+3)$$
$$=a+3$$

에서 $2b+1=a+3$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=3$

$\therefore a+b=7$

답 ③

다른 풀이 $f_1(x)=x^3+ax\ (x<1)$,

$f_2(x)=bx^2+x+1\ (x\geq1)$로 놓으면

$f_1'(x)=3x^2+a\ (x<1)$,

$f_2'(x)=2bx+1\ (x>1)$

$f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$f_1(1)=f_2(1)$, $1+a=b+2$

$\therefore a-b=1$ ...... ㉠

또 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$f_1'(1)=f_2'(1)$, $3+a=2b+1$

$\therefore a-2b=-2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=3$

07 **전략** $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$,

$\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=g'(1)$임을 이용한다.

풀이 $g(1)=-2$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-3h)-g(1+h)-2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-3h)-g(1+h)+g(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h}\cdot3-\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$$
$$=f'(1)+3f'(1)-g'(1)=4f'(1)-g'(1)$$
$$=4\cdot2-(-2)=10$$

답 10

08 전략 극한의 성질을 이용하여 주어진 식을 $f'(●)=\lim_{▲\to●}\frac{f(▲)-f(●)}{▲-●}$ 꼴로 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=3$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$에서 $f(1)=2$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}f'(1)=3$$

따라서 $f'(1)=6$이므로 $\frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{6}{2}=3$

답 ①

09 전략 미분계수의 정의와 주어진 등식을 이용하여 $f'(0)$을 극한으로 나타낸 후 $f'(1)$의 값을 구한다.

풀이 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0 \qquad \therefore f(0)=0$

따라서

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=1$$

이므로

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)+h-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+1\right\}=1+1=2$$

답 ⑤

10 전략 $f(x)$를 미분하여 주어진 조건을 이용한다.

풀이 $f(1)=-2$이므로

$a+b+c=-2$ ······ ㉠

$f(x)=ax^2+bx+c$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2ax+b$

$f'(1)=1$, $f'(2)=5$이므로

$2a+b=1$ ······ ㉡

$4a+b=5$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-3,\ c=-1$

$\therefore abc=6$

답 6

11 해결과정 • $f(x)=x^3-4x+2$에서

$f'(x)=3x^2-4$ ➔ 20% 배점

미분계수가 -1이면

$3x^2-4=-1, \qquad 3x^2=3$

$x^2=1 \qquad \therefore x=\pm1$ ➔ 30% 배점

이때 $f(1)=-1$, $f(-1)=5$이므로 미분계수가 -1인 두 점의 좌표는 $(1,\ -1)$, $(-1,\ 5)$이다. ➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 이 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(-1-1)^2+\{5-(-1)\}^2}$

$=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ ➔ 20% 배점

답 $2\sqrt{10}$

Remark 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

12 해결과정 • $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-2}{x-3}=1$에서 $x\longrightarrow3$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}\{f(x)-2\}=0$에서

$f(3)=2$ ➔ 20% 배점

$$\therefore \lim_{x\to3}\frac{f(x)-2}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$
$=f'(3)=1$ ➔ 20% 배점

같은 방법으로 $\lim_{x\to3}\frac{g(x)-1}{x-3}=2$에서

$g(3)=1$ ➔ 20% 배점

$$\therefore \lim_{x\to3}\frac{g(x)-1}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$$
$=g'(3)=2$ ➔ 20% 배점

답구하기 • 이때 $y=f(x)g(x)$를 x에 대하여 미분하면

$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

이므로 함수 $y=f(x)g(x)$의 $x=3$에서의 미분계수는

$f'(3)g(3)+f(3)g'(3)=1\cdot1+2\cdot2$

$=5$ ➔ 20% 배점

답 5

13 해결과정 • $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot 2=2f'(1)$$

즉 $2f'(1)=-2$이므로 $f'(1)=-1$ ➔ 40% 배점

$g(x)=(3x+1)^2 f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=2(3x+1)\cdot 3f(x)+(3x+1)^2 f'(x)$$

➔ 30% 배점

답구하기 • $\therefore g'(1)=2\cdot 4\cdot 3f(1)+4^2 f'(1)$

$$=24\cdot 1+16\cdot(-1)$$

$$=8$$ ➔ 30% 배점

답 8

14 전략 $\frac{1}{n}=t$로 놓고 식을 변형한 후, 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 $\frac{1}{n}=t$로 놓으면 $n\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}5n\left\{f\left(\frac{n+2}{n}\right)-f\left(\frac{n+1}{n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}5n\left\{f\left(1+\frac{2}{n}\right)-f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{5}{t}\{f(1+2t)-f(1+t)\}$$

$$=5\lim_{t\to 0}\frac{f(1+2t)-f(1+t)}{t}$$

$$=5\lim_{t\to 0}\frac{f(1+2t)-f(1)+f(1)-f(1+t)}{t}$$

$$=5\left\{\lim_{t\to 0}\frac{f(1+2t)-f(1)}{2t}\cdot 2-\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}\right\}$$

$$=5\{f'(1)\cdot 2-f'(1)\}=5f'(1)$$

이때 $f(x)=\frac{1}{5}x^3$에서 $f'(x)=\frac{3}{5}x^2$이므로

$$f'(1)=\frac{3}{5}$$

따라서 구하는 값은 $5\cdot\frac{3}{5}=3$

답 3

15 전략 함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

풀이 ㄱ. $f(2)=3-2=1$이므로

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{3-x-1}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1,$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2-}\frac{(x-1)^2-1}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{x^2-2x}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2-}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}x=2$$

따라서 $\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\neq\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $f(0)=1$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-0\cdot f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}f(x)\quad\cdots ㉠$$

이때

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(x-1)^2=1,$$

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=1$$

이므로 $\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=1$

따라서 ㉠에 의하여 함수 $xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)f(x)-(2-2)f(2)}{x-2}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}f(x)\quad\cdots ㉡$$

이때

$$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}(3-x)=1,$$

$$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(x-1)^2=1$$

이므로 $\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2-}f(x)=1$

따라서 ㉡에 의하여 함수 $(x-2)f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

16 전략 $f'(x)$를 구하여 $f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입한 후, 항등식의 성질을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2+ax+b$에서 $f'(x)=2x+a$

이므로 $f(x)$, $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$$(x+1)(2x+a)-2(x^2+ax+b)-4=0$$

$$(2-a)x+a-2b-4=0$$

이 등식이 임의의 실수 x에 대하여 성립하므로

$2-a=0,\ a-2b-4=0$

위의 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-1$

$\therefore ab=2\cdot(-1)=-2$

답 ②

다른 풀이 $f(x)=x^2+ax+b$에서

$f'(x)=2x+a$

이때 주어진 등식은 x에 대한 항등식이므로 $x=0$을 등식에 대입하면

$1\cdot f'(0)-2f(0)-4=0$

$f'(0)-2f(0)-4=0$

$f(0)=b,\ f'(0)=a$이므로

$a-2b-4=0$ …… ㉠

또 $x=-1$을 주어진 등식에 대입하면

$0\cdot f'(-1)-2f(-1)-4=0$

$-2f(-1)-4=0$

$f(-1)=1-a+b$이므로

$-2(1-a+b)-4=0$

$a-b-3=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-1$

$\therefore ab=2\cdot(-1)=-2$

17 문제이해 • x^6을 $x(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c\ (a,\ b,\ c$는 상수)로 놓으면

$x^6=x(x-1)^2Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

→ 20% 배점

해결과정 • $x=0$을 ㉠의 양변에 대입하면

$0=c$ …… ㉡

$x=1$을 ㉠의 양변에 대입하면

$1=a+b+c$ …… ㉢

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x^5=(x-1)^2Q(x)+2x(x-1)Q(x)$
$\quad +x(x-1)^2Q'(x)+2ax+b$

$x=1$을 위의 식의 양변에 대입하면

$6=2a+b$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=5,\ b=-4,\ c=0$ → 60% 배점

답구하기 • 따라서 $R(x)=5x^2-4x$이므로

$R(3)=5\cdot 3^2-4\cdot 3=33$ → 20% 배점

답 33

Remark

x^6을 삼차식으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 하면 $R(x)$는 이차 이하의 다항식이므로
$R(x)=ax^2+bx+c\ (a,\ b,\ c$는 상수)로 놓는다.

18 문제이해 • 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ b)$를 지나므로 $f(1)=b$ …… ㉠

또 점 $(1,\ b)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=\tan\theta=7$ → 20% 배점

해결과정 • $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)+3}{h}=a$에서 $h\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\{f(1-2h)+3\}=0$에서 $f(1)+3=0$이므로

$f(1)=-3$ …… ㉡

$\therefore b=-3\ (\because ㉠)$ → 30% 배점

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)+3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}\ (\because ㉡)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\cdot(-2)$$

$=-2f'(1)=-2\cdot 7=-14=a$ → 40% 배점

답구하기 • $\therefore a+b=-17$ → 10% 배점

답 -17

19 전략 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 평균변화율의 우극한과 좌극한이 같으면 $f'(a)$가 존재함을 이용한다.

풀이 ㄱ. (i) $0<h<1$일 때,

$g(-1+h)-g(-1)$

$=f(-1+h)-f(-1)$

이고, $-1<h<0$일 때,

$g(-1+h)-g(-1)$

$=g(1+h)-g(1)=f(1+h)-f(1)$

이므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'(-1),$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$$

이때 $f'(-1)=f'(1)$이므로 $g(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하다.

(ii) $g(1+h)-g(1)=g(-1+h)-g(-1)$
$=f(-1+h)-f(-1)$

이고, $-1<h<0$일 때,

$g(1+h)-g(1)=f(1+h)-f(1)$

이므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'(-1),$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$$

이때 $f'(-1)=f'(1)$이므로 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 $g(x)$는 모든 실수에서 미분가능하다.

ㄴ. $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)라 하면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

ㄱ에서 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $f(-1)=f(1)$, $f'(-1)=f'(1)$이므로

$f(1)=f(-1)$에서

$1+a+b+c+d=1-a+b-c+d$

$a+c=0 \qquad \therefore c=-a$

$f'(1)=f'(-1)$에서

$4+3a+2b+c=-4+3a-2b+c$

$8+4b=0 \qquad \therefore b=-2$

따라서 $f'(x)=4x^3+3ax^2-4x-a$이므로

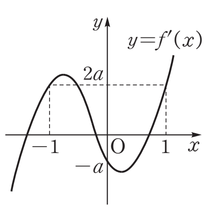
$f'(0)=-a$, $f'(1)=4+3a-4-a=2a$

$\therefore f'(0)f'(1)=-2a^2\le0$

ㄷ. ㄴ에서 $f'(-1)=f'(1)=2a$이고, $f'(1)>0$이므로

$a>0$

$f'(0)=-a<0$이므로 $y=f'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구간 $(-\infty, -1)$에서 $f'(c)=0$인 c가 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

20 전략 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 분수식이 0이 아닌 극한값을 가지면 분모와 분자의 차수가 같음을 이용하여 $f(x)$의 차수를 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 분수식이 0이 아닌 극한값을 가지므로 분모와 분자의 차수가 같다.

$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots$ ($a\ne0$, $a\ne1$)이라 하면

$$\frac{\{f(x)\}^2-f(x^2)}{x^3f(x)}=\frac{(a^2x^{2n}+\cdots)-(ax^{2n}+\cdots)}{ax^{n+3}+\cdots}$$
$$=\frac{(a^2-a)x^{2n}+\cdots}{ax^{n+3}+\cdots}$$

에서 $\quad 2n=n+3 \qquad \therefore n=3$

또 분모와 분자의 최고차항의 계수의 비가 극한값과 같으므로

$\frac{a^2-a}{a}=4, \qquad a^2-5a=0$

$a(a-5)=0 \qquad \therefore a=5\ (\because a\ne0)$

즉 $f(x)$는 최고차항의 계수가 5인 삼차함수이므로

$f(x)=5x^3+bx^2+cx+d$라 하면

$f'(x)=15x^2+2bx+c$

조건 (나)에서 $x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(15x^2+2bx+c)=0$이므로 $\qquad c=0$

$f'(x)=15x^2+2bx$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{15x^2+2bx}{x}=\lim_{x\to0}(15x+2b)$$
$$=2b=4$$

$\therefore b=2$

따라서 $f'(x)=15x^2+4x$이므로

$f'(1)=15+4=19$

답 19

06 도함수의 활용 (1)

유제
본책 147~160쪽

049-1 $f(x)=x^3+ax+b$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$f(1)=1$

$1+a+b=1 \qquad \therefore a+b=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

또 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(1)=-1$

$3+a=-1 \qquad \therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=4$

답 $a=-4,\ b=4$

049-2 $f(x)=ax^2+bx+c$로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(1,\ 2)$, $(2,\ 0)$을 지나므로

$f(1)=2,\ f(2)=0$

$\therefore a+b+c=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$4a+2b+c=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$

또 점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(2)=1$

$\therefore 4a+b=1 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-11,\ c=10$

답 $a=3,\ b=-11,\ c=10$

050-1 $f(x)=x^3-x^2+2x-2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2x+2$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는 $f(x)=0$에서

$x^3-x^2+2x-2=0$

$x^2(x-1)+2(x-1)=0$

$(x-1)(x^2+2)=0$

$\therefore x=1\ (\because x^2+2>0)$

따라서 접점의 좌표는 $(1,\ 0)$이고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-2+2=3$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-0=3(x-1) \qquad \therefore y=3x-3$

답 $y=3x-3$

050-2 $f(x)=x^3-2x^2+3x-4$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-4x+3$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ -2)$에서의 접선의 기울기는 $\quad f'(1)=3-4+3=2$

이므로 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-(-2)=-\frac{1}{2}(x-1)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

답 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

051-1 $f(x)=-x^2+1$로 놓으면 $\quad f'(x)=-2x$

접점의 좌표를 $(a,\ -a^2+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 $\tan 45°=1$이므로

$f'(a)=-2a=1 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-\frac{3}{4}=x+\frac{1}{2}$

$\therefore y=x+\frac{5}{4}$

답 $y=x+\frac{5}{4}$

다른 풀이 기울기가 $\tan 45°=1$인 직선의 방정식을

$y=x+b$

라 하면 이 직선이 곡선 $y=-x^2+1$에 접하므로

$-x^2+1=x+b$에서 $\quad x^2+x+b-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4(b-1)=0 \qquad \therefore b=\frac{5}{4}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=x+\frac{5}{4}$

051-2 $f(x)=x^3-2x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-2a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(a)=3a^2-2=1, \qquad 3a^2=3$

$a^2=1 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 두 접점의 좌표는 $(-1,\ 1)$, $(1,\ -1)$이므로 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(1+1)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

052-1 $f(x)=x^3+2x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3+2a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=3a^2+2$

이므로 접선의 방정식은

$y-(a^3+2a)=(3a^2+2)(x-a)$

$\therefore y=(3a^2+2)x-2a^3$ ...... ㉠

직선 ㉠이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=-2a^3,\quad a^3=-1$

$\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=5x+2$

답 $y=5x+2$

052-2 $f(x)=3x^2-5x+6$으로 놓으면

$f'(x)=6x-5$

접점의 좌표를 $(a,\ 3a^2-5a+6)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=6a-5$

이므로 접선의 방정식은

$y-(3a^2-5a+6)=(6a-5)(x-a)$

$\therefore y=(6a-5)x-3a^2+6$

이 직선이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$2=(6a-5)\cdot(-1)-3a^2+6$

$a^2+2a-3=0,\quad (a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=1$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$f'(-3)\cdot f'(1)=-23\cdot 1=-23$

답 -23

다른 풀이 점 $(-1,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식을

$y-2=m(x+1)$, 즉

$y=mx+m+2$

라 하면 이 직선이 곡선 $y=3x^2-5x+6$에 접하므로

$3x^2-5x+6=mx+m+2$에서

$3x^2-(5+m)x+4-m=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(5+m)^2-4\cdot 3\cdot(4-m)=0$

$m^2+22m-23=0$

그런데 위의 식은 접선의 기울기 m에 대한 이차방정식이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 직선의 기울기의 곱은 -23이다.

053-1 $f(x)=ax^2+b,\ g(x)=x^3+bx$로 놓으면

$f'(x)=2ax,\ g'(x)=3x^2+b$

두 곡선이 $x=1$인 점에서 접하므로 $f(1)=g(1)$에서

$a+b=1+b \qquad \therefore a=1$

또 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(1)=g'(1)$에서

$2a=3+b$ ...... ㉠

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$2=3+b \qquad \therefore b=-1$

$\therefore a+b=0$

답 0

053-2 $f(x)=-x^3+kx,\ g(x)=x^2-1$에서

$f'(x)=-3x^2+k,\ g'(x)=2x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 접하므로 $f(t)=g(t)$에서 $\quad -t^3+kt=t^2-1$ ...... ㉠

또 $x=t$인 점에서의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(t)=g'(t)$에서

$-3t^2+k=2t \qquad \therefore k=3t^2+2t$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$-t^3+(3t^2+2t)t=t^2-1$

$2t^3+t^2+1=0,\quad (t+1)(2t^2-t+1)=0$

$\therefore t=-1\ (\because 2t^2-t+1>0)$

$t=-1$을 ㉡에 대입하면

$k=1$

답 1

다른 풀이 두 곡선 $f(x)=-x^3+kx,\ g(x)=x^2-1$이 $x=t$인 점에서 접하므로 방정식 $f(x)=g(x)$는 $x=t$를 중근으로 갖는다.

따라서 방정식 $-x^3+kx=x^2-1$, 즉

$x^3+x^2-kx-1=0$의 중근이 $x=t$이므로

$x^3+x^2-kx-1=(x-t)^2\left(x-\dfrac{1}{t^2}\right)$ ... ㉠

로 놓을 수 있다.

이때 ㉠의 우변은

$(x-t)^2\left(x-\dfrac{1}{t^2}\right)$

$=(x^2-2tx+t^2)\left(x-\dfrac{1}{t^2}\right)$

$=x^3-\left(\dfrac{1}{t^2}+2t\right)x^2+\left(t^2+\dfrac{2}{t}\right)x-1$

이므로 ㉠의 좌변과 계수를 비교하면

$-\left(\dfrac{1}{t^2}+2t\right)=1,\quad t^2+\dfrac{2}{t}=-k$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad t=-1,\ k=1$

054-1 함수 $f(x)=x^3-7x^2+7x+13$은 닫힌 구간 $[-1,\ 5]$에서 연속이고 열린 구간 $(-1,\ 5)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(5)=-2$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 실수 c가 구간 $(-1,\ 5)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=x^3-7x^2+7x+13$에서

$$f'(x)=3x^2-14x+7$$

$f'(c)=3c^2-14c+7=0$이므로

$$c=\frac{7\pm2\sqrt{7}}{3}$$

답 $\frac{7\pm2\sqrt{7}}{3}$

055-1 함수 $f(x)=-x^3+2x$는 닫힌 구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이고 열린 구간 $(-2,\ 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=f'(c)$$

인 실수 c가 구간 $(-2,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=-x^3+2x$에서 $f'(x)=-3x^2+2$이므로

$$\frac{-4-4}{2-(-2)}=-3c^2+2$$

$$-2=-3c^2+2,\qquad 3c^2=4$$

$$c^2=\frac{4}{3}\qquad \therefore\ c=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

056-1 $f(x)=x^2+ax+b$에서 $\quad f'(x)=2x+a$

$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)$에서

$$(x+h)^2+a(x+h)+b$$
$$=x^2+ax+b+h\{2(x+\theta h)+a\}$$
$$x^2+2hx+h^2+ax+ah+b$$
$$=x^2+ax+b+2hx+2\theta h^2+ah$$
$$h^2=2\theta h^2\qquad \therefore\ \theta=\frac{1}{2}\ (\because h\neq0)$$

답 $\frac{1}{2}$

중단원 연습 문제

본책 161~163쪽

01 ②	**02** 22	**03** -4	**04** 0	**05** 21
06 -3	**07** $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$		**08** ②	**09** -4
10 $\frac{1}{15}$	**11** $\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\right)$		**12** ②	**13** $\frac{1}{3}$
14 ⑤	**15** ④			

01 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$이므로 $f'(x)$의 최댓값을 구한다.

풀이 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2+1$로 놓으면

$$f'(x)=-x^2-2x=-(x+1)^2+1$$

따라서 $x=-1$일 때 접선의 기울기 $f'(x)$의 최댓값은 1이다.

답 ②

02 문제이해 • 직선 $7x+y+10=0$의 기울기가 -7이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 -7이다.

➔ 20% 배점

해결과정 • $f(x)=-x^3+3x^2+2x$로 놓으면

$$f'(x)=-3x^2+6x+2$$

이때 곡선 $y=f(x)$와 기울기가 -7인 접선의 접점의 좌표를 $(a,\ -a^3+3a^2+2a)$라 하면 $f'(a)=-7$이므로

$$-3a^2+6a+2=-7,\qquad a^2-2a-3=0$$
$$(a+1)(a-3)=0\qquad \therefore\ a=-1\ 또는\ a=3$$

➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 두 접점의 좌표는 $(-1,\ 2)$, $(3,\ 6)$이므로 두 접선의 방정식은

$$y-2=-7(x+1),\ y-6=-7(x-3)$$

즉 $y=-7x-5$, $y=-7x+27$이므로 구하는 y절편의 합은 $\quad -5+27=22$

➔ 40% 배점

답 22

03 전략 점 $(0,\ 2)$는 곡선 위의 점이 아니므로 접점의 좌표를 $(a,\ a^3)$으로 놓고, 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=x^3$으로 놓으면 $\quad f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(a)=3a^2$$

이므로 접선의 방정식은 $\quad y-a^3=3a^2(x-a)$

$$\therefore\ y=3a^2x-2a^3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$$2=-2a^3,\qquad a^3=-1\qquad \therefore\ a=-1$$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=3x+2$

이 직선이 점 $(-2,\ k)$를 지나므로

$$k=-6+2=-4$$

답 -4

04 전략 구간 $[-1,\ 1]$에서 $f'(c)=0$을 만족시키는 실수 $c\ (-1<c<1)$의 값을 찾는다.

풀이 함수 $f(x)=x^4-2x^2+1$은 닫힌 구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린 구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(1)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 실수 c가 구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=x^4-2x^2+1$에서 $\quad f'(x)=4x^3-4x$

$f'(c)=4c^3-4c=4c(c+1)(c-1)=0$이므로

$\quad c=0\ (\because -1<c<1)$ 답 0

05 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이다.

풀이 $f(x)=x^3+2x+7$로 놓으면

$\quad f'(x)=3x^2+2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(-1, 4)$에서의 접선의 기울기는

$\quad f'(-1)=3\cdot(-1)^2+2=5$

이므로 접선의 방정식은

$\quad y-4=5(x+1) \qquad \therefore y=5x+9$

곡선 $y=x^3+2x+7$과 직선 $y=5x+9$의 교점의 x좌표는

$\quad x^3+2x+7=5x+9, \qquad x^3-3x-2=0$

$\quad (x+1)^2(x-2)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$x=2$를 $y=5x+9$에 대입하면

$\quad y=5\cdot2+9=19$

따라서 구하는 점의 좌표가 $(2, 19)$이므로

$\quad a=2, b=19 \qquad \therefore a+b=21$ 답 21

06 전략 곡선 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 위의 점 $(2, -2)$에서의 접선의 방정식을 먼저 구한다.

풀이 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$으로 놓으면 $\quad f'(x)=-x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, -2)$에서의 접선의 기울기는

$\quad f'(2)=-2$

이므로 접선의 방정식은 $\quad y+2=-2(x-2)$

$\quad \therefore y=-2x+2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 $g(x)=x^2-k$로 놓으면 $\quad g'(x)=2x$

직선 ㉠이 곡선 $y=g(x)$에 접하므로 접점의 좌표를 (t, t^2-k)라 하면 이 점이 직선 ㉠ 위에 있으므로

$\quad t^2-k=-2t+2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

$g'(t)$는 직선 ㉠의 기울기와 같으므로

$\quad g'(t)=2t=-2 \qquad \therefore t=-1$

$t=-1$을 ㉡에 대입하면

$\quad 1-k=2+2 \qquad \therefore k=-3$ 답 -3

07 문제이해 • $f(x)=\frac{1}{2}x^2$으로 놓으면

$\quad f'(x)=x$ ➔ 10% 배점

해결과정 • 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 2)$에서의 접선의 기울기는

$\quad f'(2)=2$

이므로 접선의 방정식은

$\quad y-2=2(x-2) \qquad \therefore y=2x-2$

이 접선과 x축의 교점의 좌표는 $(1, 0)$이므로

$\quad a_1=1$ ➔ 30% 배점

또 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(a_n, \frac{1}{2}{a_n}^2\right)$에서의 접선의 기울기는

$\quad f'(a_n)=a_n$

이므로 접선의 방정식은

$\quad y-\frac{1}{2}{a_n}^2=a_n(x-a_n) \qquad \therefore y=a_nx-\frac{1}{2}{a_n}^2$

이 접선과 x축의 교점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}a_n, 0\right)$이므로

$\quad a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$ ➔ 50% 배점

답구하기 • 따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$\quad a_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ➔ 10% 배점

답 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

08 전략 $\triangle\mathrm{OAP}$의 넓이가 최대인 점 P에서의 접선의 기울기는 1이다.

풀이 직선 $y=x$와 평행한 직선, 즉 기울기가 1인 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프에 접할 때의 접점이 P가 되면 $\triangle\mathrm{OAP}$의 넓이는 최대가 된다.

$f(x)=ax(x-2)^2$에서

$\quad f'(x)=a(x-2)^2+2ax(x-2)$

$\quad\quad =3ax^2-8ax+4a$

따라서 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=1$이므로

$\quad \frac{3}{4}a-4a+4a=1 \qquad \therefore a=\frac{4}{3}$ 답 ②

09 문제이해 • $f(x)=x^3-3x^2+2ax+8$, $g(x)=-x^2+ax$에서

$$f'(x)=3x^2-6x+2a,\quad g'(x)=-2x+a$$

➔ 10% 배점

해결과정 • 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 접한다고 하면

$f(t)=g(t)$에서

$$t^3-3t^2+2at+8=-t^2+at$$

$$\therefore t^3-2t^2+at+8=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

➔ 30% 배점

$f'(t)=g'(t)$에서

$$3t^2-6t+2a=-2t+a$$

$$\therefore a=4t-3t^2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

➔ 30% 배점

㉡을 ㉠에 대입하면

$$t^3-2t^2+(4t-3t^2)t+8=0$$

$$t^3-t^2-4=0,\quad (t-2)(t^2+t+2)=0$$

$$\therefore t=2\ (\because t^2+t+2>0)$$

➔ 20% 배점

답구하기 • $t=2$를 ㉡에 대입하면

$$a=8-12=-4$$

➔ 10% 배점

답 -4

10 전략 두 직선이 서로 수직이면 두 직선의 기울기의 곱은 -1임을 이용한다.

풀이 $f(x)=-x^2+3$, $g(x)=ax^2-1$로 놓으면

$$f'(x)=-2x,\ g'(x)=2ax$$

두 곡선의 교점의 x좌표를 t라 하면 $f(t)=g(t)$이므로

$$-t^2+3=at^2-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 $x=t$인 점에서 두 곡선의 접선이 서로 수직이므로

$f'(t)g'(t)=-1$에서

$$-2t\cdot 2at=-1$$

$$\therefore at^2=\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad -t^2+3=\frac{1}{4}-1$

$$\therefore t^2=\frac{15}{4}$$

$t^2=\frac{15}{4}$를 ㉡에 대입하면 $\quad a\cdot\frac{15}{4}=\frac{1}{4}$

$$\therefore a=\frac{1}{15}$$

답 $\frac{1}{15}$

다른 풀이 두 곡선의 교점의 x좌표는

$-x^2+3=ax^2-1$에서

$$(a+1)x^2=4,\quad x^2=\frac{4}{a+1}$$

$$\therefore x=\pm\frac{2}{\sqrt{a+1}}$$

이때 한 교점의 x좌표는 $\frac{2}{\sqrt{a+1}}$이므로 이 점에서 두 곡선에 그은 접선의 기울기의 곱은

$$f'\left(\frac{2}{\sqrt{a+1}}\right)g'\left(\frac{2}{\sqrt{a+1}}\right)$$

$$=\left(-2\cdot\frac{2}{\sqrt{a+1}}\right)\left(2a\cdot\frac{2}{\sqrt{a+1}}\right)=-1$$

$$\frac{16a}{a+1}=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{15}$$

Remark

한 교점의 x좌표가 $-\frac{2}{\sqrt{a+1}}$일 때에도 같은 방법으로 구하면 $a=\frac{1}{15}$이다.

11 문제이해 • $f(x)=x^2+1$로 놓으면

$$f'(x)=2x$$

➔ 10% 배점

해결과정 • 접점의 좌표를 $(a,\ a^2+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(a)=2a$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-(a^2+1)=2a(x-a)$$

$$\therefore y=2ax-a^2+1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

➔ 30% 배점

직선 $y=x$ 위의 점 P의 좌표를 $(t,\ t)$라 하면 직선 ㉠이 점 P를 지나므로

$$t=2at-a^2+1$$

$$\therefore a^2-2at+t-1=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

이차방정식 ㉡의 두 근을 α, β라 하면 α, β는 접점의 x좌표이므로 접선의 기울기는 각각 $\quad 2\alpha,\ 2\beta$

그런데 두 접선이 직교하므로

$$2\alpha\cdot 2\beta=-1 \qquad \therefore 4\alpha\beta=-1 \quad \cdots\cdots ㉢$$

이때 이차방정식 ㉡에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta=t-1$$

이므로 위의 식을 ㉢에 대입하면

$$4(t-1)=-1 \qquad \therefore t=\frac{3}{4}$$

➔ 50% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\right)$$

➔ 10% 배점

답 $\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\right)$

12 (전략) 주어진 함수가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능한지 확인한다.

(풀이) ㄱ. 함수 $f(x)=x$는 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고 열린 구간 $(-1,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리를 만족시키는 실수 c가 존재한다.

ㄴ. $$\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h}{h}=-1$$

$$\therefore \lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\neq\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

즉 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

따라서 평균값 정리가 성립하지 않는다.

ㄷ. 함수 $f(x)=-x^3+3x+1$은 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고 열린 구간 $(-1,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리를 만족시키는 실수 c가 존재한다.

ㄹ. $$\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to 0+}h=0$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h}{h}=-1$$

$$\therefore \lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\neq\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

즉 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

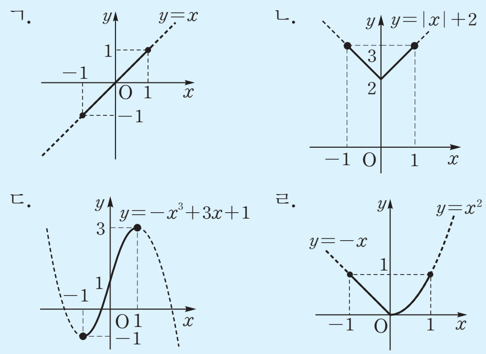
따라서 평균값 정리가 성립하지 않는다.

이상에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 c가 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

(답) ②

Remark

다음과 같이 각 함수의 그래프를 그려서 미분가능성을 알아볼 수 있다.



13 (전략) 주어진 식을 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 변형한다.

(풀이) 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(3,\ 5)$에서의 접선의 기울기가 4이므로

$f'(3)=4$

$\frac{1}{6n}=h$로 놓으면 $n\longrightarrow\infty$일 때 $h\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left\{f\left(3+\frac{1}{6n}\right)-f(3)\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{12h}\{f(3+h)-f(3)\}$$
$$=\frac{1}{12}\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$
$$=\frac{1}{12}f'(3)=\frac{1}{12}\cdot 4=\frac{1}{3}$$

(답) $\frac{1}{3}$

14 (전략) 곡선 $y=x^4$ 위의 점 $(1,\ 1)$을 지나고, 이 점에서의 접선에 수직인 직선이 원의 중심을 지남을 이용한다.

(풀이) $f(x)=x^4$으로 놓으면 $f'(x)=4x^3$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=4$

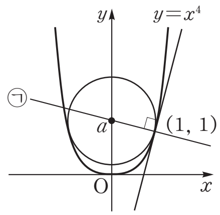
이므로 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이다.

점 $(1,\ 1)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{4}$인 직선의 방정식은

$$y-1=-\frac{1}{4}(x-1)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

중심이 y축 위에 있는 원의 방정식을 $x^2+(y-a)^2=r^2$이라 하면 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 원의 중심 $(0,\ a)$를 지나므로



$$a=-\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$$

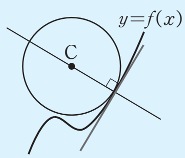
따라서 반지름의 길이 r는 두 점 $(1,\ 1)$, $\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$ 사이의 거리이므로

$$r=\sqrt{(0-1)^2+\left(\frac{5}{4}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{4}$$

답 ⑤

Remark 곡선에 접하는 원

곡선 $y=f(x)$와 원이 접할 때
① (원의 반지름의 길이)
=(원의 중심과 접점 사이의 거리)
② 원의 중심과 접점을 지나는 직선은 접선과 수직이다.



15 (전략) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식을 구하여 접선이 y축과 만나는 점의 좌표를 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $1+a+b=2$

$\therefore\ a+b=1$ …… ㉠

$f(x)=x^3+ax^2+bx$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

따라서 점 $(t,\ f(t))$, 즉 $(t,\ t^3+at^2+bt)$에서의 접선의 방정식은

$$y-(t^3+at^2+bt)=(3t^2+2at+b)(x-t)$$

이므로 $x=0$을 위의 식에 대입하면

$$y=-3t^3-2at^2-bt+t^3+at^2+bt$$
$$=-2t^3-at^2$$

$\therefore\ \mathrm{P}(0,\ -2t^3-at^2)$

$\therefore\ g(t)=|-2t^3-at^2|=t^2|2t+a|$

조건 (나)에서 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $-\frac{a}{2}=0$이어야 하므로 $a=0$

$a=0$을 ㉠에 대입하면 $b=1$

따라서 $f(x)=x^3+x$이므로

$f(3)=3^3+3=30$

답 ④

07 도함수의 활용 (2)

유제

본책 169~188쪽

057-1 $f(x)=2x^3+6x^2-18x-5$에서

$f'(x)=6x^2+12x-18=6(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	49	↘	-15	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -3)$, $(1,\ \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-3,\ 1)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

058-1 (1) $f(x)=-x^3+x^2+ax$에서

$f'(x)=-3x^2+2x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1+3a\le 0 \qquad \therefore\ a\le -\frac{1}{3}$$

(2) $f(x)=2x^3+3(a-2)x^2-12ax+1$에서

$f'(x)=6x^2+6(a-2)x-12a$

함수 $f(x)$가 구간 $(-1,\ 2)$에서 증가하려면 $-1<x<2$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이때 $f'(2)=24+12(a-2)-12a=0$이고, 이차함수 $f'(x)$의 축의 방정식이 $x=-\frac{a-2}{2}$이므로 $2\le -\frac{a-2}{2}$이어야 한다.

$\therefore\ a\le -2$

답 (1) $a\le -\frac{1}{3}$ (2) $a\le -2$

059-1 $f(x)=2x^3+ax^2+bx-4$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 16을 가지므로

$f(-2)=16$, $f'(-2)=0$

$\therefore\ -16+4a-2b-4=16,\quad 24-4a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-12$

즉 $f(x)=2x^3+3x^2-12x-4$이므로

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $f(1)=-11$을 가지므로 $\alpha=1,\ \beta=-11$

답 $a=3,\ b=-12,\ \alpha=1,\ \beta=-11$

059-2 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 18을 가지므로

$f(-2)=18,\ f'(-2)=0$

$-8a+4b-2c+d=18$ …… ㉠

$12a-4b+c=0$ …… ㉡

또 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f(0)=2,\ f'(0)=4$

$d=2,\ c=4$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

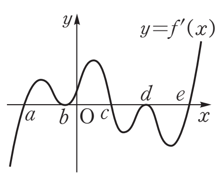
$a=5,\ b=16,\ c=4,\ d=2$

따라서 $f(x)=5x^3+16x^2+4x+2$이므로

$f(1)=5+16+4+2=27$

답 27

060-1 오른쪽 그림과 같이 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 왼쪽부터 차례대로 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$라 하면 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.



x	…	a	…	b	…	c	…	d	…	e	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘		↘	극소	↗

따라서 $y=f(x)$는 $x=a,\ x=e$에서 극소, $x=c$에서 극대이므로 $y=f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 점은 모두 3개이다.

답 3

060-2 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 2이므로 $f'(0)=0,\ f'(2)=0$

$\therefore b=0,\ -12+4a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=0$

따라서 $f(x)=-x^3+3x^2+c$이고, 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	…	0	…	2	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소, $x=2$에서 극대이고, $f(x)$의 극솟값이 5이므로

$f(0)=5$ $\therefore c=5$

따라서 $f(x)=-x^3+3x^2+5$이므로 $f(x)$의 극댓값은

$f(2)=-8+12+5=9$

답 9

061-1 (1) $f(x)=-x^3+3x^2-2$에서

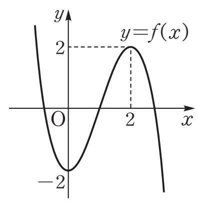
$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	…	0	…	2	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	2	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 -2, $x=2$에서 극댓값 2를 가지므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x)=-x^4+4x^3-3$에서

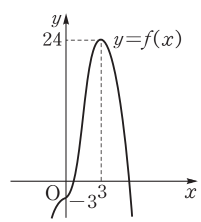
$f'(x)=-4x^3+12x^2=-4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	…	0	…	3	…
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-3	↗	24	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 24를 가지므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

062-1 $f(x)=x^3-ax^2+ax-1$에서

$f'(x)=3x^2-2ax+a$

07 도함수의 활용 (2)

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-3a\le 0,\qquad a(a-3)\le 0$$

$\therefore\ 0\le a\le 3$

답 $0\le a\le 3$

062-2 $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x^3+ax^2$에서

$$f'(x)=-x^3+6x^2+2ax=-x(x^2-6x-2a)$$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 그런데 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $x^2-6x-2a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

방정식 $x^2-6x-2a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=9+2a>0\qquad\therefore\ a>-\frac{9}{2}$$

이때 $x=0$이 방정식 $x^2-6x-2a=0$의 근이 아니어야 하므로 $\quad -2a\ne 0\qquad\therefore\ a\ne 0$

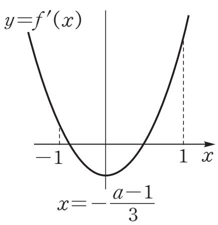
따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$$-\frac{9}{2}<a<0 \text{ 또는 } a>0$$

답 $-\frac{9}{2}<a<0$ 또는 $a>0$

063-1 $f(x)=x^3+(a-1)x^2-ax$에서

$$f'(x)=3x^2+2(a-1)x-a$$



삼차함수 $f(x)$가 $-1<x<1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 $-1<x<1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a-1)^2+3a=a^2+a+1$$
$$=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

따라서 모든 실수 a에 대하여 항상 성립한다.

(ii) $f'(-1)=3-2(a-1)-a>0$

$$-3a>-5\qquad\therefore\ a<\frac{5}{3}$$

(iii) $f'(1)=3+2(a-1)-a>0$

$\therefore\ a>-1$

(iv) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식이

$x=-\frac{a-1}{3}$이므로 $\qquad -1<-\frac{a-1}{3}<1$

$\therefore\ -2<a<4$

이상에서 구하는 실수 a의 값의 범위는

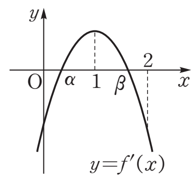
$$-1<a<\frac{5}{3}$$

답 $-1<a<\frac{5}{3}$

063-2 $f(x)=-x^3+ax^2-ax$에서

$$f'(x)=-3x^2+2ax-a$$

방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 $\alpha<1,\ 1<\beta<2$이어야 하므로



(i) $f'(1)=-3+2a-a>0$

에서 $\quad a>3$

(ii) $f'(2)=-12+4a-a<0$

에서

$3a<12\qquad\therefore\ a<4$

(i), (ii)에서 구하는 실수 a의 값의 범위는 $\quad 3<a<4$

답 $3<a<4$

064-1 (1) $f(x)=-2x^3+5x^2-4x+2$에서

$$f'(x)=-6x^2+10x-4$$
$$=-2(3x-2)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=1$

구간 $[0,\ 3]$에서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↘	$\frac{26}{27}$	↗	1	↘	-19

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 2, $x=3$일 때 최솟값 -19를 갖는다.

(2) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+10$에서

$$f'(x)=12x^3-12x^2-24x$$
$$=12x(x+1)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0\ (\because\ -1\le x\le 1)$

구간 $[-1,\ 1]$에서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	(0)	$+$	0	$-$	
$f(x)$	5	↗	10	↘	-3

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 10, $x=1$일 때 최솟값 -3을 갖는다. 답 풀이 참조

065-1 $f(x)=ax^4-4ax^3+b$에서

$$f'(x)=4ax^3-12ax^2=4ax^2(x-3)\ (a>0)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=3\ (\because 1\le x\le 4)$

구간 $[1,\ 4]$에서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$b-3a$	↘	$b-27a$	↗	b

이때 $a>0$이므로 $\quad b-27a<b-3a<b$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 b, $x=3$일 때 최솟값 $b-27a$를 갖는다.

즉 $b=6$, $b-27a=-3$이므로 $\quad a=\frac{1}{3},\ b=6$

$$\therefore ab=\frac{1}{3}\cdot 6=2$$

답 2

065-2 $f(x)=-x^3+12x+a$에서

$$f'(x)=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=2$

구간 $[-2,\ 3]$에서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	(0)	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$a-16$	↗	$a+16$	↘	$a+9$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $a+16$, $x=-2$일 때 최솟값 $a-16$을 갖는다.

이때 $a+16=20$에서 $a=4$이므로 구하는 최솟값은

$$a-16=4-16=-12$$

답 -12

066-1 점 P의 좌표를 $(t,\ t^2+2)$라 하면

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2\\&=t^2+(t^2+1)^2+(t-10)^2+(t^2+1)^2\\&=t^2+t^4+2t^2+1+t^2-20t+100+t^4+2t^2+1\\&=2t^4+6t^2-20t+102\end{aligned}$$

$f(t)=2t^4+6t^2-20t+102$로 놓으면

$$f'(t)=8t^3+12t-20=4(t-1)(2t^2+2t+5)$$

이때 $2t^2+2t+5=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}>0$이므로

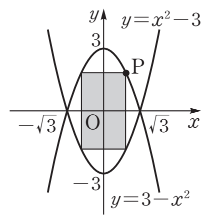
$f'(t)=0$에서 $\quad t=1$

따라서 $f(t)$의 증감표는 오른쪽과 같고, 함수 $f(t)$는 $t=1$일 때 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은 $f(1)=90$이다.

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	90	↗

답 90

067-1 오른쪽 그림과 같이 직사각형의 꼭짓점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하고 점 P의 x좌표를 a라 하면



$$\mathrm{P}(a,\ 3-a^2)(0<a<\sqrt{3})$$

직사각형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$$S(a)=4a(3-a^2)=-4a^3+12a$$

$$\therefore S'(a)=-12a^2+12=-12(a+1)(a-1)$$

$S'(a)=0$에서 $\quad a=1\ (\because 0<a<\sqrt{3})$

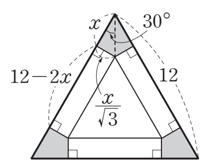
$0<a<\sqrt{3}$에서 $S(a)$의 증감표는 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$(\sqrt{3})$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	8	↘	

따라서 $S(a)$는 $a=1$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은 $S(1)=8$이다.

답 8

068-1 오른쪽 그림과 같이 정삼각형의 꼭짓점으로부터 거리가 x인 점까지 자른다고 하면 삼각기둥의 밑면은 한 변의 길이가 $12-2x$인 정삼각형이므로 x의 값의 범위는 $\quad 0<x<6$



이때 상자의 밑면의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(12-2x)^2=\sqrt{3}(x-6)^2$$

상자의 높이는 $\quad x\cdot\tan 30°=\frac{x}{\sqrt{3}}$

상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$$V(x)=\sqrt{3}(x-6)^2\cdot\frac{x}{\sqrt{3}}=x(x-6)^2$$

$$\begin{aligned}\therefore V'(x)&=(x-6)^2+2x(x-6)\\&=3(x-2)(x-6)\end{aligned}$$

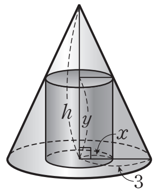
$V'(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because 0<x<6)$

$0<x<6$에서 $V(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(6)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	32	$\searrow$	

따라서 $V(x)$는 $x=2$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은 $V(2)=32$이다. 답 32

068-2 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이와 높이를 각각 x $(0<x<3)$, y라 하고 원뿔의 높이를 h라 하면



$h : 3=(h-y) : x$

$3(h-y)=hx, \qquad h-y=\dfrac{hx}{3}$

$\therefore y=h\left(1-\dfrac{x}{3}\right)$

원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\pi x^2y=\pi x^2h\left(1-\dfrac{x}{3}\right)=\pi h\left(x^2-\dfrac{x^3}{3}\right)$

$\therefore V'(x)=\pi h(2x-x^2)=-\pi hx(x-2)$

$V'(x)=0$에서 $\qquad x=2$ $(\because 0<x<3)$

$0<x<3$에서 $V(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $V(x)$는 $x=2$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 2이다.

답 2

중단원 연습 문제

본책 189~193쪽

01 27 **02** $k\le -\dfrac{4}{3}$ **03** 3 **04** ④
05 7 **06** 15 **07** ④ **08** $\dfrac{11}{4}$ **09** ③
10 ① **11** $\dfrac{1}{3}$ **12** ① **13** ② **14** 3
15 $-\dfrac{1}{4}<a<2$ 또는 $a>2$ **16** 16 **17** ④
18 풀이 참조 **19** $\dfrac{16}{27}$ **20** ③ **21** 21
22 ①

01 **문제이해 •** $f(x)=-x^3+ax^2+bx$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 증가하는 x의 값의 범위가 $-2<x<4$이므로 부등식 $f'(x)>0$, 즉 $-3x^2+2ax+b>0$의 해가 $-2<x<4$이다. ➔ 50% 배점

해결과정 • 따라서 이차방정식 $-3x^2+2ax+b=0$의 두 근이 -2, 4이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+4=\dfrac{2a}{3}, \quad -2\cdot 4=\dfrac{b}{-3}$

$\therefore a=3, \; b=24$ ➔ 40% 배점

답구하기 • $\therefore a+b=27$ ➔ 10% 배점

답 27

02 전략 함수 $f(x)$에서 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)>f(x_2)$이면 $f(x)$는 감소함수이다.

풀이 $f(x)=-x^3+2x^2+kx+3$에서

$f'(x)=-3x^2+4x+k$

$f(x)$는 감소함수이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=2^2+3k\le 0 \qquad \therefore k\le -\dfrac{4}{3}$ 답 $k\le -\dfrac{4}{3}$

03 **문제이해 •** $f(x)=x^3+ax^2+9x+b$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+9$ ➔ 10% 배점

해결과정 • 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 c를 가지므로 $\quad f(1)=c, \; f'(1)=0$

$1+a+9+b=c \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$3+2a+9=0 \qquad \therefore a=-6$

$\therefore f(x)=x^3-6x^2+9x+b$ ➔ 40% 배점

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$이므로

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=1$ 또는 $x=3$

따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 가지므로

$d=3$

이때의 극솟값이 1이므로

$f(3)=27-54+27+b=1 \qquad \therefore b=1$

$a=-6$, $b=1$을 ㉠에 대입하면

$1-6+9+1=c \qquad \therefore c=5$ ➔ 40% 배점

답구하기 • $\therefore a+b+c+d=-6+1+5+3=3$

➔ 10% 배점

답 3

04 전략 증감표를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $f(x)=-x^4+6x^2+8x-6$에서

$f'(x)=-4x^3+12x+8=-4(x+1)^2(x-2)$

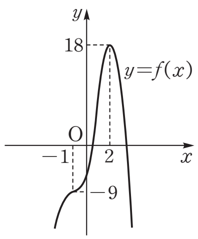
$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-9	↗	18	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 1개 갖는다.

ㄴ. $f(x)$는 구간 $(0,\ 1)$에서 증가한다.

ㄷ. $y=f(x)$의 치역은 $\{y|y\le 18\}$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

05 문제이해 • $f(x)=x^3+kx^2+3x+2$에서

$f'(x)=3x^2+2kx+3$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

➔ 50% 배점

해결과정 • 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-9\le 0,\qquad (k+3)(k-3)\le 0$

$\therefore -3\le k\le 3$ ➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 정수 k는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 7개이다. ➔ 10% 배점

답 7

06 전략 주어진 구간에서 $f(x)$의 극값과 구간의 양 끝 값에서의 함숫값을 비교하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $f(x)=-x^3+3x^2+9x-1$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1\ (\because -2\le x\le 2)$

구간 $[-2,\ 2]$에서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	-6	↗	21

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 21, $x=-1$일 때 최솟값 -6을 가지므로

$M=21,\ m=-6$

$\therefore M+m=15$ 답 15

07 전략 주어진 구간에서 $f(x)$의 극값과 구간의 양 끝 값에서의 함숫값을 비교하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $f(x)=ax^3-3ax^2+b$에서

$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)\ (a>0)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because 1\le x\le 3)$

$1\le x\le 3$에서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$b-2a$	↘	$b-4a$	↗	b

이때 $a>0$이므로 $\quad b-4a<b-2a<b$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 b, $x=2$일 때 최솟값 $b-4a$를 갖는다.

즉 $b=4,\ b-4a=-16$이므로

$a=5,\ b=4$

$\therefore a+b=9$ 답 ④

08 문제이해 • 점 P의 좌표를 $(t,\ t^2-1)$이라 하면

$\overline{AP}^2=(t-0)^2+(t^2-3)^2$

$=t^4-5t^2+9$ ➔ 30% 배점

해결과정 • $f(t)=t^4-5t^2+9$로 놓으면

$f'(t)=4t^3-10t=2t(2t^2-5)$

$f'(t)=0$에서

$t=0$ 또는 $t=-\frac{\sqrt{10}}{2}$ 또는 $t=\frac{\sqrt{10}}{2}$

함수 $f(t)$의 증감표는 다음과 같다.

t	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	$\frac{11}{4}$	↗	9	↘	$\frac{11}{4}$	↗

➔ 50% 배점

답구하기 • 따라서 $f(t)$는 $t=-\frac{\sqrt{10}}{2}$ 또는 $t=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 일 때 최솟값 $\frac{11}{4}$을 가지므로 $\overline{\text{AP}}^2$의 최솟값은 $\frac{11}{4}$이다.

➔ 20% 배점

답 $\frac{11}{4}$

09 전략 $f(x)$가 증가함수이면 $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)<f(x_2)$이고, $f(x_1)<f(x_2)$이면 $x_1<x_2$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3+3x-1$에서 $f'(x)=3x^2+3>0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

$\{f(x)\}^3+3f(x)-1=f(f(x))$이므로

$f(2x^2+5x+2)\le f(f(x))$에서

$$2x^2+5x+2\le f(x)$$

$$2x^2+5x+2\le x^3+3x-1$$

$$x^3-2x^2-2x-3\ge 0$$

$$\therefore\ (x-3)(x^2+x+1)\ge 0$$

이때 $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$$x\ge 3$$

따라서 구하는 x의 최솟값은 3이므로

$$f(\alpha)=f(3)=27+9-1=35$$

답 ③

10 전략 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일 대응이어야 한다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+3ax$에서

$$f'(x)=x^2-2ax+3a$$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$가 일대일 대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)$는 증가함수 또는 감소함수이어야 한다.

그런데 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 증가함수이어야 한다. 즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=a^2-3a\le 0$

$$a(a-3)\le 0 \qquad \therefore\ 0\le a\le 3$$

따라서 a의 최댓값은 3이다.

답 ①

11 전략 삼차함수는 항상 극댓값이 극솟값보다 크므로 (극댓값) $-$ (극솟값) $=\frac{1}{2}$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}ax^2-6a^2x$에서

$$f'(x)=3x^2-3ax-6a^2$$
$$=3(x^2-ax-2a^2)=3(x+a)(x-2a)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-a$ 또는 $x=2a$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{7}{2}a^3$	$\searrow$	$-10a^3$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-a$에서 극댓값 $\frac{7}{2}a^3$, $x=2a$에서 극솟값 $-10a^3$을 가지며 극댓값과 극솟값의 차가 $\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{7}{2}a^3-(-10a^3)=\frac{1}{2}, \qquad \frac{27}{2}a^3=\frac{1}{2}$$

$$a^3=\frac{1}{27} \qquad \therefore\ a=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

12 전략 $f(x)$에서 점 H의 좌표를 구하여 $\overline{\text{AH}}$, $\overline{\text{BH}}$의 길이 사이의 관계를 알아본다.

풀이 두 점 A, B의 좌표를 각각 A$(\alpha,\ 0)$, B$(\beta,\ 0)$으로 놓으면

$$f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)\ (k>0)$$

$$\therefore\ f'(x)=2k(x-\alpha)(x-\beta)+k(x-\alpha)^2$$
$$=k(x-\alpha)(3x-\alpha-2\beta)$$

$f'(p)=0$, $\alpha<p<\beta$이므로 $\quad p=\frac{\alpha+2\beta}{3}$

$$\therefore\ \text{H}\left(\frac{\alpha+2\beta}{3},\ 0\right)$$

따라서 점 H는 $\overline{\text{AB}}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$\overline{\text{AH}}:\overline{\text{BH}}=2:1$$

$$\therefore\ \overline{\text{AB}}=\frac{3}{2}\overline{\text{AH}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=1$$

답 ①

Remark

삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$을 인수로 갖는다.
따라서 $f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)(k\neq 0)$로 놓을 수 있다.

13 전략 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $f(x)$의 증감표를 만들어 극값과 증가, 감소를 알아본다.

풀이 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(x)=0$이 되는 x의 값이 -2, 1이므로 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗

위의 증감표에서 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -2)$에서 감소하고, 구간 $(-2,\ \infty)$에서 증가하며, $x=-2$에서 극소이다. 그러나 $x=1$의 좌우에서는 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 극값을 갖지 않는다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형으로 옳은 것은 ②이다.

답 ②

14 **전략** $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

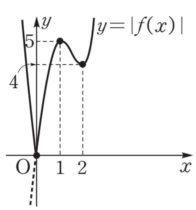
풀이 $f(x)=2x^3-9x^2+12x$로 놓으면

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=2$
$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	4	↗

함수 $f(x)$는
$x=1$에서 극댓값 5,
$x=2$에서 극솟값 4
를 갖는다.
함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 $y=|f(x)|$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|2x^3-9x^2+12x|$가 극대 또는 극소가 되는 점은 $x=0$, $x=1$, $x=2$일 때의 3개이다.

답 3

Remark

함수 $f(x)$에 대하여 $x=a$일 때, $f'(a)$의 값이 존재하지 않더라도 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖는다. 따라서 위의 그림에서 $y=|f(x)|$의 $x=0$에서의 미분계수는 존재하지 않지만 $y=|f(x)|$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

15 **문제이해 •** $f(x)=x^4-2(a+1)x^2-4ax$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=4x^3-4(a+1)x-4a\\&=4\{x^3-(a+1)x-a\}\\&=4(x+1)(x^2-x-a)\end{aligned}$$

➔ 30% 배점

해결과정 • 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 그런데 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=-1$이므로 이차방정식 $x^2-x-a=0$이 -1이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. ➔ 30% 배점

이차방정식 $x^2-x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=1+4a>0 \qquad \therefore a>-\frac{1}{4}$$

이때 $x=-1$이 방정식 $x^2-x-a=0$의 근이 아니어야 하므로 $\quad 1+1-a\ne0 \qquad \therefore a\ne2$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$$-\frac{1}{4}<a<2 \text{ 또는 } a>2$$

➔ 10% 배점

답 $-\frac{1}{4}<a<2$ 또는 $a>2$

16 **전략** 먼저 $f'(x)$를 이용하여 극솟값을 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$에서

$$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{5}{3}$	↘	-9	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 -9를 가지므로 $\quad a=3$, $b=-9$

이때 $f(2)=-\frac{22}{3}$, $f'(2)=-3$이므로 점 $(2,\ f(2))$, 즉 $\left(2,\ -\frac{22}{3}\right)$에서의 접선 l의 방정식은

$$y+\frac{22}{3}=-3(x-2) \qquad \therefore 9x+3y+4=0$$

따라서 점 $(3,\ -9)$에서 직선 l: $9x+3y+4=0$까지의 거리 d는

$$d=\frac{|9\cdot3+3\cdot(-9)+4|}{\sqrt{9^2+3^2}}=\frac{4}{\sqrt{90}}$$

$$\therefore 90d^2=90\cdot\frac{16}{90}=16$$

답 16

17 전략 $g(x)=t$로 놓고, $f(t)$의 최댓값을 구한다.

풀이 $g(x)=-x^2+3\le 3$이므로 $g(x)=t$로 놓으면

$t\le 3$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=2t^3-6t-4$에서

$f'(t)=6t^2-6=6(t+1)(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=-1$ 또는 $t=1$

$t\le 3$에서 $f(t)$의 증감표는 다음과 같다.

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-8	$\nearrow$	32

따라서 주어진 함수는 $t=3$일 때 최댓값 32를 갖는다.

답 ④

다른 풀이 $h(x)=(f\circ g)(x)$로 놓으면

$h(x)=2(-x^2+3)^3-6(-x^2+3)-4$이므로

$$\begin{aligned} h'(x)&=6(-x^2+3)^2\cdot(-2x)-6(-2x)\\ &=-12x\{(-x^2+3)^2-1\}\\ &=-12x(x^2-2)(x^2-4)\\ &=-12x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

$h'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$

또는 $x=\sqrt{2}$ 또는 $x=2$

함수 $h(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-8	$\nearrow$	32	$\searrow$	-8	$\nearrow$	0	$\searrow$

따라서 $h(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 32를 갖는다.

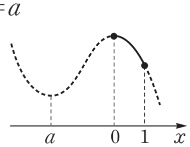
18 전략 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 경계로 범위를 나누어 생각한다.

풀이 $f(x)=-x^3+\dfrac{3}{2}ax^2-a$에서

$f'(x)=-3x^2+3ax=-3x(x-a)$

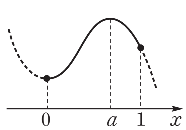
$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=a$

(i) $a\le 0$이면 오른쪽 그림과 같이 $f(x)$는 $x=0$에서 최대이므로



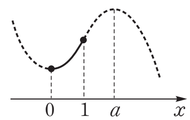
$g(a)=f(0)=-a$

(ii) $0<a\le 1$이면 오른쪽 그림과 같이 $f(x)$는 $x=a$에서 최대이므로



$g(a)=f(a)=\dfrac{1}{2}a^3-a$

(iii) $a>1$이면 오른쪽 그림과 같이 $f(x)$는 $x=1$에서 최대이므로



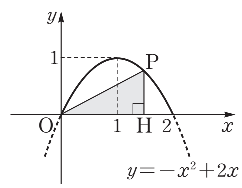
$g(a)=f(1)=\dfrac{1}{2}a-1$

이상에서 구하는 함수 $g(a)$는

$$g(a)=\begin{cases} -a & (a\le 0)\\ \dfrac{1}{2}a^3-a & (0<a\le 1)\\ \dfrac{1}{2}a-1 & (a>1) \end{cases}$$

답 풀이 참조

19 문제이해 • 점 P의 좌표를 $(a,\ -a^2+2a)$ $(0<a<2)$라 하면



H$(a,\ 0)$ ➔ 20% 배점

해결과정 • △OPH의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\dfrac{1}{2}a(-a^2+2a)=-\dfrac{1}{2}a^3+a^2$

$\therefore S'(a)=-\dfrac{3}{2}a^2+2a$

$=-\dfrac{3}{2}a\left(a-\dfrac{4}{3}\right)$ ➔ 20% 배점

$S'(a)=0$에서 $\quad a=\dfrac{4}{3}\ (\because 0<a<2)$

$0<a<2$에서 $S(a)$의 증감표는 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\dfrac{4}{3}$	$\cdots$	(2)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	$\dfrac{16}{27}$	$\searrow$	

➔ 40% 배점

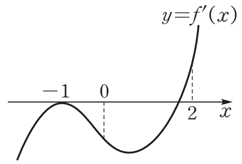
답구하기 • 따라서 $S(a)$는 $a=\dfrac{4}{3}$일 때 최댓값 $\dfrac{16}{27}$을 가지므로 △OPH의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{16}{27}$이다.

➔ 20% 배점

답 $\dfrac{16}{27}$

20 전략 조건을 만족시키도록 $y=f'(x)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

풀이 $f'(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$이고 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 감소하고 구간 $(2,\ \infty)$에서 증가하므로 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같아야 한다.



이때 $y=f'(x)$의 그래프가 $x=-1$에서 x축에 접하므로 방정식 $x^2+ax+b=0$은 $x=-1$을 해로 갖는다.

즉 $1-a+b=0$이므로 $\quad b=a-1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

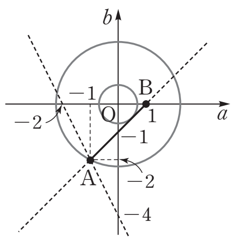
또 $f'(0)\le 0$, $f'(2)\ge 0$이므로

$f'(0)=b\le 0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$f'(2)=3(4+2a+b)\ge 0$

$\therefore b\ge -2a-4 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 실수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$를 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림의 선분 AB와 같다.



$a^2+b^2=k\,(k>0)$라 하면

원 $a^2+b^2=k$가

점 $(-1,\ -2)$를 지날 때 k의 값이 최대이므로

$M=(-1)^2+(-2)^2=5$

원 $a^2+b^2=k$가 직선 $b=a-1$, 즉 $a-b-1=0$에 접할 때 k의 값이 최소이므로

$$\sqrt{k}=\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore m=\frac{1}{2}$$

$$\therefore M+m=\frac{11}{2}$$

답 ③

21

문제이해 • $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$a=c=0$

즉 $f(x)=x^3+bx$에서

$f'(x)=3x^2+b$ ➜ 20% 배점

함수 $f(x)$는 $x=p$에서 극댓값 $f(p)$, $x=q$에서 극솟값 $f(q)$를 가지므로 방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 p, q이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$p+q=0,\ pq=\dfrac{b}{3} \quad \cdots\cdots$ ㉠ ➜ 20% 배점

해결과정 • 두 점 A, B의 좌표가 각각 $(p,\ f(p))$, $(q,\ f(q))$이므로 직선 AB의 기울기는

$$\frac{f(p)-f(q)}{p-q}$$
$$=\frac{p^3+bp-(q^3+bq)}{p-q}=\frac{(p^3-q^3)+b(p-q)}{p-q}$$
$$=\frac{(p-q)(p^2+pq+q^2)+b(p-q)}{p-q}$$
$$=p^2+pq+q^2+b$$
$$=(p+q)^2-pq+b$$

㉠을 위의 식에 대입하면

$$0^2-\frac{b}{3}+b=\frac{2}{3}b=-\frac{4}{3}$$

$\therefore b=-2$ ➜ 40% 배점

답구하기 • 따라서 $f(x)=x^3-2x$이므로

$f(3)=27-6=21$ ➜ 20% 배점

답 21

22

전략 두 점 C, E의 좌표를 이용하여 구하는 넓이를 함수로 나타낸 후 최댓값을 구한다.

풀이 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표가 $(0,\ 1)$이므로 점 C의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이고 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점의 좌표를 $(t,\ t^2)$ $(0<t<1)$이라 하면 점 E의 좌표는 $\left(t-\frac{1}{2},\ t^2+\frac{1}{2}\right)$이다.

따라서 두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이는

$$\left\{\frac{1}{2}-\left(t-\frac{1}{2}\right)\right\}\left\{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right\}=-t^3+t^2$$

$S(t)=-t^3+t^2$이라 하면

$S'(t)=-3t^2+2t=t(-3t+2)$

$S'(t)=0$에서 $\quad t=\dfrac{2}{3}\ (\because 0<t<1)$

함수 $S(t)$의 증감표는 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	$\frac{4}{27}$	↘	

따라서 $S(t)$는 $t=\dfrac{2}{3}$일 때 최댓값 $\dfrac{4}{27}$를 가지므로 공통부분의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{4}{27}$이다.

답 ①

08 도함수의 활용 (3)

유제

본책 197~212쪽

069-1 (1) $f(x)=x^4-2x^2-1$로 놓으면

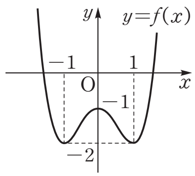
$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗

따라서 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



(2) $x^3-4x^2+3=2x^2-9x$에서

$$x^3-6x^2+9x+3=0$$

$f(x)=x^3-6x^2+9x+3$으로 놓으면

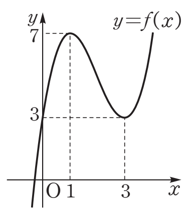
$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↘	3	↗

따라서 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.



답 (1) 2 (2) 1

070-1 $f(x)=x^3-6x$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-6=3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$

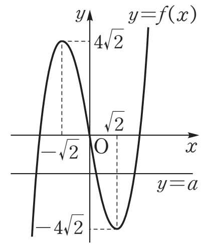
$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$4\sqrt{2}$	↘	$-4\sqrt{2}$	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 직선 $y=a$와의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고 두 개는 양수이어야 하므로

$$-4\sqrt{2}<a<0$$



답 $-4\sqrt{2}<a<0$

070-2 $x^3-2x^2-4x-a=0$에서

$$x^3-2x^2-4x=a$$

$f(x)=x^3-2x^2-4x$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$$

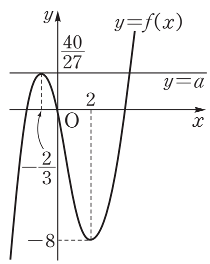
$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\dfrac{2}{3}$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{40}{27}$	↘	-8	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 직선 $y=a$와 x좌표가 양수인 한 점에서 만나고, 음수인 점에서 접해야 하므로

$$a=\frac{40}{27}$$



답 $\dfrac{40}{27}$

071-1 $x^3-4x=8x+k$에서 $\quad x^3-12x-k=0$

$f(x)=x^3-12x-k$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$\therefore$ (극댓값)$=f(-2)=16-k$,

(극솟값)$=f(2)=-16-k$

따라서 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 (극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이어야 하므로

$(16-k)(-16-k)=0, \quad (k+16)(k-16)=0$

$\therefore k=-16$ 또는 $k=16$ 답 -16, 16

072-1 (1) $f(x)=x^4+5x-(x-3)$으로 놓으면

$f(x)=x^4+4x+3$

$f'(x)=4x^3+4=4(x+1)(x^2-x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ $(\because x^2-x+1>0)$

함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 0이므로 $\quad f(x)\ge 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4+5x\ge x-3$이 성립한다.

(2) $f(x)=x^3-x^2-x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ $(\because x\ge 0)$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↘	0	↗

즉 $x\ge 0$일 때 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 0이므로 $\quad f(x)\ge 0$

따라서 $x\ge 0$일 때, 부등식 $x^3-x^2-x+1\ge 0$이 성립한다. 답 풀이 참조

073-1 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=4x^3-6x-(3x^2-a)$

$\quad =4x^3-3x^2-6x+a$

$h'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $\quad x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=1$

구간 $[-1, 2]$에서 $h(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$a-1$	↗	$a+\frac{7}{4}$	↘	$a-5$	↗	$a+8$

따라서 $h(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $a-5$이므로 구간 $[-1, 2]$에서 주어진 부등식이 성립하려면

$a-5\ge 0$

$\therefore a\ge 5$ 답 $a\ge 5$

074-1 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-10t+6, \; a=\dfrac{dv}{dt}=6t-10$

점 P가 원점을 통과하는 것은 $x=0$일 때이므로

$t^3-5t^2+6t=0, \quad t(t-2)(t-3)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=2$ 또는 $t=3$

따라서 점 P가 마지막으로 원점을 통과하는 것은 $t=3$일 때이므로 구하는 가속도는

$a=6\cdot 3-10=8$ 답 8

074-2 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=4t^3-4$

운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

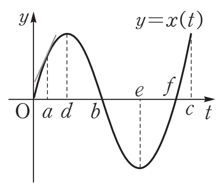
$4t^3-4=0, \quad t^3-1=0$

$(t-1)(t^2+t+1)=0 \quad \therefore t=1$

따라서 구하는 점 P의 위치는

$x=1^4-4\cdot 1+5=2$ 답 2

075-1 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하자.



ㄱ. $t=a$에서의 속도는 $v=x'(a)$이고 오른쪽 그림에서 $x'(a)>0$이므로 $t=a$에서 점 P는 양의 방향으로 움직인다.

ㄴ. $t=d$, $t=e$일 때 $v=0$이고 그 좌우에서 v의 부호가 바뀌므로 점 P는 $t=d$, $t=e$에서 운동 방향을 바꾼다.

ㄷ. $t=b$, $t=f$일 때 $x(t)=0$이므로 점 P는 출발 후 원점을 두 번 지난다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

076-1 자동차가 브레이크를 밟은 지 t초 후의 속도를 v m/s라 하면 $x=7.2t-0.45t^2$에서

$v=\dfrac{dx}{dt}=7.2-0.9t\,(\text{m/s})$

자동차가 정지할 때의 속도는 0 m/s이므로

$7.2-0.9t=0 \quad \therefore t=8$

따라서 자동차가 정지할 때까지 걸린 시간은 8초이다.

답 8초

076-2 기차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v m/s라 하면 $x=30t-0.5t^2$에서

$$v=\frac{dx}{dt}=30-t\,(\text{m/s})$$

기차가 정지할 때의 속도는 0 m/s이므로

$30-t=0 \qquad \therefore t=30$

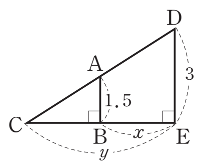
따라서 30초 동안 기차가 움직인 거리는

$x=30\times30-0.5\times30^2=450\,(\text{m})$ 답 450 m

077-1 t분 후 민재가 가로등 바로 밑에서부터 x m, 그림자의 앞 끝은 y m 떨어져 있다고 하면

$x=90t$ ······ ㉠

오른쪽 그림에서



$\triangle\text{ACB}\backsim\triangle\text{DCE}$

(AA 닮음)

이므로

$\overline{\text{AB}}:\overline{\text{DE}}=\overline{\text{BC}}:\overline{\text{EC}}$

$1.5:3=(y-x):y$

㉠을 위의 식에 대입하면

$1.5:3=(y-90t):y, \qquad 1.5y=3y-270t$

$1.5y=270t \qquad \therefore y=180t$

양변을 t에 대하여 미분하면 $\dfrac{dy}{dt}=180$

따라서 그림자의 앞 끝이 움직이는 속도는 180 m/min이다.

답 180

078-1 t초 후의 정사각형의 한 변의 길이는 $(5+2t)$ cm이므로 그 길이가 15 cm가 될 때의 시각은

$5+2t=15 \qquad \therefore t=5$

정사각형의 넓이를 S cm²라 하면 $\qquad S=(5+2t)^2$

$$\therefore \frac{dS}{dt}=2(5+2t)\cdot2=4(5+2t)$$

따라서 5초 후의 정사각형의 넓이의 변화율은

$4(5+2\cdot5)=60\,(\text{cm}^2/\text{s})$ 답 60

078-2 t초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r cm, 높이를 h cm라 하면

$r=5+0.5t,\ h=10-t$

원기둥의 부피를 V cm³라 하면

$V=\pi r^2h=\pi(5+0.5t)^2(10-t)$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dV}{dt}&=\pi\times2(5+0.5t)\times0.5(10-t)\\&\quad+\pi(5+0.5t)^2\times(-1)\\&=\pi(5+0.5t)(5-1.5t)\end{aligned}$$

따라서 3초 후의 원기둥의 부피의 변화율은

$\pi(5+0.5\times3)(5-1.5\times3)=3.25\pi\,(\text{cm}^3/\text{s})$

답 3.25π

중단원 연습 문제

본책 213~216쪽

01 32	**02** ③	**03** $a>24$	**04** 4	**05** ④
06 3	**07** $k>-7$		**08** $0<a<\frac{9}{16}$	
09 27	**10** ①	**11** ⑤	**12** ①	**13** 48
14 2π	**15** ④	**16** ③	**17** 3	

01 전략 $x^3-6x^2+a=0$에서 $x^3-6x^2=-a$이므로 주어진 방정식의 실근은 곡선 $y=x^3-6x^2$과 직선 $y=-a$의 교점의 x좌표와 같다.

풀이 $x^3-6x^2+a=0$에서 $\qquad x^3-6x^2=-a$

$f(x)=x^3-6x^2$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=0$ 또는 $x=4$

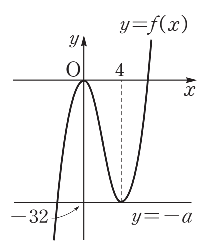
함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	−32	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 직선 $y=-a$와 x좌표가 음수인 한 점에서 만나고, 양수인 점에서 접해야 하므로

$-a=-32 \qquad \therefore a=32$

답 32



02 전략 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

풀이 $x^3-9x^2+20x=-4x+a$에서

$x^3-9x^2+24x-a=0$

$f(x)=x^3-9x^2+24x-a$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$\therefore$ (극댓값)$=20-a$, (극솟값)$=16-a$

따라서 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 (극댓값)$\times$(극솟값)<0이어야 하므로

$(20-a)(16-a)<0$, $(a-16)(a-20)<0$

$\therefore 16<a<20$ 답 ③

03

해결과정 • $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=x^4+2x^3-x^2-9x-(2x^3+5x^2-x-a)$

$=x^4-6x^2-8x+a$

$h'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$

→ 30% 배점

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $h(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$a+3$	↘	$a-24$	↗

→ 30% 배점

답구하기 • 따라서 $h(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이고 최솟값은 $a-24$이므로 모든 실수 x에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면

$a-24>0$ $\therefore a>24$ → 40% 배점

답 $a>24$

04

전략 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0임을 이용한다.

풀이 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-12t+9$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$3t^2-12t+9=0$, $t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0$ $\therefore t=1$ 또는 $t=3$

따라서 $t=1$, $t=3$일 때 점 P가 운동 방향을 바꾸므로 구하는 값은

$t_1+t_2=1+3=4$ 답 4

05

전략 물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0임을 이용한다.

풀이 물체의 t초 후의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=40-2kt$

물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이고 걸린 시간이 4초이므로

$40-2k\cdot 4=0$ $\therefore k=5$

따라서 $v=40-10t$이므로 물체를 던진 후 1초 후의 속도는

$40-10\cdot 1=30$ (m/s) 답 ④

06

해결과정 • $f(x)=-2x^3+3x^2+2$이므로

$f'(x)=-6x^2+6x=-6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	2	↗	3	↘

→ 40% 배점

한편 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=0$에서

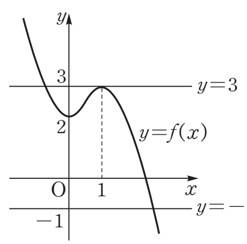
$\{f(x)\}^2-2f(x)-3=0$

$\{f(x)+1\}\{f(x)-3\}=0$

$\therefore f(x)=-1$ 또는 $f(x)=3$

따라서 방정식 $(g\circ f)(x)=0$의 근은 방정식 $f(x)=-1$ 또는 $f(x)=3$의 근과 같다. → 40% 배점

답구하기 • 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=-1$, $y=3$의 교점의 개수가 각각 1, 2이므로 방정식 $(g\circ f)(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. → 20% 배점



답 3

07 (전략) 방정식 $f(x)=k$의 실근은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표와 같음을 이용한다.

(풀이) $2x^3+3x^2-12x-k=0$에서

$$2x^3+3x^2-12x=k$$

$f(x)=2x^3+3x^2-12x$로 놓으면

$$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=1$

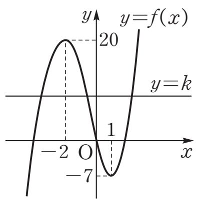
함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	20	$\searrow$	-7	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 $x>1$인 범위에서 만나는 k의 값의 범위는

$$k>-7$$

답 $k>-7$



08 문제이해 • $f(x)=2x^3-6ax-3a$에서

$$f'(x)=6x^2-6a=6(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$$

함수 $f(x)$가 극값을 가지므로

$a>0$ $\cdots\cdots$ ㉠ → 30% 배점

해결과정 • $f'(x)=0$에서 $\quad x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=\sqrt{a}$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$\therefore$ (극댓값)$=f(-\sqrt{a})=a(4\sqrt{a}-3)$,

(극솟값)$=f(\sqrt{a})=-a(4\sqrt{a}+3)$ → 30% 배점

방정식 $f(x)=0$이 단 하나의 실근을 가지려면 (극댓값)$\times$(극솟값)>0이어야 하므로

$$-a^2(4\sqrt{a}-3)(4\sqrt{a}+3)>0$$

$$a^2(16a-9)<0$$

$\therefore a<\dfrac{9}{16},\ a\neq 0$ $\cdots\cdots$ ㉡ → 30% 배점

답구하기 • ㉠, ㉡에서 구하는 a의 값의 범위는

$0<a<\dfrac{9}{16}$ → 10% 배점

답 $0<a<\dfrac{9}{16}$

09 (전략) $x>0$에서 $f(x)\ge 0$이 성립하면 $x>0$에서 ($f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 이용한다.

(풀이) $f(x)=x^3-3x^2-9x+a$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=3\ (\because x>0)$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-27+a$	$\nearrow$

$x>0$일 때 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $-27+a$이다.

즉 $x>0$일 때 $f(x)\ge 0$이려면

$$-27+a\ge 0 \qquad \therefore a\ge 27$$

따라서 실수 a의 최솟값은 27이다.

답 27

10 (전략) 위치를 미분하면 속도임을 이용한다.

(풀이) 시각 t에서 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_{\rm P}$, $v_{\rm Q}$라 하면

$$v_{\rm P}=f'(t)=4t-2,\quad v_{\rm Q}=g'(t)=2t-8$$

이때 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이므로 $v_{\rm P}v_{\rm Q}<0$에서

$$(4t-2)(2t-8)<0,\qquad (2t-1)(t-4)<0$$

$$\therefore \frac{1}{2}<t<4$$

답 ①

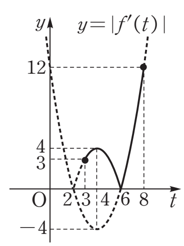
11 (전략) 속력은 운동 방향과 관계없이 크기만을 나타낸다. 즉 물체의 속도를 v라 할 때 (속력)$=|v|$이다.

(풀이) $f(t)=\dfrac{1}{3}t^3-4t^2+12t$로 놓으면 점 P의 속도는

$$f'(t)=t^2-8t+12$$
$$=(t-2)(t-6)$$

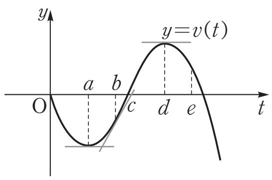
이때 속력은 $|f'(t)|$이므로 오른쪽 그림과 같이 $3\le t\le 8$에서 $|f'(t)|$의 최댓값은 $t=8$일 때 12이다. 따라서 점 P의 최대 속력은 12이다.

답 ⑤



12 (전략) 점 P의 시각 $t=x_1$에서의 가속도는 주어진 그래프의 $t=x_1$에서의 접선의 기울기와 같음을 이용한다.

풀이 ㄱ. $t=b$에서의 가속도는 $v'(b)$이고 오른쪽 그림에서 $v'(b)>0$이므로 $t=b$에서의 가속도는 양이다.



ㄴ. 위의 그림에서 $v'(a)=0$, $v'(d)=0$이므로 $0<t<e$에서 가속도가 0이 될 때는 두 번 있다.

ㄷ. 위의 그림에서 $t=c$일 때 $v(t)=0$이고 그 좌우에서 $v(t)$의 부호가 달라지므로 $0<t<e$에서 운동 방향을 한 번 바꾼다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

13 문제이해 • 점 P가 원점을 출발한 지 t초 후의 두 점 P, Q의 좌표는

$\mathrm{P}(3t,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ 4(t-2))\,(t>2)$ ➔ 30% 배점

해결과정 • △OPQ의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\cdot 3t\cdot 4(t-2)=6t^2-12t$$

$$\therefore \frac{dS}{dt}=12t-12$$ ➔ 50% 배점

답구하기 • 따라서 5초 후의 △OPQ의 넓이의 변화율은

$12\cdot 5-12=48$ ➔ 20% 배점

답 48

14 전략 가장 바깥쪽 동심원의 넓이를 시각 t에 대한 함수로 나타낸다.

풀이 t초 후의 가장 바깥쪽 동심원의 반지름의 길이를 $r\,\mathrm{m}$, 넓이를 $S\,\mathrm{m}^2$라 하면 $r=\frac{1}{2}t$이므로

$$S=\pi r^2=\pi\left(\frac{1}{2}t\right)^2=\frac{1}{4}\pi t^2$$

$$\therefore \frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\pi t$$

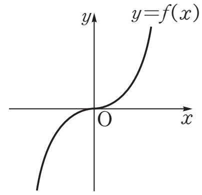
따라서 4초 후의 동심원의 넓이의 변화율은

$$\frac{1}{2}\pi\cdot 4=2\pi\ (\mathrm{m}^2/\mathrm{s})$$

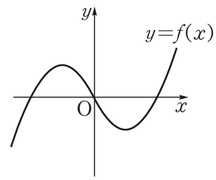
답 2π

15 전략 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이면 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 최고차항의 계수가 1이고 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키는 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같아야 한다.

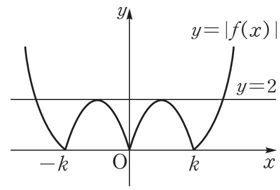


[그림 1]



[그림 2]

이때 방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수가 4이기 위해서는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=2$가 오른쪽 그림과 같이 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같아야 한다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 원점이 아닌 교점의 x좌표를 각각 $-k$, $k\,(k>0)$라 하면

$$f(x)=x(x+k)(x-k)=x^3-k^2x$$

이므로

$$f'(x)=3x^2-k^2=3\left(x+\frac{k}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{k}{\sqrt{3}}\right)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{k}{\sqrt{3}}$ 또는 $x=\frac{k}{\sqrt{3}}$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{k}{\sqrt{3}}$에서 극댓값 2를 갖고, $x=\frac{k}{\sqrt{3}}$에서 극솟값 -2를 갖는다.

즉 $f\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right)=-2$이므로

$$\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right)^3-k^2\cdot\frac{k}{\sqrt{3}}=-2$$

$$k^3=3\sqrt{3} \qquad \therefore k=\sqrt{3}$$

따라서 $f(x)=x^3-3x$이므로

$$f(3)=3^3-3\cdot 3=18$$

답 ④

16 전략 $h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $h'(x)$의 부호를 조사하여 증감표를 만든다.

풀이 $h(x)=f(x)-g(x)$에서

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)$$

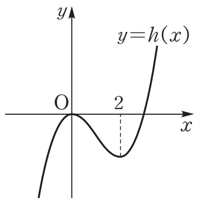
$h'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

함수 $h(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ, ㄴ. 위의 증감표에 의하여 $0<x<2$에서 $h(x)$는 감소하고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. $h(0)=f(0)-g(0)=0$에서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

17 문제이해 • 두 점 P, Q의 t초 후의 좌표 x_1, x_2가 각각

$$x_1=2t^3-11t^2,\ x_2=3t^2+8t$$

이므로 선분 PQ의 중점 M의 t초 후의 좌표를 x_3이라 하면 $\quad x_3=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2t^3-11t^2+3t^2+8t}{2}$

$$=t^3-4t^2+4t$$ ➔ 20% 배점

해결과정 • x_1, x_2, x_3을 각각 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dx_1}{dt}=6t^2-22t=2t(3t-11)$$

$$\frac{dx_2}{dt}=6t+8=2(3t+4)$$

$$\frac{dx_3}{dt}=3t^2-8t+4=(3t-2)(t-2)$$ ➔ 30% 배점

움직이는 방향을 바꿀 때의 속도는 0이고 $0<t\le4$이므로

$\dfrac{dx_1}{dt}=0$에서 $\quad t=\dfrac{11}{3} \quad \therefore a=1$

$\dfrac{dx_2}{dt}=0$을 만족시키는 t는 존재하지 않는다.

$\quad \therefore b=0$

$\dfrac{dx_3}{dt}=0$에서 $\quad t=\dfrac{2}{3}$ 또는 $t=2$

$\quad \therefore c=2$ ➔ 40% 배점

답구하기 • $\therefore a+b+c=3$ ➔ 10% 배점

답 3

09 부정적분

유제 본책 222~229쪽

079-1 $(x^4-2x^3-2x^2+C)'=(x-2)f(x)$이므로

$$4x^3-6x^2-4x=(x-2)f(x)$$

$$2x(2x+1)(x-2)=(x-2)f(x)$$

따라서 $f(x)=2x(2x+1)$이므로

$$f(1)=2\cdot1\cdot3=6$$

답 6

080-1 $\dfrac{d}{dx}\left\{\displaystyle\int(ax^2+4x+5)dx\right\}=ax^2+4x+5$

이므로

$$ax^2+4x+5=6x^2+bx+c$$

따라서 $a=6,\ b=4,\ c=5$이므로

$$a+b+c=15$$

답 15

080-2 $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-4x)\right\}dx=x^2-4x+C$이므로

$$f(x)=x^2-4x+C$$

$$=(x-2)^2-4+C$$

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 3이므로

$$-4+C=3$$

$$\therefore C=7$$

따라서 $f(x)=x^2-4x+7$이므로

$$f(1)=1-4+7=4$$

답 4

081-1 (1) $\displaystyle\int(x^2+x+1)(x^2-x+1)dx$

$$=\int(x^4+x^2+1)dx$$

$$=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+x+C$$

(2) $\displaystyle\int\frac{2x^2-3x-2}{x-2}dx=\int\frac{(2x+1)(x-2)}{x-2}dx$

$$=\int(2x+1)dx$$

$$=x^2+x+C$$

(3) $\displaystyle\int(x-t)^2dx=\int(x^2-2tx+t^2)dx$

$$=\int x^2dx-2t\int xdx+t^2\int dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3-tx^2+t^2x+C$$

(4) $\int(\sqrt{x}+1)^2dx+\int(\sqrt{x}-1)^2dx$

$=\int\{(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{x}-1)^2\}dx$

$=\int\{(x+2\sqrt{x}+1)+(x-2\sqrt{x}+1)\}dx$

$=\int(2x+2)\,dx=x^2+2x+C$ 답 풀이 참조

082-1 $f'(x)=6x^2+2x-3$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2+2x-3)dx$$
$$=2x^3+x^2-3x+C$$

$f(-1)=0$에서

$$-2+1+3+C=0 \qquad \therefore C=-2$$

따라서 $f(x)=2x^3+x^2-3x-2$이므로

$$f(2)=16+4-6-2=12$$

답 12

082-2 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$이므로

$$f'(x)=-2x+3$$
$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2x+3)dx$$
$$=-x^2+3x+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로 $f(0)=-1$에서 $C=-1$

따라서 $f(x)=-x^2+3x-1$이므로

$$f(1)=-1+3-1=1$$

답 1

083-1 $F(x)=xf(x)-4x^3+x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$F'(x)=f(x)+xf'(x)-12x^2+2x$$

$F'(x)=f(x)$이므로

$$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^2+2x$$
$$xf'(x)=12x^2-2x$$
$$\therefore f'(x)=12x-2$$

따라서

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(12x-2)dx$$
$$=6x^2-2x+C$$

이고 $f(1)=6$이므로 $6-2+C=6$

$$\therefore C=2$$
$$\therefore f(x)=6x^2-2x+2$$

답 $f(x)=6x^2-2x+2$

중단원 연습 문제

본책 230~233쪽

01 3	02 1023	03 ①	04 22	05 ④
06 ②	07 1	08 3	09 ③	10 ②
11 ④	12 -1	13 26	14 12	
15 -22	16 10	17 ②	18 21	19 ④

01 전략 $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$임을 이용한다.

풀이 $\frac{d}{dx}\left\{\int(ax^3-3x^2+1)dx\right\}=ax^3-3x^2+1$

이므로

$$ax^3-3x^2+1=5x^3+bx^2+c$$

따라서 $a=5,\ b=-3,\ c=1$이므로

$$a+b+c=3$$

답 3

02 전략 n이 음이 아닌 정수일 때,

$\int x^ndx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$($C$는 적분상수)임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int(1+2x+3x^2+\cdots+9x^8)dx$

$$=x+x^2+x^3+\cdots+x^9+C$$

이고 $f(0)=1$이므로

$$C=1$$

따라서 $f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^9$이므로

$$f(2)=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^9$$
$$=\frac{1\cdot(2^{10}-1)}{2-1}=2^{10}-1$$
$$=1023$$

답 1023

Remark 등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

(i) $r\neq1$일 때, $\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

(ii) $r=1$일 때, na

03 전략 $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f'(x)=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서

$$x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 갖는다. 이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (x^2+2x-3)dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+C$$

이고, $f(x)$의 극댓값이 4이므로

$$f(-3)=-9+9+9+C=4 \qquad \therefore C=-5$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-5$이므로 극솟값은

$$f(1)=\frac{1}{3}+1-3-5=-\frac{20}{3}$$

답 ①

04 해결과정 • $F(x)=xf(x)-3x^2(x^2-1)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$F'(x)=f(x)+xf'(x)-12x^3+6x$$

$F'(x)=f(x)$이므로

$$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^3+6x$$

$$xf'(x)=12x^3-6x$$

$$\therefore f'(x)=12x^2-6$$

➜ 50% 배점

따라서

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (12x^2-6)dx$$

$$=4x^3-6x+C$$

이고 $f(1)=0$이므로

$$4-6+C=0 \qquad \therefore C=2$$

➜ 40% 배점

답구하기 • 따라서 $f(x)=4x^3-6x+2$이므로

$$f(2)=32-12+2=22$$

➜ 10% 배점

답 22

05 전략 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$는 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int (4x^3-6x+2)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=4x^3-6x+2$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=f'(-1)=-4+6+2=4$$

답 ④

06 전략 $F(x)$, $f'(x)$를 각각 구한 후 인수정리를 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=x^2-4x+1$의 부정적분 $F(x)$는

$$F(x)=\int (x^2-4x+1)dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3-2x^2+x+C \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 함수 $f(x)=x^2-4x+1$의 도함수 $f'(x)$는

$$f'(x)=2x-4$$

그런데 $F(x)$가 $f'(x)$를 인수로 가지므로 인수정리에 의하여

$$F(2)=0$$

㉠에서

$$\frac{8}{3}-8+2+C=0 \qquad \therefore C=\frac{10}{3}$$

따라서 $F(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+x+\frac{10}{3}$이므로

$$F(1)=\frac{1}{3}-2+1+\frac{10}{3}=\frac{8}{3}$$

답 ②

Remark 인수정리

x에 대한 다항식 $f(x)$에 대하여
① $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $f(\alpha)=0$이다.
② $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

07 해결과정 • $\int (2x-3)f'(x)dx$

$$=\frac{4}{3}x^3+2x^2-15x$$

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$(2x-3)f'(x)=4x^2+4x-15$$

$$(2x-3)f'(x)=(2x-3)(2x+5)$$

$$\therefore f'(x)=2x+5$$

➜ 40% 배점

따라서

$$f(x)=\int f'(x)dx$$

$$=\int (2x+5)dx$$

$$=x^2+5x+C$$

이고 $f(-1)=-3$이므로

$$1-5+C=-3 \qquad \therefore C=1$$

➜ 40% 배점

답구하기 • 따라서 $f(x)=x^2+5x+1$이므로 방정식 $x^2+5x+1=0$의 모든 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 1이다.

➜ 20% 배점

답 1

Remark 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

08 해결과정 • $f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x<1) \\ k & (x>1) \end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+C_1 & (x<1) \\ kx+C_2 & (x>1) \end{cases}$$ ➔ 20% 배점

$f(0)=1$이므로 $\quad C_1=1$

$f(2)=6$이므로 $\quad 2k+C_2=6 \quad \cdots$ ㉠ ➔ 30% 배점

이때 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$$

$$\lim_{x\to1+}(kx+C_2)=\lim_{x\to1-}(x^2+x+C_1)$$

$$k+C_2=2+C_1$$

$$\therefore\ k+C_2=3 \quad \cdots ㉡$$ ➔ 30% 배점

답구하기 • ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$C_2=0,\ k=3$ ➔ 20% 배점

답 3

Remark 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라 한다.

(i) $x=a$에서 정의되어 있다.

(ii) 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

09 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$이다.

풀이 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 x^2-x에 정비례하므로

$f'(x)=k(x^2-x)\ (k\neq0)$

로 놓으면

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(kx^2-kx)dx$$
$$=\frac{k}{3}x^3-\frac{k}{2}x^2+C$$

곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(0, -2)$, $(3, 7)$을 지나므로

$f(0)=-2,\ f(3)=7$

$\therefore\ C=-2,\ 9k-\frac{9}{2}k+C=7$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$C=-2,\ k=2$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-x^2-2$이므로

$f(-3)=-18-9-2=-29$

답 ③

10 전략 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고 $x=k$에서 극값을 가지면 $f(0)=0$이고, $x=-k$에서도 극값을 갖는다.

풀이 $f(x)$가 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키므로 그 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

이때 $f(x)$가 $x=-2$에서 극값을 가지므로 $x=2$에서도 극값을 갖는다.

따라서 $f'(x)=a(x+2)(x-2)=a(x^2-4)\ (a\neq0)$로 놓을 수 있다.

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int a(x^2-4)dx$$
$$=a\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)+C$$

$f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 $f(0)=0$에서 $\quad C=0$

즉 $f(x)=a\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)$이므로 $a\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)=0$에서

$\frac{1}{3}x^3-4x=0, \quad x(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pm2\sqrt{3}$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=2\sqrt{3}$

답 ②

다른 풀이 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq0)$로 놓으면 $f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$f(0)=0$에서 $\quad d=0$

또 $f(x)$가 $x=-2$에서 극값을 갖고 그 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 $x=2$에서도 극값을 갖는다.

따라서 $f'(x)=0$, 즉 $3ax^2+2bx+c=0$의 두 근이 -2, 2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\quad -\frac{2b}{3a}=0,\ \frac{c}{3a}=-4$

$\therefore b=0,\ c=-12a\ (\because a\neq0)$

즉 $f(x)=ax^3-12ax$이므로 $ax^3-12ax=0$에서

$ax(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pm2\sqrt{3}$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=2\sqrt{3}$

11 (전략) 주어진 그래프에서 $f'(0)=0$, $f'(2)=0$임을 이용하여 $f'(x)=ax(x-2)$ $(a<0)$로 놓는다.

(풀이) $f'(x)=ax(x-2)$ $(a<0)$로 놓으면
$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

즉 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 0을 갖고, $x=2$에서 극댓값 4를 갖는다. 이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(ax^2-2ax)dx$$
$$=\frac{a}{3}x^3-ax^2+C$$

$f(0)=0$에서 $\quad C=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$f(2)=4$에서 $\quad \frac{8}{3}a-4a+C=4 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-3$, $C=0$
따라서 $f(x)=-x^3+3x^2$이므로
$f(1)=-1+3=2$ 답 ④

12 (전략) $f'(x)$를 이용하여 $f(x)$를 구한 후 $f(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $f(\alpha)=0$임을 이용한다.

(풀이) $f'(x)=3x^2-6x+a$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-6x+a)dx$$
$$=x^3-3x^2+ax+C$$

이때 $f(x)$가 $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$으로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여
$f(1)=0$에서 $\quad 1-3+a+C=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$f(3)=0$에서 $\quad 27-27+3a+C=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-1$, $C=3$
따라서 a의 값은 -1이다. 답 -1

(다른 풀이) $f'(x)=3x^2-6x+a$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-6x+a)dx$$
$$=x^3-3x^2+ax+C$$

그런데 $f(x)$가 x^2-4x+3으로 나누어떨어지므로

$$x^3-3x^2+ax+C=(x^2-4x+3)\left(x+\frac{C}{3}\right)$$

로 놓을 수 있다. 위의 식의 우변을 전개하면

$$(x^2-4x+3)\left(x+\frac{C}{3}\right)$$
$$=x^3+\left(\frac{1}{3}C-4\right)x^2+\left(3-\frac{4}{3}C\right)x+C$$

이므로

$$x^3-3x^2+ax+C$$
$$=x^3+\left(\frac{1}{3}C-4\right)x^2+\left(3-\frac{4}{3}C\right)x+C$$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$-3=\frac{1}{3}C-4,\ a=3-\frac{4}{3}C$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad C=3$, $a=-1$
따라서 a의 값은 -1이다.

13 문제이해 • 곡선 $y=f(x)+1$이 x좌표가 1인 점에서 x축에 접하므로
$f(x)+1=(x-1)^2Q_1(x)$ ($Q_1(x)$는 일차식)
로 놓으면
$f(1)=-1$, $f'(1)=0$
또 곡선 $y=f(x)-1$이 x좌표가 -1인 점에서 x축에 접하므로
$f(x)-1=(x+1)^2Q_2(x)$ ($Q_2(x)$는 일차식)
로 놓으면
$f(-1)=1$, $f'(-1)=0$ ➔ 50% 배점

해결과정 • $f'(1)=0$, $f'(-1)=0$이므로
$f'(x)=a(x+1)(x-1)=a(x^2-1)$ $(a\neq0)$
로 놓으면

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int a(x^2-1)dx$$
$$=a\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)+C$$

또 $f(1)=-1$, $f(-1)=1$이므로

$$-\frac{2}{3}a+C=-1,\ \frac{2}{3}a+C=1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=\frac{3}{2},\ C=0$$ ➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 $f(x)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x$
이므로
$f(4)=32-6=26$ ➔ 10% 배점

답 26

Remark

다항함수 $y=f(x)$의 그래프가 x좌표가 a인 점에서 x축에 접하면
$f(a)=0,\ f'(a)=0$

14 전략 $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용하여 $f(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타낸다.

풀이 $f'(x)=(x-1)^3$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (x-1)^3\,dx$$
$$=\int (x^3-3x^2+3x-1)dx$$
$$=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+C$$

또 $f'(x)=0$에서 $x=1$이고, 그 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖는다.

$$\therefore\ M=f(1)=\frac{1}{4}-1+\frac{3}{2}-1+C$$
$$=-\frac{1}{4}+C$$

한편 $f'(0)=-1,\ f(0)=C$이므로 점 $\mathrm{A}(0,\ f(0))$, 즉 $(0,\ C)$에서의 접선의 방정식은

$y-C=-1\cdot(x-0)$

$\therefore\ y=-x+C$ …… ㉠

또 $f'(2)=1,\ f(2)=C$이므로 점 $\mathrm{B}(2,\ f(2))$, 즉 $(2,\ C)$에서의 접선의 방정식은

$y-C=x-2$

$\therefore\ y=x-2+C$ …… ㉡

이때 두 접선 ㉠, ㉡의 교점의 x좌표는 $-x+C=x-2+C$에서 $x=1$이므로

$N=-1+C$

$$\therefore\ 16(M-N)=16\left(-\frac{1}{4}+C+1-C\right)=12$$

답 12

15 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분한 후 $F'(x)=f(x)$임을 이용한다.

풀이 $xf(x)-F(x)=2x^3+6x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)-F'(x)=6x^2+12x$

$F'(x)=f(x)$이므로

$f(x)+xf'(x)-f(x)=6x^2+12x$

$xf'(x)=6x^2+12x$

$\therefore\ f'(x)=6x+12$

따라서

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (6x+12)dx$$
$$=3x^2+12x+C$$

이고 $f(1)=5$이므로

$3+12+C=5$ $\quad\therefore\ C=-10$

즉 $f(x)=3x^2+12x-10=3(x+2)^2-22$이므로 $f(x)$는 $x=-2$에서 최솟값 -22를 갖는다.

답 -22

16 문제이해 • $f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0$

$\therefore\ f(0)=0$ ➔ 20% 배점

해결과정 • $f'(1)=5$이므로

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)-h-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-1=5$$

$$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=6$$ ➔ 30% 배점

이것을 이용하여 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-x=6-x$$

$$\therefore\ f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (6-x)dx$$
$$=-\frac{1}{2}x^2+6x+C$$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 이때 $f(0)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+6x$이므로

$f(2)=-2+12=10$ ➔ 20% 배점

답 10

17 전략 $f(x)$가 이차함수이므로 $f(x)=px^2+qx+r\ (p\neq0)$로 놓고 주어진 조건을 이용하여 $g(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=px^2+qx+r(p\neq0)$로 놓으면

$$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$$
$$=\int(x^2+px^2+qx+r)dx$$
$$=\int\{(1+p)x^2+qx+r\}dx$$
$$=\frac{1}{3}(1+p)x^3+\frac{q}{2}x^2+rx+C$$

한편

$$f(x)g(x)=(px^2+qx+r)g(x)$$
$$=-2x^4+8x^3$$

이므로 $g(x)$는 이차함수이다.

$\therefore\ p=-1$

따라서

$$(-x^2+qx+r)\left(\frac{q}{2}x^2+rx+C\right)$$
$$=-\frac{q}{2}x^4+\left(\frac{q^2}{2}-r\right)x^3+\left(-C+\frac{3qr}{2}\right)x^2$$
$$+(qC+r^2)x+rC$$
$$=-2x^4+8x^3$$

이므로

$$-\frac{q}{2}=-2,\ \frac{q^2}{2}-r=8,\ -C+\frac{3qr}{2}=0,$$
$$qC+r^2=0,\ rC=0$$

$\therefore\ q=4,\ r=0,\ C=0$

따라서 $g(x)=2x^2$이므로 $\quad g(1)=2$ 답 ②

18 전략 적분은 미분의 역연산임을 이용하여 $f(x)$와 $g(x)$를 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $f'(x)+g'(x)=4$이므로

$$f(x)+g(x)=\int\{f'(x)+g'(x)\}dx$$
$$=\int 4\,dx=4x+C_1$$

조건 (다)에 의하여 $f(0)+g(0)=-3+2=-1$이므로

$C_1=-1$

$\therefore\ f(x)+g(x)=4x-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=6x-7$이므로

$$\{f(x)g(x)\}'=6x-7$$
$$\therefore\ f(x)g(x)=\int\{f(x)g(x)\}'dx$$
$$=\int(6x-7)dx=3x^2-7x+C_2$$

조건 (다)에 의하여 $f(0)g(0)=-3\cdot2=-6$이므로

$C_2=-6$

$$\therefore\ f(x)g(x)=3x^2-7x-6$$
$$=(x-3)(3x+2)\quad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에서

$f(x)=x-3,\ g(x)=3x+2$

또는 $f(x)=3x+2,\ g(x)=x-3$

그런데 $f(0)=-3,\ g(0)=2$이므로

$f(x)=x-3,\ g(x)=3x+2$

$\therefore\ f(4)+g(6)=1+20=21$ 답 21

19 전략 $f'(x)$를 구간별로 적분한 뒤 그래프의 개형을 그려 본다.

풀이 $f'(x)=\begin{cases} x^2 & (|x|<1) \\ -1 & (|x|>1) \end{cases}$ 이므로

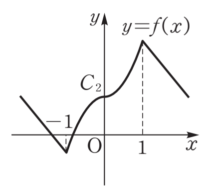
$$f(x)=\begin{cases} -x+C_1 & (x\ge1) \\ \frac{1}{3}x^3+C_2 & (-1\le x<1) \\ -x+C_3 & (x<-1) \end{cases}$$

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to-1-}f'(x)=-1<0,\ \lim_{x\to-1+}f'(x)=1>0$

이므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 감소하다가 증가한다.

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이 아니므로



$f(x)\ne f(-x)$이다.

ㄷ. $f(0)=0$이므로 $\quad C_2=0$

그런데 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

$$\therefore\ f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{1}{3}x^3=\frac{1}{3}>0$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

다른 풀이 ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소, $x=1$에서 극대이므로

$f(-1)\ne f(1)\qquad\therefore\ f(x)\ne f(-x)$

ㄷ. 구간 $(-1,\ 1)$에서 $f'(x)=x^2\ge0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

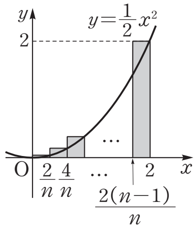
$\therefore\ f(1)>f(0)=0$

10 정적분 (1)

유제

본책 238~252쪽

084-1 구간 $[0,\ 2]$를 n등분하면 양 끝 점과 각 분점의 x좌표는 차례대로



$$0,\ \frac{2}{n},\ \frac{4}{n},\ \cdots,$$
$$\frac{2(n-1)}{n},\ \frac{2n}{n}=2$$

곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$의 위쪽에 n등분한 각 구간을 가로의 길이로, 구간의 오른쪽 끝에서의 함숫값을 세로의 길이로 하는 n개의 직사각형을 만들면 그 넓이의 합 S_n은

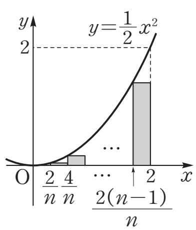
$$S_n=\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n}\right)^2+\cdots+\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2n}{n}\right)^2$$
$$=\frac{4}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2)$$
$$=\frac{4}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 구간 $[0,\ 2]$를 n등분하고 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$의 아래쪽에 직사각형을 만들면 그 넓이의 합 S_n'은

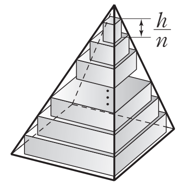


$$S_n'=\frac{2}{n}\cdot0+\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n}\right)^2+\cdots+\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{2(n-1)}{n}\right\}^2$$
$$=\frac{4}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\}$$
$$=\frac{4}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n'=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{4}{3}$$

085-1 오른쪽 그림과 같이 사각뿔의 높이를 n등분하여 $(n-1)$개의 직육면체를 만들면 각 직육면체의 밑넓이는 위에서부터 차례대로



$$\left(\frac{1}{n}\right)^2S,\ \left(\frac{2}{n}\right)^2S,\ \cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2S$$

이고, 높이는 모두 $\frac{h}{n}$이므로 $(n-1)$개의 직육면체의 부피의 합 V_n은

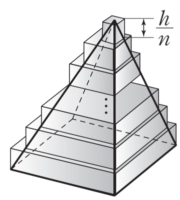
$$V_n=\left(\frac{1}{n}\right)^2S\cdot\frac{h}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2S\cdot\frac{h}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2S\cdot\frac{h}{n}$$
$$=\frac{Sh}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\}$$
$$=\frac{Sh}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{1}{6}Sh\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$V=\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}Sh\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{3}Sh$$

답 $\frac{1}{3}Sh$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 사각뿔의 높이를 n등분하여 n개의 직육면체를 만들면 그 부피의 합 V_n'은



$$V_n'=\left(\frac{1}{n}\right)^2S\cdot\frac{h}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2S\cdot\frac{h}{n}+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2S\cdot\frac{h}{n}$$
$$=\frac{Sh}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2)$$
$$=\frac{Sh}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{1}{6}Sh\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$V=\lim_{n\to\infty}V_n'=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}Sh\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{3}Sh$$

086-1 (1) $\int_1^2 (4x^3-2x-3)dx$

$=\Big[x^4-x^2-3x\Big]_1^2$

$=(16-4-6)-(1-1-3)=9$

(2) $\int_1^{-3} (t-2)(3t+2)dt$

$=\int_1^{-3} (3t^2-4t-4)dt=\Big[t^3-2t^2-4t\Big]_1^{-3}$

$=(-27-18+12)-(1-2-4)=-28$

(3) $\int_{-1}^0 (x-1)^3\,dx=\int_{-1}^0 (x^3-3x^2+3x-1)dx$

$=\Big[\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x\Big]_{-1}^0$

$=-\Big(\frac{1}{4}+1+\frac{3}{2}+1\Big)=-\frac{15}{4}$

(4) $\int_1^{-1} \frac{x^3+8}{x+2}dx=\int_1^{-1} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}dx$

$=\int_1^{-1}(x^2-2x+4)dx$

$=\Big[\frac{1}{3}x^3-x^2+4x\Big]_1^{-1}$

$=\Big(-\frac{1}{3}-1-4\Big)-\Big(\frac{1}{3}-1+4\Big)$

$=-\frac{26}{3}$

답 (1) 9 (2) -28 (3) $-\frac{15}{4}$ (4) $-\frac{26}{3}$

087-1 (1) (주어진 식)

$=\int_0^3 (2x+1)^2dx-\int_0^3 (2x-1)^2dx$

$=\int_0^3 \{(2x+1)^2-(2x-1)^2\}dx$

$=\int_0^3 \{(4x^2+4x+1)-(4x^2-4x+1)\}dx$

$=\int_0^3 8x\,dx=\Big[4x^2\Big]_0^3=36$

(2) (주어진 식)

$=\int_0^2 (\sqrt{x}+1)^3dx-\int_0^2 (\sqrt{x}-1)^3dx$

$=\int_0^2 \{(\sqrt{x}+1)^3-(\sqrt{x}-1)^3\}dx$

$=\int_0^2 \{(x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1)$

$-(x\sqrt{x}-3x+3\sqrt{x}-1)\}dx$

$=\int_0^2 (6x+2)dx=\Big[3x^2+2x\Big]_0^2$

$=12+4=16$

답 (1) 36 (2) 16

087-2 (주어진 식)

$=\int_2^4 f(x)dx+\int_4^3 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$

$=\int_2^3 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$

$=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3 (x^2-4x+3)dx$

$=\Big[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\Big]_1^3$

$=(9-18+9)-\Big(\frac{1}{3}-2+3\Big)=-\frac{4}{3}$

답 $-\frac{4}{3}$

088-1 $f(x)=\begin{cases} 1 & (x\geq 0) \\ 2x+1 & (x\leq 0) \end{cases}$ 이므로

$\int_{-2}^2 f(x)dx=\int_{-2}^0 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx$

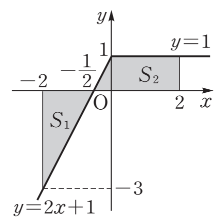
$=\int_{-2}^0 (2x+1)dx+\int_0^2 1\,dx$

$=\Big[x^2+x\Big]_{-2}^0+\Big[x\Big]_0^2$

$=-(4-2)+2=0$

답 0

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 구간 $[-2, 2]$에서 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면



$S_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{9}{4}$,

$S_2=\frac{1}{2}\Big(2+\frac{5}{2}\Big)\cdot 1=\frac{9}{4}$

$\therefore \int_{-2}^2 f(x)dx=-S_1+S_2=-\frac{9}{4}+\frac{9}{4}=0$

089-1 (1) $2-x=0$에서 $x=2$이므로

$|2-x|=\begin{cases} 2-x & (x\leq 2) \\ -2+x & (x\geq 2) \end{cases}$

$\therefore \int_0^3 |2-x|dx$

$=\int_0^2 (2-x)dx+\int_2^3 (-2+x)dx$

$=\Big[2x-\frac{1}{2}x^2\Big]_0^2+\Big[-2x+\frac{1}{2}x^2\Big]_2^3$

$=(4-2)+\Big\{\Big(-6+\frac{9}{2}\Big)-(-4+2)\Big\}=\frac{5}{2}$

(2) $x^2-x-2=0$, 즉 $(x+1)(x-2)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$이므로

$$|x^2-x-2|$$
$$=\begin{cases} x^2-x-2 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ -x^2+x+2 & (-1\le x\le 2)\end{cases}$$
$$\therefore \int_1^3 |x^2-x-2|dx$$
$$=\int_1^2 (-x^2+x+2)dx+\int_2^3 (x^2-x-2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^3$$
$$=\left\{\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2\right)\right\}$$
$$+\left\{\left(9-\frac{9}{2}-6\right)-\left(\frac{8}{3}-2-4\right)\right\}$$
$$=3$$

(3) $|x|=0$에서 $x=0$이므로

$$(|x|+x+1)^2=\begin{cases} (2x+1)^2 & (x\ge 0) \\ 1 & (x\le 0)\end{cases}$$
$$\therefore \int_{-1}^1 (|x|+x+1)^2\,dx$$
$$=\int_{-1}^0 1\,dx+\int_0^1 (4x^2+4x+1)dx$$
$$=\Big[x\Big]_{-1}^0+\left[\frac{4}{3}x^3+2x^2+x\right]_0^1$$
$$=-(-1)+\left(\frac{4}{3}+2+1\right)=\frac{16}{3}$$

(4) $x^3+x=0$, 즉 $x(x^2+1)=0$에서

$x=0$ ($\because x^2+1>0$)이므로

$$|x^3+x|=\begin{cases} x^3+x & (x\ge 0) \\ -x^3-x & (x\le 0)\end{cases}$$
$$\therefore \int_{-1}^2 |x^3+x|dx$$
$$=\int_{-1}^0 (-x^3-x)dx+\int_0^2 (x^3+x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2$$
$$=-\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+(4+2)=\frac{27}{4}$$

답 (1) $\frac{5}{2}$ (2) 3 (3) $\frac{16}{3}$ (4) $\frac{27}{4}$

090-1 $\int_{-3}^3 (2x^2-3x+1)f(x)dx$

$$=2\int_{-3}^3 x^2f(x)dx-3\int_{-3}^3 xf(x)dx$$
$$+\int_{-3}^3 f(x)dx$$

이때 $f(-x)=-f(x)$에서 $f(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-3}^3 f(x)dx=0$$

한편 $g(x)=x^2f(x)$, $h(x)=xf(x)$라 하면

$$g(-x)=(-x)^2f(-x)=x^2\cdot\{-f(x)\}$$
$$=-x^2f(x)=-g(x),$$
$$h(-x)=-xf(-x)=-x\cdot\{-f(x)\}$$
$$=xf(x)=h(x)$$

에서 $g(x)$는 기함수, $h(x)$는 우함수이므로

$$\int_{-3}^3 g(x)dx=0,\ \int_{-3}^3 h(x)dx=2\int_0^3 h(x)dx$$

즉 $$\int_{-3}^3 x^2f(x)dx=0,$$
$$\int_{-3}^3 xf(x)dx=2\int_0^3 xf(x)dx=2\cdot 5=10$$
$$\therefore (\text{주어진 식})=-3\int_{-3}^3 xf(x)dx$$
$$=-3\cdot 10=-30$$

답 -30

중단원 연습 문제

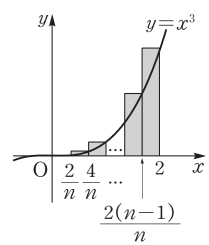
본책 254~257쪽

01 ④ **02** 2 **03** (1) $\frac{33}{4}$ (2) 23
04 $-\frac{5}{4}$ **05** $\frac{3}{2}$ **06** 10 **07** $\frac{4}{3}\pi r^3$
08 1 **09** ① **10** $\frac{17}{6}$ **11** 17 **12** 3
13 4 **14** 7 **15** ④ **16** ⑤ **17** ⑤
18 $\frac{20}{3}$ **19** ③

01 전략 주어진 도형을 n개의 직사각형으로 나눈다.

풀이 구간 $[0, 2]$를 n등분 하면 양 끝 점과 각 분점의 x좌표는 차례대로

$$0,\ \frac{2}{n},\ \frac{4}{n},\ \cdots,$$
$$\frac{2(n-1)}{n},\ \frac{2n}{n}=2$$



n등분한 각 구간을 가로의 길이로, 구간의 오른쪽 끝에서의 함숫값을 세로의 길이로 하는 n개의 직사각형을 만들면 그 넓이의 합 S_n은

$$S_n=\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3+\frac{2}{n}\left(\frac{4}{n}\right)^3+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n}{n}\right)^3$$
$$=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^3$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^3\cdot\frac{2}{n}$$

답 ④

02 전략 이차함수 $y=a(x-m)^2+n(a>0)$은 $x=m$일 때 최솟값 n을 갖는다.

풀이 $\int_{-2}^{k}(2x-4)dx=\Big[x^2-4x\Big]_{-2}^{k}$

$=(k^2-4k)-(4+8)$

$=k^2-4k-12$

$=(k-2)^2-16$

이므로 $k=2$일 때 최솟값 -16을 갖는다. 답 2

03 전략 정적분의 성질을 이용하여 계산한다.

풀이 (1) (주어진 식) $=\int_{0}^{1}(t^3+8)dt=\Big[\frac{1}{4}t^4+8t\Big]_{0}^{1}$

$=\frac{1}{4}+8=\frac{33}{4}$

(2) (주어진 식)

$=\int_{-1}^{3}(3x^2+2x-1)dx+\int_{2}^{-1}(3x^2+2x-1)dx$

$=\int_{2}^{3}(3x^2+2x-1)dx=\Big[x^3+x^2-x\Big]_{2}^{3}$

$=(27+9-3)-(8+4-2)=23$

답 (1) $\frac{33}{4}$ (2) 23

04 전략 함수 $f(x)$에 x 대신 $x-1$을 대입하여 함수 $f(x-1)$을 구하고, 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

풀이 함수 $f(x)$에 x 대신 $x-1$을 대입하면

$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)^2-1 & (x-1\ge0)\\ -(x-1)-1 & (x-1\le0)\end{cases}$, 즉

$f(x-1)=\begin{cases}x^2-2x & (x\ge1)\\ -x & (x\le1)\end{cases}$

$\therefore \int_{0}^{2}xf(x-1)dx$

$=\int_{0}^{1}xf(x-1)dx+\int_{1}^{2}xf(x-1)dx$

$=\int_{0}^{1}x(-x)dx+\int_{1}^{2}x(x^2-2x)dx$

$=\int_{0}^{1}(-x^2)\,dx+\int_{1}^{2}(x^3-2x^2)dx$

$=\Big[-\frac{1}{3}x^3\Big]_{0}^{1}+\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\Big]_{1}^{2}$

$=-\frac{1}{3}+\Big\{\Big(4-\frac{16}{3}\Big)-\Big(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\Big)\Big\}$

$=-\frac{5}{4}$ 답 $-\frac{5}{4}$

다른 풀이 $y=xf(x-1)$의 그래프는 $y=(x+1)f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 주어진 정적분의 값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$\int_{0}^{2}xf(x-1)dx$

$=\int_{-1}^{1}(x+1)f(x)dx$

$=\int_{-1}^{0}(x+1)f(x)dx+\int_{0}^{1}(x+1)f(x)dx$

$=\int_{-1}^{0}(x+1)(-x-1)dx+\int_{0}^{1}(x+1)(x^2-1)dx$

$=\int_{-1}^{0}(-x^2-2x-1)dx+\int_{0}^{1}(x^3+x^2-x-1)dx$

$=\Big[-\frac{1}{3}x^3-x^2-x\Big]_{-1}^{0}+\Big[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x\Big]_{0}^{1}$

$=-\Big(\frac{1}{3}-1+1\Big)+\Big(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-1\Big)$

$=-\frac{5}{4}$

05 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 경계로 구간을 나누어 절댓값 기호를 없앤 후 각 정적분의 값의 합을 구한다.

풀이 $x(x-1)^2=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$이고 $(x-1)^2\ge0$이므로

$|x(x-1)^2|=\begin{cases}x(x-1)^2 & (x\ge0)\\ -x(x-1)^2 & (x\le0)\end{cases}$, 즉

$|x(x-1)^2|=\begin{cases}x^3-2x^2+x & (x\ge0)\\ -x^3+2x^2-x & (x\le0)\end{cases}$

$\therefore \int_{-1}^{1}|x(x-1)^2|dx$

$=\int_{-1}^{0}(-x^3+2x^2-x)dx+\int_{0}^{1}(x^3-2x^2+x)dx$

$=\Big[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^{0}$

$+\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\Big]_{0}^{1}$

$=-\Big(-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\Big)+\Big(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\Big)=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

06 해결과정 • $f(x)=f(-x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로 $\int_{-3}^{3}f(x)dx=2\int_{0}^{3}f(x)dx$ ➜ 30% 배점

$g(x)=-g(-x)$에서 $g(x)$는 기함수이므로

$\int_{-3}^{3}g(x)dx=0$ ➜ 30% 배점

답구하기 • $\therefore \int_{-3}^{3}\{f(x)+g(x)\}dx$

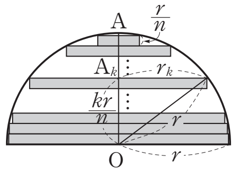
$$=\int_{-3}^{3}f(x)dx+\int_{-3}^{3}g(x)dx$$

$$=2\int_{0}^{3}f(x)dx=2\cdot5=10$$

➔ 40% 배점

답 10

07 문제이해 • 오른쪽 그림과 같이 반구의 반지름 $\overline{OA}$를 n등분하여 각 분점을 지나고 밑면에 평행한 평면으로 반구를 잘라 $(n-1)$개의 원기둥을 만든다.



➔ 10% 배점

해결과정 • $\overline{OA_k}=\frac{kr}{n}$이므로 아래에서 k번째 있는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이 r_k는 피타고라스 정리에 의하여

$$r_k=\sqrt{r^2-\left(\frac{kr}{n}\right)^2}=\sqrt{\frac{r^2}{n^2}(n^2-k^2)}=\frac{r}{n}\sqrt{n^2-k^2}$$

➔ 30% 배점

따라서 각 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 아래에서부터 차례대로

$$\frac{r}{n}\sqrt{n^2-1^2},\ \frac{r}{n}\sqrt{n^2-2^2},\ \cdots,\ \frac{r}{n}\sqrt{n^2-(n-1)^2}$$

이고 $(n-1)$개의 원기둥의 부피의 합 V_n은

$$V_n=\frac{r}{n}\cdot\pi\frac{(n^2-1^2)r^2}{n^2}+\frac{r}{n}\cdot\pi\frac{(n^2-2^2)r^2}{n^2}$$

$$+\cdots+\frac{r}{n}\cdot\pi\frac{\{n^2-(n-1)^2\}r^2}{n^2}$$

$$=\frac{r^3}{n^3}\pi[(n^2-1^2)+(n^2-2^2)$$

$$+\cdots+\{n^2-(n-1)^2\}]$$

$$=\frac{r^3}{n^3}\pi\left\{(n-1)n^2-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right\}$$

$$=\frac{r^3}{n^3}\pi\frac{(n-1)n(4n+1)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\pi r^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{1}{n}\right)$$

➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$V=2\lim_{n\to\infty}V_n=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\pi r^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\pi r^3$$

➔ 20% 배점

답 $\frac{4}{3}\pi r^3$

08 해결과정 • $\int_{0}^{1}xf(x)dx$

$$=\int_{0}^{1}(ax^3-bx^2+2x)dx$$

$$=\left[\frac{a}{4}x^4-\frac{b}{3}x^3+x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{a}{4}-\frac{b}{3}+1$$

즉 $\frac{a}{4}-\frac{b}{3}+1=\frac{1}{12}$이므로

$3a-4b=-11$ …… ㉠

➔ 40% 배점

$$\int_{0}^{1}x^2f(x)dx=\int_{0}^{1}(ax^4-bx^3+2x^2)dx$$

$$=\left[\frac{a}{5}x^5-\frac{b}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{a}{5}-\frac{b}{4}+\frac{2}{3}$$

즉 $\frac{a}{5}-\frac{b}{4}+\frac{2}{3}=-\frac{1}{30}$이므로

$4a-5b=-14$ …… ㉡

➔ 40% 배점

답구하기 • ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=2$

$\therefore a+b=1$

➔ 20% 배점

답 1

09 전략 정적분의 성질을 이용하여 주어진 등식을 변형한다.

풀이 정적분의 성질에 의하여

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$$

이때 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx$이므로

$$\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$$

$$\therefore \int_{0}^{1}f(x)dx=0$$

따라서

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx=0$$

이다.

한편 $f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq0)$로 놓으면

$f(0)=-1$이므로 $c=-1$

따라서 $f(x)=ax^2+bx-1$이므로

$$\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}(ax^2+bx-1)dx$$

$$=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2-x\right]_0^1$$

$$=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}-1=0 \quad\cdots\cdots ㉠$$

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (ax^2+bx-1)dx$$
$$= \left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2-x\right]_{-1}^{0}$$
$$= -\left(-\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+1\right)$$
$$= \frac{a}{3}-\frac{b}{2}-1=0 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3,\ b=0$

따라서 $f(x)=3x^2-1$이므로

$\quad f(2)=3\cdot 2^2-1=11$ 답 ①

10 전략 먼저 연산 기호 $*$의 정의에 따라 구간을 나누어 $x*x^2$을 구한다.

풀이 $f(x)=x-x^2=x(1-x)$라 하면

$f(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

따라서 $x\le 0$ 또는 $x\ge 1$일 때 $f(x)\le 0$, $0\le x\le 1$일 때 $f(x)\ge 0$이므로

$$x*x^2=\begin{cases} x^2 & (x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ x & (0\le x\le 1) \end{cases}$$

$$\therefore \int_0^2 (x*x^2)dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 x^2\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2$$
$$= \frac{1}{2}+\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{17}{6}$$

답 $\frac{17}{6}$

11 전략 먼저 $y=|f(x)|$의 그래프를 그린 후 $g(t)$를 구한다.

풀이 $f(x)=x^3-3x-1$에서

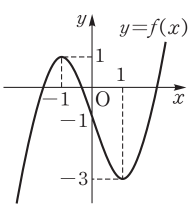
$\quad f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

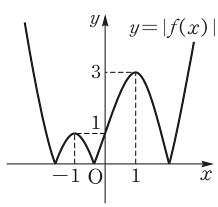
$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$와 $y=|f(x)|$의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.





따라서 $g(t)=\begin{cases} 1 & (-1\le t\le 0) \\ -t^3+3t+1 & (0\le t\le 1) \end{cases}$이므로

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt = \int_{-1}^{0} 1\,dt + \int_0^1 (-t^3+3t+1)dt$$
$$= \Big[t\Big]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+t\right]_0^1$$
$$= -(-1)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+1\right)=\frac{13}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=13$이므로

$\quad p+q=17$ 답 17

Remark 함수 $y=|f(x)|$의 그래프

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 다음과 같은 방법으로 그린다.

(i) $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

(ii) $y\ge 0$인 부분은 그대로 둔다.

(iii) $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한다.

12 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 경계로 구간을 나누어 $f(x)$를 구한다.

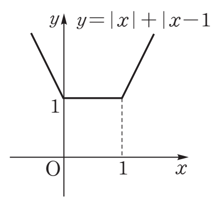
풀이 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은 0, 1이므로

$\quad x\ge 1$일 때, $\quad f(x)=x+(x-1)=2x-1$

$\quad 0\le x\le 1$일 때, $\quad f(x)=x-(x-1)=1$

$\quad x\le 0$일 때, $\quad f(x)=-x-(x-1)=-2x+1$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $f(x)$의 최솟값은 1이므로



$\quad a=1$

$$\therefore \int_{-1}^{a} f(x)dx$$
$$= \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (-2x+1)dx + \int_0^1 1\,dx$$
$$= \Big[-x^2+x\Big]_{-1}^{0} + \Big[x\Big]_0^1$$
$$= -(-1-1)+1=3$$

답 3

Remark

$y=|x-a|+|x-b|\ (a<b)$ 꼴의 함수는 $a\le x\le b$에서 최솟값 $b-a$를 갖는다.

13 문제이해 • $f'(x)=3x^2-2x+1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx = \int (3x^2-2x+1)dx$$
$$= x^3-x^2+x+C$$

➔ 20% 배점

해결과정 • $\therefore \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} (x^3 - x^2 + x + C)dx$

$$= 2\int_{0}^{1}(-x^2 + C)dx$$
$$= 2\left[-\frac{1}{3}x^3 + Cx\right]_0^1$$
$$= 2\left(-\frac{1}{3} + C\right)$$

➔ 30% 배점

이때 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$이므로

$$2\left(-\frac{1}{3} + C\right) = 0 \qquad \therefore C = \frac{1}{3}$$

➔ 20% 배점

답구하기 • 따라서 $f(x) = x^3 - x^2 + x + \frac{1}{3}$이므로

$$\int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{2}\left(x^3 - x^2 + x + \frac{1}{3}\right)dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x\right]_0^2$$
$$= 4 - \frac{8}{3} + 2 + \frac{2}{3} = 4$$

➔ 30% 배점

답 4

14 문제이해 • $f(x) = f(-x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로 $\quad b = 0$

$f(1) = 2$에서 $a + b + c = 2$이고 $b = 0$이므로

$$a + c = 2 \qquad \therefore c = 2 - a$$

➔ 30% 배점

해결과정 • 따라서 $f(x) = ax^2 + 2 - a = a(x^2 - 1) + 2$이므로

$$\int_{0}^{1} \{f(x)\}^2 dx$$
$$= \int_{0}^{1} \{a(x^2 - 1) + 2\}^2 dx$$
$$= \int_{0}^{1} \{a^2(x^4 - 2x^2 + 1) + 4a(x^2 - 1) + 4\}dx$$
$$= a^2\int_{0}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1)dx$$
$$\quad + 4a\int_{0}^{1} (x^2 - 1)dx + \int_{0}^{1} 4\,dx$$
$$= a^2\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x\right]_0^1 + 4a\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^1 + \left[4x\right]_0^1$$
$$= a^2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right) + 4a\left(\frac{1}{3} - 1\right) + 4$$
$$= \frac{8}{15}a^2 - \frac{8}{3}a + 4$$
$$= \frac{8}{15}\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{2}{3}$$

➔ 40% 배점

따라서 $\int_{0}^{1} \{f(x)\}^2 dx$의 값은 $a = \frac{5}{2}$일 때 최소이므로

$$a = \frac{5}{2},\ c = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

➔ 20% 배점

답구하기 • $\therefore 3a + 2b + c = 3 \cdot \frac{5}{2} + 2 \cdot 0 - \frac{1}{2} = 7$

➔ 10% 배점

답 7

15 전략 위끝과 아래끝의 절댓값이 같고 부호가 다르므로 우함수, 기함수의 정적분을 이용한다.

풀이 $f(x) = x + 1$에서

$$\int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2 dx = \int_{-1}^{1} (x+1)^2 dx$$
$$= \int_{-1}^{1} (x^2 + 2x + 1)dx$$
$$= 2\int_{0}^{1} (x^2 + 1)dx = 2\left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1$$
$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{8}{3}$$
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} (x+1)\,dx$$
$$= 2\int_{0}^{1} 1\,dx = 2\Big[x\Big]_0^1 = 2$$

따라서 $\int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2 dx = k\left(\int_{-1}^{1} f(x)dx\right)^2$에서

$$\frac{8}{3} = k \cdot 2^2 \qquad \therefore k = \frac{2}{3}$$

답 ④

16 전략 $f(-x) = -f(x)$이므로 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $f(-x) = -f(x)$이므로

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$\therefore \int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx$$
$$= \int_{1}^{3} f(x)dx$$

ㄴ. $y = f(x-1)$의 그래프는 $y = f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$$\int_{0}^{4} f(x-1)dx = \int_{-1}^{3} f(x)dx$$

이때 ㄱ에서 $\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{1}^{3} f(x)dx$이므로

$$\int_{0}^{4} f(x-1)dx = \int_{1}^{3} f(x)dx$$

ㄷ. $y = f(x+1)$의 그래프는 $y = f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$$\int_{0}^{2} f(x+1)dx = \int_{1}^{3} f(x)dx$$

이때 $f(-x) = -f(x)$이므로 $y = f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$$\therefore \int_1^3 f(x)dx = -\int_{-3}^{-1} f(x)dx$$
$$= -\int_{-3}^{1} f(x)dx \ (\because \text{㉠})$$
$$= -\int_{-2}^{2} f(x-1)dx$$
$$\therefore \int_0^2 f(x+1)dx = -\int_{-2}^{2} f(x-1)dx$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

17 전략 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

풀이 ㄱ. 조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 증가함수이므로

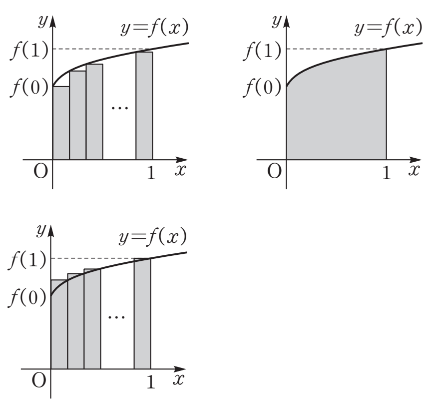
$0<x<1$에서 $\quad f'(x)\ge 0$

ㄴ. $g(x)=f(x)-3x$라 하면 $g(x)$는 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 연속이고 조건 (가)에서 $2<f(0)<3$, $2<f(1)<3$이므로

$g(0)=f(0)>0$, $g(1)=f(1)-3<0$

따라서 사이값 정리에 의하여 방정식 $f(x)-3x=0$의 해가 열린 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. 주어진 부등식의 각 변은 차례대로 다음 그림의 색칠한 도형의 넓이와 같으므로



$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} < \int_0^1 f(x)dx < \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

Remark 사이값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)\ne f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

18 해결과정 • $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

$$= \int_{-1}^{1} (-x^2+1)dx$$
$$= 2\int_0^1 (-x^2+1)dx$$
$$= 2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1 = 2\left(-\frac{1}{3}+1\right)$$
$$= \frac{4}{3}$$

➔ 40% 배점

한편 $f(x-1)=f(x+1)$, 즉 $f(x)=f(x+2)$에서 $f(x)$는 주기함수이므로

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx = \cdots = \int_7^9 f(x)dx$$

➔ 40% 배점

답구하기 • $\therefore \int_{-1}^{9} f(x)dx = 5\cdot\frac{4}{3} = \frac{20}{3}$ ➔ 20% 배점

답 $\frac{20}{3}$

19 전략 함수 $y=f(x)$와 $y=f(-x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 ㄱ. 함수 $y=f(x)$와 $y=f(-x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(-x)dx$$

ㄴ. $\int_{-k}^{k} f(x)dx = \int_{-k}^{0} f(x)dx + \int_0^k f(x)dx$

$$= \int_{-k}^{0} f(x)dx + \int_{-k}^{0} f(-x)dx$$
$$= \int_{-k}^{0} \{f(x)+f(-x)\}dx$$
$$= \int_{-k}^{0} 2\,dx = \Big[2x\Big]_{-k}^{0}$$
$$= -(-2k) = 2k$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\int_{-k}^{k} f(x)dx = \sum_{k=1}^{10} 2k$$
$$= 2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}$$
$$= 110$$

ㄷ. $f(x)+f(-x)=2$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\int_{-k}^{k} x\{f(x)+f(-x)\}dx$$
$$= \sum_{k=1}^{10}\int_{-k}^{k} 2x\,dx = \sum_{k=1}^{10} 0 = 0$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

Ⅳ. 다항함수의 적분법

11 정적분 (2)

유제
본책 263~274쪽

091-1 (1) $\int_0^1 tf(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=-3x^2+2x+k$

$f(t)=-3t^2+2t+k$를 ㉠에 대입하면

$$\int_0^1 t(-3t^2+2t+k)dt$$
$$=\int_0^1 (-3t^3+2t^2+kt)dt$$
$$=\left[-\frac{3}{4}t^4+\frac{2}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_0^1$$
$$=-\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{k}{2}=k$$
$$\therefore k=-\frac{1}{6}$$

따라서 $f(x)=-3x^2+2x-\frac{1}{6}$이므로

$$f(1)=-3+2-\frac{1}{6}=-\frac{7}{6}$$

(2) $f(x)=-3x^2+\int_0^1 (x-1)f(t)dt$

$$=-3x^2+x\int_0^1 f(t)dt-\int_0^1 f(t)dt$$

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=-3x^2+kx-k$

$f(t)=-3t^2+kt-k$를 ㉠에 대입하면

$$\int_0^1 (-3t^2+kt-k)dt=\left[-t^3+\frac{k}{2}t^2-kt\right]_0^1$$
$$=-1+\frac{k}{2}-k=k$$
$$\therefore k=-\frac{2}{3}$$

따라서 $f(x)=-3x^2-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$이므로

$$f(1)=-3-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=-3$$

답 (1) $-\frac{7}{6}$ (2) -3

092-1 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-2$

주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=a^2-2a-3,\quad (a+1)(a-3)=0$

$a<0$이므로 $a=-1$

$\therefore f(a)=f(-1)=-2-2=-4$

답 -4

092-2 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=6x^2+2x+f(x)$

$xf'(x)=6x^2+2x \qquad \therefore f'(x)=6x+2$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int (6x+2)dx$$
$$=3x^2+2x+C \qquad \cdots\cdots ㉠$$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2f(2)=16+4+0 \qquad \therefore f(2)=10$

$x=2$를 ㉠에 대입하면 $f(2)=12+4+C=10$

$\therefore C=-6$

따라서 $f(x)=3x^2+2x-6$이므로

$f(1)=3+2-6=-1$

답 -1

093-1 주어진 등식의 좌변은

$$\int_1^x (x-t)f(t)dt=x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt$$

이므로 주어진 등식은

$$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=2x^3+3x^2-12x+7$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=6x^2+6x-12$$
$$\therefore \int_1^x f(t)dt=6x^2+6x-12$$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x+6$

$\therefore f(-1)=-12+6=-6$

답 -6

093-2 주어진 등식의 좌변은

$$\int_{-1}^x (x-t)f(t)dt=x\int_{-1}^x f(t)dt-\int_{-1}^x tf(t)dt$$

이므로 주어진 등식은

$$x\int_{-1}^x f(t)dt-\int_{-1}^x tf(t)dt=x^3+ax^2-bx+3$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_{-1}^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+2ax-b$$
$$\therefore \int_{-1}^x f(t)dt=3x^2+2ax-b$$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=3-2a-b$

$\therefore 2a+b=3 \qquad \cdots\cdots ㉠$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-1+a+b+3$

$\therefore a+b=-2 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5,\ b=-7$

$\therefore\ a-b=12$

답 12

094-1 $f(x)=\int_0^x(3t^2+6t-9)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)$
$=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$일 때 극대, $x=1$일 때 극소이고

$f(-3)=\int_0^{-3}(3t^2+6t-9)dt$
$=\Big[t^3+3t^2-9t\Big]_0^{-3}=-27+27+27=27,$

$f(1)=\int_0^1(3t^2+6t-9)dt$
$=\Big[t^3+3t^2-9t\Big]_0^1=1+3-9=-5$

이므로 극댓값은 27, 극솟값은 -5이다.

답 극댓값: 27, 극솟값: -5

094-2 $f(x)=\int_1^x(4t^3-3t^2+kt)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=4x^3-3x^2+kx=x(4x^2-3x+k)$

이때 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 그런데 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $4x^2-3x+k=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

방정식 $4x^2-3x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9-16k>0 \qquad \therefore\ k<\frac{9}{16}$

이때 $x=0$이 방정식 $4x^2-3x+k=0$의 근이 아니어야 하므로 $k\neq0$

$\therefore\ k<0$ 또는 $0<k<\frac{9}{16}$

답 $k<0$ 또는 $0<k<\frac{9}{16}$

095-1 $f(x)=\int_1^x t(t^2-1)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x(x^2-1)=x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$-1\le x\le1$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $f(x)$는 $x=0$일 때 극대이면서 최대이고

$f(0)=\int_1^0 t(t^2-1)dt=\int_1^0(t^3-t)dt$
$=\Big[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\Big]_1^0=-\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\Big)$
$=\frac{1}{4}$

이므로 $-1\le x\le1$에서 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{4}$이다.

답 $\frac{1}{4}$

095-2 $g(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x+1)-f(x)$
$=\{(x+1)^2-5(x+1)+1\}-(x^2-5x+1)$
$=2x-4$

$g'(x)=0$에서 $x=2$

함수 $g(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗

따라서 $g(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이고

$g(2)=\int_2^3(t^2-5t+1)dt=\Big[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+t\Big]_2^3$
$=\Big(9-\frac{45}{2}+3\Big)-\Big(\frac{8}{3}-10+2\Big)$
$=-\frac{31}{6}$

이므로 $g(x)$의 최솟값은 $-\frac{31}{6}$이다.

답 $-\frac{31}{6}$

096-1 (1) $f(t)=(t+1)^3$으로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^{x^3}f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\Big[F(t)\Big]_{-1}^{x^3}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{F(x^3)-F(-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{F(x^3)-F(-1)}{x^3-(-1)}\cdot(x^2-x+1)$$
$$=3F'(-1)=3f(-1)=3\cdot(-1+1)^3=0$$

(2) $f(t)=(2t-1)^3(t+1)^2$으로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_2^{2+h}f(t)dt$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(t)\Big]_2^{2+h}=\lim_{h\to0}\frac{F(2+h)-F(2)}{h}$$
$$=F'(2)=f(2)$$
$$=(2\cdot2-1)^3(2+1)^2=243$$

답 (1) 0 (2) 243

096-2 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\Big[F(t)\Big]_2^x=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$
$$=F'(2)=f(2)=-16+8+1=-7$$

답 -7

097-1 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(4+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}$에서 $4+\frac{2k}{n}$를 x로, $\frac{2}{n}$를 dx로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n\longrightarrow\infty$이면 $x=4$이고,

$k=n$이면 $x=6$

이므로 적분 구간은 $[4,\ 6]$이다.

$$\therefore\ (\text{주어진 식})=\int_4^6 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_4^6=10$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{3}{n}=3\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}$에서 $1+\frac{k}{n}$를 x로, $\frac{1}{n}$을 dx로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n\longrightarrow\infty$이면 $x=1$이고,

$k=n$이면 $x=2$

이므로 적분 구간은 $[1,\ 2]$이다.

$$\therefore\ (\text{주어진 식})=3\int_1^2 x^4\,dx=3\left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^2$$
$$=3\left(\frac{32}{5}-\frac{1}{5}\right)=\frac{93}{5}$$

답 (1) 10 (2) $\frac{93}{5}$

다른 풀이 1 (1) $\frac{2k}{n}$를 x로, $\frac{2}{n}$를 dx로 나타낼 때,

$$(\text{주어진 식})=\int_0^2(4+x)dx=\left[4x+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2$$
$$=8+2=10$$

(2) $\frac{k}{n}$를 x로, $\frac{1}{n}$을 dx로 나타낼 때,

$$(\text{주어진 식})=3\int_0^1(1+x)^4dx$$
$$=3\int_0^1(x^4+4x^3+6x^2+4x+1)dx$$
$$=3\left[\frac{1}{5}x^5+x^4+2x^3+2x^2+x\right]_0^1$$
$$=3\cdot\left(\frac{1}{5}+1+2+2+1\right)=\frac{93}{5}$$

다른 풀이 2 (1) $\frac{k}{n}$를 x로, $\frac{1}{n}$을 dx로 나타낼 때,

$$(\text{주어진 식})=2\int_0^1(4+2x)dx=2\left[4x+x^2\right]_0^1$$
$$=2\cdot(4+1)=10$$

098-1 (주어진 식)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(2n+k)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}k^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(2n+k)^2\cdot\frac{1}{n^3}}{\sum\limits_{k=1}^{n}k^2\cdot\frac{1}{n^3}}$$
$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}}=\frac{\int_2^3 x^2\,dx}{\int_0^1 x^2\,dx}$$
$$=\frac{\left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^3}{\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1}=19$$

답 19

099-1 점 P_k의 좌표가 $\left(\frac{k}{n},\ 2\sqrt{\frac{k}{n}+1}\right)$이므로

$$\overline{OP_k}=\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2+4\left(\frac{k}{n}+1\right)}$$
$$=\sqrt{\left(2+\frac{k}{n}\right)^2}=2+\frac{k}{n}$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{OP_k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\int_2^3 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^3$$
$$=\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

중단원 연습 문제

본책 275~278쪽

01 ①	02 8	03 $f(x)=6x^2+5$	04 -5	
05 ④	06 16	07 2	08 40	09 19
10 ②	11 ②	12 -2	13 -30	14 ⑤
15 14	16 12	17 ①	18 ③	19 30

01 전략 $\int_0^1 f(t)dt$가 상수임을 이용한다.

풀이 $f(x)=6x^2+\int_0^1 (4x-3)f(t)dt$

$$=6x^2+4x\int_0^1 f(t)dt-3\int_0^1 f(t)dt$$

이므로

$$\int_0^1 f(t)dt=k\ (k\text{는 상수}) \quad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓으면 $f(x)=6x^2+4kx-3k$

$f(t)=6t^2+4kt-3k$를 ㉠에 대입하면

$$\int_0^1 (6t^2+4kt-3k)dt=\Big[2t^3+2kt^2-3kt\Big]_0^1$$
$$=2+2k-3k=k$$

$\therefore\ k=1$

따라서 구하는 값은 1이다. 답 ①

02 해결과정 • 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)-3x^2+2x$$
$$xf'(x)=3x^2-2x \qquad \therefore\ f'(x)=3x-2$$
$$\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx=\int (3x-2)dx$$
$$=\frac{3}{2}x^2-2x+C \quad \cdots\cdots ㉠$$

→ 40% 배점

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=f(1)-1+1 \qquad \therefore\ f(1)=0$ → 20% 배점

$x=1$을 ㉠에 대입하면

$$f(1)=\frac{3}{2}-2+C, \qquad \frac{3}{2}-2+C=0$$

$\therefore\ C=\frac{1}{2}$ → 20% 배점

답구하기 • 따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}$이므로

$f(3)=\frac{27}{2}-6+\frac{1}{2}=8$ → 20% 배점

답 8

03 전략 적분변수 이외의 문자는 상수처럼 생각하고 식을 정리한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

풀이 $\int_0^x (x-t)f'(t)dt=2x^3$에서

$$x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=2x^3$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=6x^2$$
$$\int_0^x f'(t)dt=6x^2, \qquad \Big[f(t)\Big]_0^x=6x^2$$
$$\therefore\ f(x)-f(0)=6x^2$$

$f(0)=5$이므로 $f(x)=6x^2+5$

답 $f(x)=6x^2+5$

04 해결과정 • $F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$F'(x)=f(x)=12x^3-12x^2-24x$$
$$=12x(x^2-x-2)$$
$$=12x(x+1)(x-2)$$

$F'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[0, 3]$에서 함수 $F(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$F'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$		↘	극소	↗	

→ 40% 배점

이때

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$
$$=\int_0^x (12t^3-12t^2-24t)dt$$
$$=\Big[3t^4-4t^3-12t^2\Big]_0^x$$
$$=3x^4-4x^3-12x^2$$

이므로

$F(0)=0$

$F(2)=48-32-48=-32$

$F(3)=243-108-108=27$ → 40% 배점

답구하기 • 따라서 구간 $[0, 3]$에서 $F(x)$의 최댓값은 27, 최솟값은 -32이다.

$\therefore\ M+m=27+(-32)=-5$ → 20% 배점

답 -5

05 전략 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a}f(t)dt=f(a)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2+x+1$로 놓고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1+h}f(x)dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_{1-h}^{1+h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)+F(1)-F(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{F(1-h)-F(1)}{-h}$$
$$=F'(1)+F'(1)=2F'(1)=2f(1)$$
$$=2\cdot(1+1+1)=6$$

답 ④

06 전략 적분변수를 정한 후 적분 구간을 구하고 급수를 정적분으로 나타낸다.

풀이 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{3}{n}=3\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

에서 $2+\frac{k}{n}$를 x로, $\frac{1}{n}$을 dx로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n\longrightarrow\infty$이면 $x=2$이고,

$k=n$이면 $x=3$

이므로 적분 구간은 $[2,\ 3]$이다.

$$\therefore\ (\text{주어진 식})=3\int_2^3f(x)dx=3\int_2^3(x^2-1)dx$$
$$=3\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_2^3$$
$$=3\left\{(9-3)-\left(\frac{8}{3}-2\right)\right\}$$
$$=16$$

답 16

07 전략 $\int_0^a\left\{2+\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=k$($k$는 상수)로 놓고, 주어진 식에 대입한다.

풀이 $\int_0^a\left\{2+\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면 $\quad f(x)-x^2+2ax=3k$

$\therefore\ f(x)=x^2-2ax+3k$

$f(0)=0$이므로 $\quad k=0$

즉 $f(t)=t^2-2at$이므로

$\frac{d}{dt}f(t)=2t-2a$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^a(2+2t-2a)dt=\Big[t^2+(2-2a)t\Big]_0^a$$
$$=a^2+(2-2a)a=k$$

즉 $-a^2+2a=0$이므로 $\quad a(a-2)=0$

그런데 $a>0$이므로 $\quad a=2$

답 2

다른 풀이 $f(x)-x^2+2ax$

$$=3\int_0^a\left\{2+\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt$$
$$=3\Big[2t+f(t)\Big]_0^a$$
$$=3\{2a+f(a)\}-3\{0+f(0)\}$$

이때 $f(0)=0$이므로

$f(x)-x^2+2ax=3\{2a+f(a)\}$ ...... ㉠

$x=0$을 ㉠에 대입하면 $\quad 0=3\{2a+f(a)\}$

$\therefore\ f(a)=-2a$ ...... ㉡

$x=a$를 ㉠에 대입하면

$f(a)-a^2+2a^2=3\{2a+f(a)\}$

$\therefore\ a^2-6a-2f(a)=0$ ...... ㉢

㉡을 ㉢에 대입하여 정리하면

$a^2-2a=0,\quad a(a-2)=0$

그런데 $a>0$이므로 $\quad a=2$

08 전략 $\int_0^1f(t)dt=k$(k는 상수)로 놓고, 주어진 식에 대입한다.

풀이 $\int_0^1f(t)dt=k$(k는 상수)로 놓으면

$\int_0^xf(t)dt=x^3-2x^2-2kx$ ...... ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$$\int_0^1f(t)dt=1-2-2k=k$$

$3k=-1\qquad\therefore\ k=-\frac{1}{3}$

$k=-\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^xf(t)dt=x^3-2x^2+\frac{2}{3}x$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=3x^2-4x+\frac{2}{3}$$

$f(0)=a$이므로 $\quad a=\frac{2}{3}$

$\therefore\ 60a=60\cdot\frac{2}{3}=40$

답 40

09 해결과정 • $\int_2^x (x-t)f(t)dt=-x^3+4ax+b$ 에서

$$x\int_2^x f(t)dt-\int_2^x tf(t)dt=-x^3+4ax+b \quad \cdots\cdots ㉠$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_2^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=-3x^2+4a$$

$$\therefore \int_2^x f(t)dt=-3x^2+4a \quad \cdots\cdots ㉡$$

➔ 40% 배점

$x=2$를 ㉠에 대입하면

$$0=-8+8a+b \quad \cdots\cdots ㉢$$

$x=2$를 ㉡에 대입하면 $0=-12+4a$

$\therefore a=3$

$a=3$을 ㉢에 대입하면 $b=-16$ ➔ 40% 배점

답구하기 • $\therefore a-b=3-(-16)=19$ ➔ 20% 배점

답 19

10 전략 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분한다.

풀이 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$F'(x)=f(x)=x^3-3x+a$$

따라서 사차함수 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 갖기 위해서는 $F(x)$의 도함수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

(극댓값)×(극솟값)≥ 0

이어야 한다.

$f(x)=x^3-3x+a$에서

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

즉 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극값을 가지므로

$$f(-1)f(1)\geq 0, \quad (2+a)(-2+a)\geq 0$$

$\therefore a\leq -2$ 또는 $a\geq 2$

따라서 양수 a의 최솟값은 2이다. 답 ②

11 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 이차식 $f(x)$를 구한 후 $g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구한다.

풀이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(1,\ 0)$, $(4,\ 0)$을 지나고 아래로 볼록하므로

$$f(x)=a(x-1)(x-4)\ (a>0)$$

로 놓을 수 있다.

$g(x)=\int_x^{x+1} f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} g'(x)&=f(x+1)-f(x)\\ &=ax(x-3)-a(x-1)(x-4)\\ &=ax^2-3ax-a(x^2-5x+4)\\ &=2ax-4a=2a(x-2)\end{aligned}$$

$g'(x)=0$에서 $x=2\ (\because a>0)$

함수 $g(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗

따라서 $g(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 x의 값은 2이다. 답 ②

12 전략 $f(t)=|t-a|$로 놓고 정적분으로 정의된 함수의 극한을 이용한다.

풀이 $f(t)=|t-a|$로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_0^x\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}\\ &=F'(0)=f(0)\\ &=|-a|=-a\ (\because a<0)\end{aligned}$$

따라서 $-a=a^2-2$이므로

$$a^2+a-2=0, \quad (a+2)(a-1)=0$$

그런데 $a<0$이므로 $a=-2$ 답 -2

13 해결과정 • $h\neq 0$일 때, 주어진 등식의 양변을 h로 나누면

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

위의 식의 양변에 극한을 취하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

즉 $g'(x)=f(x)$이므로

$$g(x)=\int f(x)dx=\int (x^2-4x)dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3-2x^2+C$$

➔ 40% 배점

이때 $g(3)=1$이므로

$9-18+C=1 \qquad \therefore C=10$

$\therefore g(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+10$ ➜ 30% 배점

답구하기 • 따라서 방정식 $\frac{1}{3}x^3-2x^2+10=0$의 모든 근의 곱은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\dfrac{10}{\frac{1}{3}}=-30$ ➜ 30% 배점

답 -30

Remark 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때,

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

14

전략 적분변수를 정한 후 적분 구간을 구하고 급수를 정적분으로 나타낸다.

풀이 ㄱ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{2}{n}$

$\frac{2k}{n}$를 x로, $\frac{2}{n}$를 dx로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n\longrightarrow\infty$이면 $x=0$이고,

$k=n$이면 $x=2$

이므로 적분 구간은 $[0,\ 2]$이다.

$\displaystyle\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\int_0^2(1+x)^2dx$

ㄴ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{2n}\right)^2\frac{1}{n}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{2n}\right)^2\frac{1}{2n}\cdot 2$

$\displaystyle=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{2n}\right)^2\frac{1}{2n}$

$\frac{k}{2n}$를 x로, $\frac{1}{2n}$을 dx로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n\longrightarrow\infty$이면 $x=0$이고,

$k=2n$이면 $x=1$

이므로 적분 구간은 $[0,\ 1]$이다.

$\displaystyle\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{2n}\right)^2\frac{1}{n}=2\int_0^1(1+x)^2dx$

ㄷ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{3n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$에서 $\frac{k}{n}$를 x로, $\frac{1}{n}$을 dx로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n\longrightarrow\infty$이면 $x=0$이고,

$k=3n$이면 $x=3$

이므로 적분 구간은 $[0,\ 3]$이다.

$\displaystyle\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{3n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\int_0^3(1+x)^2dx$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

15

전략 A_1과 A_n의 넓이를 이용하여 상수 a, b의 값을 구한 후 급수를 정적분으로 나타낸다.

풀이 $A_1=\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{a}{n}+b\right)$

$=\dfrac{1+an+bn^2}{n^3}$,

$A_n=\frac{1}{n}f(1)=\frac{1}{n}(1+a+b)=\dfrac{(1+a+b)n^2}{n^3}$

이므로

$A_1+A_n=\dfrac{1+an+bn^2}{n^3}+\dfrac{(1+a+b)n^2}{n^3}$

즉 $\dfrac{(1+a+2b)n^2+an+1}{n^3}=\dfrac{7n^2+1}{n^3}$이므로

$1+a+2b=7,\ a=0$

$\therefore a=0,\ b=3$

따라서 $f(x)=x^2+3$이고

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k=8\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

$\displaystyle=8\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

$\frac{k}{n}$를 x로, $\frac{1}{n}$을 dx로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n\longrightarrow\infty$이면 $x=0$이고,

$k=n$이면 $x=1$

이므로 적분 구간은 $[0,\ 1]$이다.

$\displaystyle\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k=8\int_0^1 xf(x)dx$

$\displaystyle=8\int_0^1(x^3+3x)dx$

$=8\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1$

$=8\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)=14$

답 14

16 전략 적분변수를 정한 후 적분 구간을 구하고 급수를 정적분으로 나타낸다.

풀이 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{3k}{n}\right)=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{3k}{n}\right)\cdot\frac{3}{n}$

$\frac{3k}{n}$를 x로, $\frac{3}{n}$을 dx로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n\longrightarrow\infty$이면 $x=0$이고,

$k=n$이면 $x=3$

이므로 적분 구간은 $[0,\ 3]$이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{3k}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^3 f(x)dx=\frac{1}{3}\int_0^3(3x^2-ax)dx$$
$$=\frac{1}{3}\left[x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^3=9-\frac{3}{2}a$$

이때 $f(1)=3-a$이므로

$$9-\frac{3}{2}a=3-a$$

$$\frac{1}{2}a=6\qquad\therefore a=12$$

답 12

17 전략 주어진 등식을 이용하여 먼저 $f(x)$의 차수를 알아본다.

풀이 $f(x)$의 차수를 n ($n\geq2$인 자연수)이라 하면 주어진 등식의 좌변의 차수는 n^2, 우변의 차수는 $n+1$이므로

$$n^2=n+1\qquad\therefore n^2-n-1=0$$

그런데 위의 식을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않으므로 $f(x)$는 일차 이하의 다항식이다.
따라서 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓고 주어진 식의 좌변과 우변을 정리하면

$$(\text{좌변})=af(x)+b=a(ax+b)+b$$
$$=a^2x+ab+b$$

이고

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x(at+b)dt=\left[\frac{1}{2}at^2+bt\right]_0^x$$
$$=\frac{1}{2}ax^2+bx$$

이므로

$$(\text{우변})=\frac{1}{2}ax^2+bx-x^2+3x+3$$
$$=\left(\frac{1}{2}a-1\right)x^2+(b+3)x+3$$

즉 $a^2x+ab+b=\left(\frac{1}{2}a-1\right)x^2+(b+3)x+3$에서

$$0=\frac{1}{2}a-1,\ a^2=b+3,\ ab+b=3$$

$$\therefore a=2,\ b=1$$

따라서 $f(x)=2x+1$이므로

$$f(1)=3$$

답 ①

Remark

$f(x)$의 차수가 n일 때, $f(f(x))$의 차수는 n^2, $\int_0^x f(t)dt$의 차수는 $n+1$이다. 그러나 이 문제에서 우변에 이차식 $-x^2+3x+3$이 있으므로 $\int_0^x f(t)dt$의 차수인 $n+1$이 항상 우변의 차수라 할 수 없다.
즉 $n\geq2$라는 조건이 있어야 우변의 차수가 $n+1$이라 할 수 있다.

18 전략 $G(x)$와 $G'(x)$를 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄱ. $G(0)=\int_2^0(0-t)f(t)dt=\int_0^2 tf(t)dt$

$0<t<2$일 때, $tf(t)>0$이므로

$$\int_0^2 tf(t)dt>0\qquad\therefore G(0)>0$$

ㄴ. $G(x)=x\int_2^x f(t)dt-\int_2^x tf(t)dt$이므로

$$G'(x)=\int_2^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)$$
$$=\int_2^x f(t)dt$$

(i) $0\leq x<2$일 때, $\int_2^x f(t)dt=-\int_x^2 f(t)dt$이고 $\int_x^2 f(t)dt>0$이므로

$$G'(x)<0$$

(ii) $x=2$일 때, $\int_2^2 f(t)dt=0$이므로

$$G'(x)=0$$

(iii) $2<x\leq3$일 때, $\int_2^x f(t)dt<0$이므로

$$G'(x)<0$$

이상에서 $0\leq x\leq3$에서 함수 $G(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$G'(x)$		$-$	0	$-$	
$G(x)$		↘	0	↘	

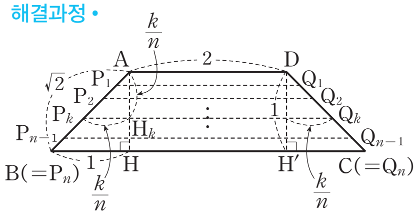
따라서 $x=2$의 좌우에서 $G'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=2$에서 극값을 갖지 않는다.

ㄷ. 구간 $(0,\ 3)$에서 $G'(x)\le 0$이므로 함수 $y=G(x)$는 감소함수이다.

따라서 구간 $[0,\ 3]$에서 $G(x)$는 $x=3$일 때 최소이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

19 해결과정 •



점 A, D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면 $\triangle ABH\equiv\triangle DCH'$이므로

$$\overline{BH}=\overline{CH'}=\frac{1}{2}(4-2)=1$$ ➔ 30% 배점

또 $\overline{AB}=\sqrt{2}$이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AH}=1$$

$\overline{AH}$와 $\overline{P_kQ_k}$의 교점을 H_k라 하면

$$\overline{AH_k}=\frac{k}{n},\ \overline{P_kH_k}=\frac{k}{n}$$

$$\therefore \overline{P_kQ_k}=2+\frac{2k}{n}$$ ➔ 30% 배점

답구하기 • $\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\overline{P_1Q_1}^3+\overline{P_2Q_2}^3+\cdots+\overline{P_nQ_n}^3)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{P_kQ_k}^3$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{2k}{n}\right)^3\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^4 x^3\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_2^4$$

$$=\frac{1}{2}(64-4)=30$$ ➔ 40% 배점

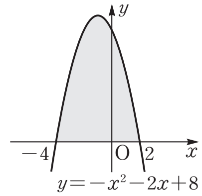
답 30

Ⅳ. 다항함수의 적분법

12 정적분의 활용

유제 본책 283~303쪽

100-1 (1) 곡선과 x축의 교점의 x좌표는



$-x^2-2x+8=0$에서

$x^2+2x-8=0$

$(x+4)(x-2)=0$

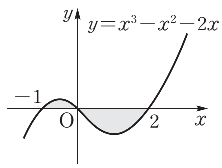
$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

$-4\le x\le 2$일 때 $y\ge 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-4}^{2}(-x^2-2x+8)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+8x\right]_{-4}^{2}=36$$

(2) 곡선과 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-x^2-2x=0$에서



$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

$-1\le x\le 0$일 때 $y\ge 0$, $0\le x\le 2$일 때 $y\le 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx-\int_{0}^{2}(x^3-x^2-2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

답 (1) 36 (2) $\frac{37}{12}$

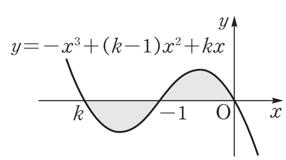
101-1 곡선과 x축의 교점의 x좌표는

$-x^3+(k-1)x^2+kx=0$에서

$x(x+1)(x-k)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=k$

이때 $k<-1$이므로 곡선 $y=-x^3+(k-1)x^2+kx$는 다음 그림과 같다.



이 곡선과 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_k^0 \{-x^3+(k-1)x^2+kx\}dx=0$$

$$\int_0^k \{x^3+(1-k)x^2-kx\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1-k}{3}x^3-\frac{k}{2}x^2\right]_0^k=0$$

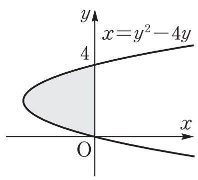
$$-\frac{1}{12}k^4-\frac{1}{6}k^3=0$$

$$k^3(k+2)=0$$

$$\therefore k=-2 \ (\because k<-1)$$

답 -2

102-1 (1) 곡선과 y축의 교점의 y좌표는 $y^2-4y=0$에서 $y(y-4)=0$



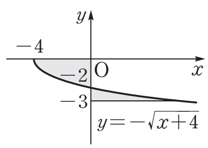
$\therefore y=0$ 또는 $y=4$

$0\le y\le 4$일 때 $x\le 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=-\int_0^4 (y^2-4y)dy$$

$$=-\left[\frac{1}{3}y^3-2y^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$$

(2) $y=-\sqrt{x+4}$에서



$$y^2=x+4$$

$$\therefore x=y^2-4 \ (y\le 0)$$

곡선과 y축의 교점의 y좌표는 $y^2-4=0$에서

$$(y+2)(y-2)=0$$

$$\therefore y=-2 \ (\because y\le 0)$$

$-3\le y\le -2$일 때 $x\ge 0$, $-2\le y\le 0$일 때 $x\le 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

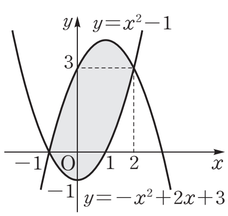
$$S=\int_{-3}^{-2} (y^2-4)dy-\int_{-2}^{0} (y^2-4)dy$$

$$=\left[\frac{1}{3}y^3-4y\right]_{-3}^{-2}-\left[\frac{1}{3}y^3-4y\right]_{-2}^{0}$$

$$=\frac{7}{3}+\frac{16}{3}=\frac{23}{3}$$

답 (1) $\frac{32}{3}$ (2) $\frac{23}{3}$

103-1 (1) 두 곡선의 교점의 x좌표는 $x^2-1=-x^2+2x+3$에서



$$x^2-x-2=0$$

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

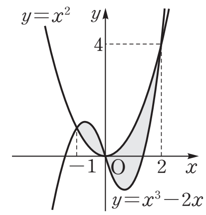
따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{2} \{(-x^2+2x+3)-(x^2-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2} (-2x^2+2x+4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}=9$$

(2) 두 곡선의 교점의 x좌표는 $x^3-2x=x^2$에서



$$x^3-x^2-2x=0$$

$$x(x+1)(x-2)=0$$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{0} \{(x^3-2x)-x^2\}dx+\int_0^2 \{x^2-(x^3-2x)\}dx$$

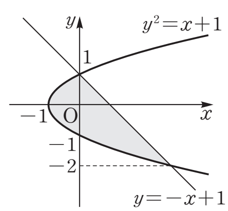
$$=\int_{-1}^{0} (x^3-x^2-2x)dx+\int_0^2 (-x^3+x^2+2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

답 (1) 9 (2) $\frac{37}{12}$

104-1 (1) 곡선 $x=y^2-1$과 직선 $x=-y+1$의 교점의 y좌표는 $y^2-1=-y+1$에서



$$y^2+y-2=0$$

$$(y+2)(y-1)=0$$

$$\therefore y=-2 \text{ 또는 } y=1$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^{1} \{(-y+1)-(y^2-1)\}dy$$

$$=\int_{-2}^{1} (-y^2-y+2)dy$$

$$=\left[-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+2y\right]_{-2}^{1}$$

$$=\frac{9}{2}$$

(2) $y=2\sqrt{x}$에서

$x=\frac{1}{4}y^2\ (y\geq0)$이므로

곡선 $x=\frac{1}{4}y^2$과 직선

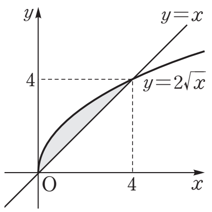
$x=y$의 교점의 y좌표는

$\frac{1}{4}y^2=y$에서

$y^2-4y=0$

$y(y-4)=0$

$\therefore\ y=0$ 또는 $y=4$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^4\left(y-\frac{1}{4}y^2\right)dy$$

$$=\left[-\frac{1}{12}y^3+\frac{1}{2}y^2\right]_0^4=\frac{8}{3}$$

답 (1) $\frac{9}{2}$ (2) $\frac{8}{3}$

105-1 $f(x)=x^2$으로 놓으면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-t^2=2t(x-t)$

$\therefore\ y=2tx-t^2$ …… ㉠

이 직선이 점 $(1,\ -3)$을 지나므로

$-3=2t-t^2,\quad t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=3$

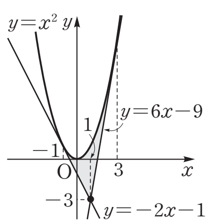
(i) $t=-1$일 때, ㉠에서

$y=-2x-1$

(ii) $t=3$일 때, ㉠에서

$y=6x-9$

(i), (ii)에서 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_{-1}^1\{x^2-(-2x-1)\}dx$$

$$+\int_1^3\{x^2-(6x-9)\}dx$$

$$=\int_{-1}^1(x^2+2x+1)dx+\int_1^3(x^2-6x+9)dx$$

$$=2\int_0^1(x^2+1)dx+\int_1^3(x^2-6x+9)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_1^3$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

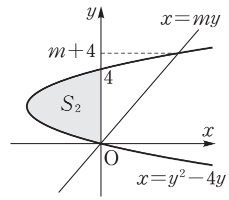
답 $\frac{16}{3}$

106-1 곡선 $x=y^2-4y$와 y축의 교점의 y좌표는

$y^2-4y=0$에서

$y(y-4)=0$

$\therefore\ y=0$ 또는 $y=4$



곡선 $x=y^2-4y$와 직선 $x=my$의 교점의 y좌표는 $y^2-4y=my$에서

$y^2-(4+m)y=0$

$y\{y-(m+4)\}=0$

$\therefore\ y=0$ 또는 $y=m+4$

곡선 $x=y^2-4y$와 직선 $x=my$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 곡선 $x=y^2-4y$와 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_1=\int_0^{m+4}\{my-(y^2-4y)\}dy$$

$$=\int_0^{m+4}\{-y^2+(m+4)y\}dy$$

$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{m+4}{2}y^2\right]_0^{m+4}=\frac{(m+4)^3}{6}$$

$$S_2=-\int_0^4(y^2-4y)dy$$

$$=-\left[\frac{1}{3}y^3-2y^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$$

이때 $S_1=2S_2$이므로 $\frac{(m+4)^3}{6}=2\cdot\frac{32}{3}$

$(m+4)^3=4^3\cdot2,\quad m+4=4\sqrt[3]{2}$

$\therefore\ m=4(\sqrt[3]{2}-1)$

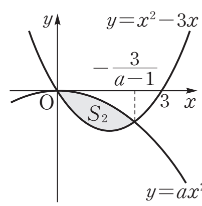
답 $4(\sqrt[3]{2}-1)$

106-2 곡선 $y=x^2-3x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-3x=0$에서

$x(x-3)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=3$



두 곡선 $y=x^2-3x,\ y=ax^2$의 교점의 x좌표는 $x^2-3x=ax^2$에서

$(a-1)x^2+3x=0,\quad x\{(a-1)x+3\}=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=-\frac{3}{a-1}$

곡선 $y=x^2-3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 두 곡선 $y=x^2-3x,\ y=ax^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_1=-\int_0^3(x^2-3x)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

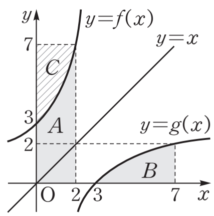
$$S_2=\int_0^{-\frac{3}{a-1}}\{ax^2-(x^2-3x)\}dx$$
$$=\int_0^{-\frac{3}{a-1}}\{(a-1)x^2+3x\}dx$$
$$=\left[\frac{a-1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^{-\frac{3}{a-1}}=\frac{9}{2(a-1)^2}$$

이때 $S_1=2S_2$이므로 $\quad \frac{9}{2}=2\cdot\frac{9}{2(a-1)^2}$

$(a-1)^2=2, \qquad a-1=\pm\sqrt{2}$

$\therefore a=1-\sqrt{2}$ ($\because a<0$) 답 $1-\sqrt{2}$

107-1 함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=3$, $f(2)=7$이고, $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

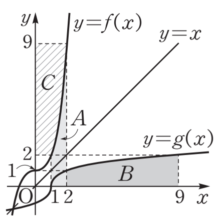


따라서 $\int_0^2 f(x)dx=A$, $\int_3^7 g(x)dx=B$라 하고, 빗금친 부분의 넓이를 C라 하면 $B=C$이므로

$$\int_0^2 f(x)dx+\int_3^7 g(x)dx=A+B=A+C$$
$$=2\cdot7=14$$

답 14

107-2 $f(x)=x^3+1$에서 $f'(x)=3x^2\geq0$이므로 $y=f(x)$는 증가함수이다.
한편 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $\int_1^2 f(x)dx=A$, $\int_2^9 g(x)dx=B$라 하고, 빗금친 부분의 넓이를 C라 하면 $B=C$이므로

$$A+B=A+C=2\cdot9-1\cdot2=16$$

이때 $A=\int_1^2(x^3+1)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x\right]_1^2=\frac{19}{4}$이므로

$$\int_2^9 g(x)dx=16-A=16-\frac{19}{4}=\frac{45}{4}$$

답 $\frac{45}{4}$

108-1 (1) 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $2t-t^2=0$에서

$t(2-t)=0 \qquad \therefore t=2$ ($\because t>0$)

즉 출발한 지 2초 후 처음으로 운동 방향이 바뀌므로 2초 후의 점 P의 위치는

$$1+\int_0^2(2t-t^2)dt=1+\left[t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^2=\frac{7}{3}$$

(2) 점 P가 좌표가 1인 점을 출발하여 다시 출발점으로 돌아오는 데 걸리는 시간을 a초라 하면 출발한 지 a초 후의 점 P의 위치의 변화량은 0이므로

$$\int_0^a(2t-t^2)dt=0, \qquad \left[t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^a=0$$
$$a^2\left(1-\frac{1}{3}a\right)=0 \qquad \therefore a=3\ (\because a>0)$$

따라서 구하는 시간은 3초이다.

(3) $$\int_0^3|2t-t^2|dt=\int_0^2(2t-t^2)dt+\int_2^3(-2t+t^2)dt$$
$$=\left[t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^2+\left[-t^2+\frac{1}{3}t^3\right]_2^3$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

답 (1) $\frac{7}{3}$ (2) 3초 (3) $\frac{8}{3}$

109-1 (1) 물체가 최고 지점에 도달할 때의 속도는 0이므로 $-10t+40=0$에서 $\quad t=4$
따라서 $t=4$일 때 물체가 최고 높이에 도달하게 되므로 최고 높이는

$$\int_0^4(-10t+40)dt=\left[-5t^2+40t\right]_0^4=80(\mathrm{m})$$

(2) t초 후의 높이를 $x(t)$라 하면

$$x(t)=\int_0^t(-10t+40)dt$$
$$=\left[-5t^2+40t\right]_0^t=-5t^2+40t$$

물체가 땅에 떨어질 때의 높이는 0이므로

$-5t^2+40t=0, \qquad -5t(t-8)=0$

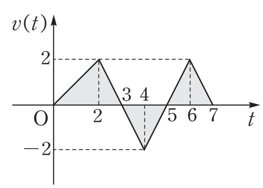
$\therefore t=8$ ($\because t>0$)

따라서 $t=8$일 때 속도는

$v(8)=-80+40=-40(\mathrm{m/s})$

답 (1) 80 m (2) -40 m/s

110-1 출발한 후 7초 동안 점 P가 움직인 거리는



$$\int_0^7|v(t)|dt$$
$$=\int_0^3 v(t)dt+\int_3^5\{-v(t)\}dt+\int_5^7 v(t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=7$$

답 7

중단원 연습 문제
본책 304~308쪽

01 $\frac{8}{3}$	02 ①	03 8	04 $\frac{64}{3}$	
05 $2(\sqrt[3]{2}-1)$		06 $\frac{1}{6}$	07 11	08 ④
09 40	10 ①	11 $4\sqrt{3}$	12 9	13 ③
14 ④	15 ⑤	16 10	17 270	18 $\frac{9}{2}$
19 ⑤	20 13	21 $\frac{4}{3}$	22 ①	

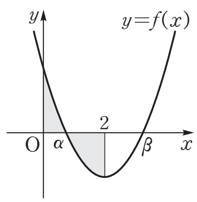
01 문제이해 • $f(x)=x^2-4x+k$로 놓으면

$$f(x)=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4$$

이므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

➔ 30% 배점

해결과정 • 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표를 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면



$$\int_\alpha^2 f(x)dx=\int_2^\beta f(x)dx$$

이고 $S_2=2S_1$이므로

$$\int_0^\alpha f(x)dx=-\int_\alpha^2 f(x)dx$$

$$\therefore \int_0^2 f(x)dx=0$$

➔ 40% 배점

답구하기 • 이때

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (x^2-4x+k)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx\right]_0^2=-\frac{16}{3}+2k$$

이므로 $\quad -\frac{16}{3}+2k=0$

$2k=\frac{16}{3} \qquad \therefore k=\frac{8}{3}$

➔ 30% 배점

답 $\frac{8}{3}$

02 전략 곡선과 y축의 교점을 구하여 그래프를 그려 본다.

풀이 $y^2=1-ax$에서 $x=-\frac{1}{a}y^2+\frac{1}{a}$이므로 주어진 곡선과 y축의 교점의 y좌표는 $-\frac{1}{a}y^2+\frac{1}{a}=0$에서

$y^2-1=0$

$(y+1)(y-1)=0$

$\therefore y=-1$ 또는 $y=1$

구간 $[-1, 1]$에서 $x\geq0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^1\left(-\frac{1}{a}y^2+\frac{1}{a}\right)dy=2\int_0^1\left(-\frac{1}{a}y^2+\frac{1}{a}\right)dy$$

$$=2\left[-\frac{1}{3a}y^3+\frac{1}{a}y\right]_0^1=\frac{4}{3a}$$

따라서 $\frac{4}{3a}=4$이므로 $\quad 3a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$

답 ①

Remark

함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 임의의 실수 x에 대하여

① $f(-x)=f(x)$이면 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

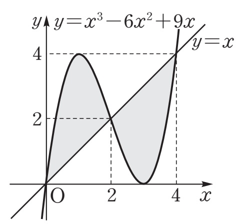
➡ $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

② $f(-x)=-f(x)$이면 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

➡ $\int_{-a}^a f(x)dx=0$

03 전략 곡선과 직선의 교점을 구하여 그래프를 그려 본다.

풀이 곡선 $y=x^3-6x^2+9x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^3-6x^2+9x=x$에서



$x^3-6x^2+8x=0$

$x(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^2\{(x^3-6x^2+9x)-x\}dx$$

$$+\int_2^4\{x-(x^3-6x^2+9x)\}dx$$

$$=\int_0^2(x^3-6x^2+8x)dx$$

$$+\int_2^4(-x^3+6x^2-8x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2\right]_0^2+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-4x^2\right]_2^4$$

$=4+4=8$

답 8

04 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$임을 이용하여 접선의 방정식을 구한 후, 곡선과 접선의 위치 관계를 파악한다.

풀이 $f(x)=x^3+2x^2-x-2$로 놓으면
$f'(x)=3x^2+4x-1$이므로 곡선 위의 점 $(-2,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(-2)=12-8-1=3$$

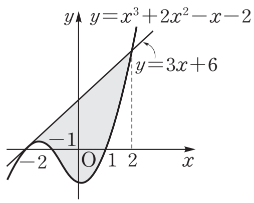
따라서 곡선 $y=x^3+2x^2-x-2$ 위의 점 $(-2,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$$y=3(x+2) \qquad \therefore y=3x+6$$

곡선 $y=x^3+2x^2-x-2$와 직선 $y=3x+6$의 교점의 x좌표는 $x^3+2x^2-x-2=3x+6$에서

$$x^3+2x^2-4x-8=0, \qquad (x+2)^2(x-2)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=2$$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^{2}\{(3x+6)-(x^3+2x^2-x-2)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(-x^3-2x^2+4x+8)dx$$

$$=2\int_{0}^{2}(-2x^2+8)dx$$

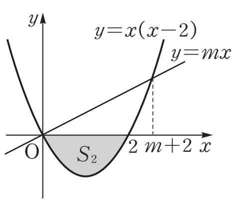
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_0^2=\frac{64}{3}$$

답 $\frac{64}{3}$

05 **전략** 곡선과 직선의 교점을 구하여 조건에 맞게 그래프를 그려 본다.

풀이 곡선 $y=x(x-2)$와 x축의 교점의 x좌표는
$x(x-2)=0$에서 $\qquad x=0$ 또는 $x=2$
곡선 $y=x(x-2)$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는
$x^2-2x=mx$에서

$$x^2-(m+2)x=0 \qquad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=m+2$$



곡선 $y=x(x-2)$와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하고, 곡선 $y=x(x-2)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_1=\int_{0}^{m+2}\{mx-(x^2-2x)\}dx$$

$$=\int_{0}^{m+2}\{-x^2+(m+2)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{m+2}{2}x^2\right]_0^{m+2}=\frac{1}{6}(m+2)^3$$

$$S_2=-\int_{0}^{2}(x^2-2x)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

이때 $S_1=2S_2$이므로

$$\frac{1}{6}(m+2)^3=2\cdot\frac{4}{3}$$

$$(m+2)^3=16, \qquad m+2=2\sqrt[3]{2}$$

$$\therefore m=2(\sqrt[3]{2}-1)$$

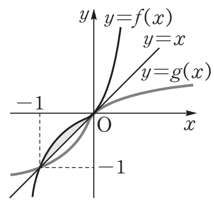
답 $2(\sqrt[3]{2}-1)$

06 **전략** 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=x^3+x^2+x$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^3+x^2+x=x$에서

$$x^3+x^2=0, \qquad x^2(x+1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=0$$



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=2\int_{-1}^{0}\{(x^3+x^2+x)-x\}dx=2\int_{-1}^{0}(x^3+x^2)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

07 **문제이해 •** 출발한 지 a초 후에 점 P가 원점으로 다시 돌아오므로 a초 후의 점 P의 위치의 변화량은 0이다.
➔ 20% 배점

해결과정 • $\int_{0}^{a}(3t^2-12t+9)dt=0$

$$\left[t^3-6t^2+9t\right]_0^a=0, \qquad a^3-6a^2+9a=0$$

$$a(a-3)^2=0 \qquad \therefore a=3\ (\because a>0)$$

➔ 30% 배점

따라서 3초 후에 점 P는 원점으로 다시 돌아오고, 그때까지 움직인 거리는 $t=0$에서 $t=3$까지 움직인 거리이다.
이때 곡선 $y=v(t)$와 t축의 교점의 t좌표는 $3t^2-12t+9=0$에서 $\qquad (t-1)(t-3)=0$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

$$\therefore\ s=\int_0^3 |3t^2-12t+9|\,dt$$
$$=\int_0^1 (3t^2-12t+9)\,dt$$
$$+\int_1^3 (-3t^2+12t-9)\,dt$$
$$=\Big[t^3-6t^2+9t\Big]_0^1+\Big[-t^3+6t^2-9t\Big]_1^3$$
$$=4+4=8$$

➔ 40% 배점

답구하기 • $\therefore\ a+s=11$ ➔ 10% 배점

답 11

08

전략 속도를 적분하여 위치를 구한다.

풀이 돌을 던진 후 3초 후의 높이를 x m라 하면

$$x=\int_0^3 (v_0-10t)\,dt=\Big[v_0 t-5t^2\Big]_0^3$$
$$=3v_0-45\,(\mathrm{m})$$

이때 지면으로부터의 높이가 30 m이어야 하므로

$$3v_0-45=30,\qquad 3v_0=75$$
$$\therefore\ v_0=25\,(\mathrm{m/s})$$

답 ④

09

전략 $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $\int_0^{2013} f(x)dx=\int_3^{2013} f(x)dx$이므로

$$\int_0^{2013} f(x)dx-\int_3^{2013} f(x)dx=0$$
$$\int_0^{2013} f(x)dx+\int_{2013}^{3} f(x)dx=0$$
$$\therefore\ \int_0^3 f(x)dx=0$$

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$\int_0^3 (x^2+ax+b)dx=\Big[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\Big]_0^3$$
$$=9+\frac{9}{2}a+3b$$

즉 $9+\frac{9}{2}a+3b=0$이므로

$$3a+2b=-6 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $f(3)=0$이므로 $\quad 9+3a+b=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-4,\ b=3$

$$\therefore\ f(x)=x^2-4x+3$$

함수 $f(x)=x^2-4x+3$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-4x+3=0$에서

$$(x-1)(x-3)=0 \qquad \therefore\ x=1 \text{ 또는 } x=3$$

구간 $[1, 3]$에서 $f(x)\le 0$이므로

$$S=\int_1^3 (-x^2+4x-3)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\Big]_1^3=\frac{4}{3}$$
$$\therefore\ 30S=40$$

답 40

10

전략 $S_2=\square\mathrm{OABC}-(S_1+S_3)$임을 이용한다.

풀이 $y^2=8x$에서 $x=\frac{1}{8}y^2$이므로

$$S_1=\int_0^4 \frac{1}{8}y^2dy=\Big[\frac{1}{24}y^3\Big]_0^4=\frac{8}{3},$$
$$S_3=\int_0^2 x^2dx=\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^2=\frac{8}{3}$$

이때

$$S_2=\square\mathrm{OABC}-(S_1+S_3)$$
$$=2\cdot 4-\Big(\frac{8}{3}+\frac{8}{3}\Big)=\frac{8}{3}$$

이므로

$$S_1 : S_2 : S_3=\frac{8}{3} : \frac{8}{3} : \frac{8}{3}=1 : 1 : 1$$

답 ①

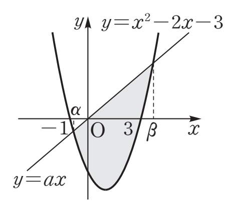
11

문제이해 • 곡선 $y=x^2-2x-3$과 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표를 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-2x-3=ax$, 즉 $x^2-(a+2)x-3=0$의 두 근이다. ➔ 10% 배점

해결과정 • 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=a+2$, $\alpha\beta=-3$이므로

$$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta$$
$$=(a+2)^2-4\cdot(-3)$$
$$=(a+2)^2+12$$
$$\therefore\ \beta-\alpha=\sqrt{(a+2)^2+12}\quad (\because\ \alpha<\beta)$$

➔ 30% 배점



곡선 $y=x^2-2x-3$과 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_\alpha^\beta \{ax-(x^2-2x-3)\}dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\{(a+2)^2+12\}^{\frac{3}{2}}$$

➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 $a=-2$일 때 S는 최솟값

$\frac{1}{6}(\sqrt{12})^3=4\sqrt{3}$을 갖는다. ➔ 20% 배점

답 $4\sqrt{3}$

12 **해결과정 •** 곡선 $y=x^2$을 x축에 대하여 대칭이동하면 $-y=x^2$, 즉 $y=-x^2$

이것을 다시 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하면 $y=-(x+1)^2+5$

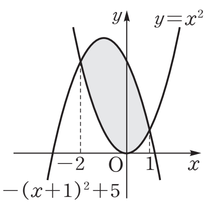
$\therefore g(x)=-(x+1)^2+5$ ➔ 30% 배점

두 곡선 $y=x^2$, $y=-(x+1)^2+5$의 교점의 x좌표는 $x^2=-(x+1)^2+5$에서

$x^2+x-2=0, \quad (x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 넓이를 S라 하면 오른쪽 그림에서



$$S=\int_{-2}^{1}\{-(x+1)^2+5-x^2\}dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{1}=9$$ ➔ 40% 배점

답 9

Remark

곡선 $y=f(x)$를 x축에 대하여 대칭이동한 식은 $y=-f(x)$이고, 곡선 $y=-f(x)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 식은 $y=-f(x-m)+n$이다.

13 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이고, 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{f'(a)}$임을 이용하여 조건을 만족시키는 직선의 방정식을 먼저 구한다.

풀이 $f(x)=x^2+2x$로 놓으면 $f'(x)=2x+2$이므로 곡선 위의 점 $(-2, 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=-4+2=-2$

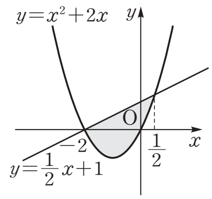
따라서 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이고, 이 직선이 점 $\mathrm{A}(-2, 0)$을 지나므로 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}(x+2) \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x+1$

곡선 $y=x^2+2x$와 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$의 교점의 x좌표는 $x^2+2x=\frac{1}{2}x+1$에서

$2x^2+3x-2=0, \qquad (x+2)(2x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{2}$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^{\frac{1}{2}}\left\{\left(\frac{1}{2}x+1\right)-(x^2+2x)\right\}dx$$
$$=\int_{-2}^{\frac{1}{2}}\left(-x^2-\frac{3}{2}x+1\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+x\right]_{-2}^{\frac{1}{2}}=\frac{125}{48}$$

답 ③

14 전략 먼저 두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

풀이 두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1\{(-x^4+x)-(x^4-x^3)\}dx$$
$$=\int_0^1(-2x^4+x^3+x)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{7}{20}$$

따라서 두 곡선 $y=ax(1-x)$, $y=x^4-x^3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{7}{40}$이므로

$$\int_0^1\{ax(1-x)-(x^4-x^3)\}dx$$
$$=\int_0^1(-x^4+x^3-ax^2+ax)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{20}+\frac{a}{6}$$

즉 $\frac{1}{20}+\frac{a}{6}=\frac{7}{40}$이므로 $\quad a=\frac{3}{4}$

답 ④

15 전략 물체가 정지하는 순간의 속도는 0임을 이용한다.

풀이 열차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$30-t=0$에서 $\quad t=30$

따라서 열차는 브레이크를 건 후 30초 후에 정지하므로 30초 동안 움직인 거리는

$$\int_0^{30}|v(t)|dt=\int_0^{30}|30-t|dt=\int_0^{30}(30-t)dt$$
$$=\left[30t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^{30}=450(\text{m})$$

답 ⑤

16 해결과정 • 3초 후의 두 점 P, Q의 좌표를 각각 $(x_P,\ 0)$, $(0,\ y_Q)$라 하면

$$x_P=-3+\int_0^3 2tdt=-3+\left[t^2\right]_0^3=6$$
$$y_Q=-4+\int_0^3 \frac{8}{3}tdt=-4+\left[\frac{4}{3}t^2\right]_0^3=8$$

➔ 70% 배점

답구하기 • 따라서 3초 후의 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(6,\ 0)$, $(0,\ 8)$이므로 두 점 사이의 거리는

$$\overline{PQ}=\sqrt{(0-6)^2+(8-0)^2}=10$$

➔ 30% 배점

답 10

17 전략 자동차의 속도가 최대가 되는 시각을 구한다.

풀이 $v(t)=-15t^2+90t$로 놓으면

$$v(t)=-15(t-3)^2+135$$

이므로 $t=3$일 때 $v(t)$는 최대이다.

따라서 3분 후 자동차의 속도가 최대이고

$$\int_0^3(-15t^2+90t)dt=\left[-5t^3+45t^2\right]_0^3=270(\text{m})$$

이므로 이때 자동차는 A지점으로부터 270 m 떨어져 있다.

답 270

18 전략 먼저 $f'(t)$를 구한다.

풀이 이차함수 $y=f'(t)$의 그래프와 t축의 교점의 t좌표가 1, 4이므로 $f'(t)$는 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$f'(t)=a(t-1)(t-4)\ (a>0)$$

이때 $f'(0)=4$이므로 $\quad 4a=4 \quad \therefore a=1$

$$\therefore f'(t)=(t-1)(t-4)=t^2-5t+4$$

점 P가 출발할 때의 운동 방향에 대하여 반대 방향으로 움직인 시간은 $t=1$에서 $t=4$까지이다.

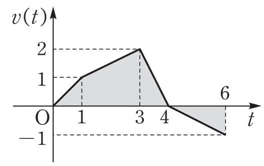
따라서 점 P가 반대 방향으로 움직인 거리는

$$\int_1^4(-t^2+5t-4)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2-4t\right]_1^4=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

19 전략 움직인 거리는 속도의 그래프와 t축 사이의 넓이와 같음을 이용한다.

풀이 점 P가 움직인 거리는 $0\le t\le 6$에서 $v(t)$의 그래프와 t축 사이의 넓이와 같으므로



$$\int_0^4 v(t)dt+\int_4^6\{-v(t)\}dt$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1+\frac{1}{2}\cdot(1+2)\cdot2+\frac{1}{2}\cdot1\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot1$$
$$=\frac{1}{2}+3+1+1=\frac{11}{2}$$

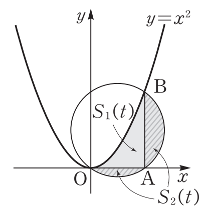
답 ⑤

20 전략 주어진 공통부분을 넓이를 구할 수 있는 부분으로 나눈다.

풀이 $\triangle$OAB는 직각삼각형이므로 원 C의 반지름의 길이를 r라 하면

$$r=\frac{1}{2}\overline{OB}=\frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}$$

오른쪽 그림과 같이 원 C의 내부와 부등식 $y\le x^2$이 나타내는 영역의 공통부분에서 곡선 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=t$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_1(t)$, 나머지 부분의 넓이를 $S_2(t)$라 하면



$$S_1(t)=\int_0^t x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^t=\frac{1}{3}t^3$$
$$S_2(t)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot t\cdot t^2$$
$$=\frac{\pi}{8}(t^2+t^4)-\frac{1}{2}t^3$$
$$\therefore S(t)=S_1(t)+S_2(t)$$
$$=\frac{1}{3}t^3+\frac{\pi}{8}(t^2+t^4)-\frac{1}{2}t^3$$
$$=\frac{\pi}{8}(t^2+t^4)-\frac{1}{6}t^3$$

즉 $S'(t)=\frac{\pi}{8}(2t+4t^3)-\frac{1}{2}t^2$이므로

$$S'(1)=\frac{\pi}{8}\cdot(2+4)-\frac{1}{2}=\frac{3\pi-2}{4}$$

따라서 $p=3$, $q=-2$이므로

$$p^2+q^2=3^2+(-2)^2=13$$

답 13

12 정적분의 활용

21 **문제이해** • 점 P_n이 다시 원점을 지날 때의 시각을 a라 하면 처음으로 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v(t)=0$에서 $t=2$이다. 따라서 $a>2$이고 $\int_0^a v_n(t)dt=0$이 성립한다. ➔ 20% 배점

해결과정 • $\int_0^a v_n(t)dt=\int_0^a \frac{1}{3^n}t(2-t)dt$

$$=\frac{1}{3^n}\int_0^a(-t^2+2t)dt$$

$$=\frac{1}{3^n}\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{3^n}\left(-\frac{1}{3}a^3+a^2\right)$$

즉 $\frac{1}{3^n}\left(-\frac{1}{3}a^3+a^2\right)=0$이므로

$-a^3+3a^2=0,\quad a^2(a-3)=0$

그런데 $a>2$이므로 $\quad a=3$ ➔ 30% 배점

$$\therefore S_n=\int_0^3\left|\frac{1}{3^n}t(2-t)\right|dt$$

$$=\int_0^2\frac{1}{3^n}t(2-t)dt+\int_2^3\left\{-\frac{1}{3^n}t(2-t)\right\}dt$$

$$=\frac{1}{3^n}\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^2+\frac{1}{3^n}\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_2^3$$

$$=\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{3^n}$$ ➔ 30% 배점

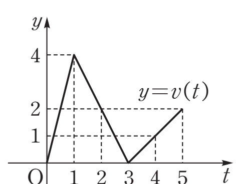
답구하기 • 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$은 첫째항이 $\frac{8}{9}$이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{8}{9}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}$$ ➔ 20% 배점

답 $\frac{4}{3}$

22 전략 $y=v(t)$의 그래프를 그린 후 넓이를 이용하여 움직인 거리를 구한다.

풀이 함수 $y=v(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



시각 $t=0$에서 $t=x$까지 움직인 거리를 $s_1(x)$, 시각 $t=x$에서 $t=x+2$까지 움직인 거리를 $s_2(x)$, 시각 $t=x+2$에서 $t=5$까지 움직인 거리를 $s_3(x)$라 하자.

ㄱ. $s_1(1)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot4=2,\ s_2(1)=\frac{1}{2}\cdot2\cdot4=4,$

$s_3(1)=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$

이므로 $\quad f(1)=2$

ㄴ. $s_1(2)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot4+\frac{1}{2}(4+2)\cdot1=5,$

$s_2(2)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{3}{2},$

$s_3(2)=\frac{1}{2}(1+2)\cdot1=\frac{3}{2}$

이므로 $\quad f(2)=\frac{3}{2}$

$$\therefore f(2)-f(1)=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$$

한편 $\int_1^2 v(t)dt=\frac{1}{2}(4+2)\cdot1=3$이므로

$$f(2)-f(1)\neq\int_1^2 v(t)dt$$

ㄷ. (i) $0<x<1$일 때,

$s_1(x)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot 4x=2x^2<2,$

$s_2(x)>\frac{1}{2}(4+2)\cdot1=3,$

$s_3(x)>\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$

이므로 $\quad f(x)=s_1(x)=2x^2$

따라서 $f'(x)=4x$이므로

$$\lim_{x\to1-}f'(x)=4$$

(ii) $1<x<\frac{3}{2}$일 때,

$s_1(x)>2,\ s_2(x)>\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot3=\frac{9}{4},$

$s_3(x)<\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$

이므로

$$f(x)=s_3(x)=2-\frac{1}{2}(x-1)(x-1)$$

$$=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$$

따라서 $f'(x)=-x+1$이므로

$$\lim_{x\to1+}f'(x)=0$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to1-}f'(x)\neq\lim_{x\to1+}f'(x)$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①