수학의 **쎈** 힘을 키우는 사전식 **개념 기본서**

# 개념 SSEN

# 미적분 I

새교육과정

홍범준 | 신사고수학콘텐츠연구회

Best Choice for Math

개념 기본서

개념 쎈

좋은책 신사고

# 개념 SSEN

꿈을 이룬 내일을 상상합니다. Dreams come true

**이 책을 공부할 ______________ 에게,**

# 머리말

수학은 논리적이고 체계적인 학문입니다. 수학을 공부함으로써 합리적, 추상적, 통합적, 창의적 사고력을 기르고 이를 바탕으로 종합적인 문제 해결 능력을 키울 수 있습니다. 이러한 능력은 이공 계열 관련 학문뿐 아니라 인문·사회·예체능 계열과 같이 수학과 무관해 보이는 분야에 진출한 사람에게도 요구되는 것으로, 수학을 배워야 하는 가장 중요한 이유입니다.

이에 필자는 여러분들이 수학의 힘을 키울 수 있도록 개념기본서 **개념쎈**을 집필하였고, 다음과 같은 교재가 되도록 정성을 기울였습니다.

1. 수학적 논리에 엄밀하게 부합하는 교재
2. 고등 교육 과정 내용을 충실히 담은 교재
3. 추상적인 개념을 구체적으로 쉽게 설명한 교재
4. 스스로 문제 해결력을 기를 수 있는 교재
5. 내신과 수능을 모두 대비할 수 있는 교재

**개념쎈**은 필자가 강의를 하며, 많은 교재를 집필하며 체득한 노하우를 그대로 담았습니다. 수학의 절대 진리가 가지고 있는 간결한 추상 요소들을 사전처럼 잘게 쪼개고 구체적으로 풀어서 각 개념에 맞는 최적의 설명 방법을 찾아 쉽고 자세하게 설명하였습니다.

**사전식 개념 기본서 개념쎈**으로 수학의 힘을 크게 키우고, 수학 그 자체의 아름다움을 즐길 수 있기를 바랍니다.

**저자 홍범준**

# 구성과 특장 STRUCTURE

## 개념 익힘 학습

● **개념 정리**

교육 과정의 개념을 총망라하고 사전식으로 잘게 나누어 체계적으로 정리하였습니다.

**개념 Approach**

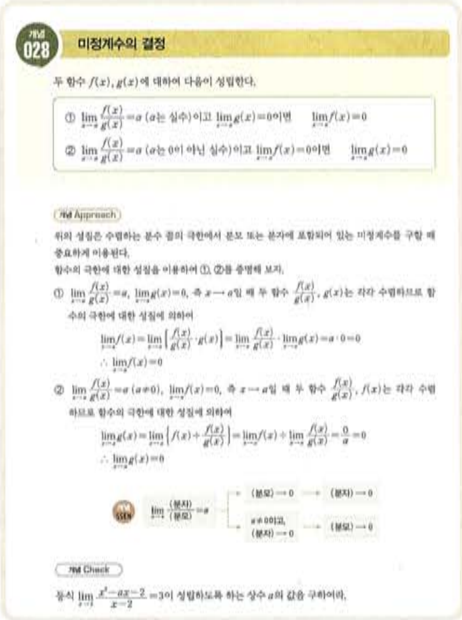
개념 정리 내용을 예를 통해 구체적으로 확인하고, 공식과 성질을 자세하게 설명하여 개념에 대한 완전 학습이 이루어지도록 하였습니다.

개념 SSEN 중요 핵심 사항을 도식화하여 제시

**개념 Check**

공식과 성질을 이용하여 개념을 확인할 수 있는 문제입니다.

활용의 기술 ❶ **개념 학습은 수학 공부의 기본이다. 개념을 이해한 후 공식과 성질을 꼭 암기하여 실전에 활용할 수 있도록 하자.**


개념 028 미정계수의 결정

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

① $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ ($\alpha$는 실수)이고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$

② $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ ($\alpha$는 0이 아닌 실수)이고 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$

개념 Approach

위의 성질은 수렴하는 분수 꼴의 극한에서 분모 또는 분자에 포함되어 있는 미정계수를 구할 때 중요하게 이용된다.

함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 ①, ②를 증명해 보자.

① $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=0$, 즉 $x\to a$일 때 두 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)$는 각각 수렴하므로 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to a}g(x)=\alpha\cdot 0=0$$

$\therefore \lim_{x\to a}f(x)=0$

② $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ $(\alpha\neq 0)$, $\lim_{x\to a}f(x)=0$, 즉 $x\to a$일 때 두 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x)$는 각각 수렴하므로 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\left\{f(x)\div\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\lim_{x\to a}f(x)\div\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{\alpha}=0$$

$\therefore \lim_{x\to a}g(x)=0$

개념 SSEN $\lim_{x\to a}\frac{(\text{분자})}{(\text{분모})}=\alpha$ → (분모) → 0 → (분자) → 0; $\alpha\neq 0$이고, (분자) → 0 → (분모) → 0

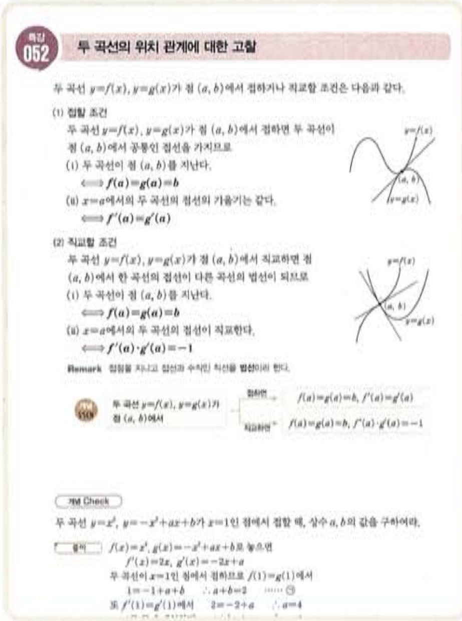
개념 Check

등식 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-ax-2}{x-2}=3$이 성립하도록 하는 상수 $a$의 값을 구하여라.

## 개념 특강 학습

● **특강**

교과서에서 다루지는 않지만 실전에 꼭 필요한 개념, 이미 알고 있는 것이지만 문제에 적용하기 어려운 개념을 별도로 구성하였습니다. 또 개념을 바로 확인할 수 있는 개념 Check 문제를 구성하였습니다.


특강 052 두 곡선의 위치 관계에 대한 고찰

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(a, b)$에서 접하거나 직교할 조건은 다음과 같다.

(1) 접할 조건

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(a, b)$에서 접하면 두 곡선이 점 $(a, b)$에서 공통인 접선을 가지므로

(i) 두 곡선이 점 $(a, b)$를 지난다.

$\iff f(a)=g(a)=b$

(ii) $x=a$에서의 두 곡선의 접선의 기울기는 같다.

$\iff f'(a)=g'(a)$

(2) 직교할 조건

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(a, b)$에서 직교하면 점 $(a, b)$에서 한 곡선의 접선이 다른 곡선의 법선이 되므로

(i) 두 곡선이 점 $(a, b)$를 지난다.

$\iff f(a)=g(a)=b$

(ii) $x=a$에서의 두 곡선의 접선이 직교한다.

$\iff f'(a)\cdot g'(a)=-1$



**Remark** 접점을 지나고 접선과 수직인 직선을 **법선**이라 한다.

개념 SSEN 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(a, b)$에서 → 접하면 → $f(a)=g(a)=b$, $f'(a)=g'(a)$; 직교하면 → $f(a)=g(a)=b$, $f'(a)\cdot g'(a)=-1$

개념 Check

두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+ax+b$가 $x=1$인 점에서 접할 때, 상수 $a$, $b$의 값을 구하여라.

풀이 $f(x)=x^2$, $g(x)=-x^2+ax+b$로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g'(x)=-2x+a$

두 곡선이 $x=1$인 점에서 접하므로 $f(1)=g(1)$에서

$1=-1+a+b$ $\therefore a+b=2$ ⋯⋯ ㉠

또 $f'(1)=g'(1)$에서 $2=-2+a$ $\therefore a=4$

활용의 기술 ❷ **교과서에 나오지 않는다고 대충 넘어가지 않는다. 다른 교재에서 다시 학습할 수 없으니 더 꼼꼼하게 이해하고 숙지하자. 그 효과는 실전에서 확인할 수 있다.**

# 유형 학습

● **대표유형**

실전에 자주 출제되는 문제로, 해결 과정을 꼭 알아 두어야 하는 유형들을 엄선하였습니다.

「유형 Guide」 대표유형의 해결 원리를 자세하게 설명

유형 SSEN 대표유형을 해결하는 핵심 원리를 도식화하여 제시

● **유제**

대표유형과 닮은꼴 문제를 구성하여 유형을 반복 학습할 수 있도록 하였습니다. **Plus 유제**를 구성하여 실전에 적용할 수 있도록 하였습니다.

활용의 기술 ❸ **유형 Guide에서 주어진 유형의 구체적인 해결 방법을 익히고, 유형 SSEN의 유형 해결 핵심 방법을 기억하자.**


대표유형 059 함수의 극값과 미정계수의 결정

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 $x=-1$에서 극댓값 20을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 가질 때, $f(x)$의 극솟값을 구하여라. (단, $a$, $b$, $c$는 상수이다.)

「유형 Guide」 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 $\beta$를 가지면
(i) $x=a$에서의 함숫값이 $\beta$이므로 $f(a)=\beta$
(ii) $x=a$에서 극값을 가지므로 $f'(a)=0$
임을 이용한다.

유형 SSEN 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 $\beta$를 가지면 ⊙ $f(a)=\beta$, $f'(a)=0$

풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 가지므로
$f'(-1)=0$, $f'(3)=0$
$\therefore 3-2a+b=0$, $27+6a+b=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=-3$, $b=-9$
즉 $f(x)=x^3-3x^2-9x+c$이고, 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 20을 가지므로
$f(-1)=20$, $5+c=20$
$\therefore c=15$
따라서 $f(x)=x^3-3x^2-9x+15$이므로 $f(x)$의 극솟값은
$f(3)=27-27-27+15=-12$

답 $-12$

유제 059-1 함수 $f(x)=2x^3+ax^2+bx-4$가 $x=-2$에서 극댓값 16을 갖고, $x=\alpha$에서 극솟값 $\beta$를 가질 때, 상수 $a$, $b$, $\alpha$, $\beta$의 값을 구하여라.

Plus 유제 059-2 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$는 $x=-2$에서 극댓값 18을 갖고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 2)$에서의 접선의 기울기가 4일 때, $f(1)$의 값을 구하여라. (단, $a$, $b$, $c$, $d$는 상수이다.)

# 마무리 학습

● **중단원 연습 문제**

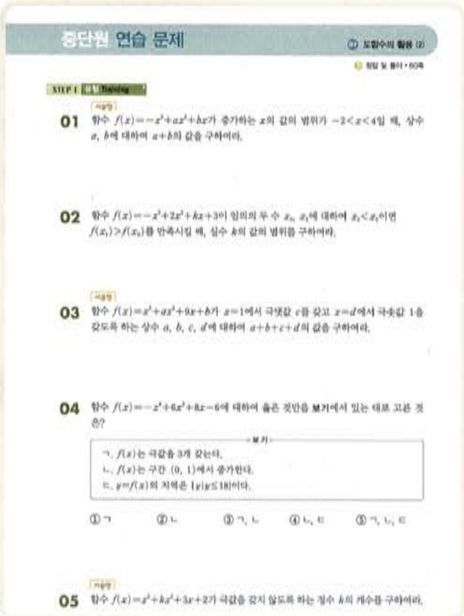
중단원 학습을 마무리할 수 있도록 3단계로 구성하였습니다.

**STEP 1 유형 Training**

**STEP 2 실전 Application**

**STEP 3 심화 Forwarding**

활용의 기술 ❹ **다양한 유형의 문제와 기출 문제를 풀어 봄으로써 문제 해결력을 기르고 수능에 대한 자신감을 키우자.**


중단원 연습 문제

STEP 1 유형 Training

01 함수 $f(x)=-x^3+ax^2+bx$가 증가하는 $x$의 값의 범위가 $-2<x<4$일 때, 상수 $a$, $b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

02 함수 $f(x)=-x^3+2x^2+kx+3$이 임의의 두 수 $x_1$, $x_2$에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$를 만족시킬 때, 실수 $k$의 값의 범위를 구하여라.

03 함수 $f(x)=x^3+ax^2+9x+b$가 $x=1$에서 극댓값 $c$를 갖고 $x=d$에서 극솟값 1을 갖도록 하는 상수 $a$, $b$, $c$, $d$에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

04 함수 $f(x)=-x^4+6x^2+8x-6$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. $f(x)$는 극값을 3개 갖는다.
ㄴ. $f(x)$는 구간 $(0, 1)$에서 증가한다.
ㄷ. $y=f(x)$의 치역은 $\{y \mid y\le 18\}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

05 함수 $f(x)=x^3+kx^2+3x+2$가 극값을 갖지 않도록 하는 정수 $k$의 개수를 구하여라.

# 차례 CONTENT

# I 수열의 극한

# 01

# 수열의 극한

고대 그리스의 수학자인 아르키메데스는 원에 내접하는 정다각형의 변의 수를 늘려나가면 변의 길이가 점점 짧아져서 정다각형이 결국 원에 가까워진다는 사실을 이용하여 원주율을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하였다. 이것이 극한의 개념의 시초라 할 수 있다. 극한은 그 개념이 수반하는 무한에 대한 논의가 신에 대한 도전으로 간주되어 중세까지 연구되지 못하다가 19세기에 이르러서야 프랑스의 수학자 코시에 의하여 명확하게 정의되었다.

이 단원에서는 여러 가지 수열에 대하여 $n$이 한없이 커질 때 항의 값이 어떻게 변하는지 알아보고, 그 극한값을 구하는 방법에 대하여 공부해 보자.

한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

**01 수열의 수렴과 발산**

- 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

**02 수열의 극한값의 계산**

- 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 극한값을 구할 수 있다.
- 수열의 극한의 대소 관계를 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

**03 등비수열의 수렴과 발산**

- 등비수열의 수렴 조건을 알고, 그 극한값을 구할 수 있다.

| 개념 & 특강 | 대표유형 & 유제 |
| --- | --- |
| 001 수열의 수렴<br>002 수열의 발산 | 001 수열의 수렴과 발산 |
| 003 수열의 극한에 대한 기본 성질 | 005 일반항 $a_n$을 포함한 수열의 극한 |
| 004 수열의 극한값의 계산 | 002 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 수열의 극한 — 003 $\infty-\infty$ 꼴의 수열의 극한 — 004 극한이 존재하는 수열의 미정계수의 결정 — 005 일반항 $a_n$을 포함한 수열의 극한 |
| 005 수열의 극한의 대소 관계 | 006 수열의 극한의 대소 관계 |
| 006 등비수열의 수렴과 발산 | 007 등비수열의 극한 — 008 $r^n$을 포함한 수열의 극한 — 009 등비수열의 수렴 조건 |
| 특강 007 귀납적으로 정의된 수열의 극한 | 010 귀납적으로 정의된 수열의 극한 |

# 개념 001 수열의 수렴

수열 $\{a_n\}$에서 $n$이 한없이 커질 때, $a_n$의 값이 일정한 값 $\alpha$에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 $\alpha$에 **수렴**한다고 한다. 이때 $\alpha$를 수열 $\{a_n\}$의 **극한값** 또는 **극한**이라 하고,

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \quad \text{또는} \quad n \longrightarrow \infty \text{일 때 } a_n \longrightarrow \alpha$$

와 같이 나타낸다.

여기서 $\infty$는 한없이 커지는 상태를 나타내는 기호로 **무한대**라 읽는다.

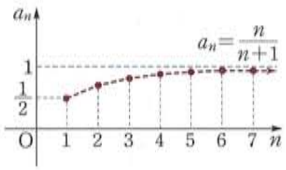
**Remark**
- lim는 극한을 뜻하는 limit의 약자이고, '리미트'라 읽는다.
- $a_n \longrightarrow \alpha$는 $a_n$의 값이 $\alpha$에 한없이 가까워진다는 뜻이지 $a_n=\alpha$를 뜻하는 것은 아니다.

### 개념 Approach

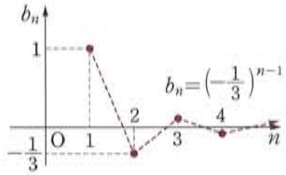
두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\{a_n\}: \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots, \quad \{b_n\}: 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \cdots, \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \cdots$$

일 때, $n$의 값에 따른 수열의 항 $a_n$과 $b_n$의 값의 변화를 그림으로 나타내면 다음과 같다.




[그림 1]



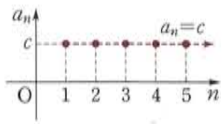

[그림 2]

$n$이 한없이 커질 때, [그림 1]에서 $a_n$의 값은 1에 한없이 가까워지고, [그림 2]에서 $b_n$의 값은 0에 한없이 가까워짐을 알 수 있다. 이것을 다음과 같이 표현한다.

- 수열 $\{a_n\}$은 1에 수렴한다. $\Longleftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n=1$ $\Longleftrightarrow$ $n \longrightarrow \infty$일 때 $a_n \longrightarrow 1$ ⬅ 극한값이 1이다.
- 수열 $\{b_n\}$은 0에 수렴한다. $\Longleftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} b_n=0$ $\Longleftrightarrow$ $n \longrightarrow \infty$일 때 $b_n \longrightarrow 0$ ⬅ 극한값이 0이다.

**Remark** 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=c$ ($c$는 상수)인 경우에도 수열 $\{a_n\}$은 $c$에 수렴한다고 한다. 즉

$$\lim_{n\to\infty} a_n=c \text{ 또는 } n \longrightarrow \infty \text{일 때 } a_n \longrightarrow c$$



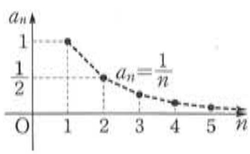

### 개념 Check

수열 $\{a_n\}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$의 극한값을 구하여라.

**풀이** $n$의 값에 따른 $a_n$의 값의 변화를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같으므로 $n$이 한없이 커질 때 $a_n$의 값은 0에 한없이 가까워진다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=0$$

답 0



개념 002

## 수열의 발산



수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않을 때, 수열 $\{a_n\}$은 **발산**한다고 하며 극한값은 없다고 한다. 발산하는 경우는 다음 세 가지 경우가 있다.

### 1 양의 무한대로 발산

수열 $\{a_n\}$에서 $n$이 한없이 커질 때, $a_n$의 값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 **양의 무한대로 발산**한다고 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty \quad \text{또는} \quad n \longrightarrow \infty \text{일 때 } a_n \longrightarrow \infty$$

**Remark** $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$는 수열 $\{a_n\}$의 극한값이 $\infty$라는 것이 아니라, $a_n$의 값이 한없이 커지는 상태라는 것을 의미한다.

### 2 음의 무한대로 발산

수열 $\{a_n\}$에서 $n$이 한없이 커질 때, $a_n$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 **음의 무한대로 발산**한다고 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty \quad \text{또는} \quad n \longrightarrow \infty \text{일 때 } a_n \longrightarrow -\infty$$

### 3 진동

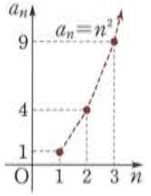
수열 $\{a_n\}$이 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으면 수열 $\{a_n\}$은 **진동**한다고 한다.

개념 Approach

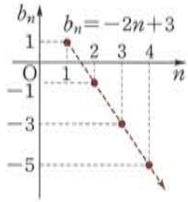
세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$의 일반항이 각각

$$a_n=n^2,\quad b_n=-2n+3,\quad c_n=\frac{(-1)^n}{3}$$

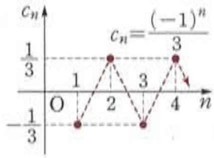
일 때, $n$의 값에 따른 수열의 항 $a_n$, $b_n$, $c_n$의 값의 변화를 그림으로 나타내면 다음과 같다.




[그림 1]




[그림 2]

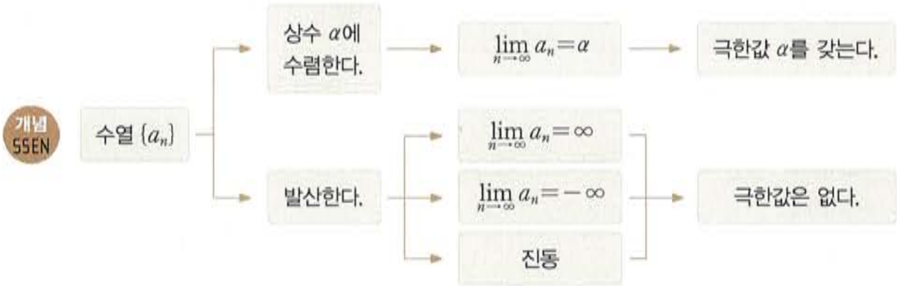



[그림 3]

$n$이 한없이 커질 때, [그림 1]에서 $a_n$의 값은 한없이 커지고, [그림 2]에서 $b_n$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커짐을 알 수 있다. 또 [그림 3]에서 $c_n$의 값은 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않음을 알 수 있다.

이것을 다음과 같이 표현한다.

- 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다. $\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
  $\Longleftrightarrow n \longrightarrow \infty$일 때 $a_n \longrightarrow \infty$ ⬅ 극한값은 없다.
- 수열 $\{b_n\}$은 음의 무한대로 발산한다. $\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$
  $\Longleftrightarrow n \longrightarrow \infty$일 때 $b_n \longrightarrow -\infty$ ⬅ 극한값은 없다.
- 수열 $\{c_n\}$은 진동한다. ⬅ 발산하며 극한값은 없다.



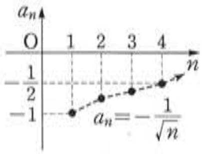

**개념 Check**

다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

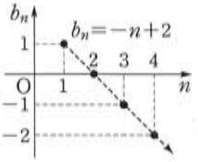
(1) $\{a_n\}$: $-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \cdots, -\frac{1}{\sqrt{n}}, \cdots$ (2) $\{b_n\}$: $1, 0, -1, \cdots, -n+2, \cdots$

(3) $c_n = 3n-1$ (4) $d_n = 1+(-1)^n$

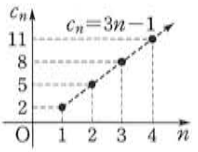
**풀이** (1) $n$의 값에 따른 $a_n$의 값의 변화를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 수열 $\{a_n\}$은 수렴하고, 그 극한값은 0이다.



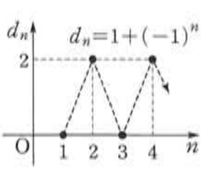

(2) $n$의 값에 따른 $b_n$의 값의 변화를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 수열 $\{b_n\}$은 음의 무한대로 발산한다.




(3) $n$의 값에 따른 $c_n$의 값의 변화를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 수열 $\{c_n\}$은 양의 무한대로 발산한다.




(4) $n$의 값에 따른 $d_n$의 값의 변화를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 수열 $\{d_n\}$은 발산 (진동)한다.




답 (1) 수렴, 0 (2) 발산 (3) 발산 (4) 발산

## 대표유형 001 수열의 수렴과 발산

• 개념 001, 002

다음 수열 $\{a_n\}$ 중 수렴하는 것은?

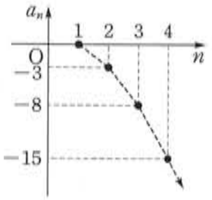
① $\{1-n^2\}$　② $\{(-1)^n\cdot 3\}$　③ $\{\log_2(n+1)\}$

④ $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$　⑤ $\{1+(-2)^n\}$

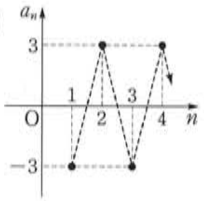
**유형 Guide** 수열 $\{a_n\}$의 수렴과 발산은 일반항 $a_n$에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 대입하여 값의 변화를 그래프로 나타내어 조사한다. 이때 $n$이 한없이 커짐에 따라 $a_n$이 가까워지는 일정한 값 $\alpha$가 존재하면 수열 $\{a_n\}$은 $\alpha$에 수렴하고, 아니면 발산한다.

**유형 SSEN** 수열 $\{a_n\}$의 수렴, 발산 ➲ 그래프를 이용한다.

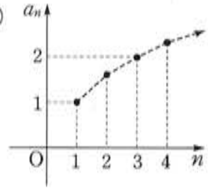
**풀이** 각 수열의 일반항에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 대입하여 $a_n$의 값의 변화를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

①


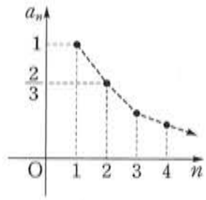
➡ 음의 무한대로 발산

②


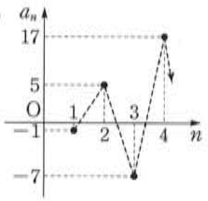
➡ 발산(진동)

③


➡ 양의 무한대로 발산

④


➡ 0으로 수렴

⑤


➡ 발산(진동)

따라서 수렴하는 수열은 ④이다.

답 ④

정답 및 풀이 • 2쪽

**유제 001-1** 다음 수열 $\{a_n\}$의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\{2n-1\}$　(2) $\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

(3) $\{3^n\}$　(4) $\left\{\frac{2-(-1)^n}{2}\right\}$

## 개념 003 수열의 극한에 대한 기본 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)일 때, 다음이 성립한다.

① $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha+\beta$

② $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha-\beta$

③ $\lim_{n\to\infty} ca_n=c\lim_{n\to\infty} a_n=c\alpha$ (단, $c$는 상수)

④ $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\neq 0$, $\beta\neq 0$)

**Remark** 수열의 극한에 대한 기본 성질은 수렴하는 수열에 대해서만 성립함에 유의한다.

**개념 Approach**

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$\{a_n\}$: 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, $\cdots$, $\{b_n\}$: $-1.1$, $-1.01$, $-1.001$, $-1.0001$, $\cdots$

일 때, 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 각각 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n=2$, $\lim_{n\to\infty} b_n=-1$이다.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 위의 성질 중 ①, ③이 성립하는지 알아보자.

① 수열 $\{a_n+b_n\}$은

$\{a_n+b_n\}$: 1, 1, 1, 1, $\cdots$

이므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=1$

이고, $\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=2+(-1)=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n$

③ 수열 $\{3a_n\}$은

$\{3a_n\}$: 6.3, 6.03, 6.003, 6.0003, $\cdots$

이므로 $\lim_{n\to\infty} 3a_n=6$

이고, $3\lim_{n\to\infty} a_n=3\cdot 2=6$이므로

$\lim_{n\to\infty} 3a_n=3\lim_{n\to\infty} a_n$

마찬가지 방법으로 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 위의 성질 ②, ④, ⑤가 성립함을 알 수 있다.

**Remark** 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 대응하는 항의 합, 차, 곱, 몫으로 이루어진 수열

$\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$, $\{a_nb_n\}$, $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ ($b_n\neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n\neq 0$)

도 각각 수렴하는 것이 알려져 있다.

개념 SSEN 수렴하는 수열 → lim 기호를 마음대로 분배하거나 묶을 수 있다.



개념 Check 1

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=3$, $\lim_{n\to\infty} b_n=-2$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty} (a_n+b_n)$

(2) $\lim_{n\to\infty} (3a_n-4b_n)$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{2a_n+1}{b_n^2}$

풀이 (1) $\lim_{n\to\infty} (a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=3+(-2)=1$

(2) $\lim_{n\to\infty} (3a_n-4b_n)=3\lim_{n\to\infty} a_n-4\lim_{n\to\infty} b_n=3\cdot3-4\cdot(-2)=9+8=17$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n=3\cdot(-2)=-6$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{2a_n+1}{b_n^2}=\frac{\lim_{n\to\infty} 2a_n+\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} (b_n\cdot b_n)}=\frac{2\lim_{n\to\infty} a_n+1}{\lim_{n\to\infty} b_n \lim_{n\to\infty} b_n}=\frac{2\cdot3+1}{-2\cdot(-2)}=\frac{7}{4}$

답 (1) 1 (2) 17 (3) $-6$ (4) $\frac{7}{4}$

개념 Check 2

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{3}{n}\right)$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$

(4) $\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{5}{n}\right)$

풀이 (1) $\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{3}{n}\right)=\lim_{n\to\infty} 3+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=3+3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=3+3\cdot0=3$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty} 1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1-0=1$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=2\cdot0-0=0$

(4) $\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{5}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(6+\frac{13}{n}-\frac{5}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty} 6+13\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$

$=6+13\cdot0-5\cdot0=6$

답 (1) 3 (2) 1 (3) 0 (4) 6

다른 풀이 (4) $\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{5}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{5}{n}\right)=3\cdot2=6$

개념 004

## 수열의 극한값의 계산

(1) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

분모의 최고차항으로 분모와 분자를 나눈다.

(2) $\infty-\infty$ 꼴의 극한

① 근호($\sqrt{\ }$)가 있을 때: 분모 또는 분자를 유리화한다.

② 근호가 없는 다항식일 때: 최고차항으로 묶는다.

**Remark** $\infty$는 수가 아니라 한없이 커지는 상태를 나타내므로 $\frac{\infty}{\infty}\neq1$, $\infty-\infty\neq0$임에 주의한다.

개념 Approach

(1) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{n^2+1}$에서

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+1)=\infty,\ \lim_{n\to\infty}(2n^2+3n+1)=\infty$$

이므로 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용할 수 없다.

이와 같은 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모의 최고차항인 $n^2$으로 분모, 분자를 나눈 후, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$임을 이용하여 다음과 같이 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{2}{1}=2$$

개념 SSEN

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 → | (분자의 차수)=(분모의 차수) → | 극한값은 최고차항의 계수의 비이다. |
| | (분자의 차수)<(분모의 차수) → | 극한값은 0이다. |
| | (분자의 차수)>(분모의 차수) → | 발산한다. |

(2) $\infty-\infty$ 꼴의 극한

① $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$에서

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}=\infty,\ \lim_{n\to\infty}n=\infty$$

이므로 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용할 수 없다.

이와 같이 무리식을 포함한 $\infty-\infty$ 꼴의 극한은 근호를 포함한 분모 또는 분자를 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 만든 후, 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나누어 다음과 같이 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{\lim_{n\to\infty}1}{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

② $\lim_{n\to\infty}(n^2-4n+3)$에서

$$\lim_{n\to\infty}n^2=\infty,\ \lim_{n\to\infty}(-4n+3)=-\infty$$

이므로 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용할 수 없다.

이와 같이 다항식인 $\infty-\infty$ 꼴의 극한은 최고차항으로 묶어서 다음과 같이 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}(n^2-4n+3)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)$$

이때 $\lim_{n\to\infty}n^2=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=\infty$$

**Remark** 극한의 계산에서 다음과 같이 생각하면 편리하다.

① $\infty\pm(\text{상수})=\infty$　② $\infty+\infty=\infty$　③ $\frac{(\text{상수})}{\infty}=0$

④ $\begin{cases}(\text{양수})\times\infty=\infty\\(\text{음수})\times\infty=-\infty\end{cases}$　⑤ $\begin{cases}\frac{\infty}{(\text{양수})}=\infty\\\frac{\infty}{(\text{음수})}=-\infty\end{cases}$

**개념 Check**

다음 극한을 조사하고, 극한이 존재하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n-3}$　(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$　(3) $\lim_{n\to\infty}(n^3-2n^2)$

**풀이** (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{3}{n}}=\frac{1}{2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

(3) $\lim_{n\to\infty}(n^3-2n^2)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(1-\frac{2}{n}\right)=\infty$

답 (1) 수렴, $\frac{1}{2}$ (2) 수렴, 0 (3) 발산

## 대표유형 002 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 수열의 극한

• 개념 004

다음 극한을 조사하고, 극한이 존재하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-2n}{3n^2+2n-1}$ (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2+1}$ (3) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2-n}+3}$

**유형 Guide** $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈 다음 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$임을 이용하여 극한값을 구한다.

(1), (2) 분모의 최고차항이 $n^2$이므로 분모, 분자를 $n^2$으로 나눈다.

(3) 분모의 최고차항이 $\sqrt{n^2}$, 즉 $n$이므로 분모, 분자를 $n$으로 나눈다.

**유형 SSEN** $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 ➡ 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.

**풀이** (1) 분모의 최고차항인 $n^2$으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-2n}{3n^2+2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-\frac{2}{n}}{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}=\infty$$

$\lim_{n\to\infty}\left(4n-\frac{2}{n}\right)=\infty$

$\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=3$

(2) 분모의 최고차항인 $n^2$으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{0-0}{1+0}=0$$

(3) 분모의 최고차항인 $n$으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2-n}+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\frac{3}{n}}=\frac{2+0}{1+0}=2$$

답 (1) 발산 (2) 수렴, 0 (3) 수렴, 2

정답 및 풀이 • 2쪽

**유제 002-1** 다음 극한을 조사하고, 극한이 존재하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+1}{2n^3-2n}$ (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+1}{7n-5}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{\sqrt{n+1}+3n}$ (4) $\lim_{n\to\infty}\frac{(1-n)(3n+5)}{(n+3)(2n-1)}$

**Plus 유제 002-2** 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ (2) $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right\}$

## 대표유형 003 $\infty-\infty$ 꼴의 수열의 극한

• 개념 004

다음 극한을 조사하고, 극한이 존재하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$ (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$ (3) $\lim_{n\to\infty}(5+3n^2-2n^3)$

**유형 Guide** $\infty-\infty$ 꼴의 극한에서 근호가 있는 식은 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형하고, 근호가 없는 식은 최고차항으로 묶어서 $\infty\times$(상수) 꼴로 변형한다.

**유형 SSEN** $\infty-\infty$ 꼴의 극한 [ 무리식 ➡ 유리화한다. / 다항식 ➡ 최고차항으로 묶는다. ]

**풀이** (1) 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=\frac{2}{1+1}=1$$

(2) 분모를 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{1}=\frac{1+1}{1}=2$$

(3) $\lim_{n\to\infty}(5+3n^2-2n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{5}{n^3}+\frac{3}{n}-2\right)=-\infty$

$\lim_{n\to\infty}n^3=\infty$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n^3}+\frac{3}{n}-2\right)=-2$

답 (1) 수렴, 1 (2) 수렴, 2 (3) 발산

정답 및 풀이 • 3쪽

**유제 003-1** 다음 극한을 조사하고, 극한이 존재하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)$ (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4n}-n}$ (3) $\lim_{n\to\infty}(3n^3+2n^2-n+1)$

## 대표유형 004 극한이 존재하는 수열의 미정계수의 결정 • 개념 004

다음 등식을 만족시키는 상수 $a$의 값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-n+5}{3n^2+2n}=\frac{1}{6}$　　　(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-3an}-\sqrt{n^2+1})=3$

**유형 Guide** 미정계수가 포함되어 있는 수열의 극한이 수렴할 때, $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나누고, $\infty-\infty$ 꼴의 극한은 근호가 있는 식을 유리화하여 미정계수가 포함된 극한값을 구한 후 이를 주어진 극한값과 비교한다.

**유형 SSEN**
- $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 ➡ 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.
- $\infty-\infty$ 꼴의 극한 ➡ 근호가 있으면 유리화한다.

**풀이** (1) 주어진 등식의 좌변에서 분모의 최고차항인 $n^2$으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-n+5}{3n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{a}{3}$$

따라서 $\frac{a}{3}=\frac{1}{6}$이므로　　$a=\frac{1}{2}$

(2) 주어진 등식의 좌변에서 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-3an}-\sqrt{n^2+1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-3an}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2-3an}+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2-3an}+\sqrt{n^2+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3an-(n^2+1)}{\sqrt{n^2-3an}+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3an-1}{\sqrt{n^2-3an}+\sqrt{n^2+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-3a-\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{3a}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{-3a}{1+1}=-\frac{3a}{2}$$

따라서 $-\frac{3a}{2}=3$이므로　　$a=-2$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $-2$

정답 및 풀이 • 3쪽

**유제 004-1** 다음 등식을 만족시키는 상수 $a$의 값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-3n+4}{3n^2-n+2}=\frac{2}{3}$　　　(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+an}-\sqrt{2n^2-n})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

**유제 004-2** $\lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{an^2-2n+4}=3$일 때, 상수 $a$, $b$에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라.

## 대표유형 005 일반항 $a_n$을 포함한 수열의 극한

• 개념 003, 004

수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음에 답하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+1}{a_n+4}=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라.

(2) $\lim_{n\to\infty}na_n=4$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{n^3a_n}$의 값을 구하여라.

**유형Guide** 일반항 $a_n$을 포함한 수열의 극한이 주어지면 $a_n$을 포함한 식을 $b_n$으로 놓고 $a_n$을 $b_n$에 대한 식으로 나타낸다.

**유형 SSEN 일반항 $a_n$을 포함한 수열의 극한 ➊ 주어진 수열을 $\{b_n\}$으로 놓는다.**

**풀이** (1) $\frac{3a_n+1}{a_n+4}=b_n$으로 놓으면

$$3a_n+1=b_n(a_n+4),\qquad (3-b_n)a_n=4b_n-1\qquad \therefore a_n=\frac{4b_n-1}{3-b_n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4b_n-1}{3-b_n}=\frac{4\cdot2-1}{3-2}=7$$

(2) $na_n=b_n$으로 놓으면 $\quad a_n=\frac{b_n}{n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=4$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{n^3a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{n^2b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{b_n}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

답 (1) 7 (2) $\frac{1}{2}$

**다른 풀이** (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{n^3a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3n}{n^2}\cdot\frac{1}{na_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{n^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

정답 및 풀이 • 4쪽

**유제 005-1** 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음에 답하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+5}{7-2a_n}=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라.

(2) $\lim_{n\to\infty}(2n+3)a_n=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}(n+5)a_n$의 값을 구하여라.

## 개념 005 수열의 극한의 대소 관계

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)일 때, 다음이 성립한다.

① 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\alpha \le \beta$

② 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$$

**Remark** 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n<b_n$이라고 해서 반드시 $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$이 성립하는 것은 아님에 주의한다.

### 개념 Approach

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{1}{n}+1$이면 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n<b_n$이고

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0,\ \lim_{n\to\infty} b_n=1$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$이 성립함을 알 수 있다.

한편 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n<b_n$일 때 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$일 수도 있다. 예를 들어 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$이면 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n<b_n$이지만

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0,\ \lim_{n\to\infty} b_n=0$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$임을 알 수 있다.

따라서 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$이 성립한다.

**Remark** $a_n \le b_n$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$이고, $\lim_{n\to\infty} b_n=-\infty$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$이다.

### 개념 Check

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여 $\frac{n}{4n+5}<a_n<\frac{n+2}{4n+3}$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

**풀이** $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{4n+5}=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4+\frac{5}{n}}=\frac{1}{4}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{4n+3}=\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{4+\frac{3}{n}}=\frac{1}{4}$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

## 대표유형 006 수열의 극한의 대소 관계

• 개념 005

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$\frac{2n-1}{n^2+1}<\frac{a_n}{n}<\frac{2n+1}{n^2+2}$$

을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

**유형 Guide** 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)일 때, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\alpha$이다.

**유형 SSEN** $a_n\le c_n\le b_n$이고 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\alpha$ (실수) ➲ $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\alpha$

**풀이** $\frac{2n-1}{n^2+1}<\frac{a_n}{n}<\frac{2n+1}{n^2+2}$에서 $\frac{2n^2-n}{n^2+1}<a_n<\frac{2n^2+n}{n^2+2}$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{2-0}{1+0}=2,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}=\frac{2+0}{1+0}=2$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$

답 2

정답 및 풀이 • 4쪽

**유제 006-1** 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여 $\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}<a_n<\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$의 값을 구하여라.

**유제 006-2** 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$\frac{n^2+2}{n+1}<\frac{a_n}{n+3}<\frac{n^2+4}{n+1}$$

를 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+3}$의 값을 구하여라.

# 개념 006 등비수열의 수렴과 발산

## 1 등비수열의 수렴과 발산

등비수열 $\{r^n\}$은 다음과 같이 공비 $r$의 값의 범위에 따라 수렴 또는 발산한다.

① $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ ← 양의 무한대로 발산

② $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$ ← 1에 수렴

③ $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ ← 0에 수렴

④ $r\le -1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n$은 진동 ← 발산

## 2 등비수열의 수렴 조건

① 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하기 위한 조건은 $-1<r\le 1$

② 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$이 수렴하기 위한 조건은 $a=0$ 또는 $-1<r\le 1$

**Remark** 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$에서 $a=0$이면 모든 항이 0이 되므로 주어진 수열은 공비에 관계없이 0에 수렴한다.

### 개념 Approach

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴, 발산을 공비 $r$의 값의 범위에 따라 알아보자.

① $r>1$일 때,

$r=1+h\,(h>0)$라 하면

$$r^n=(1+h)^n\ge 1+nh$$

가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명할 수 있다.

그런데 $h>0$이므로 $\lim_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} r^n=\infty$$

② $r=1$일 때,

수열 $\{r^n\}$의 모든 항이 1이므로

$$\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} 1=1$$

③ $|r|<1$일 때,

(i) $r=0$이면 수열 $\{r^n\}$의 모든 항이 0이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} 0=0$

(ii) $r\ne 0$이면 $\frac{1}{|r|}>1$이므로 ①에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|r^n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|r|}\right)^n=\infty$

따라서 $\lim_{n\to\infty}|r^n|=0$이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$

④ $r \le -1$일 때,

(i) $r=-1$이면 수열 $\{r^n\}$은 $-1, 1, -1, 1, \cdots$이므로 진동한다.

(ii) $r<-1$이면 $|r|>1$이므로 ①에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}|r|^n=\infty$$

이고, 수열 $\{r^n\}$은 각 항의 부호가 교대로 바뀌므로 수열 $\{r^n\}$은 진동한다.

개념 SSEN 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$ $\xrightarrow{\text{수렴}}$ $a=0$ 또는 $-1<r\le 1$

**개념 Check 1**

다음 등비수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$ (2) $\{(-2)^n\}$ (3) $\{(\sqrt{2})^n\}$ (4) $\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

**풀이** (1) 공비는 $\frac{3}{4}$이고, $-1<\frac{3}{4}<1$이므로 수열 $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$은 수렴한다.

(2) 공비는 $-2$이고, $-2<-1$이므로 수열 $\{(-2)^n\}$은 발산한다.

(3) 공비는 $\sqrt{2}$이고, $\sqrt{2}>1$이므로 수열 $\{(\sqrt{2})^n\}$은 발산한다.

(4) 공비는 $-\frac{1}{3}$이고, $-1<-\frac{1}{3}<1$이므로 수열 $\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$은 수렴한다.

답 (1) 수렴 (2) 발산 (3) 발산 (4) 수렴

**개념 Check 2**

다음 등비수열이 수렴하도록 하는 실수 $x$의 값의 범위를 구하여라.

(1) $\{(2x-1)^n\}$ (2) $\left\{\left(\frac{x}{3}\right)^n\right\}$

**풀이** (1) 등비수열 $\{(2x-1)^n\}$은 첫째항과 공비가 모두 $2x-1$이므로 이 수열이 수렴하려면

$-1<2x-1\le 1$, $0<2x\le 2$

$\therefore 0<x\le 1$

(2) 등비수열 $\left\{\left(\frac{x}{3}\right)^n\right\}$은 첫째항과 공비가 모두 $\frac{x}{3}$이므로 이 수열이 수렴하려면

$-1<\frac{x}{3}\le 1$ $\therefore -3<x\le 3$

답 (1) $0<x\le 1$ (2) $-3<x\le 3$

## 대표유형 007 등비수열의 극한

• 개념 006

다음 극한을 조사하고, 극한이 존재하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$ (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^n}{5^n-1}$ (3) $\lim_{n\to\infty}(2^{2n}-3^n)$

**유형 Guide** $\lim_{n\to\infty}r^n$ 꼴의 극한을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

(1), (2) 분모에서 밑이 가장 큰 거듭제곱으로 분모, 분자를 나눈 후 $-1<r<1$일 때 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$임을 이용한다.

(3) 밑이 가장 큰 거듭제곱으로 묶어서 $\infty\times$(상수) 꼴로 변형한다.

**유형 SSEN** **등비수열의 극한 ⊙ 공비에 따라 수렴, 발산이 결정된다.**

**풀이** (1) 분모에서 밑이 가장 큰 거듭제곱인 $3^n$으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

(2) 분모에서 밑이 가장 큰 거듭제곱인 $5^n$으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^n}{5^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}=\frac{2\cdot0+0}{1-0}=0$$

(3) $\lim_{n\to\infty}(2^{2n}-3^n)=\lim_{n\to\infty}(4^n-3^n)$

밑이 가장 큰 거듭제곱인 $4^n$으로 묶으면

$$\lim_{n\to\infty}(4^n-3^n)=\lim_{n\to\infty}4^n\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}=\infty$$

답 (1) 수렴, 1 (2) 수렴, 0 (3) 발산

정답 및 풀이 • 4쪽

**유제 007-1** 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\left\{\frac{3^n+1}{2^{2n+1}+2^n}\right\}$ (2) $\left\{\frac{\sqrt{8^n}-3^{n-1}}{3^n-2^n}\right\}$

(3) $\left\{\frac{3^n-5^n}{2^{n+1}}\right\}$ (4) $\left\{\frac{4\cdot9^n-5^{n+1}}{5^n+3^{2n}}\right\}$

Plus
**유제 007-2** $\lim_{n\to\infty}(5^n-3^n)^{\frac{1}{n}}$의 값을 구하여라.

## 대표유형 008 $r^n$을 포함한 수열의 극한

• 개념 006

수열 $\left\{\dfrac{r^n}{r^n+1}\right\}$의 극한값을 구하여라. (단, $r\neq-1$)

**유형 Guide** $r^n$을 포함한 수열의 극한은 $r$의 값의 범위에 따라 수렴, 발산이 결정되므로 $r$의 값의 범위를 $|r|<1$, $r=1$, $r=-1$, $|r|>1$로 나누어 극한값을 구한다.

**유형 SSEN** $r^n$을 포함한 수열의 극한 ○ $r$의 값의 범위를 나누어 구한다.

**풀이** (i) $|r|<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{r^n+1}=\frac{0}{0+1}=0$$

(ii) $r=1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{r^n+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(iii) $|r|>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{r^n}=0$

주어진 수열의 일반항의 분모, 분자를 $r^n$으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{r^n}}=\frac{1}{1+0}=1$$

답 $\begin{cases}|r|<1\text{일 때,} & 0\\ r=1\text{일 때,} & \frac{1}{2}\\ |r|>1\text{일 때,} & 1\end{cases}$

정답 및 풀이 • 5쪽

**유제 008-1** 수열 $\left\{\dfrac{1-r^n}{1+r^n}\right\}$의 극한값을 구하여라. (단, $r\neq-1$)

**유제 008-2** 수열 $\left\{\dfrac{1-x^{2n-1}}{1+x^{2n}}\right\}$의 극한값이 1이 되도록 하는 실수 $x$의 값의 범위를 구하여라.

## 대표유형 009 등비수열의 수렴 조건

• 개념 006

다음 등비수열이 수렴하도록 하는 실수 $x$의 값의 범위를 구하여라.

(1) $\{x^n(x-1)^n\}$　　(2) $\{(x-2)(x-3)^n\}$

**유형 Guide** 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$이 수렴하려면 $a=0$ 또는 $-1<r\le1$이어야 하므로 주어진 수열의 첫째항과 공비를 구하여 이 조건을 이용한다.

**유형 SSEN 등비수열의 수렴 조건 ○ (첫째항)$=0$ 또는 $-1<$(공비)$\le1$**

**풀이** (1) $x^n(x-1)^n=\{x(x-1)\}^n$이므로 등비수열 $\{x^n(x-1)^n\}$은 첫째항과 공비가 모두 $x(x-1)$이다.

따라서 이 수열이 수렴하려면　$-1<x(x-1)\le1$

$\therefore -1<x^2-x\le1$

(i) $-1<x^2-x$에서 $x^2-x+1>0$이고

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

따라서 모든 실수 $x$에 대하여 성립한다.

(ii) $x^2-x\le1$에서 $x^2-x-1\le0$이므로

$$\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\le0 \qquad \therefore \frac{1-\sqrt{5}}{2}\le x\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 $x$의 값의 범위는

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\le x\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(2) 등비수열 $\{(x-2)(x-3)^n\}$은 첫째항이 $(x-2)(x-3)$, 공비가 $x-3$이므로 이 수열이 수렴하려면

$(x-2)(x-3)=0$ 또는 $-1<x-3\le1$

따라서 $x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $2<x\le4$이므로

$2\le x\le4$

답 (1) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\le x\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (2) $2\le x\le4$

정답 및 풀이 • 5쪽

**유제 009-1** 다음 등비수열이 수렴하도록 하는 실수 $x$의 값의 범위를 구하여라.

(1) $\left\{\left(\frac{x^2-x}{2}\right)^n\right\}$　　(2) $\{x(x-1)^n\}$

## 특강 007 귀납적으로 정의된 수열의 극한



수학 Ⅱ에서 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구하는 것을 공부하였다.
이제 귀납적으로 정의된 수열의 극한을 구하는 방법에 대하여 알아보자.

예를 들어 $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+1$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 다음 두 가지 방법으로 구해 보자.

**방법 1** 일반항 이용하기

$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+1$을 $a_{n+1}-\alpha=\frac{2}{3}(a_n-\alpha)$로 놓으면 $\quad a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}\alpha$

$\frac{1}{3}\alpha=1$이므로 $\quad \alpha=3$

$$\therefore a_{n+1}-3=\frac{2}{3}(a_n-3)$$

따라서 수열 $\{a_n-3\}$은 첫째항이 $a_1-3=1-3=-2$, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$$a_n-3=-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \qquad \therefore a_n=3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}=3-2\cdot 0=3$$

**방법 2** 수열의 극한에 대한 기본 성질 이용하기

$a_{n+1}=pa_n+q$에서 $|p|<1$이면 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

따라서 $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+1$에서 $-1<\frac{2}{3}<1$이므로 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+1$에서 $\quad \lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}a_n+1\right)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty} a_n+1$$

이때 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$로 놓으면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$이므로

$$\alpha=\frac{2}{3}\alpha+1, \qquad \frac{1}{3}\alpha=1 \qquad \therefore \alpha=3$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=3$$

**Remark** $p\neq1$일 때, $a_{n+1}=pa_n+q$로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=\left(a_1-\frac{q}{1-p}\right)\cdot p^{n-1}+\frac{q}{1-p}$$

이때 $|p|<1$이면 $\lim_{n\to\infty} p^{n-1}=0$이므로 수열 $\{a_n\}$은 $\frac{q}{1-p}$로 수렴한다.

## 대표유형 010 귀납적으로 정의된 수열의 극한 • 특강 007

$a_1=3,\ 3a_{n+1}=a_n+4\ (n=1, 2, 3, \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

**유형 Guide** 귀납적으로 정의된 수열의 극한은 먼저 일반항을 구하고 이를 이용하여 극한값을 구한다. 이때 다음을 이용한다.

- $a_{n+1}=pa_n+q(p\neq1,\ q\neq0)$ 꼴 ➡ $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$로 변형$\left(\text{단, } \alpha=\dfrac{q}{1-p}\right)$
- $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0(p+q+r=0)$ 꼴 ➡ $a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{r}{p}(a_{n+1}-a_n)$으로 변형

**유형 55EN** 귀납적으로 정의된 수열의 극한 ⊙ 먼저 일반항을 구한다.

**풀이** $3a_{n+1}=a_n+4$에서 $\quad a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{4}{3}$

$a_{n+1}-\alpha=\dfrac{1}{3}(a_n-\alpha)$로 놓으면 $\quad a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{2}{3}\alpha$

$\dfrac{2}{3}\alpha=\dfrac{4}{3}$이므로 $\quad \alpha=2$

$\therefore a_{n+1}-2=\dfrac{1}{3}(a_n-2)$

따라서 수열 $\{a_n-2\}$는 첫째항이 $a_1-2=3-2=1$, 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이므로

$a_n-2=1\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} \qquad \therefore a_n=2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=2+0=2$

답 2

**다른 풀이** $3a_{n+1}=a_n+4$, 즉 $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{4}{3}$에서 $-1<\dfrac{1}{3}<1$이므로 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{4}{3}\right)$이므로 $\quad \lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\dfrac{1}{3}\lim_{n\to\infty} a_n+\dfrac{4}{3}$

이때 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$로 놓으면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$이므로

$\alpha=\dfrac{1}{3}\alpha+\dfrac{4}{3}, \quad \dfrac{2}{3}\alpha=\dfrac{4}{3} \quad \therefore \alpha=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=2$

정답 및 풀이 • 6쪽

**유제 010-1** $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+1(n=1, 2, 3, \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{4^n}$의 값을 구하여라.

# 중단원 연습 문제

정답 및 풀이 • 6쪽



**STEP 1 유형 Training**

**01** 수열 $\{a_n\}$이 발산하는 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$　　ㄴ. $a_n=\dfrac{n^2+3}{2n+1}$

ㄷ. $a_n=-n+\dfrac{1}{n}$　　ㄹ. $a_n=n\cdot(-1)^n$

① ㄱ　② ㄴ, ㄷ　③ ㄴ, ㄹ　④ ㄱ, ㄷ, ㄹ　⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

**02** 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt{n^2-2016}}{\sqrt{n^2-2015}-n}$

**03** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}an(\sqrt{4n^2+1}-2n)=3$을 만족시키는 상수 $a$의 값을 구하여라.

서술형

**04** 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3n+1)a_n=4$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3a_n}{2n^2+5}$의 값을 구하여라.

**05** 수열 $\left\{\dfrac{1+x^{2n}}{1-2x^n}\right\}$의 극한에 대한 설명 중 옳지 않은 것은? (단, $x\neq-1$)

① $x<-1$이면 발산한다.　② $-1<x<0$이면 1에 수렴한다.

③ $0<x<1$이면 $-2$에 수렴한다.　④ $x=1$이면 $-2$에 수렴한다.

⑤ $x>1$이면 발산한다.

서술형

**06** 수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=0,\ a_2=1,\ 5a_{n+2}-2a_{n+1}-3a_n=0\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

으로 정의할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

**STEP 2 실전 Application**

**07** 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$으로 정의할 때, 수렴하는 수열인 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

보기

ㄱ. $\{a_{2n}\}$　　ㄴ. $\{|a_n|\}$　　ㄷ. $\{[a_n]\}$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**08** 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열이다. 수열 $\{b_n\}$에 대하여 $b_n=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{3}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$의 값을 구하여라.

서술형

**09** 자연수 $n$에 대하여 $\sqrt{4n^2+2n+1}$의 소수 부분을 $a_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

**10** $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=5$일 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n-3b_n}{2a_n+b_n}$의 값은?

① $-\dfrac{2}{3}$　② $-\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ $\dfrac{3}{2}$

**11** 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty} (a_n-b_n)=0$이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=0$이다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} (a_n-b_n)=0$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$이다. (단, $\alpha$는 실수)

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

서술형

**12** 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여 $n+1<a_n<n+2$를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{n} a_k=S_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{S_n}$의 값을 구하여라.

**13** $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{n}{4}\right]$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

평가원기출

**14** 자연수 $n$에 대하여 두 직선 $2x+y=4^n$, $x-2y=2^n$이 만나는 점의 좌표를 $(a_n, b_n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}=p$이다. $60p$의 값을 구하여라.

**15** 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+3}+3x}{x^{2n}+1}$에 대하여 $f\left(\frac{1}{3}\right)-f(3)$의 값을 구하여라.

서술형

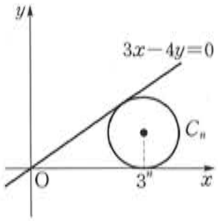
**16** 자연수 $n$에 대하여 다항식 $2^n x^2+3^{n-1}x-1$을 $x+1$, $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 각각 $a_n$, $b_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값을 구하여라.

서술형

**17** $\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot a^n+5^{n+1}}{a^{n+1}+b\cdot 5^n}>1$을 만족시키는 10 이하의 자연수 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$의 개수를 구하여라.

서술형

**18** 자연수 $n$에 대하여 $x$축과의 접점의 $x$좌표가 $3^n$인 원 $C_n$이 오른쪽 그림과 같이 제1사분면에서 직선 $3x-4y=0$에 접하고 있다. 원 $C_n$의 둘레의 길이를 $l_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{\pi(3^n+2^n)}$의 값을 구하여라.




교육청기출

**19** 자연수 $n$에 대하여 다음과 같이 제$n$행에 0과 1 사이의 유리수 중에서 분모는 $2^n$이고 분자는 홀수인 모든 수를 작은 것부터 차례로 나열하였다.

| | |
|---|---|
| 제1행 | $\frac{1}{2}$ |
| 제2행 | $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ |
| 제3행 | $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ |
| ⋮ | ⋮ |

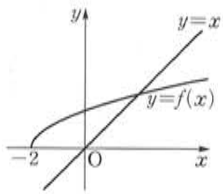
제$n$행의 마지막 수를 $a_n$, 제$n$행의 모든 수의 합을 $b_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{(2^n+1)a_n}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

**20** 오른쪽 그림은 함수 $f(x)=\sqrt{x+2}$와 $y=x$의 그래프이다. 수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=-1,\quad a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

로 정의할 때, 오른쪽 그림을 이용하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

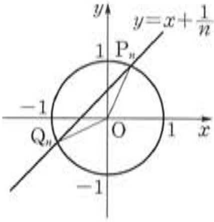



## STEP 3 심화 Forwarding

교육청기출

**21** 그림과 같이 좌표평면에서 자연수 $n$에 대하여 직선 $y=x+\frac{1}{n}$과 원 $x^2+y^2=1$이 만나는 두 점을 각각 $P_n$, $Q_n$이라 하자. 삼각형 $OP_nQ_n$의 넓이를 $A_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(n\cdot A_n)$의 값은?

(단, O는 원점이다.)




① $\frac{\sqrt{2}}{2}$　② $\frac{\sqrt{3}}{2}$　③ 1　④ $\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

서술형

**22** 수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 $\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}=\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{2n}$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

평가원기출

**23** 첫째항이 10인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_n<a_{n+1},\quad \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2=2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

**24** 화면에 나타나 있는 수 $x$에 대하여 기능키를 누르면 $1+\frac{1}{x}$의 값이 나타나도록 프로그램이 되어 있는 전자계산기가 있다. 처음 화면에 1이 나타났을 때, 이 기능키를 한없이 누르면 화면에 나타나는 수는 어떤 수에 한없이 가까워지는지 구하여라.

# 02

## 급수

자연수를 나타내는 수열 $\{n\}$의 각 항을 차례대로 더한 $1+2+3+\cdots+n+\cdots$은 $n$이 한없이 커지면 그 합도 한없이 커질 것이다. 그렇다면 자연수의 역수를 나타내는 수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$의 각 항을 차례대로 더한 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\cdots$의 값은 어떻게 될까? 일정한 값으로 수렴하게 될까? 아니면 발산하게 될까?

이 단원에서는 수열의 각 항을 차례대로 더하는 급수의 뜻을 이해하고, 급수의 수렴, 발산에 대하여 알아보자. 또 급수의 합을 구하고 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결해 보자.

### 한눈에 보는 개념&유형 map

**소단원 & 학습목표**

**04 급수의 수렴과 발산**

- 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

**05 등비급수의 수렴과 발산**

- 등비급수의 수렴 조건을 알고, 그 합을 구할 수 있다.

**06 등비급수의 활용**

- 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

개념 & 특강 | 대표유형 & 유제

008 급수

009 급수의 수렴과 발산 — 011 급수의 수렴과 발산 — 012 급수의 합

특강 010 항의 부호가 교대로 바뀌는 급수

011 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴, 발산과 $\lim_{n \to \infty} a_n$ 사이의 관계 — 013 급수의 수렴 조건

012 급수의 성질 — 014 급수의 성질

013 등비급수의 수렴과 발산 — 015 등비급수의 합 (1) — 016 등비급수의 합 (2) — 017 등비급수의 수렴 조건

014 등비급수와 도형 — 018 등비급수의 활용 – 점의 좌표 — 019 등비급수의 활용 – 선분의 길이의 합 — 020 등비급수의 활용 – 도형의 넓이의 합

015 등비급수와 순환소수 — 021 등비급수의 활용 – 순환소수

개념 008

# 급수

## 1 급수

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례대로 덧셈 기호 $+$를 사용하여 연결한 식

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

을 **급수**라 하고, 이것을 기호 $\sum$를 사용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 같이 나타낸다.

> 급수 ➡ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

**Remark** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $\cdots$는 모두 급수 $a_1+a_2+a_3+\cdots$을 나타내는 것으로 같은 표현이다.

## 2 부분합

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제$n$항까지의 합

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

를 이 급수의 제$n$항까지의 **부분합**이라 한다.

> 부분합 ➡ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=S_n$

개념 Approach

수열 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$에 대하여

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

을 급수라 하고,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

을 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$의 제$n$항까지의 부분합이라 한다.

개념 SSEN

| | | |
|---|---|---|
| 수열 $\{a_n\}$ | → | $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ |
| 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ | → | $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ |

개념 009

# 급수의 수렴과 발산

## 1 급수의 수렴

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 $S$에 수렴할 때, 즉 $\lim_{n\to\infty} S_n=S$ 일 때, 이 급수는 $S$에 수렴한다고 한다.
이때 $S$를 **급수의 합**이라 하고, 다음과 같이 나타낸다.

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=S \text{ 또는 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$$

**Remark** • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=\lim_{n\to\infty} S_n$

• 기호 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 급수를 나타내기도 하고 급수의 합을 나타내기도 한다.

## 2 급수의 발산

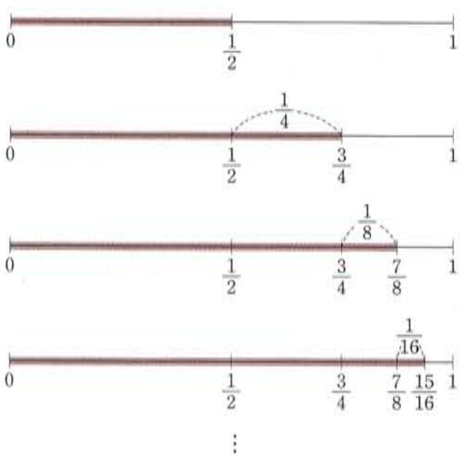
급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 발산할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다고 한다.

**Remark** 발산하는 급수에 대해서는 그 합을 생각하지 않는다.

개념 Approach

수열 $\{a_n\}$: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\cdots$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$을 생각해 보자.

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$, $\cdots$의 값은 다음 그림과 같이 점점 1에 가까워지고, $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 1에 수렴함을 알 수 있다.




$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

$\vdots$

이제 부분합을 이용하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$의 합을 구해 보자.

수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 제$n$항까지의 부분합 $S_n$은

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = 1$$

따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다. 즉 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$이다.

이와 같이 급수는 부분합으로 이루어진 수열의 극한임을 알 수 있다.

일반적으로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴, 발산은 다음과 같은 순서로 조사한다.

(i) 부분합 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$를 구한다.

(ii) $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$의 수렴, 발산을 조사한다.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴, 발산은 $\lim_{n\to\infty} S_n$의 수렴, 발산과 같다.

개념 SSEN

| | | |
|---|---|---|
| 수열 $\{a_n\}$의 수렴, 발산 | → | $\lim_{n\to\infty} a_n$ 조사 |
| 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴, 발산 | → | $\lim_{n\to\infty} S_n$ 조사 |

**개념 Check**

다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

(1) $2+4+6+\cdots+2n+\cdots$

(2) $1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\cdots$

**풀이** 주어진 급수의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하자.

(1) $S_n = \underline{2+4+6+\cdots+2n} = \frac{n(2+2n)}{2} = n^2+n$

첫째항이 2, 제$n$항이 $2n$인 등차수열의 합

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(n^2+n) = \infty$

(2) $S_n = 1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} = \frac{3}{2}$

답 (1) 발산 (2) 수렴, $\frac{3}{2}$

## 대표유형 011 급수의 수렴과 발산

• 개념 009

다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\cdots$

(2) $\log\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)+\log\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)+\log\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)+\cdots+\log\left\{1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right\}+\cdots$



**유형 Guide** 급수의 수렴과 발산을 조사할 때에는 부분합으로 이루어진 수열의 수렴, 발산을 조사한다.

(1) 분모에 근호가 포함된 경우에는 분모를 유리화한 후 부분합을 구한다.

(2) 로그가 포함된 경우에는 로그의 성질을 이용하여 로그의 합을 진수의 곱으로 변형한 후 부분합을 구한다.

**유형 SSEN** **급수의 수렴, 발산 ⊙ 부분합으로 이루어진 수열의 수렴, 발산을 조사한다.**

**풀이** 주어진 급수의 제$n$항을 $a_n$, 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하자.

(1) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$=\sqrt{n+1}-1$$

앞에서 두 번째가 남으면 뒤에서도 두 번째가 남는다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$$

(2) $a_n=\log\left\{1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right\}=\log\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)=\log\left(\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{n+2}{n+1}\right)$이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k+2}{k+1}\right)$$

$$=\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)+\log\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)+\cdots+\log\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$=\log\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\cdots\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)\right\}=\log\frac{n+2}{2(n+1)}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log\frac{n+2}{2(n+1)}=\log\frac{1}{2}=-\log 2$$

앞에서 첫 번째가 남으면 뒤에서도 첫 번째가 남는다.

답 (1) 발산 (2) 수렴, $-\log 2$

정답 및 풀이 • 13쪽

**유제 011-1** 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\log\frac{n^2}{n^2-1}$ (3) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots$

## 대표유형 012 급수의 합

• 개념 009

첫째항이 $-2$, 공차가 4인 등차수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=3}^{n}\frac{2}{S_k}$의 값을 구하여라.

**유형 Guide** 등차수열의 합의 공식을 이용하여 $S_n$을 구한 후, 주어진 급수의 부분합 $\sum_{k=3}^{n}\frac{2}{S_k}$를 구한다.
이때 $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)(A\neq B)$임을 이용한다.

**유형 SSEN 급수의 합 ➔ 부분합의 극한값을 구한다.**

**풀이** $S_n=\frac{n\{2\cdot(-2)+(n-1)\cdot 4\}}{2}=2n(n-2)$이므로

$$\frac{2}{S_n}=\frac{2}{2n(n-2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore \sum_{k=3}^{n}\frac{2}{S_k}=\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

앞에서 첫 번째, 세 번째가 남으면 뒤에서도 첫 번째, 세 번째가 남는다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=3}^{n}\frac{2}{S_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

**Remark** 첫째항이 $a$, 공차가 $d$인 등차수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합 $S_n$은

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

정답 및 풀이 • 13쪽

**유제 012-1** 첫째항이 3, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(6-S_k)$의 값을 구하여라.

**유제 012-2** $\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}$의 값을 구하여라.

특강 010

## 항의 부호가 교대로 바뀌는 급수

$1-1+1-1+1-1+\cdots$ 과 같이 양의 항과 음의 항이 번갈아 나타나는 급수는 홀수 번째 항까지의 부분합 $S_{2n-1}$과 짝수 번째 항까지의 부분합 $S_{2n}$의 극한값을 비교하여 다음과 같이 수렴, 발산을 조사한다. (단, $n$은 자연수이다.)

> ① $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty} S_{2n}=\alpha$ (실수)이면 급수는 $\alpha$에 수렴하고, 그 합은 $\alpha$이다.
>
> ② $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty} S_{2n}$이면 급수는 발산하고, 그 합은 없다.

예를 들어 급수 $1-1+1-1+1-1+\cdots$ 의 수렴, 발산을 조사해 보자.

(i) 홀수 번째 항까지의 부분합을 차례대로 구하면

$$S_1=1,\ S_3=1-1+1=1,\ S_5=1-1+1-1+1=1,\ \cdots$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=1$

(ii) 짝수 번째 항까지의 부분합을 차례대로 구하면

$$S_2=1-1=0,\ S_4=1-1+1-1=0,\ S_6=1-1+1-1+1-1=0,\ \cdots$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} S_{2n}=0$

(i), (ii)에서 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty} S_{2n}$이므로 급수 $1-1+1-1+1-1+\cdots$ 은 발산한다.

**개념 Check**

급수 $-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\cdots$의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

**풀이** 주어진 급수의 제$n$항을 $a_n$, 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

(i) $a_{2m-1}=-\frac{1}{2m-1}$이므로

$$S_{2m-1}=-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\cdots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m-1}=-1$$

$$\therefore \lim_{m\to\infty} S_{2m-1}=-1$$

(ii) $a_{2m}=\frac{1}{2m+1}$이므로

$$S_{2m}=-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\cdots-\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{2m+1}=-1+\frac{1}{2m+1}$$

$$\therefore \lim_{m\to\infty} S_{2m}=\lim_{m\to\infty}\left(-1+\frac{1}{2m+1}\right)=-1+0=-1$$

(i), (ii)에서 $\lim_{m\to\infty} S_{2m-1}=\lim_{m\to\infty} S_{2m}=-1$이므로 주어진 급수는 $-1$에 수렴한다.

답 수렴, $-1$

개념 011

## $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴, 발산과 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 사이의 관계

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴, 발산과 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

① 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

② $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

**Remark** ①과 ②는 서로 대우 관계이고, 그 역은 성립하지 않는다.

개념 Approach

다음 명제를 증명해 보자.

'급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.' …… ㉠

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 $S$에 수렴할 때, 이 급수의 제 $n$ 항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S,\ \lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S$$

이때 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S-S=0$$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

또 위의 명제가 참이므로 그 대우

'$\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.'

도 참이다. ⬅ 명제 '$p \longrightarrow q$'가 참이면 그 대우 '$\sim q \longrightarrow \sim p$'도 참이다.

한편 ㉠의 역은 성립하지 않는다. 즉

$\underline{\lim_{n\to\infty} a_n=0\text{이라 해서 급수 }\sum_{n=1}^{\infty} a_n\text{이 반드시 수렴하는 것은 아니다.}}$

예를 들어 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이지만

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}&=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\&>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty\end{aligned}$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$은 발산한다.

**Remark** 위의 급수와 극한값 사이의 관계 ②를 이용하면 $\lim_{n\to\infty} S_n$의 수렴, 발산을 조사하지 않고도 급수가 발산하는지 판별할 수 있다.

개념 SSEN $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$ (수렴) $\xrightarrow{\bigcirc}$ $\xleftarrow{\times}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

개념 Check 1

다음 급수가 발산함을 보여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n+5}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}$

풀이 (1) $a_n = \frac{3n^2}{n+5}$이라 하면

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{1+\frac{5}{n}} = \infty$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

(2) $a_n = 1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$이라 하면

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\} = 1-0 = 1$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

개념 Check 2

다음 급수가 발산함을 보여라.

(1) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\cdots$ (2) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\cdots$

풀이 주어진 급수의 제 $n$ 항을 $a_n$이라 하자.

(1) $a_n = \frac{n}{3n-1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3-\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

(2) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\ &= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) = \infty\end{aligned}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

## 대표유형 013 급수의 수렴 조건

• 개념 011

급수 $(a_1+1)+\left(a_2+\frac{2}{3}\right)+\left(a_3+\frac{3}{5}\right)+\cdots$ 이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}(2a_n-5)$의 값을 구하여라.

**유형 Guide** 수열 $\{a_n\}$을 포함한 급수가 수렴하면 이 급수의 일반항을 $b_n$으로 놓고 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$임을 이용한다.

**유형 SSEN** 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 ➡ $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

**풀이** 주어진 급수의 제$n$항을 $b_n$이라 하면 $b_n=a_n+\frac{n}{2n-1}$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$b_n=a_n+\frac{n}{2n-1}$에서 $a_n=b_n-\frac{n}{2n-1}$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}\left(b_n-\frac{n}{2n-1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}b_n-\underline{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}}\\&=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(2a_n-5)=2\lim_{n\to\infty}a_n-5=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-5=-6$$

답 $-6$

정답 및 풀이 • 14쪽

**유제 013-1** 다음에 답하여라.

(1) 급수 $(a_1-4)+(a_2-4)+(a_3-4)+\cdots$가 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라.

(2) 급수 $\left(a_1-\frac{2}{3}\right)+\left(a_2-\frac{4}{9}\right)+\left(a_3-\frac{8}{27}\right)+\cdots$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n+3)$의 값을 구하여라.

**Plus 유제 013-2** 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(na_n-2)=\frac{1}{3}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2a_n}{5n-2}$의 값을 구하여라.

개념 012

## 급수의 성질

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하고, 그 합을 각각 $S$, $T$라 할 때, 다음이 성립한다.

① $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n=S+T$

② $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n=S-T$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n=c\sum_{n=1}^{\infty} a_n=cS$ (단, $c$는 상수)

**Remark** • $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}$

개념 Approach

급수의 성질은 $\sum$의 기본 성질과 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하면 쉽게 이해할 수 있다.
즉 합의 기호 $\sum$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k+\sum_{k=1}^{n} b_k,\ \sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n} b_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k=c\sum_{k=1}^{n} a_k\ (c\text{는 상수})$$

가 성립하고, $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$이 수렴할 때,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n,\ \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n=c\lim_{n\to\infty} a_n\ (c\text{는 상수})$$

이 성립하므로 위와 같은 급수의 성질이 성립한다.
이때 수열의 극한에 대한 기본 성질과 마찬가지로 급수의 성질도 수렴하는 급수에 대해서만 성립함에 유의한다.

개념 Check

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=-3$일 때, 다음 급수의 합을 구하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+b_n)$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-7b_n)$

풀이 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+b_n)=3\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n=3\cdot2+(-3)=3$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-7b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-7\sum_{n=1}^{\infty} b_n=2-7\cdot(-3)=23$

답 (1) 3 (2) 23

## 대표유형 014 급수의 성질

• 개념 012

수렴하는 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)=5,\ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n-2b_n)=-1$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n-b_n)$의 값을 구하여라.

**유형 Guide** 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\beta$로 놓고, 급수의 성질을 이용하여 $\alpha$, $\beta$의 값을 구한다.

**유형 SSEN** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴 ➡ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (복호동순)

**풀이** 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\beta$로 놓으면

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)=5$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n=5 \quad \therefore \alpha+\beta=5 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-2b_n)=-1$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n-2\sum_{n=1}^{\infty} b_n=-1 \quad \therefore \alpha-2\beta=-1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=3,\ \beta=2$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (3a_n-b_n)=3\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n=3\alpha-\beta$$
$$=3\cdot3-2=7$$

답 7

정답 및 풀이 • 14쪽

**유제 014-1** 수렴하는 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)=-4$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-b_n)=8$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n-3b_n)$의 값을 구하여라.

**유제 014-2** 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=-2$이고, $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n+b_n)=10$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구하여라.

# 개념 013 등비급수의 수렴과 발산

## 1 등비급수

첫째항이 $a$, 공비가 $r$인 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$의 각 항을 덧셈 기호 $+$로 연결한 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

을 첫째항이 $a$, 공비가 $r$인 **등비급수**라 한다.

## 2 등비급수의 수렴과 발산

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ $(a \neq 0)$은 다음과 같이 공비 $r$의 값의 범위에 따라 수렴 또는 발산한다.

① $|r|<1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\dfrac{a}{1-r}$이다.

② $|r| \geq 1$일 때, 발산한다.

**Remark**
- 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$이 수렴하기 위한 조건은 $a=0$ 또는 $-1<r\leq 1$
- 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$이 수렴하기 위한 조건은 $a=0$ 또는 $-1<r<1$

**개념 Approach**

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ $(a \neq 0)$의 수렴, 발산은 급수와 마찬가지로 부분합의 수열 $\{S_n\}$의 수렴, 발산에 의하여 결정된다. 즉 $S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$에서

(i) $r \neq 1$일 때, $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

(ii) $r=1$일 때, $S_n = \underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{n\text{개}} = na$

이므로 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ $(a \neq 0)$의 수렴, 발산은 공비 $r$의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

① $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$이므로 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$

따라서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 수렴하고, 그 합은 $\dfrac{a}{1-r}$이다.

② $|r| \geq 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} \neq 0$이므로 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 발산한다.

**Remark** $r=1$은 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$의 수렴 조건이지만 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 수렴 조건은 아니다.

개념 SSEN 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \xrightarrow{\text{수렴}} a=0$ 또는 $-1<r<1$

개념 Check 1

다음 등비급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

(1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$　　(2) $\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\cdots$

(3) $1-\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}+\cdots$　　(4) $2-0.2+0.02-0.002+\cdots$

풀이 (1) 주어진 등비급수의 공비는 $\frac{1}{2}$이고, $\left|\frac{1}{2}\right|<1$이므로 이 등비급수는 수렴하고, 그 합은

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

(2) 주어진 등비급수의 공비는 $\frac{3}{2}$이고, $\left|\frac{3}{2}\right|>1$이므로 이 등비급수는 발산한다.

(3) 주어진 등비급수의 공비는 $-\sqrt{2}$이고, $|-\sqrt{2}|>1$이므로 이 등비급수는 발산한다.

(4) 주어진 등비급수의 공비는 $-0.1$이고, $|-0.1|<1$이므로 이 등비급수는 수렴하고, 그 합은

$$\frac{2}{1-(-0.1)}=\frac{2}{1.1}=\frac{20}{11}$$

답 (1) 수렴, 2 (2) 발산 (3) 발산 (4) 수렴, $\frac{20}{11}$

개념 Check 2

다음 등비급수가 수렴하도록 하는 실수 $x$의 값의 범위를 구하여라.

(1) $1-3x+9x^2-27x^3+\cdots$　　(2) $\frac{5-x}{3}+\frac{(5-x)^2}{9}+\frac{(5-x)^3}{27}+\cdots$

풀이 (1) 주어진 등비급수의 첫째항은 1, 공비는 $-3x$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1<-3x<1 \qquad \therefore -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$$

(2) 주어진 등비급수의 첫째항과 공비가 모두 $\frac{5-x}{3}$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1<\frac{5-x}{3}<1, \qquad -3<5-x<3$$

$$-8<-x<-2 \qquad \therefore 2<x<8$$

답 (1) $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$ (2) $2<x<8$

## 대표유형 015 등비급수의 합 (1)

• 개념 013

다음 등비급수의 합을 구하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}}$

02 급수

**유형 Guide** 주어진 등비급수의 첫째항 $a$와 공비 $r$를 찾아 $|r|<1$인지 확인한 후 등비급수의 합 $\frac{a}{1-r}$를 구한다.

**유형 SSEN** 등비급수의 합 ○ 첫째항과 공비를 구한다.

**풀이** (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n$은 첫째항과 공비가 모두 $-\frac{2}{3}$인 등비급수이다.

이때 $\left|-\frac{2}{3}\right|<1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{-\frac{2}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}=-\frac{2}{5}$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}}$은 첫째항이 $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, 공비가 $1-\sqrt{2}$인 등비급수이다.

이때 $|1-\sqrt{2}|<1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{1-(1-\sqrt{2})}=\frac{\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

답 (1) $-\frac{2}{5}$ (2) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

정답 및 풀이 • 14쪽

**유제 015-1** 다음 등비급수의 합을 구하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}8^n10^{-n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{4^{n-1}}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^n$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{3^n}$

## 대표유형 016 등비급수의 합 (2)

• 개념 012, 013

다음 급수의 합을 구하여라.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}+3^n}{6^n}$

**유형 Guide** 급수의 성질을 이용하여 주어진 급수를 수렴하는 두 등비급수로 나눈 후, 각 등비급수의 첫째항 $a$와 공비 $r$를 찾아 등비급수의 합 $\dfrac{a}{1-r}$를 구한다.

**유형 SSEN** 등비급수의 합 ◎ 첫째항과 공비를 구한다.

**풀이** (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}+3^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{6^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{6}\right)^n$

$\displaystyle=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=2\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$

$=1+1=2$

답 (1) $-\dfrac{1}{2}$ (2) 2

정답 및 풀이 • 15쪽

**유제 016-1** 다음 급수의 합을 구하여라.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(11\cdot10^{-2n}+8\cdot10^{-n})$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\{2^n+(-2)^n\}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

**Plus 유제 016-2** 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2=3$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 공비를 구하여라.

대표유형 017 **등비급수의 수렴 조건** • 개념 013

두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{x}\right)^n$이 모두 수렴하도록 하는 $x$의 값의 범위를 구하여라.

02 급수

유형 Guide 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$의 수렴 조건은 $a=0$ 또는 $-1<r<1$이므로 주어진 두 등비급수에서 $x$의 값의 범위를 각각 구한 후, 그 공통 범위를 구한다.

유형 SSEN **등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$의 수렴 조건 ⊙ $a=0$ 또는 $-1<r<1$**

풀이 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n$의 첫째항과 공비가 모두 $\frac{x}{4}$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$-1<\frac{x}{4}<1 \quad \therefore -4<x<4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{x}\right)^n$의 첫째항과 공비가 모두 $\frac{3}{x}$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$-1<\frac{3}{x}<1$, $\quad \frac{x}{3}<-1$ 또는 $\frac{x}{3}>1$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>3 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-4<x<-3$ 또는 $3<x<4$

답 $-4<x<-3$ 또는 $3<x<4$

정답 및 풀이 • 15쪽

**유제 017-1** 등비급수 $(1-x^2)+(1-x^2)^2+(1-x^2)^3+\cdots$이 수렴하도록 하는 $x$의 값의 범위를 구하여라.

**유제 017-2** 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)(x-4)^n$의 합이 3일 때, $x$의 값을 구하여라.

## 개념 014 등비급수와 도형

한없이 움직이는 점이 가까워지는 점의 좌표를 구하거나 닮은꼴이 한없이 반복되는 도형에서 선분의 길이, 도형의 넓이 등의 합을 구하는 문제는 등비급수를 이용하여 다음과 같은 순서로 해결한다.

(i) 점의 $x$좌표와 $y$좌표가 변하는 규칙이나 도형의 길이, 넓이 등이 줄어들거나 늘어나는 일정한 규칙을 찾는다.

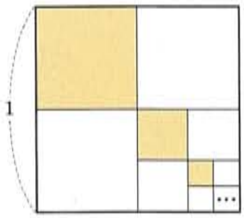
(ii) 첫째항 $a$와 공비 $r$를 구한다.

(iii) 등비급수의 합이 $\dfrac{a}{1-r}$ $(|r|<1)$임을 이용한다.

**개념 Approach**

도형에 관련된 등비급수 문제는 변하는 일정한 규칙을 찾는 것이 문제 해결의 핵심이다.

예를 들어 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형을 4등분하여 그중 한 정사각형을 버리고, 남은 정사각형 중 한 정사각형을 4등분하여 그중 한 정사각형을 버린다. 이와 같은 과정을 계속 반복할 때, 버려진 모든 정사각형의 넓이의 합을 구해 보자.




(i) 버려진 정사각형의 넓이를 큰 것부터 $S_1$, $S_2$, $S_3$, $\cdots$이라 하면

$$S_1=\frac{1}{4},\ S_2=\left(\frac{1}{4}\right)^2,\ S_3=\left(\frac{1}{4}\right)^3,\ \cdots$$

(ii) 즉 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

(iii) 따라서 구하는 모든 정사각형의 넓이의 합은

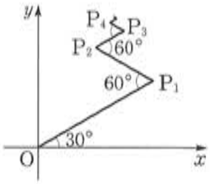
$$S_1+S_2+S_3+\cdots=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

**Remark** 도형의 길이와 넓이에 대한 문제를 해결할 때에는 도형에 대한 다음 성질이 자주 이용된다.
① 두 닮은 도형에서 대응변의 길이의 비는 일정하다.
② 두 도형의 닮음비가 $m:n$이면 둘레의 길이의 비는 $m:n$이고, 넓이의 비는 $m^2:n^2$이다.

## 대표유형 018 등비급수의 활용-점의 좌표

• 개념 014

오른쪽 그림과 같이 $x$축의 양의 방향과 $\overline{\mathrm{OP_1}}$이 이루는 각의 크기가 $30°$이고, $\overline{\mathrm{OP_1}}=1$, $\angle \mathrm{OP_1P_2}=60°$, $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\left(\frac{1}{4}\right)^n$, $\angle \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}=60°$와 같은 규칙으로 점 $\mathrm{P}_n$이 한없이 움직일 때, 점 $\mathrm{P}_n$이 가까워지는 점의 좌표를 구하여라. (단, O는 원점이고, $n=1, 2, 3, \cdots$이다.)




**유형 Guide** 점 $\mathrm{P}_n$이 한없이 움직이는 경우에는 점 $\mathrm{P}_n$이 가까워지는 점의 좌표를 $(a, b)$로 놓고, $a$, $b$를 각각 등비급수로 나타낸다.

**유형 SSEN** 한없이 움직이는 점이 가까워지는 점의 좌표 ➲ 각 점의 좌표의 규칙을 찾는다.

**풀이** 점 $\mathrm{P}_n$이 점 $(a, b)$에 한없이 가까워진다고 하면

$$a=\overline{\mathrm{OP_1}}\cos 30°-\overline{\mathrm{P_1P_2}}\cos 30°+\overline{\mathrm{P_2P_3}}\cos 30°-\overline{\mathrm{P_3P_4}}\cos 30°+\cdots$$

$$=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cdots=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$$

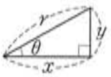
$$b=\overline{\mathrm{OP_1}}\sin 30°+\overline{\mathrm{P_1P_2}}\sin 30°+\overline{\mathrm{P_2P_3}}\sin 30°+\overline{\mathrm{P_3P_4}}\sin 30°+\cdots$$

$$=1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\frac{1}{2}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

따라서 점 $\mathrm{P}_n$은 점 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}, \frac{2}{3}\right)$에 가까워진다.

답 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}, \frac{2}{3}\right)$

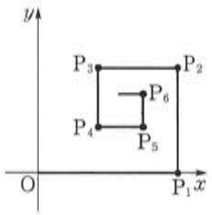
**Remark**




➡ $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\sin\theta=\frac{y}{r}$ ➡ $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

▶ 정답 및 풀이 • 15쪽

**유제 018-1** 오른쪽 그림과 같이 원점 O에서 $x$축의 양의 방향으로 1만큼 움직인 점을 $\mathrm{P_1}$, 점 $\mathrm{P_1}$에서 $y$축의 양의 방향으로 $\frac{3}{4}$만큼 움직인 점을 $\mathrm{P_2}$, 점 $\mathrm{P_2}$에서 $x$축의 음의 방향으로 $\left(\frac{3}{4}\right)^2$만큼 움직인 점을 $\mathrm{P_3}$, 점 $\mathrm{P_3}$에서 $y$축의 음의 방향으로 $\left(\frac{3}{4}\right)^3$만큼 움직인 점을 $\mathrm{P_4}$라 하자. 이와 같은 규칙으로 점 $\mathrm{P}_n$이 한없이 움직일 때, 점 $\mathrm{P}_n$이 가까워지는 점의 좌표를 구하여라. (단, $n=1, 2, 3, \cdots$이다.)



## 대표유형 019 등비급수의 활용-선분의 길이의 합

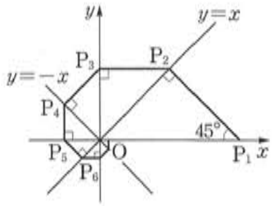
• 개념 014

오른쪽 그림에서 $\overline{OP_1}=1$, $\angle OP_1P_2=45°$, $\angle P_nP_{n+1}O=90°$일 때,

$$\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots$$

의 값을 구하여라.

(단, O는 원점이고, $n=1, 2, 3, \cdots$이다.)




유형 Guide 선분이 한없이 그려지는 경우에는 선분의 길이를 각각 구하여 규칙을 찾고, 길이의 합이 등비급수이면 첫째항과 공비를 이용하여 합을 구한다.

**유형 SSEN 선분의 길이의 합 ➡ 길이가 줄어들거나 늘어나는 규칙을 찾는다.**

풀이 $\angle P_2OP_1=45°$이므로 $\overline{P_1P_2}=\overline{OP_1}\sin 45°=1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\angle P_3OP_2=45°$이므로

$$\overline{P_2P_3}=\overline{OP_2}\sin 45°=\overline{P_1P_2}\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$$

$\triangle OP_1P_2$는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{OP_2}=\overline{P_1P_2}$

$\angle P_4OP_3=45°$이므로

$$\overline{P_3P_4}=\overline{OP_3}\sin 45°=\overline{P_2P_3}\sin 45°=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\vdots$$

$$\therefore \overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\cdots$$

첫째항이 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 공비가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 등비급수이다.

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{2}+1$$

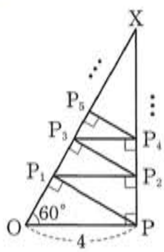
답 $\sqrt{2}+1$

정답 및 풀이 • 16쪽

**유제 019-1** 오른쪽 그림과 같이 $\angle OPX=90°$인 직각삼각형 OPX에서 $\overline{OP}=4$, $\angle XOP=60°$이다. 점 P에서 $\overline{OX}$에 내린 수선의 발을 $P_1$, 점 $P_1$에서 $\overline{XP}$에 내린 수선의 발을 $P_2$라 하자. 이와 같은 과정을 한없이 계속할 때,

$$\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots$$

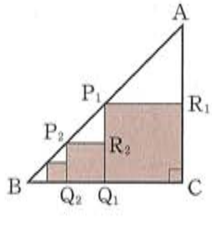
의 값을 구하여라.



## 대표유형 020 등비급수의 활용-도형의 넓이의 합

• 개념 014

오른쪽 그림과 같이 $\angle C=90°$, $\overline{BC}=\overline{AC}=1$인 직각이등변삼각형 ABC에 내접하는 정사각형 $P_1Q_1CR_1$의 넓이를 $S_1$, 직각이등변삼각형 $P_1BQ_1$에 내접하는 정사각형 $P_2Q_2Q_1R_2$의 넓이를 $S_2$라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 $n$번째 얻은 정사각형의 넓이를 $S_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하여라.




**유형 Guide** 도형이 한없이 그려지는 경우에는 $n$번째 얻은 도형의 한 변의 길이를 $a_n$이라 하고 $a_n$과 $a_{n+1}$ 사이의 관계식을 이용하여 그 규칙을 찾아 도형의 넓이의 합을 구한다.

**유형 SSEN** 도형의 넓이의 합 ◐ 넓이가 줄어들거나 늘어나는 규칙을 찾는다.

**풀이** $n$번째 얻은 정사각형의 한 변의 길이를 $a_n$이라 하자.

오른쪽 그림에서

$$1-a_1=a_1 \qquad \therefore a_1=\frac{1}{2}$$

같은 방법으로 하면 $\triangle P_nBQ_n$에서

$$a_n-a_{n+1}=a_{n+1}, \qquad 2a_{n+1}=a_n$$

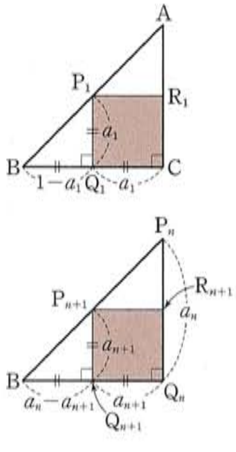
$$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$a_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore S_n={a_n}^2=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^2=\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

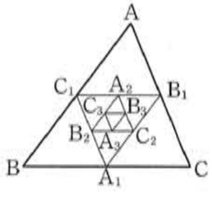
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$




답 $\frac{1}{3}$

정답 및 풀이 • 16쪽

**유제 020-1** 오른쪽 그림과 같이 넓이가 2인 삼각형 ABC에서 각 변의 중점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $A_1B_1C_1$을 만들고, 다시 삼각형 $A_1B_1C_1$에서 각 변의 중점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $A_2B_2C_2$를 만든다. 이와 같은 과정을 계속할 때,
$\triangle A_1B_1C_1+\triangle A_2B_2C_2+\triangle A_3B_3C_3+\cdots$의 값을 구하여라.



## 개념 015 등비급수와 순환소수

등비급수를 이용하면 다음과 같이 순환소수를 분수로 나타낼 수 있다.

① $0.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_n=\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{\underbrace{99\cdots9}_{n\text{개}}}$

② $0.b_1b_2\cdots b_m\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_n=\dfrac{(b_1b_2\cdots b_ma_1a_2\cdots a_n)-(b_1b_2\cdots b_m)}{\underbrace{99\cdots9}_{n\text{개}}\underbrace{00\cdots0}_{m\text{개}}}$

**개념 Approach**

순환소수는 소수점 아래의 어떤 자리부터 일정한 숫자의 배열이 끝없이 되풀이되는 소수이다.
순환소수를 등비급수로 나타내고 그 합을 구하면 순환소수를 분수로 나타낼 수 있다.
예를 들어 순환소수 $0.\dot{1}\dot{2}$를 분수로 나타내어 보자.

$$0.\dot{1}\dot{2}=0.12+0.0012+0.000012+0.00000012+\cdots$$
$$=\underbrace{\frac{12}{100}+\frac{12}{100}\cdot\frac{1}{100}+\frac{12}{100}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^2+\frac{12}{100}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^3+\cdots}$$
$$=\frac{\frac{12}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}$$

첫째항이 $\frac{12}{100}$, 공비가 $\frac{1}{100}$인 등비급수

**Remark** 소수의 분류

소수
- 유한소수 ⇒ 유리수
- 무한소수
  - 순환소수 ⇒ 유리수
  - 순환하지 않는 무한소수 ⇒ 무리수

**개념 Check**

순환소수 $0.2\dot{3}\dot{9}$를 등비급수를 이용하여 분수로 나타내어라.

**풀이** $0.2\dot{3}\dot{9}=0.2+0.039+0.00039+0.0000039+\cdots$

$$=\frac{2}{10}+\underbrace{\frac{39}{1000}+\frac{39}{1000}\cdot\frac{1}{100}+\frac{39}{1000}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^2+\cdots}$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{\frac{39}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{1}{5}+\frac{39}{990}=\frac{79}{330}$$

첫째항이 $\frac{39}{1000}$, 공비가 $\frac{1}{100}$인 등비급수

답 $\frac{79}{330}$

## 대표유형 021 등비급수의 활용 – 순환소수

• 개념 015

어떤 수에 $1.2\dot{4}$를 곱할 것을 잘못하여 $1.24$를 곱하였더니 바르게 계산한 값보다 12가 작았다. 이때 어떤 수를 구하여라.

**유형 Guide** 주어진 순환소수를 등비급수의 합을 이용하여 분수로 나타내고 주어진 조건에 맞게 방정식을 세워 푼다.

**유형 SSEN** 순환소수의 계산 ➲ 순환소수를 분수로 나타낸다.

**풀이** $1.2\dot{4}$를 분수로 나타내면

$$1.2\dot{4}=1.2+0.04+0.004+0.0004+\cdots$$
$$=\frac{12}{10}+\underbrace{\frac{4}{100}+\frac{4}{100}\cdot\frac{1}{10}+\frac{4}{100}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2+\cdots}$$

첫째항이 $\frac{4}{100}$, 공비가 $\frac{1}{10}$인 등비급수

$$=\frac{6}{5}+\frac{\frac{4}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{6}{5}+\frac{4}{90}$$
$$=\frac{56}{45}$$

구하는 수를 $x$로 놓으면 $1.2\dot{4}x-1.24x=12$이므로

$$\frac{56}{45}x-\frac{124}{100}x=12$$
$$\frac{1}{225}x=12 \qquad \therefore x=2700$$

따라서 구하는 수는 2700이다.

답 2700

정답 및 풀이 • 16쪽

**유제 021-1** 실수 $a$에 $0.1\dot{7}$을 곱할 것을 잘못하여 $0.17$을 곱하였더니 바르게 계산한 값보다 28이 작았다. 이때 $a$의 값을 구하여라.

**유제 021-2** $x, y, z$는 $1<x<y<z<9$인 정수이고, 세 수 $0.\dot{x}$, $0.0\dot{y}$, $0.00\dot{z}$가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $x, y, z$의 값을 구하여라.

**Plus 유제 021-3** 자연수 $n$에 대하여 $3^n$을 10으로 나누었을 때의 나머지를 $a_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$을 기약분수로 나타내어라.

# 중단원 연습 문제

STEP 1 유형 Training

**01** 수렴하는 급수인 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n+1}{n}$

ㄹ. $\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\right)+\cdots$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄹ ③ ㄴ, ㄷ ④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

**02** 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+7S_n}{3a_n-5S_n}$의 값을 구하여라.

서술형

**03** 수렴하는 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=3,\ \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n+2b_n)=-4$$

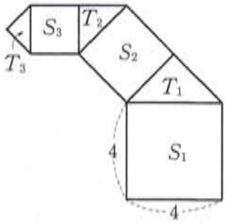
일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$의 값을 구하여라.

**04** 급수 $\frac{2+3}{5}+\frac{2^2+3^2}{5^2}+\frac{2^3+3^3}{5^3}+\cdots$의 합을 구하여라.

**05** 낙하한 거리의 $\frac{1}{2}$만큼 튀어 오르는 공을 지상에서 20 m 높이에 있는 지점에서 수직으로 떨어뜨렸다. 공이 무한히 운동한다고 가정할 때, 공이 움직인 거리의 합은 몇 m인지 구하여라.

서술형

**06** 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형에 직각이등변삼각형과 정사각형을 번갈아 붙이는 과정을 한없이 반복한다. 사각형의 넓이를 큰 순서대로 $S_1$, $S_2$, $S_3$, $\cdots$, 삼각형의 넓이를 큰 순서대로 $T_1$, $T_2$, $T_3$, $\cdots$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)$의 값을 구하여라.






**STEP 2 실전 Application**

서술형

**07** 자연수 $n$에 대하여 $x$에 대한 이차방정식 $x^2-(n-2)x-(n^2+3n)=0$의 두 근을 $\alpha_n$, $\beta_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha_n+2)(\beta_n+2)}$의 값을 구하여라.

수능기출

**08** 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$을 만족시킨다. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}$의 합은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ 3

수능기출

**09** 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n-\frac{n^2+1}{2n+1}\right)=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2+2a_n+2)$의 값은?

① $\frac{13}{4}$ ② 3 ③ $\frac{11}{4}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

**10** 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}na_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}n^2a_n$이 수렴하고 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}na_n=\beta$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n-a_{n+1})$의 값을 $\alpha$, $\beta$로 나타내면?

① $\beta-2\alpha+2$ ② $\beta-\alpha+1$ ③ $2\beta-\alpha$ ④ $\alpha+\beta$ ⑤ $\alpha+2\beta+1$

**11** 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-b_n)$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=0$이다.

ㄷ. 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 발산하면 $\lim_{n\to\infty} (a_n+b_n)\neq 0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**12** 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비급수의 합 $S$와 제$n$항까지의 부분합 $S_n$의 차가 처음으로 $\frac{1}{3000}$보다 작아지는 자연수 $n$의 값을 구하여라.

**13** 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 할 때, $3^{n-1}S_n=3^n-1$을 만족시킨다. 이때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$의 값을 구하여라.

평가원기출

**14** 2보다 큰 자연수 $n$에 대하여 $(-3)^{n-1}$의 $n$제곱근 중 실수인 것의 개수를 $a_n$이라 할 때, $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

**15** 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴할 때, 다음 중 반드시 수렴한다고 할 수 없는 것은?

① $\sum_{n=1}^{\infty} (r^n+r^{2n})$ ② $\sum_{n=1}^{\infty} (r^n-2r^{2n})$ ③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n+(-r)^n}{2}$

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r-1}{2}\right)^n$ ⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2}-1\right)^n$



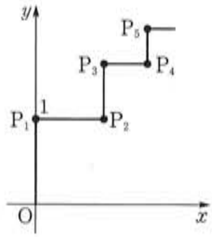
**16** 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=4$, $3a_{n+1}-2a_n=\alpha$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\beta$일 때, 상수 $\alpha$, $\beta$에 대하여 $\alpha+\beta$의 값을 구하여라.

**17** 오른쪽 그림에서 $\overline{OP_1} \perp \overline{P_1P_2}$, $\overline{P_1P_2} \perp \overline{P_2P_3}$, $\cdots$이고,

$$\overline{OP_1}=1,\ \overline{P_1P_2}=\frac{6}{7},\ \overline{P_2P_3}=\left(\frac{6}{7}\right)^2,\ \cdots$$

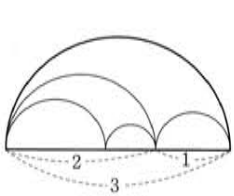
과 같은 규칙으로 점 $P_n$이 한없이 움직일 때, 점 $P_n$은 점 $(a, b)$에 가까워진다고 한다. 이때 $a+b$의 값을 구하여라.

(단, O는 원점이고, $n=1, 2, 3, \cdots$이다.)




서술형

**18** 지름의 길이가 3인 반원의 지름을 2 : 1로 내분하여 각각을 지름으로 하는 반원을 만들고 그 두 반원의 넓이의 합을 $S_1$이라 하자. 만들어진 두 반원 중 큰 반원에 대하여 위와 같은 과정을 반복하고 그 두 반원의 넓이의 합을 $S_2$라 하자.




이와 같은 방법으로 계속하여 $S_n$을 구할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하여라.

**19** 연립방정식 $2x+0.\dot{3}y=1.\dot{1}$, $0.\dot{2}x+3y=1.\dot{1}$의 해가 $x=a$, $y=b$일 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

STEP 3 심화 Forwarding

**20** 첫째항이 1이고, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$R_n=\sum_{k=1}^{n} a_{2k},\quad S_n=\sum_{k=n+1}^{2n} a_k,\quad T_n=\sum_{k=n}^{2n-1} a_{2k}$$

라 하자. $\lim_{n\to\infty} R_n=A$, $\lim_{n\to\infty} S_n=B$, $\lim_{n\to\infty} T_n=C$라 할 때, 세 수 $A$, $B$, $C$의 대소를 비교하여라.

서술형

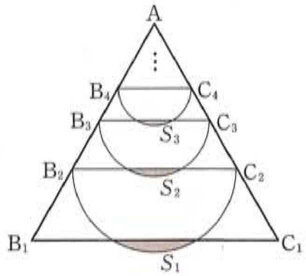
**21** 자연수 $n$에 대하여 $2^n$을 분모로 하는 기약분수 중 0과 1 사이에 있는 수들의 합을 $f(n)$이라 할 때, 급수 $\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots$의 합을 구하여라.

서술형

**22** 자연수 $k$에 대하여 등식 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{p^{n-1}}+\frac{3}{p^n}\right)=\frac{k}{2}$를 만족시키는 모든 소수 $p$의 값의 곱을 구하여라.

평가원기출

**23** 한 변의 길이가 3인 정삼각형 $AB_1C_1$이 있다. 그림과 같이 선분 $AB_1$과 선분 $AC_1$을 $2:1$로 내분하는 점을 각각 $B_2$, $C_2$라 하고, 선분 $B_2C_2$를 지름으로 하는 원의 호 $B_2C_2$와 선분 $B_1C_1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_1$이라 하자.
정삼각형 $AB_2C_2$에서 선분 $AB_2$와 선분 $AC_2$를 $2:1$로 내분하는 점을 각각 $B_3$, $C_3$이라 하고, 선분 $B_3C_3$을 지름으로 하는 원의 호 $B_3C_3$과 선분 $B_2C_2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_2$라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 $n$번째 얻은 부분의 넓이를 $S_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?




① $\frac{3\pi-5\sqrt{3}}{10}$ ② $\frac{6\pi-9\sqrt{3}}{20}$ ③ $\frac{4\pi-5\sqrt{3}}{10}$
④ $\frac{8\pi-9\sqrt{3}}{20}$ ⑤ $\frac{10\pi-9\sqrt{3}}{20}$

# Ⅱ 함수의 극한과 연속

# 03

## 함수의 극한

큰 별이 수명을 다하면 자체 중력을 이기지 못하고 한없이 수축하게 된다. 이것이 블랙홀이다. 블랙홀은 주위의 모든 물질을 빨아들이게 되는데, 이때 별과 그 주위 물질 사이의 거리는 한없이 작아지고 블랙홀의 내부 밀도는 한없이 커지게 된다. 이와 같은 자연 현상은 함수의 극한으로 표현할 수 있다.

앞에서는 $n$이 무한히 커질 때 수열의 극한에 대하여 배웠다. 이 단원에서는 $x$가 어떤 수에 한없이 가까워질 때, 또는 무한히 커지거나 작아질 때 함수의 극한에 대해서 배우고, 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 여러 가지 함수의 극한을 구해 보자.

한눈에 보는 개념&유형 map

**소단원 & 학습목표**

**07 함수의 극한**

- 함수의 수렴과 발산의 뜻을 알고, 이를 기호로 나타낸다.

**08 우극한과 좌극한**

- 함수의 우극한과 좌극한의 뜻을 알고, 극한값의 존재를 확인한다.

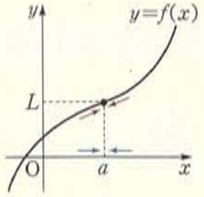
**09 함수의 극한값의 계산**

- 함수의 극한에 대한 성질을 알고, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $\infty\times 0$ 꼴의 극한을 구한다.
- 함수의 극한의 대소 관계를 이해한다.

| 개념 & 특강 | | 대표유형 & 유제 | |
|---|---|---|---|
| 016 | $x \longrightarrow a$일 때의 함수의 수렴 | 022 | $x \longrightarrow a$일 때의 함수의 수렴과 발산 |
| 017 | $x \longrightarrow a$일 때의 함수의 발산 | | |
| 018 | $x \longrightarrow \infty$, $x \longrightarrow -\infty$ 일 때의 함수의 수렴 | 023 | $x \longrightarrow \infty$, $x \longrightarrow -\infty$일 때의 함수의 수렴과 발산 |
| 019 | $x \longrightarrow \infty$, $x \longrightarrow -\infty$ 일 때의 함수의 발산 | | |
| 020 | 우극한과 좌극한 | | |
| 021 | 극한값의 존재 | 024 | 극한값의 존재 |
| 022 | 함수의 극한에 대한 성질 | 025 | 함수의 극한에 대한 성질 |
| 특강 023 | 함수의 극한에 대한 성질과 관련된 거짓 명제 | | |
| 024 | $\frac{0}{0}$ 꼴의 함수의 극한 | 026 | $\frac{0}{0}$ 꼴의 함수의 극한 |
| 025 | $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수의 극한 | 027 | $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수의 극한 |
| 026 | $\infty-\infty$ 꼴의 함수의 극한 | 028 | $\infty-\infty$ 꼴의 함수의 극한 |
| 027 | $\infty\times0$ 꼴의 함수의 극한 | 029 | $\infty\times0$ 꼴의 함수의 극한 |
| 028 | 미정계수의 결정 | 030 | 미정계수의 결정 — 031 다항식의 결정 |
| 029 | 함수의 극한의 대소 관계 | 032 | 함수의 극한의 대소 관계 |

## 개념 016 $x \to a$일 때의 함수의 수렴

함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 $a$가 아니면서 $a$에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 일정한 값 $L$에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 $L$에 **수렴**한다고 한다.
이때 $L$을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 **극한값** 또는 **극한**이라 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.



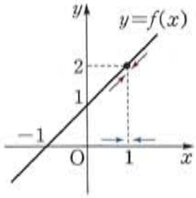

$$\lim_{x \to a} f(x)=L \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to L$$

**Remark** $x$의 값이 $a$가 아니면서 $a$에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $x \to a$와 같이 나타낸다.

### 개념 Approach

01 **수열의 극한**에서 자연수 $n$이 한없이 커질 때 수열 $\{a_n\}$의 극한, 즉 정의역이 자연수 전체의 집합인 함수의 극한에 대하여 배웠다. 여기에서는 정의역이 실수 전체의 집합인 함수의 극한에 대하여 알아보자. 특히 함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 어떤 수에 한없이 가까워질 때의 함수의 극한에 대하여 생각해 보자.

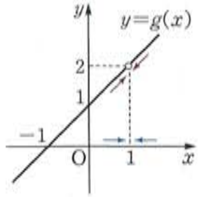
예를 들어 함수 $f(x)=x+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x \to 1} f(x)=2$이다.




한편 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$의 경우 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 정의되지 않으므로 $g(1)$의 값이 존재하지 않는다. 그러나 $x \neq 1$인 모든 실수 $x$에 대하여

$$g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
즉 $x$의 값이 1에 한없이 가까워질 때 $g(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x \to 1} g(x)=2$이다.

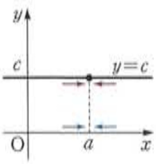



따라서 $x=a$에서 함숫값 $f(a)$가 정의되지 않는 경우에도 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$는 존재할 수 있다.

**Remark** 상수함수 $f(x)=c$ ($c$는 상수)는 모든 실수 $x$에 대하여 함숫값이 $c$이므로

$$\lim_{x \to a} f(x)=\lim_{x \to a} c=c$$

이다.



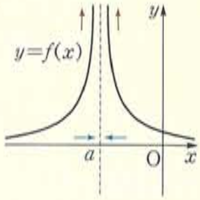
개념 017

## $x \longrightarrow a$일 때의 함수의 발산



### 1 양의 무한대로 발산

함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 $a$가 아니면서 $a$에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 **양의 무한대로 발산**한다고 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

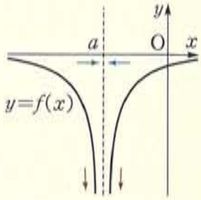



$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \text{또는} \quad x \longrightarrow a\text{일 때 } f(x) \longrightarrow \infty$$

**Remark** $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$는 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 극한값이 $\infty$라는 것이 아니라, $f(x)$의 값이 한없이 커지는 상태라는 것을 나타낸다.

### 2 음의 무한대로 발산

함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 $a$가 아니면서 $a$에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 **음의 무한대로 발산**한다고 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.




$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \text{또는} \quad x \longrightarrow a\text{일 때 } f(x) \longrightarrow -\infty$$

개념 Approach

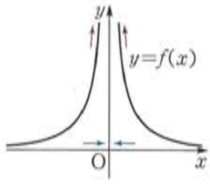
함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 어떤 수에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지거나 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지는 경우에 대하여 알아보자.

### 1 양의 무한대로 발산

함수 $f(x)=\frac{1}{x^2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 0에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 한없이 커진다. 즉 $f(x)$는 양의 무한대로 발산하므로

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

이다.

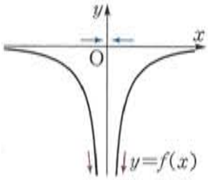



### 2 음의 무한대로 발산

함수 $f(x)=-\frac{1}{x^2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 0에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다. 즉 $f(x)$는 음의 무한대로 발산하므로

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

이다.



## 대표유형 022 $x \to a$일 때의 함수의 수렴과 발산

• 개념 016, 017

다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2-x-6}{x+2}$　　(2) $\lim_{x \to 1} \left\{1+\frac{1}{(x-1)^2}\right\}$

**유형 Guide** 함수 $f(x)$의 수렴과 발산은 함수의 정의역에 주의하여 그래프를 그려 보면 알 수 있다.
$x \to a$일 때 $f(x)$의 값이 한없이 가까워지는 일정한 값 $L$이 존재하면 함수 $f(x)$는 $L$에 수렴하고, $f(x)$의 값이 한없이 커지거나 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 발산한다.

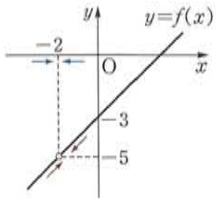
**유형 SSEN** $x \to a$일 때의 함수의 극한 ⊙ 그래프를 그려 본다.

**풀이** (1) $f(x)=\frac{x^2-x-6}{x+2}$으로 놓으면 $x \neq -2$일 때,

$$f(x)=\frac{x^2-x-6}{x+2}=\frac{(x+2)(x-3)}{x+2}=x-3$$

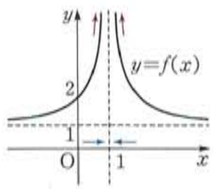
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 $-2$에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 $-5$에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2-x-6}{x+2}=-5$$




(2) $f(x)=1+\frac{1}{(x-1)^2}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x \to 1} \left\{1+\frac{1}{(x-1)^2}\right\}=\infty$$




답 (1) $-5$　(2) $\infty$

**Remark** 특별한 말이 없으면 유리함수의 정의역은 분모를 0으로 하지 않는 실수 전체의 집합으로 한다.

정답 및 풀이 • 24쪽

**유제 022-1** 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x \to 3} \sqrt{2x+3}$　　(2) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x+1}$

(3) $\lim_{x \to -2} \left\{-\frac{1}{(x+2)^2}\right\}$　　(4) $\lim_{x \to 2} \frac{1}{|x-2|}$

개념 018

## $x \to \infty$, $x \to -\infty$일 때의 함수의 수렴



함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값이 일정한 값 $\alpha$에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 $\alpha$에 수렴한다고 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to \infty} f(x)=\alpha \quad \text{또는} \quad x \to \infty\text{일 때 } f(x) \to \alpha$$

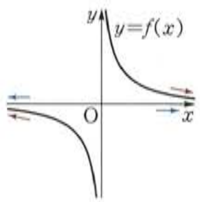
또 함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값이 일정한 값 $\beta$에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 $\beta$에 수렴한다고 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)=\beta \quad \text{또는} \quad x \to -\infty\text{일 때 } f(x) \to \beta$$

**개념 Approach**

함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 한없이 커지거나 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때의 함수의 극한에 대하여 생각해 보자.

예를 들어 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}=0$이다. 또 $x$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때에도 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}=0$이다.

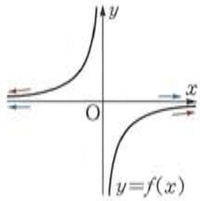



**개념 Check**

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to \infty}\left(-\frac{1}{x}\right)$　　(2) $\lim_{x \to -\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)$

**풀이** $f(x)=-\frac{1}{x}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




(1) $x$의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x \to \infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$

(2) $x$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x \to -\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$

답 (1) 0 (2) 0

개념 019

# $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$일 때의 함수의 발산

함수 $f(x)$에서 $x \rightarrow \infty$ 또는 $x \rightarrow -\infty$일 때, 함수 $f(x)$가 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하면 이것을 각각 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

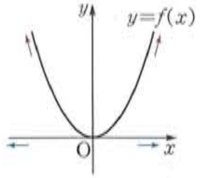
**개념 Approach**

함수 $f(x)$에서 $x \rightarrow \infty$ 또는 $x \rightarrow -\infty$일 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지거나 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지는 경우에 대하여 알아보자.

예를 들어 함수 $f(x)=x^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 한없이 커지거나 $x$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 $f(x)$의 값은 한없이 커진다. 즉

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} x^2 = \infty$$

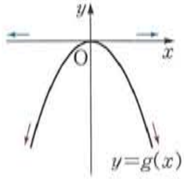
이다.




한편 함수 $g(x)=-x^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 한없이 커지거나 $x$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 $g(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다. 즉

$$\lim_{x \to \infty} (-x^2) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} (-x^2) = -\infty$$

이다.




**개념 Check**

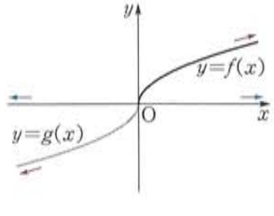
다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x}$ (2) $\lim_{x \to -\infty} (-\sqrt{-x})$

**풀이** $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=-\sqrt{-x}$로 놓으면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

(1) $x$의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값도 한없이 커지므로 $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x} = \infty$

(2) $x$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때 $g(x)$의 값도 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 $\lim_{x \to -\infty} (-\sqrt{-x}) = -\infty$




답 (1) $\infty$ (2) $-\infty$

## 대표유형 023 $x \to \infty$, $x \to -\infty$일 때의 함수의 수렴과 발산

• 개념 018, 019

다음 극한을 조사하여라.

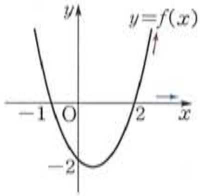
(1) $\lim_{x \to \infty}(x^2-x-2)$ (2) $\lim_{x \to \infty}\frac{1}{x+3}$ (3) $\lim_{x \to -\infty}(-\sqrt{2-x})$

**유형 Guide** 함수 $f(x)$의 수렴과 발산은 함수의 정의역에 주의하여 그래프를 그려 보면 알 수 있다.
$x \to \infty$, $x \to -\infty$일 때 $f(x)$의 값이 한없이 가까워지는 일정한 값 $L$이 존재하면 함수 $f(x)$는 $L$에 수렴하고, $f(x)$의 값이 한없이 커지거나 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 발산한다.

유형 55EN $x \to \infty$, $x \to -\infty$일 때의 함수의 극한 ➡ 그래프를 그려 본다.

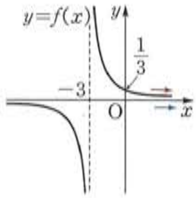
**풀이** (1) $f(x)=x^2-x-2$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값도 한없이 커지므로

$$\lim_{x \to \infty}(x^2-x-2)=\infty$$



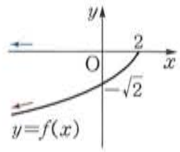

(2) $f(x)=\frac{1}{x+3}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \to \infty}\frac{1}{x+3}=0$$




(3) $f(x)=-\sqrt{2-x}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값도 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x \to -\infty}(-\sqrt{2-x})=-\infty$$




답 (1) $\infty$ (2) 0 (3) $-\infty$

정답 및 풀이 • 24쪽

**유제 023-1** 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x \to \infty}(2x+5)$ (2) $\lim_{x \to \infty}\frac{1}{|x|}$

(3) $\lim_{x \to -\infty}(-x^2+2x-1)$ (4) $\lim_{x \to -\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

# 개념 020 우극한과 좌극한

## 1 우극한

함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 $a$보다 크면서 $a$에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 일정한 값 $\alpha$에 한없이 가까워지면 $\alpha$를 $f(x)$의 $x=a$에서의 **우극한**이라 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to a+} f(x)=\alpha \quad 또는 \quad x \longrightarrow a+ 일 때 f(x) \longrightarrow \alpha$$

**Remark** $x$의 값이 $a$보다 크면서 $a$에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $x \longrightarrow a+$와 같이 나타낸다.

## 2 좌극한

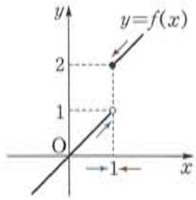
함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 $a$보다 작으면서 $a$에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 일정한 값 $\beta$에 한없이 가까워지면 $\beta$를 $f(x)$의 $x=a$에서의 **좌극한**이라 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to a-} f(x)=\beta \quad 또는 \quad x \longrightarrow a- 일 때 f(x) \longrightarrow \beta$$

**Remark** $x$의 값이 $a$보다 작으면서 $a$에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $x \longrightarrow a-$와 같이 나타낸다.

### 개념 Approach

함수 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\geq 1) \\ x & (x<1) \end{cases}$의 $x=1$에서의 우극한과 좌극한에 대하여 알아보자.




함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 1보다 큰 값을 가지면서 1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워진다. 즉

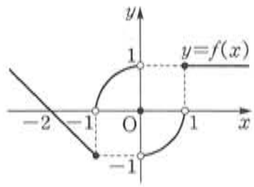
$$\lim_{x \to 1+} f(x)=2$$

이다. 또 $x$의 값이 1보다 작은 값을 가지면서 1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워진다. 즉 다음과 같다.

$$\lim_{x \to 1-} f(x)=1$$

### 개념 Check

함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 극한값을 구하여라.




(1) $\lim_{x \to 0+} f(x)$ (2) $\lim_{x \to 0-} f(x)$

(3) $\lim_{x \to -1+} f(x)$ (4) $\lim_{x \to 1-} f(x)$

답 (1) $-1$ (2) 1 (3) 0 (4) 0

개념 021

# 극한값의 존재

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 극한값이 $L$이면 $x=a$에서의 우극한과 좌극한이 모두 존재하고 그 값은 모두 $L$이다. 역으로 $x=a$에서의 우극한과 좌극한이 모두 존재하고 그 값이 $L$로 같으면 $\lim_{x\to a} f(x)=L$이다.

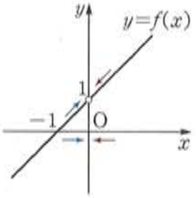
즉 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \iff \lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=L$$

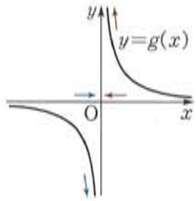
**Remark** 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 우극한 또는 좌극한이 존재하지 않거나 모두 존재하더라도 그 값이 같지 않으면 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$는 존재하지 않는다.

개념 Approach

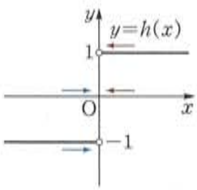
세 함수 $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$, $h(x)=\dfrac{|x|}{x}$의 $x=0$에서의 우극한과 좌극한을 살펴보자.




[그림 1]




[그림 2]




[그림 3]

[그림 1]에서 $\lim_{x\to 0+} f(x)=1$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=1$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서의 우극한과 좌극한이 각각 존재하고, 그 값이 서로 같다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극한값이 존재한다.

한편 [그림 2]에서 $\lim_{x\to 0+} g(x)=\infty$, $\lim_{x\to 0-} g(x)=-\infty$이므로 $g(x)$는 $x=0$에서의 우극한과 좌극한이 모두 존재하지 않는다. 또 [그림 3]에서 $\lim_{x\to 0+} h(x)=1$, $\lim_{x\to 0-} h(x)=-1$이므로 $h(x)$는 $x=0$에서의 우극한과 좌극한이 각각 존재하지만 그 값이 서로 다르다. 따라서 함수 $g(x)$와 $h(x)$는 모두 $x=0$에서의 극한값이 존재하지 않는다.

**Remark** 아래와 같은 함수는 다음 $x$의 값에서 우극한과 좌극한이 다를 수 있으므로 주의한다.

① 유리함수 ➡ 분모가 0이 되게 하는 $x$의 값
② 구간이 나누어져 정의된 함수 ➡ 구간의 경계가 되는 $x$의 값
③ 절댓값 기호를 포함한 함수 ➡ 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 $x$의 값
④ 가우스 기호를 포함한 함수 ➡ 가우스 기호 안의 식의 값이 정수가 되게 하는 $x$의 값

개념 SSEN

| | | |
|---|---|---|
| 우극한 $\alpha$가 존재 | $\alpha=\beta$ ➡ | 극한값이 존재 |
| 좌극한 $\beta$가 존재 | | |

## 대표유형 024 극한값의 존재

• 개념 021

다음 극한이 존재하는지 말하여라. (단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(1) $\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x^2-x}$　　　(2) $\lim_{x \to 2}([x]+1)$

**유형 Guide** 유리함수, 절댓값 기호를 포함한 함수, 가우스 기호를 포함한 함수 등은 우극한과 좌극한이 다를 수 있으므로 우극한과 좌극한을 각각 구하여 그 값이 서로 같은지 확인한다.

**유형 SSEN** **유리함수, 절댓값 또는 가우스 기호를 포함한 함수의 극한**
**➡ 우극한과 좌극한을 각각 조사한다.**

**풀이** (1) $x \to 1+$에서 $x-1>0$이므로 $\frac{|x-1|}{x^2-x}=\frac{x-1}{x(x-1)}=\frac{1}{x}$

$\therefore \lim_{x \to 1+} \frac{|x-1|}{x^2-x}=\lim_{x \to 1+}\frac{1}{x}=1$　　　...... ㉠

$x \to 1-$에서 $x-1<0$이므로 $\frac{|x-1|}{x^2-x}=\frac{-(x-1)}{x(x-1)}=-\frac{1}{x}$

$\therefore \lim_{x \to 1-} \frac{|x-1|}{x^2-x}=\lim_{x \to 1-}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1$　　　...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\lim_{x \to 1+} \frac{|x-1|}{x^2-x} \neq \lim_{x \to 1-} \frac{|x-1|}{x^2-x}$이므로 $\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x^2-x}$의 값은 존재하지 않는다.

(2) $2<x<3$에서 $[x]=2$이므로

$\lim_{x \to 2+}([x]+1)=2+1=3$　　　...... ㉠

$1<x<2$에서 $[x]=1$이므로

$\lim_{x \to 2-}([x]+1)=1+1=2$　　　...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\lim_{x \to 2+}([x]+1) \neq \lim_{x \to 2-}([x]+1)$이므로 $\lim_{x \to 2}([x]+1)$의 값은 존재하지 않는다.

답 (1) 존재하지 않는다. (2) 존재하지 않는다.

정답 및 풀이 • 24쪽

**유제 024-1** 다음 극한이 존재하는지 말하여라. (단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(1) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{|x+2|}$　　　(2) $\lim_{x \to 3}|x-3|$　　　(3) $\lim_{x \to 1} \frac{[x]-1}{|x+1|}$

## 개념 022 함수의 극한에 대한 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에서 $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)일 때, 다음이 성립한다.

① $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=\alpha+\beta$

② $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)=\alpha-\beta$

③ $\lim_{x\to a}cf(x)=c\lim_{x\to a}f(x)=c\alpha$ (단, $c$는 상수)

④ $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x)=\alpha\beta$

⑤ $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $g(x)\neq0$, $\beta\neq0$)

**Remark** 위의 성질은 $x\to a+$, $x\to a-$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$인 경우에도 모두 성립한다.

**개념 Approach**

두 함수 $f(x)=x+1$, $g(x)=x^2-1$에 대하여 위의 성질 중 ①, ③이 성립하는지 알아보자.

$\lim_{x\to0}f(x)=1$, $\lim_{x\to0}g(x)=-1$이므로

① $\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to0}(x^2+x)=0$이고, $\lim_{x\to0}f(x)+\lim_{x\to0}g(x)=1+(-1)=0$이므로

$$\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to0}f(x)+\lim_{x\to0}g(x)$$

③ $\lim_{x\to0}2f(x)=\lim_{x\to0}2(x+1)=2$이고, $2\lim_{x\to0}f(x)=2\cdot1=2$이므로

$$\lim_{x\to0}2f(x)=2\lim_{x\to0}f(x)$$

마찬가지 방법으로 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 위의 성질 ②, ④, ⑤가 성립함을 알 수 있다.

**Remark** 수열의 극한에 대한 기본 성질과 마찬가지로 함수의 극한에 대한 성질은 수렴하는 경우에만 성립한다.

**개념 Check**

$\lim_{x\to1}f(x)=-2$, $\lim_{x\to1}g(x)=4$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}$ (2) $\lim_{x\to1}f(x)g(x)$ (3) $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

**풀이** (1) $\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to1}f(x)-\lim_{x\to1}g(x)=-2-4=-6$

(2) $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=\lim_{x\to1}f(x)\lim_{x\to1}g(x)=-2\cdot4=-8$

(3) $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to1}f(x)}{\lim_{x\to1}g(x)}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

답 (1) $-6$ (2) $-8$ (3) $-\dfrac{1}{2}$

## 대표유형 025 함수의 극한에 대한 성질

• 개념 022

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty} f(x)=2$, $\lim_{x\to\infty}\{f(x)+2g(x)\}=4$일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{2f(x)+6g(x)}$의 값을 구하여라.

**유형Guide** 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to\infty}\{f(x)+g(x)\}=\beta$($\alpha$, $\beta$는 실수)일 때, $f(x)+g(x)=h(x)$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 두 함수 $f(x)$, $h(x)$가 각각 수렴하므로 구하려는 함수식을 $f(x)$와 $h(x)$로 나타낸 다음 함수의 극한에 대한 성질을 이용한다.

**유형 SSEN** 두 함수의 합, 차, 곱, 몫의 극한 ○ 함수의 극한에 대한 성질을 이용한다.

**풀이** $f(x)+2g(x)=h(x)$로 놓으면 $2g(x)=-f(x)+h(x)$이고, $\lim_{x\to\infty} h(x)=4$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{2f(x)+6g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-\{-f(x)+h(x)\}}{2f(x)+3\{-f(x)+h(x)\}}$$

$\boxed{6g(x)=3\cdot 2g(x)}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)-h(x)}{-f(x)+3h(x)}$$

$$=\frac{2\lim_{x\to\infty} f(x)-\lim_{x\to\infty} h(x)}{-\lim_{x\to\infty} f(x)+3\lim_{x\to\infty} h(x)}$$

$$=\frac{2\cdot 2-4}{-2+3\cdot 4}=0$$

답 0

**다른 풀이** $f(x)+2g(x)=h(x)$로 놓으면 $g(x)=\frac{-f(x)+h(x)}{2}$이고, $\lim_{x\to\infty} h(x)=4$이므로

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-f(x)+h(x)}{2}=\frac{-\lim_{x\to\infty} f(x)+\lim_{x\to\infty} h(x)}{2}=\frac{-2+4}{2}=1$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{2f(x)+6g(x)}=\frac{\lim_{x\to\infty} f(x)-2\lim_{x\to\infty} g(x)}{2\lim_{x\to\infty} f(x)+6\lim_{x\to\infty} g(x)}=\frac{2-2\cdot 1}{2\cdot 2+6\cdot 1}=0$$

정답 및 풀이 • 25쪽

**유제 025-1** 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$일 때, $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+4f(x)}{2x^2-f(x)}$의 값을 구하여라.

## 특강 023 함수의 극한에 대한 성질과 관련된 거짓 명제

함수의 극한에 대한 성질과 관련된 명제의 참 · 거짓을 판별하는 문제는 시험에 자주 나오는 유형이다. 대표적인 거짓인 명제들을 반례와 함께 확인해 보자.

$\lim_{x \to a}\{f(x)+g(x)\}$가 수렴하면 $\lim_{x \to a}f(x)$, $\lim_{x \to a}g(x)$는 각각 수렴한다. ➡ 거짓

[반례] $f(x)=\begin{cases} 1 & (x \geq 1) \\ -1 & (x<1) \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} -1 & (x \geq 1) \\ 1 & (x<1) \end{cases}$ 일 때,

$\lim_{x \to 1}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x \to 1}0=0$으로 수렴하지만

$$\lim_{x \to 1+}f(x)=1,\ \lim_{x \to 1-}f(x)=-1 \qquad \therefore \lim_{x \to 1+}f(x) \neq \lim_{x \to 1-}f(x)$$

$$\lim_{x \to 1+}g(x)=-1,\ \lim_{x \to 1-}g(x)=1 \qquad \therefore \lim_{x \to 1+}g(x) \neq \lim_{x \to 1-}g(x)$$

따라서 $\lim_{x \to 1}f(x)$, $\lim_{x \to 1}g(x)$는 모두 수렴하지 않는다.

$\lim_{x \to \infty}f(x)$, $\lim_{x \to \infty}f(x)g(x)$가 각각 수렴하면 $\lim_{x \to \infty}g(x)$도 수렴한다. ➡ 거짓

[반례] $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $g(x)=x$일 때,

$\lim_{x \to \infty}f(x)=\lim_{x \to \infty}\frac{1}{x^2}=0$, $\lim_{x \to \infty}f(x)g(x)=\lim_{x \to \infty}\frac{1}{x^2}\cdot x=\lim_{x \to \infty}\frac{1}{x}=0$으로 각각 수렴하지만 $\lim_{x \to \infty}g(x)=\lim_{x \to \infty}x=\infty$, 즉 $\lim_{x \to \infty}g(x)$는 수렴하지 않는다.

$\lim_{x \to 0}f(x)=\infty$, $\lim_{x \to 0}g(x)=\infty$이면 $\lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$이다. ➡ 거짓

[반례] $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $g(x)=\frac{1}{x^4}$일 때,

$\lim_{x \to 0}f(x)=\lim_{x \to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$, $\lim_{x \to 0}g(x)=\lim_{x \to 0}\frac{1}{x^4}=\infty$이지만

$$\lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x \to 0}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^4}}=\lim_{x \to 0}x^2=0\text{이다.}$$

**Remark** 명제 '$p$이면 $q$이다.'가 거짓임은 반례를 들어 증명한다. 이때 반례는 조건 $p$는 만족시키지만 조건 $q$는 만족시키지 않아야 한다.

개념 024

# $\frac{0}{0}$ 꼴의 함수의 극한

$\frac{0}{0}$ 꼴의 함수의 극한은 다음과 같이 구한다.

① 분모, 분자가 모두 다항식인 경우 ➡ 인수분해한 후 약분한다.

② 분모 또는 분자에 근호($\sqrt{\ }$)가 있는 경우 ➡ 근호가 있는 쪽을 유리화한 후 약분한다.

개념 Approach

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에서 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)이고 $g(x)\neq 0$, $\beta\neq 0$이면 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$이다. 75쪽 • 개념 022

그러나 $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=0$인 경우에는 이를 이용할 수 없다.

이와 같은 $\frac{0}{0}$ 꼴의 함수의 극한은 다음과 같은 방법으로 구한다.

① 분모, 분자가 모두 다항식인 경우

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$에서 $\lim_{x\to 1} (x^2-1)=0$, $\lim_{x\to 1} (x-1)=0$이므로 분자와 분모는 모두 $x-1$을 인수로 갖는다.

따라서 분자를 인수분해한 후 약분하여 다음과 같이 극한을 구한다.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1} (x+1)=2$$

② 분모 또는 분자에 근호($\sqrt{\ }$)가 있는 경우

$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$에서 $\lim_{x\to 4} (\sqrt{x}-2)=0$, $\lim_{x\to 4} (x-4)=0$이므로 ①과 같은 방법을 이용할 수도 있으나 근호가 있어서 계산이 불편하므로 분자를 유리화한 후 약분하여 다음과 같이 극한을 구한다.

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 4} \frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$$

개념 SSEN

$\frac{0}{0}$ 꼴의 극한 → 다항식 → 인수분해한다. → 약분한다.

$\frac{0}{0}$ 꼴의 극한 → 무리식 → 유리화한다. → 약분한다.

## 대표유형 026 $\frac{0}{0}$ 꼴의 함수의 극한

• 개념 024

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$ (2) $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ (3) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

**유형 Guide** $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한은 분모, 분자의 공통인수를 약분하여 극한값을 구한다.

(1) 분모, 분자가 모두 다항식이므로 다항식을 인수분해하여 공통인수를 약분한다.

(2), (3) 분모 또는 분자에 근호($\sqrt{\ }$)가 있으므로 근호가 있는 쪽을 유리화하여 공통인수를 약분한다.

**유형 SSEN** $\frac{0}{0}$ 꼴의 함수의 극한 ➡ 분모, 분자의 공통인수를 약분한다.

**풀이** (1) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+2) = 3$

(2) $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$

$= \lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4}$

(3) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1} (\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1) = 3$

답 (1) 3 (2) $\frac{1}{4}$ (3) 3

**다른 풀이** (3) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{\sqrt[3]{x}-1}$

$= \lim_{x \to 1} (\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1) = 3$

정답 및 풀이 • 25쪽

**유제 026-1** 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to 1} \frac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$ (2) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$ (3) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$

**Plus 유제 026-2** 0이 아닌 상수 $a$, $b$에 대하여 $\lim_{x \to -1} \frac{ax^2+(a+b)x+b}{x^2-1}$의 값을 $a$, $b$에 대한 식으로 나타내어라.

개념 025

## $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수의 극한

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수의 극한은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나누어 구한다. 이때 그 극한은 다음과 같다.

① (분자의 차수)=(분모의 차수) ➡ 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.
② (분자의 차수)<(분모의 차수) ➡ 극한값은 0이다.
③ (분자의 차수)>(분모의 차수) ➡ 발산한다.

**개념 Approach**

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-1}{3x^2+2}$에서

$$\lim_{x\to\infty}(5x-1)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}(3x^2+2)=\infty$$

이므로 함수의 극한에 대한 성질을 이용할 수 없다.

이와 같은 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수의 극한은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈 후, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ 임을 이용하여 다음과 같이 극한을 구한다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x-1}{3x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}}=\frac{0-0}{3+0}=0$$

개념 SSEN $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 ⟶ 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.

**개념 Check**

다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4}{2x^2+x}$

풀이 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}=2$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4}{2x^2+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\frac{4}{x^2}}{2+\frac{1}{x}}=\infty$

답 (1) 2　(2) $\infty$

## 대표유형 027 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수의 극한

• 개념 025



다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-2}{2x^2+1}$ (2) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x+1}{x-3}$ (3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+3x}}$

**유형 Guide** $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수의 극한은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈 다음 $\frac{(\text{상수})}{\infty}\to 0$임을 이용하여 극한값을 구한다.

(3) $x\to-\infty$일 때의 극한은 $x=-t$로 치환하여 계산한다.

**유형 SSEN** $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수의 극한 ⊙ 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.

**풀이** (1) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-2}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{3}{2}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x+1}{x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-4+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}=\infty$

(3) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+3x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t-1}{\sqrt{t^2-3t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2-\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{3}{t}}}=-2$$

답 (1) $\frac{3}{2}$ (2) $\infty$ (3) $-2$

**다른 풀이** (3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+3x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{3}{x}}}=-2$

$x<0$이므로 $\frac{\sqrt{x^2+3x}}{x}=\frac{\sqrt{x^2+3x}}{-\sqrt{x^2}}=-\sqrt{1+\frac{3}{x}}$

정답 및 풀이 • 25쪽

**유제 027-1** 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{2x^2-x-1}$ (2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x-4x^2}{2x-5}$ (3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2+1}-x}$

개념 026

## $\infty-\infty$ 꼴의 함수의 극한

$\infty-\infty$ 꼴의 함수의 극한은 다음과 같은 방법으로 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty\times c$, $\frac{c}{\infty}$ ($c$는 상수) 꼴로 변형하여 구한다.

① 다항식인 경우 ➡ 최고차항으로 묶는다.
② 무리식인 경우 ➡ 분모를 1로 보고 분자를 유리화한다.

개념 **Approach**

$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}$에서 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$이면 함수의 극한에 대한 성질을 이용할 수 없다.

이와 같은 $\infty-\infty$ 꼴의 함수의 극한은 다음과 같은 방법으로 구한다.

① 다항식인 경우

$\lim_{x\to\infty}(2x^2-x+1)$에서 $\lim_{x\to\infty}2x^2=\infty$, $\lim_{x\to\infty}x=\infty$이므로 최고차항인 $x^2$으로 묶어서 다음과 같이 극한을 구한다.

$$\lim_{x\to\infty}(2x^2-x+1)=\underbrace{\lim_{x\to\infty}x^2\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}_{\infty\times(\text{상수})\text{ 꼴}}=\infty$$

② 무리식인 경우

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$에서 $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+2x}=\infty$, $\lim_{x\to\infty}x=\infty$이므로 $\sqrt{x^2+2x}-x$의 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}\quad\cdots\cdots ㉠$$

이때 ㉠은 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 분모의 최고차항인 $x$로 분모, 분자를 나누면 극한은 다음과 같다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=1$$

개념 SSEN

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\infty-\infty$ 꼴의 극한 | → | 다항식 | → | 최고차항으로 묶는다. |
| | → | 무리식 | → | 유리화한다. |

## 대표유형 028 $\infty-\infty$ 꼴의 함수의 극한

• 개념 026

다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}(x^2-3x+2)$　　(2) $\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-3x+1})$

**유형 Guide** $\infty-\infty$ 꼴의 함수의 극한에서 근호가 없는 식은 최고차항으로 묶어서 $\infty\times$(상수) 꼴로, 근호가 있는 식은 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형하여 극한값을 구한다.

**유형 SSEN** $\infty-\infty$ 꼴의 함수의 극한
- 다항식 ⊙ 최고차항으로 묶는다.
- 무리식 ⊙ 유리화한다.

**풀이** (1) $\lim_{x\to\infty}(x^2-3x+2)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=\infty$

(2) 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-3x+1})=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-3x+1})(x+\sqrt{x^2-3x+1})}{x+\sqrt{x^2-3x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x+\sqrt{x^2-3x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$
$$=\frac{3}{2}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 분모의 최고차항인 $x$로 분모, 분자를 나눈다.

답 (1) $\infty$　(2) $\frac{3}{2}$

**Remark** $\infty\times c$ ($c$는 상수) 꼴의 극한은 $c>0$일 때 $\infty$, $c<0$일 때 $-\infty$이다.

정답 및 풀이 • 26쪽

**유제 028-1** 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}(-3x^3+4x^2+x-2)$　　(2) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-5x+6}+x)$

**유제 028-2** $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})=4$일 때 상수 $a$의 값을 구하여라.

개념 027

## $\infty \times 0$ 꼴의 함수의 극한

$\infty \times 0$ 꼴의 함수의 극한은 다음과 같은 방법으로 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \times c$, $\frac{c}{\infty}$ ($c$는 상수) 꼴로 변형하여 구한다.

① 분모 또는 분자에 다항식이 있는 경우 ➡ 통분하거나 인수분해한다.
② 분모 또는 분자에 근호($\sqrt{\ }$)가 있는 경우 ➡ 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

**개념 Approach**

$\lim_{x \to \infty} f(x)g(x)$에서 $\lim_{x \to \infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x \to \infty} g(x)=0$이면 함수의 극한에 대한 성질을 이용할 수 없다.
이와 같은 $\infty \times 0$ 꼴의 극한은 다음과 같은 방법으로 구한다.

**① 분모 또는 분자에 다항식이 있는 경우**

$\lim_{x \to \infty} x\left(1-\frac{x}{x+1}\right)$에서 $\lim_{x \to \infty} x=\infty$, $\lim_{x \to \infty}\left(1-\frac{x}{x+1}\right)=0$이므로 괄호 안을 통분하면

$$\lim_{x \to \infty} x\left(1-\frac{x}{x+1}\right)=\lim_{x \to \infty} x \cdot \frac{x+1-x}{x+1}=\lim_{x \to \infty}\frac{x}{x+1} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 ㉠은 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 분모의 최고차항인 $x$로 분모, 분자를 나누면 극한은 다음과 같다.

$$\lim_{x \to \infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x \to \infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$$

**② 분모 또는 분자에 근호($\sqrt{\ }$)가 있는 경우**

$\lim_{x \to \infty} x\left(1-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\right)$에서 $\lim_{x \to \infty} x=\infty$, $\lim_{x \to \infty}\left(1-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\right)=0$이므로 괄호 안을 통분한 후 분자를 유리화하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \infty} x\left(1-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\right)&=\lim_{x \to \infty}\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})}{\sqrt{x}}\\&=\lim_{x \to \infty}\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}\\&=\lim_{x \to \infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} \qquad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

이때 ㉡은 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 분모의 최고차항인 $\sqrt{x}$로 분모, 분자를 나누면 극한은 다음과 같다.

$$\lim_{x \to \infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2}$$

## 대표유형 029 $\infty \times 0$ 꼴의 함수의 극한

• 개념 027

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4x+1}\right)$  (2) $\lim_{x \to \infty} x\left(1 - \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x}}\right)$

**유형 Guide** $\infty \times 0$ 꼴의 함수의 극한은 통분, 인수분해, 유리화 등을 이용하여 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \times$(상수), $\frac{(상수)}{\infty}$ 꼴로 변형하여 극한값을 구한다.

**유형 SSEN**

**$\infty \times 0$ 꼴의 함수의 극한**
- **분모 또는 분자에 다항식이 있는 경우 ➡ 통분하거나 인수분해한다.**
- **분모 또는 분자에 근호($\sqrt{\ }$)가 있는 경우 ➡ 유리화한다.**

**풀이** (1) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4x+1}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{4x+1-(x+1)}{(x+1)(4x+1)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{3x}{4x^2+5x+1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3}{4x^2+5x+1} = 3$$

(2) $\lim_{x \to \infty} x\left(1 - \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x}}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x(\sqrt{2x} - \sqrt{2x+1})}{\sqrt{2x}}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x(\sqrt{2x} - \sqrt{2x+1})(\sqrt{2x} + \sqrt{2x+1})}{\sqrt{2x}(\sqrt{2x} + \sqrt{2x+1})}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-x}{2x + \sqrt{4x^2+2x}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{2 + \sqrt{4 + \frac{2}{x}}} = -\frac{1}{4}$$

답 (1) 3 (2) $-\frac{1}{4}$

정답 및 풀이 • 26쪽

**유제 029-1** 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left\{1 - \frac{1}{(x-1)^2}\right\}$  (2) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{3-x}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

**유제 029-2** $\lim_{x \to -\infty} x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{4x^2+2}}\right)$의 극한값을 구하여라.

개념 028

# 미정계수의 결정

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

① $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ ($\alpha$는 실수)이고 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$이면 $\quad\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$

② $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ ($\alpha$는 0이 아닌 실수)이고 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$이면 $\quad\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$

**개념 Approach**

위의 성질은 수렴하는 분수 꼴의 극한에서 분모 또는 분자에 포함되어 있는 미정계수를 구할 때 중요하게 이용된다.

함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 ①, ②를 증명해 보자.

① $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, 즉 $x\to a$일 때 두 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)$는 각각 수렴하므로 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)\right\}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to a}g(x)=\alpha\cdot 0=0$$

$$\therefore \lim_{x\to a}f(x)=0$$

② $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ $(\alpha\neq 0)$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, 즉 $x\to a$일 때 두 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $f(x)$는 각각 수렴하므로 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\left\{f(x)\div\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\lim_{x\to a}f(x)\div\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{\alpha}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to a}g(x)=0$$

개념 SSEN

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(\text{분자})}{(\text{분모})}=\alpha$

- (분모) $\to 0$ $\longrightarrow$ (분자) $\to 0$
- $\alpha\neq 0$이고, (분자) $\to 0$ $\longrightarrow$ (분모) $\to 0$

**개념 Check**

등식 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-ax-2}{x-2}=3$이 성립하도록 하는 상수 $a$의 값을 구하여라.

**풀이** $x\to 2$일 때, (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-ax-2)=0$이므로

$2^2-2a-2=0,\quad 2a=2\quad \therefore a=1$

답 1

## 대표유형 030 미정계수의 결정

• 개념 028

다음 등식이 성립하도록 하는 상수 $a$, $b$의 값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2}=3$ (2) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{a\sqrt{x}+b}=\frac{2}{3}$

**유형 Guide** 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ ($\alpha$는 실수)일 때,

(1) $\lim_{x \to a} g(x)=0$이면 $\lim_{x \to a} f(x)=0$임을 이용한다.

(2) $\lim_{x \to a} f(x)=0$이고 $\alpha \neq 0$이면, $\lim_{x \to a} g(x)=0$임을 이용한다.

**유형 SSEN 미정계수의 결정**
- **(분모) $\to$ 0 ⇨ (분자) $\to$ 0임을 이용한다.**
- **(분자) $\to$ 0, (극한값)$\neq$0 ⇨ (분모) $\to$ 0임을 이용한다.**

**풀이** (1) $x \to 2$일 때, (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{x \to 2}(x^2+ax+b)=0$이므로

$4+2a+b=0 \quad \therefore b=-2a-4 \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}=\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x \to 2}(x+a+2)=4+a$$

따라서 $4+a=3$이므로 $a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=-2$

(2) $x \to 1$일 때, (분자) $\to$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{x \to 1}(a\sqrt{x}+b)=0$이므로

$a+b=0 \quad \therefore b=-a \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{a\sqrt{x}-a}=\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{a(\sqrt{x}-1)}=\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{a(x-1)}=\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}+1}{a}=\frac{2}{a}$$

따라서 $\frac{2}{a}=\frac{2}{3}$이므로 $a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $b=-3$

답 (1) $a=-1$, $b=-2$ (2) $a=3$, $b=-3$

정답 및 풀이 • 26쪽

**유제 030-1** 다음 등식이 성립하도록 하는 상수 $a$, $b$의 값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x^2-ax+b}=6$ (2) $\lim_{x \to -2} \frac{a\sqrt{x+3}+b}{x+2}=1$

## 대표유형 031 다항식의 결정

• 개념 028

$x$에 대한 다항식 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$를 구하여라.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+4x+3}=2$  (나) $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2+4x+3}=-1$

**유형 Guide** 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\ (\alpha\neq0)$일 때, $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$이면 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이고 $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같음을 이용하여 $f(x)$를 다항식으로 나타낸 후, 조건 (나)를 이용하여 미정계수를 결정한다. 이때 $\alpha=\frac{(f(x)\text{의 최고차항의 계수})}{(g(x)\text{의 최고차항의 계수})}$이다.

**유형 SSEN** $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\ (\alpha\neq0)$ ➡ $(f(x)$의 차수$)=(g(x)$의 차수$)$

**풀이** 조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+4x+3}=2$이므로

$f(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차식임을 알 수 있다. …… ㉠

조건 (나)에서 $x\to-1$일 때, (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}f(x)=0$이므로 $f(-1)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=2(x+1)(x+a)$ ($a$는 상수)로 놓을 수 있으므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2+4x+3}=\lim_{x\to-1}\frac{2(x+1)(x+a)}{(x+1)(x+3)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{2(x+a)}{x+3}=a-1$$

따라서 $a-1=-1$이므로 $a=0$

$\therefore f(x)=2x(x+1)=2x^2+2x$

답 $f(x)=2x^2+2x$

정답 및 풀이 • 27쪽

**유제 031-1** $x$에 대한 다항식 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+4}=3$, $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{f(x)}=\frac{1}{6}$을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하여라.

개념 029

## 함수의 극한의 대소 관계



함수의 극한에서도 수열의 극한에서와 같이 다음의 대소 관계가 성립한다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에서 $\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x \to a} g(x)=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)일 때, $a$에 가까운 모든 $x$의 값에서

① $f(x) \le g(x)$이면 $\alpha \le \beta$

② 함수 $h(x)$에 대하여 $f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면

$$\lim_{x \to a} h(x)=\alpha$$

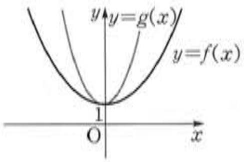
**Remark** 함수의 극한의 대소 관계는 $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$인 경우에도 모두 성립한다.

개념 Approach

두 함수 $f(x)=1+x^2$, $g(x)=1+2x^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x) \le g(x)$임을 알 수 있다.

따라서 임의의 실수 $a$에 대하여 $\lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} g(x)$가 성립한다.

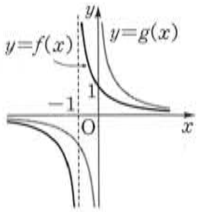
한편 $f(x) < g(x)$이지만 $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x)$인 경우도 있다.




예를 들어 두 함수 $f(x)=\frac{1}{x+1}$, $g(x)=\frac{1}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 모든 양수 $x$에 대하여 $f(x)<g(x)$이지만

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x+1}=0, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}=0$$

이므로 $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x)$이다.




따라서 $x \to a$일 때 수렴하는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x) \le g(x)$이면 $\lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} g(x)$가 성립한다.

개념 Check

$0 \le x \le 2$에서 함수 $f(x)$가 $2x \le f(x) \le x^2+1$을 만족시킬 때, $\lim_{x \to 1} f(x)$를 구하여라.

풀이 $\lim_{x \to 1} 2x = \lim_{x \to 1} (x^2+1)=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x \to 1} f(x)=2$

답 2

## 대표유형 032 함수의 극한의 대소 관계

• 개념 029

모든 양의 실수 $x$에 대하여 함수 $f(x)$가 $2x-1\le f(x)\le 2x+4$를 만족시킬 때, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{3x^2+x+2}$의 값을 구하여라.

**유형 Guide** 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\alpha$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=\beta$($\alpha$, $\beta$는 실수)일 때, 함수 $h(x)$가 $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}h(x)=\alpha$이다.

**유형 SSEN** $f(x)\le h(x)\le g(x)$**이고** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=\alpha$**이면** ➡ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}h(x)=\alpha$

**풀이** $2x-1\le f(x)\le 2x+4$의 각 변을 제곱하면

$$(2x-1)^2\le\{f(x)\}^2\le(2x+4)^2$$

각 변을 $3x^2+x+2$로 나누면

$$\frac{(2x-1)^2}{3x^2+x+2}\le\frac{\{f(x)\}^2}{3x^2+x+2}\le\frac{(2x+4)^2}{3x^2+x+2}$$

$3x^2+x+2=3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{23}{12}>0$
이므로 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

이때 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^2}{3x^2+x+2}=\frac{4}{3}$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+4)^2}{3x^2+x+2}=\frac{4}{3}$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{3x^2+x+2}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

정답 및 풀이 • 27쪽

**유제 032-1** 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(x)=6x-5$, $g(x)=x^2+4$일 때, 모든 실수 $x$에 대하여 함수 $h(x)$가 $f(x)\le h(x)\le g(x)$를 만족시킨다. 이때 $\displaystyle\lim_{x\to3}h(x)$의 값을 구하여라.

**유제 032-2** 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 $x^2+1\le f(x)\le x^2+3$을 만족시킬 때, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$의 값을 구하여라.

# 중단원 연습 문제

정답 및 풀이 • 27쪽

## STEP 1 유형 Training

**01** 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

**보기**

ㄱ. $\lim_{x \to 0}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\infty$ ㄴ. $\lim_{x \to -2}\frac{2x^2+3x-2}{x+2}=5$

ㄷ. $\lim_{x \to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=2$ ㄹ. $\lim_{x \to -1}\left(-\frac{1}{|x+1|}\right)=-\infty$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄱ, ㄹ ④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

**02** $\lim_{x \to \infty}\frac{1}{|x+3|}+\lim_{x \to -\infty}\left(3-\frac{1}{x^2}\right)$의 값을 구하여라.

서술형

**03** 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a}\frac{f(x-a)}{x-a}=1$일 때, $\lim_{x \to 0}\frac{x+4f(x)}{3x^2+2f(x)}$의 값을 구하여라.

**04** $A=\lim_{x \to \infty}\frac{5x-1}{2x^2+1}$, $B=\lim_{x \to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, $C=\lim_{x \to \infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-1}{x-1}$일 때, $A$, $B$, $C$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$
④ $B<C<A$ ⑤ $C<A<B$

**05** 등식 $\lim_{x \to 1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=\frac{1}{3}$을 만족시키는 상수 $a$, $b$에 대하여 $ab$의 값을 구하여라.

서술형

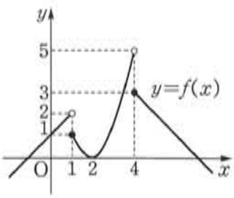
**06** $x$에 대한 다항식 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-x^3}{x^2}=3$ (나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}=-2$

## STEP 2 실전 Application

평가원기출

**07** 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. $\lim_{t \to \infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t \to -\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$의 값은?




① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

**08** 극한값이 존재하는 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?
(단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

보기

ㄱ. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{|x|}$ ㄴ. $\lim_{x \to -1} \frac{[x]}{[x]^2-x}$ ㄷ. $\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^3}{|x-2|}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

서술형

**09** 함수 $f(x)=a[x]^3+2b[x]^2+1\ (a\neq0)$이 $x=0$에서 극한값을 갖도록 하는 두 상수 $a$, $b$에 대하여 $\frac{b}{a}$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

**10** 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\{3f(x)-2g(x)\}=1$$

을 만족시킬 때, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+4g(x)}{-2f(x)+6g(x)}$의 값을 구하여라.

**11** 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x^2-1$에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(f\circ g)(x)-(g\circ f)(x)}{x^4-1}$의 값을 구하여라.

**12** 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

**보기**

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to0}\{f(x)-g(x)\}=0$이면 $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}g(x)$이다.

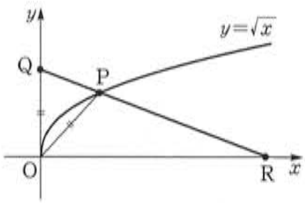
ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$가 모두 수렴하면 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$도 수렴한다. (단, $g(x)\neq0$)

ㄷ. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$가 모두 수렴하면 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)$도 수렴한다. (단, $g(x)\neq0$)

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

서술형

**13** 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{OP}=\overline{OQ}$인 점 Q를 $y$축의 양의 방향 위에 잡는다. 직선 PQ가 $x$축과 만나는 점을 R라 할 때, 점 P가 곡선 $y=\sqrt{x}$를 따라 원점 O에 한없이 가까워지면 점 R는 점 $(a,\ 0)$에 한없이 가까워진다. 이때 $a$의 값을 구하여라.




서술형

**14** 등식 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2+bx}-x)=1$을 만족시키는 상수 $a$, $b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

**15** 두 함수 $f(x)=\sqrt{x^2+4x}-x$, $g(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2x+1}-1\right)$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=a,\ \lim_{x\to 0} g(x)=b$$

라 할 때, 상수 $a$, $b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

**16** 함수 $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{px^2+qx+r}$이

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to 1} |f(x)|=\infty,\ \lim_{x\to -2} |f(x)|=\infty$$

를 만족시킬때, 상수 $p$, $q$, $r$에 대하여 $pqr$의 값을 구하여라.

서술형

**17** 함수 $f(x)=\frac{ax^3+bx^2+6x-12}{x^2-1}$에 대하여 $\lim_{x\to\infty} f(x)=6$일 때, $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값을 구하여라. (단, $a$, $b$는 상수이다.)

서술형

**18** 실수 전체의 집합에서 정의된 이차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

| | |
|---|---|
| (가) $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{x-3}=6$ | (나) $x=\frac{3}{2}$에서 최솟값을 갖는다. |

이때 $\lim_{x\to 2} \frac{f(2x+1)}{x}$의 값을 구하여라.

STEP 3 심화 Forwarding

교육청기출

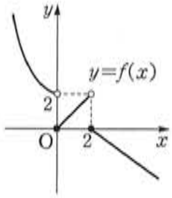
**19** 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x+2)=f(x)$인 함수 $f(x)$가

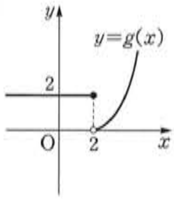
$f(x)=-2\left|x-\frac{1}{2}\right|+1\left(-\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}\right)$이고 함수 $g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{1+f(x)\}^n-1}{\{1+f(x)\}^n+1}$일 때,

$g(10\sqrt{2})-g(\sqrt{3})$의 값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

**20** 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?




**보기**

ㄱ. $\lim_{x\to-2+}f(|x|)+\lim_{x\to-2-}g(|x|)=4$

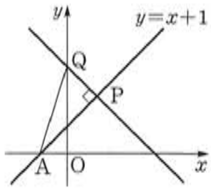
ㄴ. $\lim_{x\to2}\{f(x)-g(x)\}=0$

ㄷ. $\lim_{x\to2}(g\circ f)(x)=2$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

수능기출

**21** 그림과 같이 $y=x+1$ 위에 두 점 $A(-1,\ 0)$과 $P(t,\ t+1)$이 있다. 점 P를 지나고 직선 $y=x+1$에 수직인 직선이 $y$축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2}$의 값은?




① $1$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $2$

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $3$

# 04

# 함수의 연속

함수 $y=x$의 그래프는 모든 실수 $x$에 대하여 끊어진 부분이 없이 이어져 있지만 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프는 $x=0$인 점에서 끊어져 있다. 함수의 그래프가 연속적으로 이어진 것과 끊어진 것을 수학적으로 어떻게 정의할 수 있을까?

이 단원에서는 극한의 개념을 바탕으로 연속함수의 의미를 알아보고, 연속인 함수에 대하여 성립하는 최대 · 최소 정리와 사이값 정리에 대하여 알아보자.

## 한눈에 보는 개념&유형 map

### 소단원 & 학습목표

**10 함수의 연속**

- 함수의 연속과 불연속의 뜻을 알고 함수의 연속성을 조사할 수 있다.

**11 연속함수의 성질**

- 연속함수의 성질을 이해한다.
- 최대 · 최소 정리와 사이값 정리를 이해한다.

개념 & 특강 | 대표유형 & 유제

030 함수의 연속 — 033 함수의 연속 — 034 함수가 연속일 조건

031 구간

032 연속함수 — 035 $x^n$을 포함한 함수의 연속성 — 036 등비급수의 꼴로 표현된 함수의 연속성

033 연속함수의 성질

034 최대 · 최소 정리 — 037 최대 · 최소 정리

035 사이값 정리 — 038 사이값 정리

# 개념 030 함수의 연속

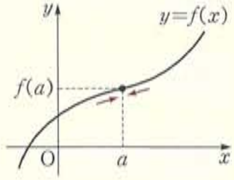
## 1 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 $a$에 대하여 다음을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **연속**이라 한다.

(i) $x=a$에서 **정의**되어 있다. ← 함숫값 존재

(ii) 극한값 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$가 **존재**한다. ← 극한값 존재

(iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$ ← (극한값)=(함숫값)




## 2 함수의 불연속

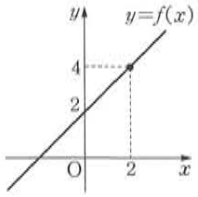
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **불연속**이라 한다.

**Remark** 함수 $f(x)$가 (i), (ii), (iii) 중에서 어느 한 가지라도 만족시키지 않으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

### 개념 Approach

직관적으로 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이라는 것은 $x=a$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 끊어지지 않고 이어져 있는 것이고, 불연속이라는 것은 $x=a$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 끊어져 있는 것이다.

예를 들어 함수 $f(x)=x+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x=2$에서 끊어지지 않고 이어져 있으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.



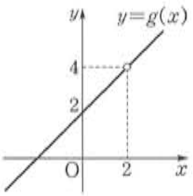

그러나 세 함수

$$g(x)=\frac{x^2-4}{x-2},$$

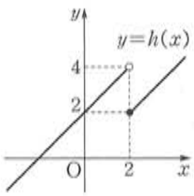
$$h(x)=\begin{cases} x & (x \ge 2) \\ x+2 & (x<2) \end{cases},$$

$$k(x)=\begin{cases} x+2 & (x \ne 2) \\ 2 & (x=2) \end{cases}$$

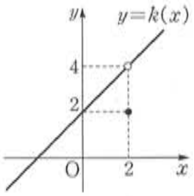
의 그래프는 다음 그림과 같이 $x=2$에서 끊어져 있으므로 세 함수 $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$는 $x=2$에서 모두 불연속이다.




[그림 1]




[그림 2]




[그림 3]

이제 세 함수 $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$가 $x=2$에서 불연속인 이유를 각각 조사해 보자.

함수 $g(x)$는 $x=2$에서 정의되어 있지 않으므로 [그림 1]과 같이 함수 $y=g(x)$의 그래프가 $x=2$에서 끊어지게 되어 불연속이다.

함수 $h(x)$는 $\lim\limits_{x\to 2+} h(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 2-} h(x)=4$로 우극한과 좌극한이 서로 같지 않아 $x=2$에서 극한값이 존재하지 않으므로 [그림 2]와 같이 함수 $y=h(x)$의 그래프가 $x=2$에서 끊어지게 되어 불연속이다.

또 함수 $k(x)$는 $k(2)=2$로 $x=2$에서 정의되어 있고 $\lim\limits_{x\to 2} k(x)=4$로 극한값이 존재하지만, $\lim\limits_{x\to 2} k(x)\neq k(2)$, 즉 극한값과 함숫값이 같지 않아 [그림 3]과 같이 함수 $y=k(x)$의 그래프가 $x=2$에서 끊어지게 되어 불연속이다.



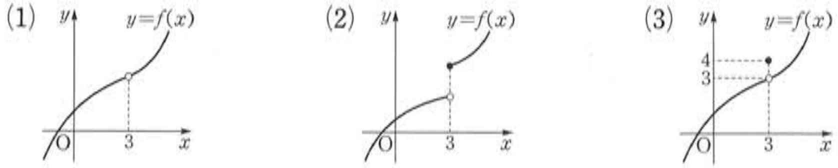
한편 함수 $f(x)$는

(i) $x=2$에서 정의되어 있고 (ii) 극한값 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$가 존재하며 (iii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

이므로 $x=2$에서 연속이다.

**개념 Check**

다음 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 불연속인 이유를 말하여라.




**풀이** (1) $x=3$에서 함수 $f(x)$가 정의되어 있지 않으므로 불연속이다.

(2) 극한값 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$가 존재하지 않으므로 불연속이다.

(3) 함숫값은 $f(3)=4$이고, 극한값은 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=3$이다.

따라서 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)\neq f(3)$이므로 불연속이다.

답 풀이 참조

**Remark** 연속의 정의 중 (1)은 (i)을, (2)는 (ii)를, (3)은 (iii)을 만족시키지 않는 경우이다.

## 대표유형 033 함수의 연속

• 개념 030

다음 함수가 $x=0$에서 연속인지 불연속인지 조사하여라.

(1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ (2) $f(x)=|x|$

**유형 Guide** 함수 $f(x)$에 대하여

(i) 함숫값 $f(a)$가 정의되어 있고 (ii) 극한값 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$가 존재하며 (iii) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

이때 위의 세 가지 조건 중 한 가지라도 만족시키지 않으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

**유형 SSEN** **함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속 ○ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$**

**풀이** (1)(i) $x=0$에서 함숫값은 $f(0)=0$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$

(i), (ii)에서 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(2)(i) $x=0$에서 함숫값은 $f(0)=0$

(ii) $x>0$일 때, $|x|=x$이므로 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}|x|=\lim\limits_{x\to 0+}x=0$

$x<0$일 때, $|x|=-x$이므로 $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}|x|=\lim\limits_{x\to 0-}(-x)=0$

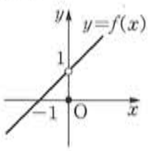
따라서 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

(i), (ii)에서 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

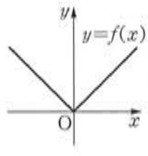
답 (1) 불연속 (2) 연속

**Remark** 다음 그림과 같이 주어진 함수의 그래프를 이용하면 함수의 연속 또는 불연속을 직관적으로 확인할 수 있다.

(1)




(2)




정답 및 풀이 • 34쪽

**유제 033-1** 다음 함수가 $x=1$에서 연속인지 불연속인지 조사하여라.

(단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} & (x\neq 1) \\ 3 & (x=1) \end{cases}$ (2) $f(x)=x-[x]$

## 대표유형 034 함수가 연속일 조건

• 개념 030

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a\sqrt{x}+b}{x-1} & (x\neq 1) \\ 2 & (x=1) \end{cases}$가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 $a$, $b$의 값을 구하여라.

**유형 Guide** 함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\neq a) \\ k & (x=a) \end{cases}$가 $x=a$에서 연속이려면 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=k$이어야 한다.

**유형 SSEN** 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속 ⇔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

**풀이** 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$이다.

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=2$ …… ㉠

㉠에서 $x \to 1$일 때, (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉 $\lim\limits_{x\to 1}(a\sqrt{x}+b)=0$이므로

$a+b=0 \quad \therefore b=-a$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}-a}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{a}{\sqrt{x}+1}$$

$$=\frac{a}{2}=2$$

$\frac{0}{0}$ 꼴의 극한이므로 근호를 포함한 쪽을 유리화하여 극한값을 구한다.

$\therefore a=4$

$a=4$를 ㉡에 대입하면 $b=-4$

답 $a=4$, $b=-4$

정답 및 풀이 • 34쪽

**유제 034-1** 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & (x\neq 1) \\ a & (x=1) \end{cases}$가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 $a$의 값을 구하여라.

**유제 034-2** 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+3ax+b}{x+1} & (x\neq -1) \\ a-2 & (x=-1) \end{cases}$가 $x=-1$에서 연속이 되도록 하는 상수 $a$, $b$의 값을 구하여라.

## 개념 031 구간

두 실수 $a$, $b$ $(a<b)$에 대하여 집합

$\{x \mid a \leq x \leq b\}$, $\{x \mid a \leq x < b\}$, $\{x \mid a < x \leq b\}$, $\{x \mid a < x < b\}$

를 **구간**이라 하고, 이것을 기호로 각각

$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

와 같이 나타낸다.

이때 $[a, b]$를 **닫힌 구간**, $(a, b)$를 **열린 구간**, $[a, b)$와 $(a, b]$를 **반닫힌 구간** 또는 **반열린 구간**이라 한다.

### 개념 Approach

구간의 기호를 사용하면 연속된 실수의 집합을 간단히 나타낼 수 있다.

두 실수 $a, b$ $(a<b)$에 대하여 여러 가지 구간을 수직선 위에 나타내어 보자.

구간 $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, $(a, b)$를 수직선 위에 나타내면 각각 다음 그림과 같다.


또 집합 $\{x \mid x \leq a\}$, $\{x \mid x < a\}$, $\{x \mid x \geq a\}$, $\{x \mid x > a\}$도 모두 구간이며 이것을 기호로 각각

$(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$, $[a, \infty)$, $(a, \infty)$

와 같이 나타낸다. 이를 수직선 위에 나타내면 각각 다음 그림과 같다.


특히 실수 전체의 집합은 기호로 $(-\infty, \infty)$와 같이 나타낸다.

### 개념 Check

다음 함수의 정의역을 구간의 기호로 나타내어라.

(1) $y=\sqrt{4-x^2}$ (2) $y=\dfrac{x-1}{x+3}$

**풀이** (1) $4-x^2 \geq 0$에서 $x^2-4 \leq 0$, $(x+2)(x-2) \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 2$

따라서 정의역은 $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$이므로 기호로 나타내면

$[-2, 2]$

(2) $x+3 \neq 0$, 즉 $x \neq -3$에서 정의역은 $\{x \mid x \neq -3$인 실수$\}$이므로 기호로 나타내면

$(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$

**답** (1) $[-2, 2]$ (2) $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$

개념 032

# 연속함수

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 실수에 대하여 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 **연속**이라 하고, 어떤 구간에서 연속인 함수를 **연속함수**라 한다.

특히 함수 $f(x)$가

(i) 열린 구간 $(a,\ b)$에서 연속

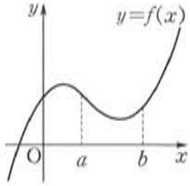
(ii) $\lim_{x\to a+} f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to b-} f(x)=f(b)$

를 만족시킬 때, $f(x)$는 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이라 한다.



### 개념 Approach

열린 구간 $(a,\ b)$에 속하는 모든 실수 $x$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 끊어지지 않고 이어져 있으면 함수 $f(x)$는 구간 $(a,\ b)$에 속하는 모든 실수 $x$에 대하여 연속이다.




따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(a,\ b)$에서 연속이라 할 수 있다.

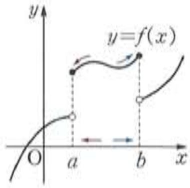
한편 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 함수 $f(x)$의 연속성을 판별하기 위해서는 $x=a$와 $x=b$에서의 함수 $f(x)$의 연속성도 살펴보아야 한다.

그러나 주어진 구간에서 $\lim_{x\to a-} f(x)$와 $\lim_{x\to b+} f(x)$의 값이 정의되지 않으므로

(i) 열린 구간 $(a,\ b)$에서 연속이고 (ii) $\lim_{x\to a+} f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to b-} f(x)=f(b)$

이면 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이라 한다.

예를 들어 오른쪽 그림과 같은 함수 $f(x)$는 $x=a$와 $x=b$에서 불연속이지만, 구간 $(a,\ b)$에서 연속이고 $\lim_{x\to a+} f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to b-} f(x)=f(b)$이므로 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이다.

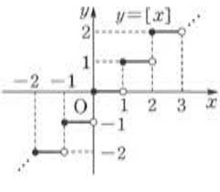



**Remark** 반닫힌 구간에서 함수의 연속성

함수 $f(x)$가 열린 구간 $(a,\ b)$에서 연속이고 $\lim_{x\to a+} f(x)=f(a)$이면 $f(x)$는 반닫힌 구간 $[a,\ b)$에서 연속이다.

예를 들어 정수 $n$에 대하여 함수 $f(x)=[x]$는 열린 구간 $(n,\ n+1)$에서 연속이고 $\lim_{x\to n+} f(x)=f(n)$이므로 $f(x)$는 반닫힌 구간 $[n,\ n+1)$에서 연속이다.

(단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

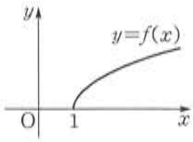



### 개념 Check

함수 $f(x)=\sqrt{x-1}$이 연속인 구간을 구하여라.

**풀이** 함수 $f(x)=\sqrt{x-1}$은 구간 $(1,\ \infty)$에서 연속이고 $\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)=\sqrt{x-1}$은 구간 $[1,\ \infty)$에서 연속이다.

**답** $[1,\ \infty)$



## 대표유형 035 $x^n$을 포함한 함수의 연속성

• 개념 032

함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2(1-x^{2n})}{1+x^{2n}}$의 그래프를 그리고, 연속성을 조사하여라.

**유형 Guide** $x^n$은 $n\to\infty$일 때 $x$의 값의 범위에 따라 그 극한값이 달라지므로 $|x|<1$, $x=1$, $x=-1$, $|x|>1$로 경우를 나누어 구하고, $x=-1$, $x=1$에서의 연속성을 조사한다.

이때 $|x|<1$이면 $\lim_{n\to\infty}x^n=0$, $|x|>1$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$임을 이용한다.

유형 55EN **$x^n$을 포함한 함수의 극한**
**○ $|x|<1$, $x=1$, $x=-1$, $|x|>1$인 경우로 나누어 구한다.**

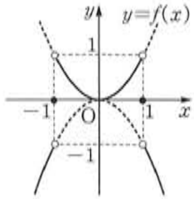
**풀이** (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2(1-x^{2n})}{1+x^{2n}}=\frac{x^2\cdot 1}{1+0}=x^2$

(ii) $x=\pm1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$이므로 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2(1-x^{2n})}{1+x^{2n}}=\frac{1\cdot 0}{1+1}=0$

(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2(1-x^{2n})}{1+x^{2n}}=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2n}}-1}{\frac{1}{x^{2n}}+1}$$

$$=x^2\cdot\frac{0-1}{0+1}=-x^2$$




이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이고, 그 밖의 모든 실수 $x$의 값에서 연속이다.

답 풀이 참조

**Remark** 수열 $\{x^n\}$에 대하여
(i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=0$ (ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=1$
(iii) $x=-1$일 때, 수열 $\{x^n\}$은 진동 (iv) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|x^n|=\infty$

정답 및 풀이 • 34쪽

**유제 035-1** 다음 함수의 그래프를 그리고, 연속성을 조사하여라.

(1) $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$ (2) $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-x}{x^{n-1}+2}$

**유제 035-2** 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+2x-a}{x^{n-1}+1}$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 상수 $a$의 값을 구하여라.

## 대표유형 036 등비급수의 꼴로 표현된 함수의 연속성

• 개념 032

함수 $f(x)=x+\dfrac{x}{1+|x|}+\dfrac{x}{(1+|x|)^2}+\cdots$의 연속성을 조사하여라.



**유형 Guide** $x=0$이면 $f(x)=0$이고, $x\neq0$이면 $f(x)$는 첫째항이 $x$, 공비가 $\dfrac{1}{1+|x|}$인 등비급수이므로 $x=0$일 때와 $x\neq0$일 때로 경우를 나누어 함수 $f(x)$를 구하고, $x=0$에서의 연속성을 조사한다.
이때 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}(a\neq0)$은 $-1<r<1$일 때 수렴하고, 그 합은 $\dfrac{a}{1-r}$임을 이용한다.

**유형 SSEN** **등비급수의 꼴로 표현된 함수의 극한**
**첫째항이 0인 경우와 0이 아닌 경우로 나누어 구한다.**

**풀이** (i) $x=0$일 때, $f(0)=0+0+0+\cdots=0$

(ii) $x\neq0$일 때,

함수 $f(x)$는 첫째항이 $x$, 공비가 $\dfrac{1}{1+|x|}$인 등비급수이고 $0<\dfrac{1}{1+|x|}<1$이므로

$|x|>0$이므로 $1+|x|>1$
$\therefore 0<\dfrac{1}{1+|x|}<1$

$$f(x)=\frac{x}{1-\dfrac{1}{1+|x|}}=\frac{x(1+|x|)}{|x|}$$

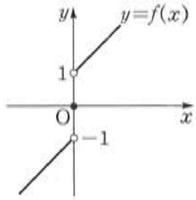
이때 $x>0$이면 $f(x)=\dfrac{x(1+|x|)}{|x|}=\dfrac{x(1+x)}{x}=x+1$

$x<0$이면 $f(x)=\dfrac{x(1+|x|)}{|x|}=\dfrac{x(1-x)}{-x}=x-1$

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ x-1 & (x<0)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고, 그 밖의 모든 실수 $x$의 값에서 연속이다.




답 풀이 참조

정답 및 풀이 • 35쪽

**유제 036-1** 함수 $f(x)=x^2+\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}+\dfrac{x^2}{(1+x^2)^3}+\cdots$이 불연속이 되는 실수 $x$의 값을 구하여라.

## 개념 033 연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

① $f(x)\pm g(x)$ ② $cf(x)$ (단, $c$는 상수)

③ $f(x)g(x)$ ④ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq 0$)

**Remark** 일반적으로 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$이고 함수 $g(x)$가 $x=f(a)$에서 연속이면 $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=g(f(a))$이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

### 개념 Approach

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 $x=a$에서 연속이면

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a),\ \lim_{x\to a} g(x)=g(a)$$

이므로 함수의 극한에 대한 성질에 의하여 다음이 성립한다. 75쪽 • 개념 022

① $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)=f(a)\pm g(a)$ (복호동순)

② $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)=cf(a)$ (단, $c$는 상수)

③ $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\lim\limits_{x\to a} g(x)=f(a)g(a)$

④ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}$ (단, $g(a)\neq 0$)

따라서 함수 $f(x)\pm g(x)$, $cf(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$도 $x=a$에서 연속이다.

이제 연속함수의 성질을 이용하여 여러 가지 함수의 연속성을 알아보자.

(1) 일차함수 $y=x$는 모든 실수 $x$에서 연속이므로 위의 성질 ③에 의하여 함수

$$y=x^2,\ y=x^3,\ \cdots,\ y=x^n\ (n\text{은 자연수})$$

도 모든 실수 $x$에서 연속이다.

또 상수함수도 모든 실수 $x$에서 연속이므로 위의 성질 ①, ②에 의하여 다항함수

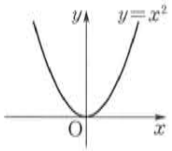
$$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\ (a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_1,\ a_0\text{은 상수})$$

은 모든 실수 $x$에서 연속이다.

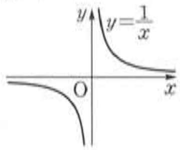
(2) 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 유리함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 위의 성질 ④에 의하여 분모가 0이 되는 $x$의 값, 즉 $g(x)=0$인 $x$의 값을 제외한 모든 실수 $x$에서 연속이다.

**Remark** 여러 가지 함수의 연속성을 다음과 같이 그래프를 그려 직관적으로 확인할 수 있다.

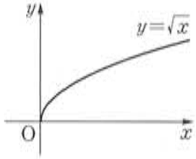
• 다항함수 $y=f(x)$
➡ 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속



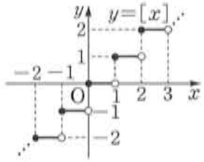

• 유리함수 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$
➡ $g(x)=0$인 $x$에서 불연속




• 무리함수 $y=\sqrt{f(x)}$
➡ $f(x)\geq 0$인 $x$에서 연속




• 가우스 기호를 포함한 함수 $y=[f(x)]$
($[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수)
➡ $f(x)=n$ ($n$은 정수)인 $x$에서 불연속




개념 Check 1

다음 함수가 연속인 구간을 구하여라.

(1) $y=x^4+3x^2-5$　　(2) $y=\dfrac{4}{x+3}$　　(3) $y=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$

풀이 (2) 함수 $y=\dfrac{4}{x+3}$는 $x+3\neq 0$, 즉 $x\neq -3$인 모든 실수에서 연속이므로
$(-\infty,\ -3)\cup(-3,\ \infty)$

(3) $x^2-3x+2=0$에서　$(x-1)(x-2)=0$　$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $y=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$은 $x^2-3x+2\neq 0$, 즉 $x\neq 1$, $x\neq 2$인 모든 실수에서 연속이므로　$(-\infty,\ 1)\cup(1,\ 2)\cup(2,\ \infty)$

답 (1) $(-\infty,\ \infty)$　(2) $(-\infty,\ -3)\cup(-3,\ \infty)$　(3) $(-\infty,\ 1)\cup(1,\ 2)\cup(2,\ \infty)$

개념 Check 2

두 함수 $f(x)=2x^2-3x$, $g(x)=x^2+2$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수인 것만을 **보기**에서 있는 대로 골라라.

**보기**

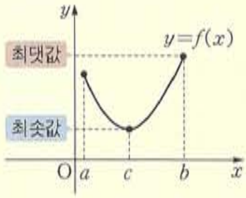
ㄱ. $f(x)+g(x)$　ㄴ. $f(x)-g(x)$　ㄷ. $f(x)g(x)$　ㄹ. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$　ㅁ. $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

풀이 ㅁ. 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{x^2+2}{2x^2-3x}=\dfrac{x^2+2}{x(2x-3)}$는 $x=0$, $x=\dfrac{3}{2}$에서 불연속이다.

이상에서 실수 전체의 집합에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.　답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

## 개념 034 최대 · 최소 정리

닫힌 구간에서 연속인 함수에 대하여 다음이 성립하고, 이것을 **최대 · 최소 정리**라 한다.

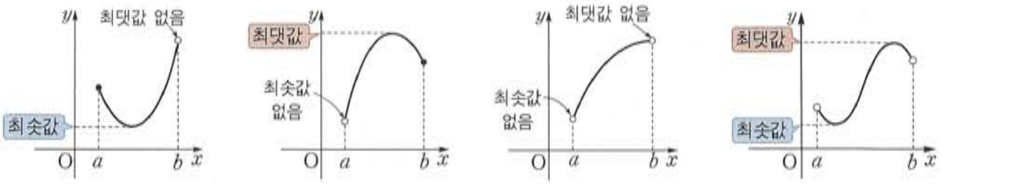



> 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

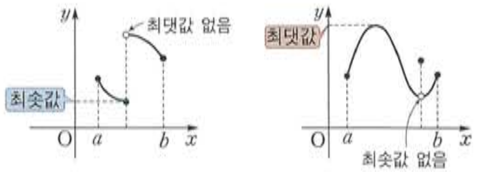
**Remark** 최대 · 최소 정리를 이용하면 최댓값과 최솟값을 직접 구하지 않아도 함수 $f(x)$가 최댓값과 최솟값을 갖는지 알 수 있다.

**개념 Approach**

닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수는 그 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다. 그러나 주어진 구간이 닫힌 구간이 아닌 경우, 즉 $[a, b)$, $(a, b]$, $(a, b)$일 때에는 다음 그림과 같이 최댓값 또는 최솟값이 존재할 수도 있고 존재하지 않을 수도 있다.




또 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 정의되더라도 연속함수가 아닌 경우에는 오른쪽 그림과 같이 최댓값 또는 최솟값이 존재하지 않을 수도 있다.

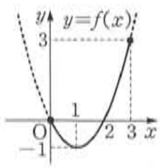



이와 같이 어떤 구간에서 함수가 최댓값과 최솟값을 가지려면 그 구간은 닫힌 구간이어야 하고, 함수는 그 구간에서 연속이어야 한다.

**개념 Check**

구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)=x^2-2x$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

**풀이** 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0, 3]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.
이때 $f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$이고, 구간 $[0, 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 3, $x=1$일 때 최솟값 $-1$을 갖는다.




**답** 최댓값: 3, 최솟값: $-1$

## 대표유형 037 최대 · 최소 정리

• 개념 034

주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

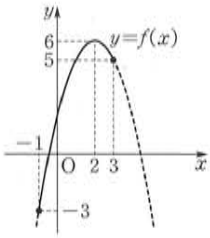
(1) $f(x)=-x^2+4x+2$ $[-1, 3]$　　(2) $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$ $[2, 5]$



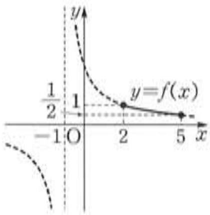
**유형 Guide** 먼저 최대 · 최소 정리를 이용하여 주어진 함수가 최댓값과 최솟값을 갖는지 확인한 후, 그래프를 이용하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

**유형 SSEN** 닫힌 구간에서 연속인 함수 ➡ 최댓값과 최솟값을 갖는다.

**풀이** (1) 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[-1, 3]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.
이때 $f(x)=-x^2+4x+2=-(x-2)^2+6$이고, 구간 $[-1, 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 6, $x=-1$일 때 최솟값 $-3$을 갖는다.




(2) 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[2, 5]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.
구간 $[2, 5]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 1, $x=5$일 때 최솟값 $\dfrac{1}{2}$을 갖는다.




답 (1) 최댓값: 6, 최솟값: $-3$ (2) 최댓값: 1, 최솟값: $\dfrac{1}{2}$

**Remark** (2) $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$은 유리함수이므로 $x\neq-1$인 모든 실수에서 연속이다.

정답 및 풀이 • 35쪽

**유제 037-1** 구간 $[-6, 2]$에서 함수 $f(x)=\sqrt{12-4x}$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

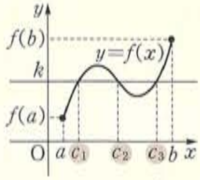
개념 035

# 사이값 정리

## 1 사이값 정리

닫힌 구간에서 연속인 함수에 대하여 다음이 성립하고, 이것을 **사이값 정리**라 한다.

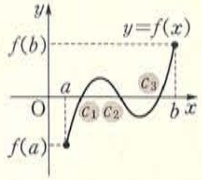
> 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 $k$에 대하여 $f(c)=k$인 $c$가 열린 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.




## 2 사이값 정리의 응용

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다를 때, $f(c)=0$인 $c$가 열린 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

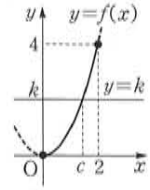
즉 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.




개념 Approach

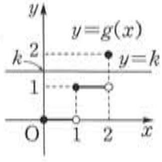
### 1 사이값 정리

닫힌 구간 $[0,\ 2]$에서 연속인 함수 $f(x)=x^2$의 치역은 구간 $[0,\ 4]$이므로 오른쪽 그림과 같이 $0<k<4$인 임의의 실수 $k$에 대하여 직선 $y=k$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 반드시 만난다. 즉 0과 4 사이의 어떤 값 $k$를 택하더라도 함숫값이 $k$가 되는 $c$가 열린 구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.




그러나 닫힌 구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $g(x)=[x]$ ($[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수)는 $x=1$, $x=2$에서 불연속이고 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $k$의 값에 따라 직선 $y=k$와 만나지 않을 수도 있다.

따라서 사이값 정리는 닫힌 구간에서 함수가 연속일 때에만 성립한다.




### 2 사이값 정리의 응용

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다를 때, 즉 $f(a)<0<f(b)$ 또는 $f(b)<0<f(a)$일 때, 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 $c$가 열린 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $(a,\ b)$에서 직선 $y=0$과 반드시 만나고, 방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축, 즉 직선 $y=0$의 교점의 $x$좌표이므로 사이값 정리를 이용하면 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 알 수 있다.

## 대표유형 038 사이값 정리

• 개념 035

다음 방정식이 주어진 구간에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보여라.

(1) $-2x^3-x-1=0 \quad (-1,\ 0)$

(2) $x^4-x^3-7x+1=0 \quad (-1,\ 1)$



**유형 Guide** 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다를 때, 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 이용한다.

**유형 SSEN** **방정식 $f(x)=0$이 구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 증명**
**➡ $f(a)$와 $f(b)$가 서로 다른 부호임을 보인다.**

**풀이** (1) $f(x)=-2x^3-x-1$로 놓으면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이고

$f(-1)=2>0,\ \ f(0)=-1<0$

이므로 사이값 정리에 의하여 $f(x)=0$인 $x$가 열린 구간 $(-1,\ 0)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $-2x^3-x-1=0$은 열린 구간 $(-1,\ 0)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(2) $f(x)=x^4-x^3-7x+1$로 놓으면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고

$f(-1)=10>0,\ \ f(1)=-6<0$

이므로 사이값 정리에 의하여 $f(x)=0$인 $x$가 열린 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $x^4-x^3-7x+1=0$은 열린 구간 $(-1,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

정답 및 풀이 • 35쪽

**유제 038-1** 다음 방정식이 주어진 구간에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보여라.

(1) $x^3+3x^2-2x-4=0 \quad (1,\ 2)$ (2) $x^5-4x+2=0 \quad (0,\ 1)$

**Plus 유제 038-2** 연속함수 $f(x)$에 대하여

$f(0)=-1,\ f(1)=-3,\ f(2)=5,\ f(3)=-4,\ f(4)=-2$

일 때, 방정식 $f(x)-2x=0$은 구간 $(0,\ 4)$에서 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구하여라.

# 중단원 연습 문제

## STEP 1 유형 Training

**01** 다음 함수 중 $x=0$에서 연속인 것은? (단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $f(x)=\frac{1}{x}$

② $f(x)=[x]-1$

③ $f(x)=\begin{cases} x+2 & (x\geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$

④ $f(x)=\begin{cases} \frac{x^3+x}{x} & (x\neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$

⑤ $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+3x}{x^2-x} & (x\neq 0) \\ 3 & (x=0) \end{cases}$

**02** 함수 $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+x+a}{x-2} & (x\neq 2) \\ b & (x=2) \end{cases}$가 $x=2$에서 연속일 때, 상수 $a$, $b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

**03** 모든 실수 $x$에 대하여

$$(x-3)f(x)=x^2+ax-3$$

을 만족시키는 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(3)$의 값을 구하여라. (단, $a$는 상수이다.)

## STEP 2 실전 Application

서술형

**04** 열린 구간 $(-1, 0)$과 열린 구간 $(0, 1)$에서는 $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$로 정의되고, $x=0$에서는 $f(x)=a$로 정의된 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속일 때, 상수 $a$의 값을 구하여라.

평가원기출

**05** 함수 $f(x)=x^2-x+a$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x+1) & (x\le 0) \\ f(x-1) & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $y=\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속일 때, 상수 $a$의 값은?

① $-2$　② $-1$　③ $0$　④ $1$　⑤ $2$

평가원기출

**06** 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x\le 1) \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^{n+1}+3x^n}{x^n+1} & (x>1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 $a$의 값은?

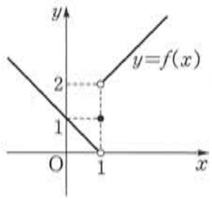
① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

서술형

**07** 열린 구간 $(0,\ 2)$에서 정의된 함수 $f(x)=[x^2]$이 불연속이 되는 $x$의 값의 개수를 구하여라. (단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

**08** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 삼차함수 $g(x)=x^3+ax^2+bx$에 대하여 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이다. 이때 $g(3)$의 값을 구하여라.

(단, $a$, $b$는 상수이다.)




**09** 연속함수 $f(x)$가

$$f(1)=3,\ f(3)=-a^2+3a+10,\ f(4)=7$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$이 열린 구간 $(1,\ 3)$, $(3,\ 4)$에서 각각 중근이 아닌 오직 하나의 실근을 가질 때, 상수 $a$의 값의 범위를 구하여라.

STEP 3 심화 Forwarding

서술형

**10** 모든 실수 $x$에 대하여 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $f(x)=\begin{cases} 4x+a & (0\le x\le 1) \\ b(x-1)^2+6 & (1<x\le 3) \end{cases}$

(나) 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)=f(x+3)$

이때 $f(-4)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하여라. (단, $a$, $b$는 상수이다.)

수능기출

**11** 함수 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\le 0) \\ -\frac{1}{2}x+7 & (x>0) \end{cases}$에 대하여 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 $a$의 값의 합을 구하여라.

**12** 모든 실수 $x$에 대하여 정의된 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}+5x^2-1}{x^{2n}+4}$에 대하여 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

**보기**

ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y$축에 대하여 대칭이다.

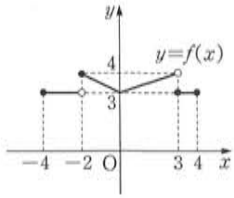
ㄴ. 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\frac{1}{4}$이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 모든 실수 $x$에 대하여 연속이다.

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

서술형

**13** 닫힌 구간 $[-4,\ 4]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 함수 $g(x)=x^2+ax+b$에 대하여 $h(x)=f(x)g(x)$라 하자. 함수 $h(x)$가 닫힌 구간 $[-4,\ 4]$에서 연속이 되도록 하는 상수 $a$, $b$에 대하여 $a^2+b^2$의 값을 구하여라.



# Ⅲ 다항함수의 미분법

# 05

# 미분계수와 도함수

자동차의 속도, 주가지수, 기온 등 우리 주변의 모든 것들은 나름의 질서와 규칙에 따라 변하고 있는데 이러한 변화를 분석하고 설명하는 분야가 바로 미분이다. 따라서 미분은 자연과학뿐만 아니라 경제, 경영 등 사회과학에 이르기까지 학문의 전 분야에 걸쳐 중요하게 사용되고 있다. 미분은 17세기 뉴턴과 라이프니츠에 의하여 각각 독립적으로 그 개념이 정립되었는데, 뉴턴이 물리학을 연구하기 위한 수단으로 역학적인 관점에서 미분을 연구하였다면 라이프니츠는 곡선에 접선을 긋는 기하학적인 관점에서 미분을 연구하였다.

이 단원에서는 앞에서 배운 극한과 연속의 개념을 바탕으로 미분계수에 대하여 공부하고, 정의역의 원소에 미분계수를 대응시킨 새로운 함수인 도함수에 대하여 알아보자.

## 한눈에 보는 개념&유형 map

### 소단원 & 학습목표

**12 미분계수**

- 미분계수의 뜻을 알고, 그 기하학적 의미를 이해한다.
- 미분계수를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

**13 미분가능성과 연속성**

- 미분가능의 뜻을 알고, 미분가능성과 연속성 사이의 관계를 이해한다.

**14 도함수**

- 도함수의 뜻을 알고, 여러 가지 함수의 도함수를 구할 수 있다.

| 개념 & 특강 | 대표유형 & 유제 |
|---|---|
| 036 평균변화율<br>037 미분계수 | 039 평균변화율과 미분계수 |
| 038 미분계수의 기하학적 의미 | |
| 특강 039 미분계수를 이용한 극한값의 계산 | 040 미분계수를 이용한 극한값의 계산 (1) — 041 미분계수를 이용한 극한값의 계산 (2) — 042 관계식이 주어진 함수의 미분계수 |
| 040 미분가능<br>041 미분가능성과 연속성 | 043 미분가능성과 연속성 |
| 특강 042 함수가 미분가능하지 않은 경우 | |
| 043 도함수 | |
| 044 함수 $y=x^n$과 상수함수의 도함수<br>045 함수의 실수배, 합, 차의 미분법<br>046 함수의 곱의 미분법<br>047 함수 $y=\{f(x)\}^n$의 도함수 | 044 미분법 — 045 미분계수를 이용한 극한값의 계산 (3) — 046 미분가능한 함수의 미정계수 구하기<br>048 미분과 다항식의 나눗셈 — 047 미분의 항등식에의 활용 |

개념 036

# 평균변화율

## 1 증분

함수 $y=f(x)$에서 $x$의 값이 $a$에서 $b$까지 변할 때, 함숫값은 $f(a)$에서 $f(b)$까지 변한다. 이때

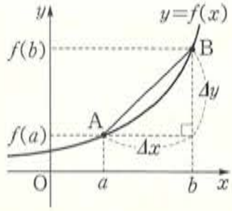
$x$의 값의 변화량 $b-a$를 $x$의 **증분**,

$y$의 값의 변화량 $f(b)-f(a)$를 $y$의 **증분**

이라 하고, 이것을 기호로 각각 $\Delta x$, $\Delta y$와 같이 나타낸다. 즉

$\Delta x=b-a$,

$\Delta y=f(b)-f(a)=f(a+\Delta x)-f(a)$




**Remark** $\Delta$는 차를 뜻하는 Difference의 첫 글자 D에 해당하는 그리스 문자로 '델타(delta)'라 읽는다.

## 2 평균변화율

함수 $y=f(x)$에서 $x$의 값이 $a$에서 $b$까지 변할 때, $x$의 증분 $\Delta x$에 대한 $y$의 증분 $\Delta y$의 비는 다음과 같다.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이를 $x$의 값이 $a$에서 $b$까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 **평균변화율**이라 한다.

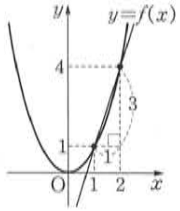
**Remark** 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$, $\mathrm{B}(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

### 개념 Approach

함수 $f(x)=x^2$에서 $x$의 값이 1에서 2까지 변할 때, $y$의 값은 1에서 4까지 변한다. 이때 $x$의 증분과 $y$의 증분은 각각

$\Delta x=2-1=1$, $\Delta y=4-1=3$

이므로 평균변화율은 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3}{1}=3$이다.




또 두 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ 4)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{4-1}{2-1}=\frac{3}{1}=3$이므로 $x$의 값이 1에서 2까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율과 같음을 알 수 있다.

### 개념 Check

함수 $f(x)=-2x+1$에서 $x$의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율을 구하여라.

풀이 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{-7-(-3)}{4-2}=\frac{-4}{2}=-2$

답 $-2$

개념 037

## 미분계수



함수 $y=f(x)$에서 $x$의 값이 $a$에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이다. 여기서 $\Delta x \longrightarrow 0$일 때, 이 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 **순간변화율** 또는 **미분계수**라 하고, 이것을 기호로 $\boldsymbol{f'(a)}$와 같이 나타낸다.

**Remark** 미분계수 $f'(a)$는 '$f$ 프라임(prime) $a$'라 읽는다.

### 개념 Approach

미분계수 $f'(a)$에서 $a+\Delta x=x$로 놓으면 $\Delta x=x-a$이고, $\Delta x \longrightarrow 0$일 때 $x \longrightarrow a$이므로

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

와 같이 나타낼 수도 있다.

예를 들어 함수 $f(x)=x^2$의 $x=2$에서의 미분계수를 다음 두 가지 방법으로 구해 보자.

방법 1 $f'(2)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{(\Delta x)^2+4\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}(\Delta x+4)=4$

방법 2 $f'(2)=\lim_{x \to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x \to 2}\frac{x^2-2^2}{x-2}$

$=\lim_{x \to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x \to 2}(x+2)=4$

**Remark** $f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$에서 $\Delta x$ 대신 $h$를 써서 $f'(a)=\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$와 같이 나타내기도 한다.

### 개념 Check

다음 함수의 $x=1$에서의 미분계수를 구하여라.

(1) $f(x)=x-4$ (2) $f(x)=x^2+2x$

풀이 (1) $f'(1)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{(1+\Delta x-4)-(1-4)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$

(2) $f'(1)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\{(1+\Delta x)^2+2(1+\Delta x)\}-(1^2+2\cdot 1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{(\Delta x)^2+4\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}(\Delta x+4)=4$

답 (1) 1 (2) 4

## 대표유형 039 평균변화율과 미분계수

• 개념 036, 037

함수 $f(x)=x^2+mx+n$에 대하여 다음에 답하여라. (단, $m$, $n$은 상수이다.)

(1) $x$의 값이 $a$에서 $b$까지 변할 때, $f(x)$의 평균변화율을 구하여라.

(2) $x=c$에서의 미분계수와 (1)의 평균변화율이 같을 때, $c$를 $a$, $b$로 나타내어라.

**유형 Guide** 함수 $f(x)$에 대하여

(1) $x$의 값이 $a$에서 $b$까지 변할 때의 평균변화율은 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(2) $x=c$에서의 미분계수는 $f'(c)=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$

유형 SSEN • 평균변화율 ➡ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ • 미분계수 ➡ $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

**풀이** (1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$=\dfrac{(b^2+mb+n)-(a^2+ma+n)}{b-a}=\dfrac{(b^2-a^2)+m(b-a)}{b-a}$

$=\dfrac{(b+a)(b-a)+m(b-a)}{b-a}=a+b+m$

(2) $f'(c)=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\{(c+\Delta x)^2+m(c+\Delta x)+n\}-(c^2+mc+n)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{(\Delta x)^2+2c\Delta x+m\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x \to 0}(\Delta x+2c+m)$

$=2c+m$

따라서 $a+b+m=2c+m$이므로 $a+b=2c$ $\therefore c=\dfrac{a+b}{2}$

답 (1) $a+b+m$ (2) $c=\dfrac{a+b}{2}$

정답 및 풀이 • 40쪽

**유제 039-1** 함수 $f(x)=x^3-x$에 대하여 $x$의 값이 $a$에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율을 구하여라.

**유제 039-2** 함수 $f(x)=x^2-x+1$에 대하여 $x$의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율과 $x=a$에서의 미분계수가 같을 때, 상수 $a$의 값을 구하여라. (단, $1<a<3$)

## 개념 038 미분계수의 기하학적 의미



함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

### 개념 Approach

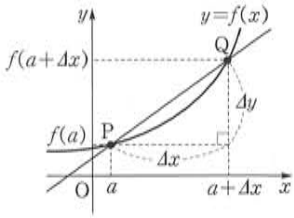
**개념 036**에서 함수 $y=f(x)$에서 $x$의 값이 $a$에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

는 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점

$$\mathrm{P}(a,\ f(a)),\ \mathrm{Q}(a+\Delta x,\ f(a+\Delta x))$$

를 지나는 직선 PQ의 기울기와 같음을 공부하였다.

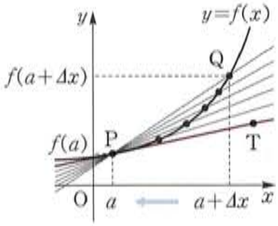



이제 평균변화율의 극한값, 즉 미분계수 $f'(a)$가 기하학적으로 어떤 의미가 있는지 알아보자.

$\Delta x \longrightarrow 0$이면 점 Q는 곡선 $y=f(x)$를 따라 점 P에 한없이 가까워지고, 직선 PQ는 오른쪽 그림과 같이 점 P를 지나는 일정한 직선 PT에 한없이 가까워진다.

즉 $\Delta x \longrightarrow 0$일 때 직선 PQ의 기울기의 극한값은 직선 PT의 기울기가 된다.

이때 이 직선 PT를 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선이라 하고, 점 P를 이 접선의 접점이라 한다.




따라서 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기를 나타낸다.

**Remark** 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta(0^\circ \le \theta < 90^\circ)$라 하면 $\quad f'(a)=\tan\theta$

### 개념 Check

곡선 $f(x)=x^2-2x$ 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 기울기를 구하여라.

**풀이** 점 $(2,\ 0)$에서의 곡선 $f(x)=x^2-2x$의 접선의 기울기는 $f'(2)$이므로

$$f'(2)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\{(2+\Delta x)^2-2(2+\Delta x)\}-(2^2-2\cdot 2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}(\Delta x+2)=2$$

답 2

특강 039

# 미분계수를 이용한 극한값의 계산

$\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값을 구할 때, 미분계수의 정의를 이용하면 간단히 해결되는 경우가 많다. 분모의 항의 개수에 따라 미분계수의 정의를 활용할 수 있는 식으로 변형하는 방법에 대하여 알아보자.

(1) 분모의 항이 1개인 경우 ➡ $f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ 꼴을 이용한다.

123쪽 • 대표유형 040

$\lim_{h \to 0}\frac{f(a+kh)-f(a)}{h}$ ($k$는 상수)를 변형해 보면

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(a+kh)-f(a)}{h}=\lim_{h \to 0}\frac{f(a+kh)-f(a)}{kh}\cdot k$$ ⬅ 분모, 분자에 $k$를 곱한다.

$$=\lim_{kh \to 0}\frac{f(a+kh)-f(a)}{kh}\cdot k$$ ⬅ $h \longrightarrow 0$일 때 $kh \longrightarrow 0$

$$=kf'(a)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

> $f'(a)=\lim_{\blacksquare \to 0}\frac{f(a+\blacksquare)-f(a)}{\blacksquare}$ 에서 $\blacksquare$가 모두 같아지도록 주어진 식을 변형한다.

(2) 분모의 항이 2개인 경우 ➡ $f'(a)=\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 꼴을 이용한다. 124쪽 • 대표유형 041

$\lim_{x \to a}\frac{f(x^2)-f(a^2)}{x-a}$ 을 변형해 보면

$$\lim_{x \to a}\frac{f(x^2)-f(a^2)}{x-a}=\lim_{x \to a}\frac{f(x^2)-f(a^2)}{(x-a)(x+a)}\cdot(x+a)$$ ⬅ 분모, 분자에 $x+a$를 곱한다.

$$=\lim_{x \to a}\frac{f(x^2)-f(a^2)}{x^2-a^2}\cdot\lim_{x \to a}(x+a)$$

$$=\lim_{x^2 \to a^2}\frac{f(x^2)-f(a^2)}{x^2-a^2}\cdot\lim_{x \to a}(x+a)$$ ⬅ $x \longrightarrow a$일 때 $x^2 \longrightarrow a^2$

$$=2af'(a^2)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

> $f'(\bullet)=\lim_{\blacktriangle \to \bullet}\frac{f(\blacktriangle)-f(\bullet)}{\blacktriangle-\bullet}$ 에서 $\blacktriangle$는 $\blacktriangle$끼리, $\bullet$는 $\bullet$끼리 서로 같아지도록 주어진 식을 변형한다.

## 대표유형 040 미분계수를 이용한 극한값의 계산 (1)

• 특강 039

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=1$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}$

(2) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h}$

(3) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a+2h)}{h}$

**유형 Guide** 미분계수를 이용하여 극한값을 구할 때, 분모의 항이 1개인 경우에는

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

임을 이용할 수 있도록 식을 변형한다. 이때 ■ 부분이 일치해야 함에 주의한다.

**유형 SSEN** **분모의 항이 1개인 경우 ➊ $\lim_{■\to 0}\frac{f(a+■)-f(a)}{■}$ 꼴로 변형한다.**

**풀이** (1) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\cdot(-1)$

$=f'(a)\cdot(-1)=1\cdot(-1)=-1$

(2) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}\cdot h=f'(a)\cdot 0=0$

(3) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a+2h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a)+f(a)-f(a+2h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{4h}\cdot 4-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot 2$

$=f'(a)\cdot 4-f'(a)\cdot 2$

$=2f'(a)=2\cdot 1=2$

**답** (1) $-1$ (2) $0$ (3) $2$

**Remark** (3)에서 미분계수의 정의에 따라 $\lim_{4h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{4h}=f'(a)$로 써야 하지만 $h\longrightarrow 0$이면 $4h\longrightarrow 0$이므로 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{4h}=f'(a)$로 쓰기도 한다.

정답 및 풀이 • 40쪽

**유제 040-1** 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=2$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}$

(2) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-2h)}{h}$

(3) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h^3)-f(a)}{h}$

(4) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a+h)}{2h}$

## 대표유형 041 미분계수를 이용한 극한값의 계산 (2)

• 특강 039

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)=2$, $f'(2)=4$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}$ (2) $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{f(x)-f(2)}$ (3) $\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-xf(2)}{x-2}$

**유형 Guide** 미분계수를 이용하여 극한값을 구할 때, 분모의 항이 2개인 경우에는

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

임을 이용할 수 있도록 식을 변형한다. 이때 ▲는 ▲끼리, ●는 ●끼리 일치해야 함에 주의한다.

(3) 다음과 같이 분자를 변형하여 두 개의 극한으로 분리한다.

$$af(x)-xf(a)=af(x)-af(a)+af(a)-xf(a)=a\{f(x)-f(a)\}-(x-a)f(a)$$

**유형 5SEN** 분모의 항이 2개인 경우 ○ $\lim_{▲\to●}\frac{f(▲)-f(●)}{▲-●}$ 꼴로 변형한다.

**풀이** (1) $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}=f'(2)\cdot\frac{1}{4}=4\cdot\frac{1}{4}=1$

(2) $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{f(x)-f(2)}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{f(x)-f(2)}\cdot(x^2+2x+4)$

$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}\cdot(x^2+2x+4)$

$=\frac{1}{f'(2)}\cdot12=\frac{1}{4}\cdot12=3$

(3) $\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-xf(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-2f(2)+2f(2)-xf(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{2\{f(x)-f(2)\}-(x-2)f(2)}{x-2}$

$=2\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to2}\frac{(x-2)f(2)}{x-2}$

$=2f'(2)-f(2)=2\cdot4-2=6$

답 (1) 1 (2) 3 (3) 6

**다른 풀이** (3) $\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-xf(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-xf(x)+xf(x)-xf(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{-(x-2)}{x-2}\cdot f(x)+\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot x$

$=-f(2)+2f'(2)=-2+2\cdot4=6$

정답 및 풀이 • 40쪽

**유제 041-1** 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=3$, $f'(1)=1$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}$ (2) $\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(x^2)}{x-1}$

## 대표유형 042 관계식이 주어진 함수의 미분계수

• 특강 039

미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$, $y$에 대하여

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-3xy$$

를 만족시키고 $f'(0)=2$일 때, $f'(2)$의 값을 구하여라.

**유형Guide** 관계식이 주어진 함수의 미분계수를 구할 때에는 미분계수의 정의

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

에서 분자가 주어진 관계식과 유사한 형태임에 주목한다. 즉 $f(a+h)$를 주어진 관계식을 이용하여 변형한 후 미분계수의 정의에 대입한다.

**유형 SSEN** 관계식이 주어진 함수의 미분계수 ○ 미분계수의 정의에 관계식을 적용한다.

**풀이** $f(x+y)=f(x)+f(y)-3xy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)-0 \qquad \therefore f(0)=0$$

따라서 $f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=2$이므로

$$\begin{aligned}f'(2)&=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)-6h-f(2)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-6h}{h}\\&=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}-6\right\}\\&=2-6=-4\end{aligned}$$

답 $-4$

정답 및 풀이 • 41쪽

**유제 042-1** 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$, $y$에 대하여

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy-2$$

를 만족시키고 $f'(0)=-1$일 때, $f'(3)$의 값을 구하여라.

**유제 042-2** 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$, $y$에 대하여

$$f(x)>0,\ f(x+y)=2f(x)f(y)$$

를 만족시키고 $f'(0)=4$일 때, $\frac{f'(x)}{f(x)}$의 값을 구하여라.

개념 040

# 미분가능

### 1 미분가능

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 존재할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능**하다고 한다.

**Remark** 미분계수 $f'(a)$가 존재하지 않을 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능하지 않다**고 한다.

### 2 미분가능한 함수

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 $x$의 값에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다.

**개념 Approach**

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능함을 보이려면 $x=a$에서의 미분계수, 즉

$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$가 존재함을 보이면 된다.

이때 극한값 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$가 존재하려면 우극한과 좌극한이 모두 존재하고, 그 값이 서로 같아야 하므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

임을 보이면 된다. 073쪽 • 개념 021

개념 SSEN: 미분계수 $f'(a)$가 존재 ⟶ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능

**개념 Check**

함수 $f(x)=x^3+1$의 $x=0$에서의 미분가능성을 조사하여라.

**풀이** $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h^3+1)-1}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h}=\lim_{h\to 0}h^2=0$

따라서 $f'(0)$이 존재하므로 주어진 함수는 $x=0$에서 미분가능하다.

답 미분가능하다.

## 개념 041 미분가능성과 연속성

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.
그러나 그 역은 성립하지 않는다.
즉 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이지만 $x=a$에서 미분가능하지 않을 수 있다.


### 개념 Approach

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $x=a$에서 연속인지 확인해 보자.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f'(a)=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}&=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right\}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)\\&=f'(a)\cdot 0=0\end{aligned}$$

즉 $\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=0$에서 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

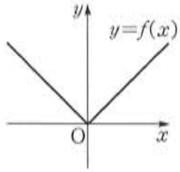
따라서 '어떤 함수가 미분가능하다.'라는 것은 '어떤 함수가 연속이다.'라는 것의 충분조건으로, 미분가능한 함수는 모두 연속임을 알 수 있다.

**개념 SSEN** 미분가능 $\underset{\times}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}}$ 연속

### 개념 Check

함수 $f(x)=|x|$의 $x=0$에서의 연속성과 미분가능성을 조사하여라.

**풀이** (i) $f(0)=0$, $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}|x|=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.




(ii) $$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\neq\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

즉 $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

답 연속이지만 미분가능하지 않다.

## 대표유형 043 미분가능성과 연속성

• 개념 040, 041

다음 함수의 $x=0$에서의 연속성과 미분가능성을 조사하여라.

(1) $f(x)=x|x|$　　　　(2) $f(x)=x^2-3|x|+2$

**유형Guide** 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이면 $x=a$에서 연속이고, 미분계수 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$가 존재하면 $x=a$에서 미분가능하다.

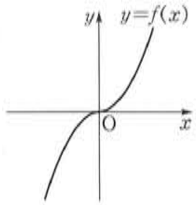
**유형 SSEN** $f(x)$의 $x=a$에서의 미분가능성과 연속성 ➡ $\lim_{x\to a}f(x)$, $f(a)$, $f'(a)$를 조사한다.

**풀이** (1) $f(x)=x|x|$에서

(i) $f(0)=0$, $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x|x|=0$이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.




(ii) $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0}|h|=0$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

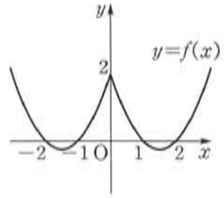
(i), (ii)에서 함수 $f(x)=x|x|$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

(2) $f(x)=x^2-3|x|+2$에서

(i) $f(0)=2$, $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(x^2-3|x|+2)=2$이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.




(ii) $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h^2-3|h|+2)-2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left(h-\frac{3|h|}{h}\right)$

그런데 $\lim_{h\to 0+}\left(h-\frac{3|h|}{h}\right)=\lim_{h\to 0+}\left(h-\frac{3h}{h}\right)=-3$,

$\lim_{h\to 0-}\left(h-\frac{3|h|}{h}\right)=\lim_{h\to 0-}\left(h+\frac{3h}{h}\right)=3$이므로 $\lim_{h\to 0}\left(h-\frac{3|h|}{h}\right)$는 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)=x^2-3|x|+2$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

답 풀이 참조

정답 및 풀이 • 41쪽

**유제 043-1** 다음 함수의 $x=1$에서의 연속성과 미분가능성을 조사하여라.

(1) $f(x)=x|x-1|$　　　　(2) $f(x)=\begin{cases}2x^2-x & (x\ge 1)\\ 3x-2 & (x<1)\end{cases}$

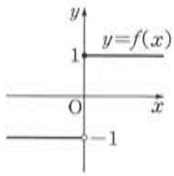
## 특강 042 함수가 미분가능하지 않은 경우

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 경우에 대하여 살펴보자.

(1) $x=a$에서 불연속인 경우

'함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $x=a$에서 연속이다.'는 참인 명제이다. 따라서 이 명제의 대우인 '함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이면 $x=a$에서 미분가능하지 않다.' 도 참이다.

예를 들어 함수 $f(x)=\begin{cases} 1 & (x\geq 0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $f(x)$가 $x=0$에서 불연속이므로 $x=0$에서 미분가능하지 않음을 알 수 있다.




(2) $x=a$에서 연속이지만 그래프가 $x=a$에서 꺾이는 경우

예를 들어 함수 $f(x)=|x^2-1|$에서

(i) $f(1)=0$, $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1} |x^2-1|=0$이므로

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $$\lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+} \frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1+} (x+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-} \frac{-(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-} \{-(x+1)\}=-2$$

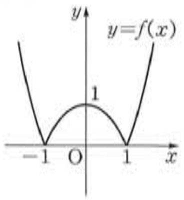
$$\therefore \lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

따라서 함수 $f(x)=|x^2-1|$은 $x=1$에서 미분계수가 존재하지 않으므로 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

같은 방법으로 하면 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서도 연속이지만 미분가능하지 않음을 알 수 있다. 이때 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보면 오른쪽 그림과 같이 $x=-1$과 $x=1$에서 꺾이는 모양이다.

일반적으로 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이지만 $x=a$에서 미분가능하지 않으면 그래프가 $x=a$에서 꺾이는 모양이다.



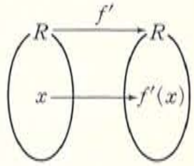

**개념 SSEN**

미분가능한 점 → 매끄럽게 연결된 점

미분가능하지 않은 점 → 불연속인 점
미분가능하지 않은 점 → 꺾이는 점

## 개념 043 도함수

(1) 도함수




미분가능한 함수 $y=f(x)$의 정의역의 각 원소 $x$에 미분계수 $f'(x)$를 대응시켜 만든 새로운 함수를 함수 $y=f(x)$의 **도함수**라 하고, 이것을 기호로 $f'(x)$, $y'$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d}{dx}f(x)$와 같이 나타낸다. 즉

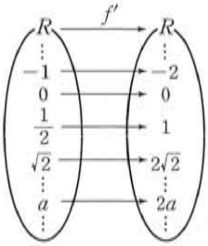
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad \cdots\cdots ㉠$$

(2) 함수 $f(x)$에서 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 $f(x)$를 $x$에 대하여 **미분한다**고 하고, 그 계산법을 **미분법**이라 한다.

**Remark**
- $\dfrac{dy}{dx}$는 $dy$를 $dx$로 나눈다는 뜻이 아니라 $y$를 $x$에 대하여 미분한다는 것을 나타내는 기호이며, '디와이$(dy)$ 디엑스$(dx)$'라 읽는다.
- ㉠에서 $\Delta x=h$라 하면 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$이다.
- $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 도함수 $f'(x)$의 식에 $x=a$를 대입한 값이다.

### 개념 Approach

함수 $f(x)=x^2$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는




$$\begin{aligned} f'(a)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a+\Delta x)^2-a^2}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}(2a+\Delta x)=2a \end{aligned}$$

이므로 함수 $f(x)$의 $x=-1,\ 0,\ \dfrac{1}{2},\ \sqrt{2}$에서의 미분계수는

$$f'(-1)=-2,\ f'(0)=0,\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=1,\ f'(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$$

이다. 이와 같이 $f(x)=x^2$의 정의역의 각 원소 $x$에 대하여 $x \longrightarrow 2x$로 대응시키는 새로운 함수 $f'(x)=2x$가 $f(x)$의 도함수이다.

**개념 SSEN** 함수 $f(x)$ $\xrightarrow{\text{미분}}$ 도함수 $f'(x)$

### 개념 Check

함수 $f(x)=2x-1$의 도함수를 구하고, $x=3$에서의 미분계수를 구하여라.

**풀이** $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{2(x+\Delta x)-1\}-(2x-1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\Delta x}{\Delta x}=2$

$\therefore f'(3)=2$

답 $f'(x)=2$, $f'(3)=2$

## 개념 044 함수 $y=x^n$과 상수함수의 도함수

함수 $y=x^n$ ($n$은 자연수)과 상수함수의 도함수는 다음과 같다.

① $y=x^n$ ($n$은 자연수)이면 $\quad$ $\boldsymbol{y'=nx^{n-1}}$

② $y=c$ ($c$는 상수)이면 $\quad$ $y'=0$

**개념 Approach**

도함수의 정의를 이용하여 위의 공식을 증명해 보자.

① $f(x)=x^n$ ($n$은 자연수)이라 하면

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)-x\}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\}\\
&=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}}_{n\text{개}}=nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

$\boxed{a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})}$

② $f(x)=c$ ($c$는 상수)라 하면

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=0$$

위의 공식을 익혀 두면 정의를 이용하는 것보다 편리하게 도함수를 구할 수 있다.

**Remark** 직선 $f(x)=c$ ($c$는 상수) 위의 임의의 점에서의 접선의 기울기는 항상 0이다.
따라서 함수 $f(x)=c$의 도함수는 $f'(x)=0$이다.

개념 SSEN

그대로

$y=x^n$ $\xrightarrow{x\text{에 대하여 미분}}$ $y'=nx^{n-1}$

1만큼 작게

**개념 Check**

다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=-2$ $\qquad$ (2) $y=x^8$ $\qquad$ (3) $y=x^{20}$

**풀이** (1) $-2$는 상수이므로 $\quad y'=(-2)'=0$

(2) $y'=(x^8)'=8x^{8-1}=8x^7$

(3) $y'=(x^{20})'=20x^{20-1}=20x^{19}$

**답** (1) $y'=0$ (2) $y'=8x^7$ (3) $y'=20x^{19}$

개념 045

## 함수의 실수배, 합, 차의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 다음이 성립한다.

① $y=cf(x)$ ($c$는 실수)이면 $y'=cf'(x)$
② $y=f(x)+g(x)$이면 $y'=f'(x)+g'(x)$
③ $y=f(x)-g(x)$이면 $y'=f'(x)-g'(x)$

**Remark** ②, ③은 세 개 이상의 함수에 대해서도 성립한다.

### 개념 Approach

도함수의 정의를 이용하여 위의 성질을 증명해 보자.

① 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 함수 $y=cf(x)$ ($c$는 실수)의 도함수는

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c\{f(x+h)-f(x)\}}{h} \\ &= c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

② 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 함수 $y=f(x)+g(x)$의 도함수는

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}+\{g(x+h)-g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x)+g'(x) \end{aligned}$$

③ ②와 같은 방법으로 하면 함수 $y=f(x)-g(x)$의 도함수는

$$y'=f'(x)-g'(x)$$

### 개념 Check

다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\frac{1}{2}x-3$   (2) $y=x^2-2x+5$

**풀이** (1) $y'=\left(\frac{1}{2}x\right)'-(3)'=\frac{1}{2}(x)'-(3)'=\frac{1}{2}\cdot 1-0=\frac{1}{2}$

(2) $y'=(x^2)'-(2x)'+(5)'=(x^2)'-2(x)'+(5)'=2x-2\cdot 1+0=2x-2$

답 (1) $y'=\frac{1}{2}$ (2) $y'=2x-2$

개념 046

## 함수의 곱의 미분법

세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 미분가능할 때, 다음이 성립한다.

① $y=f(x)g(x)$이면

$$\boldsymbol{y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$$

② $y=f(x)g(x)h(x)$이면

$$y'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$



**개념 Approach**

함수의 곱의 미분법을 이용하면 곱의 꼴로 나타낸 함수를 전개하지 않고 미분할 수 있다.
도함수의 정의를 이용하여 위의 공식을 증명해 보자.

① 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 함수 $y=f(x)g(x)$의 도함수는

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(x+h)+f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \end{aligned}$$

⬅ 함수 $g(x)$가 미분가능하면 연속이므로 $\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$

② 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 미분가능할 때, 함수 $y=f(x)g(x)h(x)$의 도함수는

$$\begin{aligned} y' &= \{f(x)g(x)h(x)\}' \\ &= [\{f(x)g(x)\}h(x)]' \\ &= \{f(x)g(x)\}'h(x)+\{f(x)g(x)\}h'(x) \\ &= \{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}h(x)+f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x) \end{aligned}$$

①의 방법을 이용한다.

**개념 Check**

함수 $y=(x+1)(2x^2+1)$을 미분하여라.

**풀이**

$$\begin{aligned} y' &= (x+1)'(2x^2+1)+(x+1)(2x^2+1)' \\ &= 1\cdot(2x^2+1)+(x+1)\cdot 4x \\ &= 2x^2+1+4x^2+4x=6x^2+4x+1 \end{aligned}$$

답 $y'=6x^2+4x+1$

개념 047

## 함수 $y=\{f(x)\}^n$의 도함수

함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 다음이 성립한다.

$y=\{f(x)\}^n$ ($n$은 자연수)이면　　$y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

**개념 Approach**

**개념 044**에서 $n$이 자연수일 때, $y=x^n$의 도함수는 $y'=nx^{n-1}$임을 배웠다.
이제 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, $y=\{f(x)\}^n$ ($n$은 자연수)의 도함수를 구해 보자.
예를 들어 $n=2$이면 $y=\{f(x)\}^2$에서

$$y'=\{f(x)f(x)\}'=f'(x)f(x)+f(x)f'(x)=2f(x)f'(x)$$

$n=3$이면 $y=\{f(x)\}^3$에서

$$\begin{aligned} y'&=\{f(x)f(x)f(x)\}'=f'(x)f(x)f(x)+f(x)f'(x)f(x)+f(x)f(x)f'(x)\\ &=3\{f(x)\}^2f'(x)\end{aligned}$$

같은 방법으로 하면

$n=4$이면 $y=\{f(x)\}^4$에서　　$y'=4\{f(x)\}^3f'(x)$

$n=5$이면 $y=\{f(x)\}^5$에서　　$y'=5\{f(x)\}^4f'(x)$

⋮

임을 알 수 있다.
따라서 $y=\{f(x)\}^n$ ($n$은 자연수)이면 $y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$가 성립한다.

**Remark** 수학적 귀납법을 이용한 증명

$y=\{f(x)\}^n$ ($n$은 자연수)에 대하여

$y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$　　…… ㉠

(i) $n=1$일 때,　$y'=f'(x)$

따라서 $n=1$일 때 등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면　$y'=k\{f(x)\}^{k-1}f'(x)$

$n=k+1$일 때,　$y=\{f(x)\}^{k+1}=\{f(x)\}^kf(x)$

$$\begin{aligned} y'&=[\{f(x)\}^k]'f(x)+\{f(x)\}^kf'(x)\\ &=k\{f(x)\}^{k-1}f'(x)f(x)+\{f(x)\}^kf'(x)\\ &=k\{f(x)\}^kf'(x)+\{f(x)\}^kf'(x)\\ &=(k+1)\{f(x)\}^kf'(x)\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 $n$에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

개념 SSEN

$y=\{f(x)\}^n \xrightarrow{x\text{에 대하여 미분}} y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

미분

## 대표유형 044 미분법

• 개념 044~047

다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+1$　　(2) $y=(4x^3-x)(x^2+x)$

(3) $y=(x^2+1)(x-2)(2x+3)$　　(4) $y=(x^2-3)^3$

**유형 Guide** 함수의 곱의 미분은 함수의 식을 전개하여 계산하는 것보다 함수의 곱의 미분법

$y=f(x)g(x) \Rightarrow y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

를 이용하는 것이 편리하다. 또 다항함수의 거듭제곱의 미분은

$y=\{f(x)\}^n$ ($n$은 자연수) $\Rightarrow y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

임을 이용하면 편리하다.

**유형 SSEN** 다항함수의 도함수 ⊙ 미분법의 공식을 이용한다.

**풀이** (1) $y'=x^3-x^2+x-1$

(2) $y'=(4x^3-x)'(x^2+x)+(4x^3-x)(x^2+x)'$
$=(12x^2-1)(x^2+x)+(4x^3-x)(2x+1)$
$=(12x^4+12x^3-x^2-x)+(8x^4+4x^3-2x^2-x)$
$=20x^4+16x^3-3x^2-2x$

(3) $y'=(x^2+1)'(x-2)(2x+3)+(x^2+1)(x-2)'(2x+3)+(x^2+1)(x-2)(2x+3)'$
$=2x(x-2)(2x+3)+(x^2+1)\cdot1\cdot(2x+3)+(x^2+1)(x-2)\cdot2$
$=(4x^3-2x^2-12x)+(2x^3+3x^2+2x+3)+(2x^3-4x^2+2x-4)$
$=8x^3-3x^2-8x-1$

(4) $y'=3(x^2-3)^2(x^2-3)'=3(x^2-3)^2\cdot2x=6x(x^2-3)^2$

답 풀이 참조

**Remark** (4)에서 $y=(x^2-3)^3$의 도함수를 $y'=3(x^2-3)^2$과 같이 구하지 않도록 주의한다.

정답 및 풀이 • 42쪽

**유제 044-1** 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=(x^2+3)(x^2-1)$　　(2) $y=(x^2-1)(2x+1)(3x^2-1)$

(3) $y=(x^2-x+1)^3$　　(4) $y=(x+1)^3(x^2+1)^2$

## 대표유형 045 미분계수를 이용한 극한값의 계산 (3)

• 특강 039, 개념 044~047

다음에 답하여라.

(1) $f(x)=x^3-2x^2+3x-4$일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$의 값을 구하여라.

(2) $\lim_{x\to 1}\frac{x^9+x^8+x^7+\cdots+x-9}{x-1}$의 값을 구하여라.

**유형Guide** $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한에서 분모, 분자를 약분하여 식을 간단히 할 수 없는 경우에는 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 계산한다.

(1) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$임을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

(2) $f(x)=x^9+x^8+x^7+\cdots+x$로 놓으면 $f(1)=9$이므로 주어진 식을 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$로 변형한다.

**유형 SSEN** 복잡한 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한 ○ 미분계수의 정의를 이용한다.

**풀이** (1) 
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\\&=f'(1)+f'(1)=2f'(1)\end{aligned}$$

$f(x)=x^3-2x^2+3x-4$에서 $f'(x)=3x^2-4x+3$이므로 $f'(1)=2$

따라서 구하는 값은 $2\cdot 2=4$

(2) $f(x)=x^9+x^8+x^7+\cdots+x$로 놓으면 $f(1)=9$이므로

$$(\text{주어진 식})=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

그런데 $f'(x)=9x^8+8x^7+7x^6+\cdots+1$이므로

$$f'(1)=9+8+7+\cdots+1=\frac{9\cdot 10}{2}=45$$

따라서 구하는 값은 45이다.

답 (1) 4 (2) 45

정답 및 풀이 • 42쪽

**유제 045-1** $f(x)=(x-1)^3$일 때, $\lim_{x\to 3}\frac{3f(x)-xf(3)}{x-3}$의 값을 구하여라.

**Plus 유제 045-2** $\lim_{x\to 1}\frac{x^n+x^2+x-3}{x-1}=10$일 때, 자연수 $n$의 값을 구하여라.

## 대표유형 046 미분가능한 함수의 미정계수 구하기

• 개념 041, 044~047

함수 $f(x)=\begin{cases} ax+3 & (x\geq 1) \\ x^2+b & (x<1) \end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 $a$, $b$의 값을 구하여라.

**유형 Guide** 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(i) $x=a$에서 연속이므로 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

(ii) 미분계수 $f'(a)$가 존재하므로 $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

**유형 SSEN** 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 ⇨ $x=a$에서 연속이고 미분계수가 존재한다.

**풀이** $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 1}(x^2+b)=f(1)$

$1+b=a+3$ $\quad \therefore b-a=2$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

또 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{ax+3-(a+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{a(x-1)}{x-1}=a,$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{x^2+b-(a+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1-}(x+1)=2$$

$x^2+b-(a+3)=x^2+b-a-3$
$=x^2-1$ ($\because$ ㉠)
$=(x+1)(x-1)$

에서 $\quad a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=4$

답 $a=2$, $b=4$

**다른 풀이** $f_1(x)=ax+3\ (x\geq 1)$, $f_2(x)=x^2+b\ (x<1)$로 놓으면

$f_1'(x)=a\ (x>1)$, $f_2'(x)=2x\ (x<1)$

$f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $\quad f_1(1)=f_2(1)$

$\therefore a+3=1+b$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

또 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로 $\quad f_1'(1)=f_2'(1)$ $\quad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=4$

정답 및 풀이 • 42쪽

**유제 046-1** 함수 $f(x)=\begin{cases} ax^2 & (x\geq 2) \\ 4x+b & (x<2) \end{cases}$가 $x=2$에서 미분가능할 때, 상수 $a$, $b$의 값을 구하여라.

**유제 046-2** 함수 $f(x)=\begin{cases} ax^2-4x+3 & (x\geq 1) \\ x^3-2x^2+bx & (x<1) \end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 $a$, $b$의 값을 구하여라.

## 대표유형 047 미분의 항등식에의 활용

• 개념 044~047

함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 임의의 실수 $x$에 대하여

$$(1+2x)f(x)-x^2f'(x)-1=0$$

을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값을 구하여라. (단, $a$, $b$, $c$는 상수이다.)

**유형 Guide** $f'(x)$를 구하여 $f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입한 후 항등식의 성질을 이용한다.

① $ax^2+bx+c=0$이 $x$에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow a=0,\ b=0,\ c=0$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 $x$에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow a=a',\ b=b',\ c=c'$

**유형 SSEN** 임의의 실수 $x$에 대하여 등식이 성립하면 ○ 항등식의 성질을 이용한다.

**풀이** $f(x)=ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=2ax+b$이므로 $f(x)$, $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$$(1+2x)(ax^2+bx+c)-x^2(2ax+b)-1=0$$

$$\therefore (a+b)x^2+(b+2c)x+c-1=0$$

이 등식이 임의의 실수 $x$에 대하여 성립하므로

$$a+b=0,\ b+2c=0,\ c-1=0$$

위의 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-2,\ c=1$

따라서 $f'(x)=4x-2$이므로 $f'(2)=6$

답 6

**다른 풀이** $f(x)=ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=2ax+b$

이때 주어진 등식이 $x$에 대한 항등식이므로 $x=0$, $x=1$, $x=-1$을 등식에 각각 대입하면

$(1+2\cdot0)f(0)-0^2\cdot f'(0)-1=0,\quad f(0)-1=0$

$c-1=0\quad \therefore c=1\quad \cdots\cdots$ ㉠

$(1+2\cdot1)f(1)-1^2\cdot f'(1)-1=0,\quad 3f(1)-f'(1)-1=0$

$3(a+b+c)-(2a+b)-1=0$

$\therefore a+2b+3c-1=0\quad \cdots\cdots$ ㉡

$\{1+2\cdot(-1)\}f(-1)-(-1)^2\cdot f'(-1)-1=0,\quad -f(-1)-f'(-1)-1=0$

$-(a-b+c)-(-2a+b)-1=0$

$\therefore a-c-1=0\quad \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-2,\ c=1$

**Remark** $f(x)$가 $n$차식이면 $f'(x)$는 $(n-1)$차식이다. (단, $n$은 $n\geq2$인 자연수이다.)

정답 및 풀이 • 43쪽

**유제 047-1** 다항함수 $f(x)$가 임의의 실수 $x$에 대하여

$$f'(x)f(x)=f'(x)+f(x)+2x^3-4x^2+2x-1$$

을 만족시킬 때, $f(x)$를 구하여라.

## 대표유형 048 미분과 다항식의 나눗셈

• 개념 044~047

다음에 답하여라.

(1) $x$에 대한 다항식 $f(x)=x^{10}-ax+b$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어질 때, 상수 $a$, $b$의 값을 구하여라.

(2) $x$에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 $f(a)$, $f'(a)$로 나타내어라.

**유형 Guide** 다항식 $f(x)$가 $(x-\alpha)^2$으로 나누어떨어질 때, 몫을 $g(x)$라 하면

$f(x)=(x-\alpha)^2g(x)$ …… ㉠

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-\alpha)g(x)+(x-\alpha)^2g'(x)$ …… ㉡

이므로 $x=\alpha$를 ㉠, ㉡에 대입하면 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$임을 이용한다.

**유형 SSEN** **다항식 $f(x)$가 $(x-\alpha)^2$으로 나누어떨어지면 ➡ $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$**

**풀이** (1) 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $g(x)$라 하면

$x^{10}-ax+b=(x-1)^2g(x)$ …… ㉠

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$10x^9-a=2(x-1)g(x)+(x-1)^2g'(x)$ …… ㉡

$x=1$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면 $1-a+b=0$, $10-a=0$

위의 식을 연립하여 풀면 $a=10$, $b=9$

(2) 다항식 $f(x)$를 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $g(x)$, 나머지를 $mx+n$ ($m$, $n$은 상수)이라 하면

$f(x)=(x-a)^2g(x)+mx+n$ …… ㉠

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2g'(x)+m$ …… ㉡

$x=a$를 ㉠, ㉡에 각각 대입하면 $f(a)=ma+n$, $f'(a)=m$

$\therefore n=f(a)-ma=f(a)-af'(a)$

따라서 구하는 나머지는 $f'(a)x+f(a)-af'(a)$

> 나누는 식이 이차식이므로 나머지는 일차 이하의 다항식이다.

답 (1) $a=10$, $b=9$ (2) $f'(a)x+f(a)-af'(a)$

정답 및 풀이 • 43쪽

**유제 048-1** $x$에 대한 다항식 $f(x)=x^4-4x+a$가 $(x-b)^2$으로 나누어떨어질 때, 실수 $a$, $b$의 값을 구하여라.

**유제 048-2** 다항식 $x^9-1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

# 중단원 연습 문제

STEP 1 유형 Training

**01** 함수 $f(x)=-2x^2+1$에 대하여 $x$의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 $x=c$ $(2<c<4)$에서의 미분계수가 같을 때, 상수 $c$의 값을 구하여라.

**02** 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=-1$일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a+h)}{2h}$의 값을 구하여라.

**03** 다음 중 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는?

(단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $f(x)=x^3$　② $f(x)=\sqrt{x^2}$　③ $f(x)=|x|^2$

④ $f(x)=\frac{|x|}{x}$　⑤ $f(x)=[x]$

**04** 함수 $f(x)=(1-2x)(x^2-x)^2$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하여라.

서술형

**05** 함수 $f(x)=x^4-3x^2+2$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(2)\}^2}{x-2}$의 값을 구하여라.

수능기출

**06** 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+ax & (x<1) \\ bx^2+x+1 & (x\ge 1) \end{cases}$ 이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은?

(단, $a$, $b$는 상수이다.)

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

STEP 2 실전 Application

**07** 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$f'(1)=2,\ g(1)=g'(1)=-2$$

일 때, $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1-3h)-g(1+h)-2}{h}$의 값을 구하여라.

평가원기출

**08** 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-2}{x^2-1}=3$일 때, $\frac{f'(1)}{f(1)}$의 값은?

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

**09** 미분가능한 함수 $f(x)$가 임의의 실수 $x$, $y$에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$를 만족시키고 $f'(0)=1$일 때, $f'(1)$의 값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

**10** 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 $f(1)=-2$, $f'(1)=1$, $f'(2)=5$를 만족시킬 때, 상수 $a$, $b$, $c$에 대하여 $abc$의 값을 구하여라.

서술형

**11** 함수 $f(x)=x^3-4x+2$의 그래프 위에 $f(x)$의 미분계수가 $-1$인 점이 2개 있을 때, 이 두 점 사이의 거리를 구하여라.

서술형

**12** 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-2}{x-3}=1$, $\lim_{x \to 3} \frac{g(x)-1}{x-3}=2$를 만족시킬 때, 함수 $y=f(x)g(x)$의 $x=3$에서의 미분계수를 구하여라.

서술형

**13** $f(1)=1$이고, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+2h)-f(1)}{h}=-2$를 만족시키는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $g(x)=(3x+1)^2 f(x)$일 때, $g'(1)$의 값을 구하여라.

**14** 함수 $f(x)=\dfrac{1}{5}x^3$에 대하여 $\lim\limits_{n \to \infty} 5n\left\{f\left(\dfrac{n+2}{n}\right)-f\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\right\}$의 값을 구하여라.

**15** 함수 $f(x)=\begin{cases} 1 & (x \leq 0) \\ (x-1)^2 & (0<x<2) \\ 3-x & (x \geq 2) \end{cases}$ 에 대하여 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 골라라.

**보 기**

ㄱ. $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

ㄴ. $xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $(x-2)f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

**16** 다항함수 $f(x)=x^2+ax+b$가 임의의 실수 $x$에 대하여 $(x+1)f'(x)-2f(x)-4=0$을 만족시킬 때, 상수 $a$, $b$에 대하여 $ab$의 값은?

① $-4$　② $-2$　③ $0$　④ $2$　⑤ $4$

서술형

**17** $x^6$을 $x(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(3)$의 값을 구하여라.

STEP 3 심화 Forwarding

서술형

**18** 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1-2h)+3}{h}=a$를 만족시키고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, b)$에서 이 곡선에 접하는 직선이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta$라 하면 $\tan\theta=7$이다. 이때 상수 $a$, $b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라. (단, $0° \le \theta < 90°$)

수능기출

**19** 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $-1 \le x < 1$일 때, $g(x)=f(x)$이다.
> (나) 모든 실수 $x$에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

> **보 기**
> ㄱ. $f(-1)=f(1)$이고, $f'(-1)=f'(1)$이면 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $f'(0)f'(1)<0$이다.
> ㄷ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f'(1)>0$이면 구간 $(-\infty, -1)$에 $f'(c)=0$인 $c$가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

평가원기출

**20** 최고차항의 계수가 1이 아닌 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f'(1)$의 값을 구하여라.

> (가) $\lim_{x \to \infty} \frac{\{f(x)\}^2-f(x^2)}{x^3 f(x)}=4$ (나) $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{x}=4$

# 06

# 도함수의 활용 (1)

지구에서 출발한 우주 탐사선은 지구의 인력에서 벗어나는 순간 이전에 따르던 궤도의 접선 방향으로 항해한다. 또 육상 경기 해머던지기의 경우, 줄에 묶여진 해머를 돌리다 줄을 놓으면 해머는 회전하던 궤도의 접선 방향으로 날아간다.
따라서 우주 탐사선과 해머가 움직이던 궤도를 함수로 나타내고 도함수를 이용하여 접선의 방정식을 구하면 향후의 진행 방향을 예측할 수 있다.

**수학** I 에서 여러 가지 조건에 주어진 경우 원의 접선의 방정식을 구하는 방법에 대하여 배웠다. 이 단원에서는 곡선 위의 점에서의 접선의 기울기가 그 점에서의 미분계수와 같음을 이용하여 여러 가지 함수의 그래프의 접선의 방정식을 구하는 방법에 대하여 알아보자.

한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

**15 접선의 방정식**

- 미분계수와 접선의 기울기의 관계를 이해한다.
- 접선의 접점, 기울기, 곡선 밖의 점이 각각 주어졌을 때 접선의 방정식을 구할 수 있다.

**16 평균값 정리**

- 롤의 정리와 평균값 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

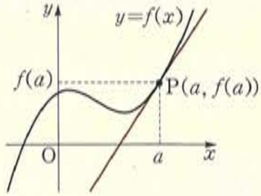
| 개념 & 특강 | | 대표유형 & 유제 | |
|---|---|---|---|
| 048 | 접선의 방정식 | 049 접선의 기울기 | |
| 049 | 접점의 좌표가 주어질 때 접선의 방정식 구하기 | 050 접점의 좌표가 주어진 접선의 방정식 | |
| 050 | 기울기가 주어질 때 접선의 방정식 구하기 | 051 기울기가 주어진 접선의 방정식 | |
| 051 | 곡선 밖의 한 점의 좌표가 주어질 때 접선의 방정식 구하기 | 052 곡선 밖의 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식 | |
| 특강 052 | 두 곡선의 위치 관계에 대한 고찰 | 053 공통인 접선 | |

| 개념 & 특강 | | 대표유형 & 유제 | |
|---|---|---|---|
| 053 | 롤의 정리 | 054 롤의 정리 | |
| 054 | 평균값 정리 | 055 평균값 정리 | 056 평균값 정리의 변형 |

# 개념 048 접선의 방정식

### 1 접선의 기울기

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.




### 2 접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$\boldsymbol{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$$

**Remark** 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$를 지나고, 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)\ (\text{단, } f'(a)\neq 0)$$

**개념 Approach**

**수학 I** 에서는 위치 관계를 이용하여 접선의 방정식을 구하였지만 여기에서는 미분계수의 기하학적 의미를 이용하여 접선의 방정식을 구하는 방법에 대하여 알아보자.

**개념 038**에서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같음을 배웠다.

즉 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선은 점 P를 지나고 기울기가 $f'(a)$인 직선이므로 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

임을 알 수 있다.

**Remark** 점 $(a,\ b)$를 지나고 기울기가 $m$인 직선의 방정식은 $y-b=m(x-a)$이다.

**개념 Check**

다음 곡선 위의 주어진 점에서의 접선의 기울기를 구하여라.

(1) $y=2x^2-8x+7$ $(0,\ 7)$  (2) $y=x^3+2x^2-1$ $(1,\ 2)$

**풀이** (1) $f(x)=2x^2-8x+7$로 놓으면 $f'(x)=4x-8$이므로

$f'(0)=4\cdot 0-8=-8$

(2) $f(x)=x^3+2x^2-1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+4x$이므로

$f'(1)=3\cdot 1^2+4\cdot 1=7$

답 (1) $-8$ (2) $7$

## 대표유형 049 접선의 기울기

• 개념 048

다음에 답하여라.

(1) 곡선 $y=x^3+ax^2+2x+b$ 위의 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기가 3일 때, 상수 $a$, $b$의 값을 구하여라.

(2) 곡선 $y=2x^3+ax^2+bx+c$ 위의 두 점 $(1,\ 4)$, $(2,\ 1)$에서의 접선이 서로 평행할 때, 상수 $a$, $b$, $c$의 값을 구하여라.

**유형 Guide** (1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.
(2) 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$에서의 접선이 서로 평행하면 두 접선의 기울기가 같으므로 $f'(a)=f'(b)$이다.

유형 SSEN **곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기 ⊙ 미분계수 $f'(a)$**

**풀이** (1) $f(x)=x^3+ax^2+2x+b$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+2ax+2$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 4)$를 지나므로 $f(1)=4$

$1+a+2+b=4$ $\therefore a+b=1$ …… ㉠

또 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기가 3이므로 $f'(1)=3$

$3+2a+2=3$, $2a=-2$ $\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=2$

(2) $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$로 놓으면 $f'(x)=6x^2+2ax+b$

곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(1,\ 4)$, $(2,\ 1)$을 지나므로 $f(1)=4$, $f(2)=1$

$2+a+b+c=4$, $16+4a+2b+c=1$

$\therefore a+b+c=2$, $4a+2b+c=-15$ …… ㉠

또 두 점 $(1,\ 4)$, $(2,\ 1)$에서의 접선이 서로 평행하므로 $f'(1)=f'(2)$

$6+2a+b=24+4a+b$, $2a=-18$

$\therefore a=-9$

$a=-9$를 ㉠에 대입한 후 연립하여 풀면 $b=10$, $c=1$

답 (1) $a=-1$, $b=2$ (2) $a=-9$, $b=10$, $c=1$

정답 및 풀이 • 50쪽

**유제 049-1** 곡선 $y=x^3+ax+b$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식이 $y=-x+2$일 때, 상수 $a$, $b$의 값을 구하여라.

**유제 049-2** 곡선 $y=ax^2+bx+c$가 점 $(1,\ 2)$를 지나고, 곡선 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 1일 때, 상수 $a$, $b$, $c$의 값을 구하여라.

개념 049

# 접점의 좌표가 주어질 때 접선의 방정식 구하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식을 구하는 방법은 다음과 같다.

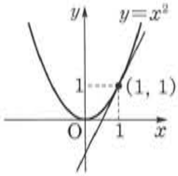
(i) 접선의 기울기 $f'(a)$를 구한다.

(ii) $y-f(a)=f'(a)(x-a)$를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

**개념 Approach**

접선의 방정식을 구하기 위해 필요한 것은 접점의 좌표와 접선의 기울기이다. 따라서 접점의 좌표가 주어진 경우에는 기울기만 구하면 된다. 이때 접선의 기울기는 접점에서의 미분계수임을 이용하여 구한다.

예를 들어 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.




(i) $f(x)=x^2$으로 놓으면 $f'(x)=2x$이므로

$$f'(1)=2$$

(ii) 구하는 접선은 점 $(1,\ 1)$을 지나고 기울기가 2인 직선이므로 접선의 방정식은

$$y-1=2(x-1) \qquad \therefore y=2x-1$$

개념 SSEN: 접선의 방정식 —(접점의 좌표가 주어질 때)→ 접선의 기울기를 구한다.

**개념 Check**

다음 곡선 위의 주어진 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=x^2-3x \quad (4,\ 4)$

(2) $y=-x^2+4x-5 \quad (3,\ -2)$

**풀이** (1) $f(x)=x^2-3x$로 놓으면 $f'(x)=2x-3$이므로

$$f'(4)=2\cdot4-3=5$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-4=5(x-4) \qquad \therefore y=5x-16$$

(2) $f(x)=-x^2+4x-5$로 놓으면 $f'(x)=-2x+4$이므로

$$f'(3)=-2\cdot3+4=-2$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-(-2)=-2(x-3) \qquad \therefore y=-2x+4$$

답 (1) $y=5x-16$ (2) $y=-2x+4$

## 대표유형 050 접점의 좌표가 주어진 접선의 방정식

• 개념 049

곡선 $y=x^3-3x^2+4x-1$에 대하여 다음에 답하여라.

(1) 곡선 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(2) 곡선 위의 점 $(1,\ 1)$을 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.



**유형 Guide** (1) 곡선 $y=f(x)$의 접점의 좌표 $(a,\ f(a))$가 주어지면 먼저 이 점에서의 접선의 기울기 $f'(a)$를 구한 후, 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식이 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$임을 이용한다.

(2) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$를 지나고, 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은 $y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$ $(f'(a)\neq 0)$임을 이용한다.

**유형 SSEN** 접점의 좌표가 주어진 접선의 방정식 ○ 접선의 기울기를 구한다.

**풀이** $f(x)=x^3-3x^2+4x-1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x+4$

(1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-6+4=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=1\cdot(x-1)\qquad\therefore y=x$

(2) 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 1이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-1$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-1=-1\cdot(x-1)\qquad\therefore y=-x+2$

답 (1) $y=x$ (2) $y=-x+2$

정답 및 풀이 • 50쪽

**유제 050-1** 곡선 $y=x^3-x^2+2x-2$와 $x$축의 교점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

**유제 050-2** 곡선 $y=x^3-2x^2+3x-4$ 위의 점 $(1,\ -2)$를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

개념 050

# 기울기가 주어질 때 접선의 방정식 구하기

곡선 $y=f(x)$에 대하여 기울기가 $m$인 접선의 방정식을 구하는 방법은 다음과 같다.

(i) 접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$로 놓는다.

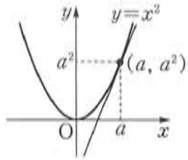
(ii) $f'(a)=m$임을 이용하여 접점의 좌표를 구한다.

(iii) $y-f(a)=m(x-a)$를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

## 개념 Approach

접선의 기울기가 주어진 경우에는 접점의 좌표만 구하면 그 방정식을 구할 수 있다. 이때 접점의 좌표는 접선의 기울기가 접점에서의 미분계수와 같음을 이용하여 구한다.

예를 들어 곡선 $y=x^2$에 접하고 기울기가 4인 직선의 방정식을 구해 보자.




$f(x)=x^2$으로 놓으면 $\quad f'(x)=2x$

(i) $f(a)=a^2$이므로 접점의 좌표를 $(a,\ a^2)$이라 하자.

(ii) 접선의 기울기가 4이므로 $\quad f'(a)=2a=4$

$\therefore a=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 4)$이다.

(iii) 구하는 접선은 점 $(2,\ 4)$를 지나고 기울기가 4인 직선이므로 접선의 방정식은

$y-4=4(x-2) \qquad \therefore y=4x-4$

개념 SSEN: 접선의 방정식 $\xrightarrow[\text{주어질 때}]{\text{기울기가}}$ 접점의 좌표를 구한다.

## 개념 Check

곡선 $y=x^2+5x$에 접하고 기울기가 $-1$인 직선의 방정식을 구하여라.

**풀이** $f(x)=x^2+5x$로 놓으면 $\quad f'(x)=2x+5$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2+5a)$라 하면 접선의 기울기가 $-1$이므로

$f'(a)=2a+5=-1$

$\therefore a=-3$

따라서 접점의 좌표는 $(-3,\ -6)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y+6=-1\cdot(x+3) \qquad \therefore y=-x-9$

답 $y=-x-9$

## 대표유형 051 기울기가 주어진 접선의 방정식

• 개념 050

곡선 $f(x)=x^3-4x+3$에 대하여 다음에 답하여라.

(1) 직선 $y=8x+1$에 평행한 접선의 방정식을 모두 구하여라.

(2) 직선 $y=x-1$에 수직이고, 이 곡선에 접하는 직선의 방정식을 모두 구하여라.



**유형 Guide** 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기 $m$이 주어지면 먼저 접점의 좌표를 $(a, f(a))$로 놓고 $f'(a)=m$임을 이용하여 접점의 좌표를 구한 후, 이 점에서의 접선의 방정식이 $y-f(a)=m(x-a)$임을 이용한다.

(1) 평행한 두 직선의 기울기는 서로 같음을 이용하여 접점의 좌표를 구한다.

(2) 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 $-1$임을 이용하여 접선의 기울기를 구한다.

**유형 SSEN** 기울기가 주어진 접선의 방정식 ➲ 접점의 좌표를 구한다.

**풀이** $f(x)=x^3-4x+3$에서 $\quad f'(x)=3x^2-4$

(1) 접점의 좌표를 $(a,\ a^3-4a+3)$이라 하면 접선의 기울기가 8이므로

$$f'(a)=3a^2-4=8,\quad 3a^2=12,\quad a^2=4\quad \therefore a=-2 \text{ 또는 } a=2$$

따라서 접점의 좌표는 $(-2,\ 3)$, $(2,\ 3)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-3=8(x+2),\ y-3=8(x-2)$$

$$\therefore y=8x+19,\ y=8x-13$$

(2) 접점의 좌표를 $(a,\ a^3-4a+3)$이라 하면 직선 $y=x-1$에 수직인 직선의 기울기는 $-1$이므로

$$f'(a)=3a^2-4=-1,\quad 3a^2=3,\quad a^2=1\quad \therefore a=-1 \text{ 또는 } a=1$$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 6)$, $(1,\ 0)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-6=-1\cdot(x+1),\ y-0=-1\cdot(x-1)$$

$$\therefore y=-x+5,\ y=-x+1$$

답 (1) $y=8x+19$, $y=8x-13$ (2) $y=-x+5$, $y=-x+1$

**Remark** 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$가

① 평행하다. ➡ $a=c$, $b\neq d$ ② 일치한다. ➡ $a=c$, $b=d$ ③ 수직이다. ➡ $ac=-1$

정답 및 풀이 • 50쪽

**유제 051-1** 곡선 $y=-x^2+1$에 접하는 직선이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$일 때, 이 직선의 방정식을 구하여라.

**유제 051-2** 곡선 $y=x^3-2x$ 위에 접선의 기울기가 1인 접점이 두 개 있다. 이 두 점 사이의 거리를 구하여라.

개념 051

# 곡선 밖의 한 점의 좌표가 주어질 때 접선의 방정식 구하기

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 $(x_1,\ y_1)$에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하는 방법은 다음과 같다.

(i) 접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$로 놓는다.

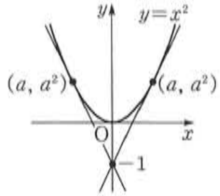
(ii) $y-f(a)=f'(a)(x-a)$에 점 $(x_1,\ y_1)$의 좌표를 대입하여 $a$의 값을 구한다.

(iii) $a$의 값을 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

### 개념 Approach

곡선 밖의 한 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식은 접점의 좌표와 기울기가 모두 주어지지 않은 경우이다. 이때 접선의 방정식은 임의로 정한 접점의 좌표를 이용하여 방정식을 세우고, 그 접선이 주어진 곡선 밖의 한 점을 지남을 이용하여 구한다.

예를 들어 점 $(0,\ -1)$에서 곡선 $y=x^2$에 그은 접선의 방정식을 구해 보자.




$f(x)=x^2$으로 놓으면 $\quad f'(x)=2x$

(i) $f(a)=a^2$이므로 접점의 좌표를 $(a,\ a^2)$이라 하자.

(ii) 점 $(a,\ a^2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a$이므로 접선의 방정식은

$$y-a^2=2a(x-a),\ \text{즉}\ y=2ax-a^2$$

이 직선이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로 $\quad -1=-a^2 \quad \therefore a=1$ 또는 $a=-1$

(iii) (ii)에서 구한 $a$의 값을 $y=2ax-a^2$에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=2x-1,\ y=-2x-1$$

개념 SSEN: 접선의 방정식 $\xrightarrow[\text{좌표가 주어질 때}]{\text{곡선 밖의 한 점의}}$ 접점의 좌표를 구한다.

### 개념 Check

점 $(-1,\ -3)$에서 곡선 $y=x^2+2x-1$에 그은 접선의 방정식을 모두 구하여라.

**풀이** $f(x)=x^2+2x-1$로 놓으면 $\quad f'(x)=2x+2$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2+2a-1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a+2$이므로 접선의 방정식은

$$y-(a^2+2a-1)=(2a+2)(x-a)$$

$$\therefore y=(2a+2)x-a^2-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 점 $(-1,\ -3)$을 지나므로 $\quad -3=(2a+2)\cdot(-1)-a^2-1$

$$a^2+2a=0, \quad a(a+2)=0 \quad \therefore a=0 \text{ 또는 } a=-2$$

이것을 ㉠에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=2x-1,\ y=-2x-5$$

답 $y=2x-1,\ y=-2x-5$

## 대표유형 052 곡선 밖의 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식

• 개념 051

원점에서 곡선 $y=x^4-x^2+2$에 그은 두 접선의 접점과 원점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

**유형 Guide** 곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 $(x_1, y_1)$에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 구할 때에는 접점의 좌표를 $(a, f(a))$로 놓고 접선 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$가 점 $(x_1, y_1)$을 지남을 이용한다.

**유형 SSEN** **곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식**
**➲ 접점의 좌표를 $(a, f(a))$로 놓는다.**

**풀이** $f(x)=x^4-x^2+2$로 놓으면 $\quad f'(x)=4x^3-2x$

접점의 좌표를 $(a,\ a^4-a^2+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(a)=4a^3-2a$$

이므로 접선의 방정식은

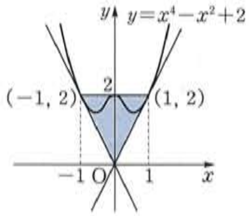
$$y-(a^4-a^2+2)=(4a^3-2a)(x-a)$$
$$\therefore y=(4a^3-2a)x-3a^4+a^2+2$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$3a^4-a^2-2=0, \qquad (a^2-1)(3a^2+2)=0$$
$$(a+1)(a-1)(3a^2+2)=0$$
$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=1 \ (\because 3a^2+2>0)$$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 2)$이므로 오른쪽 그림에서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$$




답 2

**Remark** 접선의 방정식을 구할 때에는 주어진 점의 좌표를 곡선의 방정식에 대입하여 그 점이 곡선 위의 점인지 아닌지를 반드시 확인하도록 한다.

정답 및 풀이 • 51쪽

**유제 052-1** 점 $(0,\ 2)$에서 곡선 $y=x^3+2x$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

**유제 052-2** 점 $(-1,\ 2)$에서 곡선 $y=3x^2-5x+6$에 그은 두 접선의 기울기의 곱을 구하여라.

특강 052

# 두 곡선의 위치 관계에 대한 고찰

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(a, b)$에서 접하거나 직교할 조건은 다음과 같다.

(1) 접할 조건

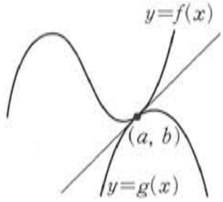
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(a, b)$에서 접하면 두 곡선이 점 $(a, b)$에서 공통인 접선을 가지므로

(i) 두 곡선이 점 $(a, b)$를 지난다.

$\Longleftrightarrow \boldsymbol{f(a)=g(a)=b}$

(ii) $x=a$에서의 두 곡선의 접선의 기울기는 같다.

$\Longleftrightarrow \boldsymbol{f'(a)=g'(a)}$




(2) 직교할 조건

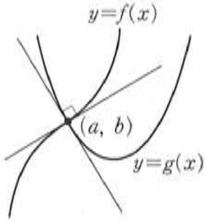
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(a, b)$에서 직교하면 점 $(a, b)$에서 한 곡선의 접선이 다른 곡선의 법선이 되므로

(i) 두 곡선이 점 $(a, b)$를 지난다.

$\Longleftrightarrow \boldsymbol{f(a)=g(a)=b}$

(ii) $x=a$에서의 두 곡선의 접선이 직교한다.

$\Longleftrightarrow \boldsymbol{f'(a)\cdot g'(a)=-1}$




**Remark** 접점을 지나고 접선과 수직인 직선을 **법선**이라 한다.

개념 SSEN

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(a, b)$에서
- 접하면 → $f(a)=g(a)=b$, $f'(a)=g'(a)$
- 직교하면 → $f(a)=g(a)=b$, $f'(a)\cdot g'(a)=-1$

개념 Check

두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+ax+b$가 $x=1$인 점에서 접할 때, 상수 $a$, $b$의 값을 구하여라.

풀이 $f(x)=x^2$, $g(x)=-x^2+ax+b$로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g'(x)=-2x+a$

두 곡선이 $x=1$인 점에서 접하므로 $f(1)=g(1)$에서

$1=-1+a+b \quad \therefore a+b=2 \quad \cdots\cdots ㉠$

또 $f'(1)=g'(1)$에서 $\quad 2=-2+a \quad \therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad 4+b=2 \quad \therefore b=-2$

답 $a=4$, $b=-2$

## 대표유형 053 공통인 접선

• 특강 052

두 곡선 $f(x)=x^3+ax$, $g(x)=bx^2+c$가 점 $(1,\ 0)$을 지나고, 이 점에서 공통인 접선을 가질 때, 상수 $a$, $b$, $c$의 값을 구하여라.

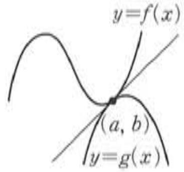
**유형 Guide** 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(a,\ b)$에서 공통인 접선을 가지면

(i) 두 곡선이 점 $(a,\ b)$를 지난다.

$\iff f(a)=g(a)=b$

(ii) $x=a$에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같다.

$\iff f'(a)=g'(a)$




**유형 SSEN** **두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=a$인 점에서 공통인 접선을 가지면**
**○ $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$**

**풀이** $f(x)=x^3+ax$, $g(x)=bx^2+c$에서

$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=2bx$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$f(1)=1+a=0$ …… ㉠

$g(1)=b+c=0$ …… ㉡

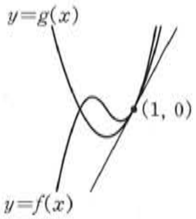
또 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(1)=g'(1)$

$\therefore 3+a=2b$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=1$, $c=-1$




답 $a=-1$, $b=1$, $c=-1$

**Remark** 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=a$인 점에서 접한다.
$\iff$ 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=a$인 점에서 공통인 접선을 갖는다.
$\iff f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$

정답 및 풀이 • 51쪽

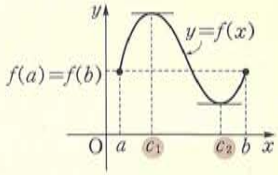
**유제 053-1** 두 곡선 $y=ax^2+b$, $y=x^3+bx$가 $x=1$인 점에서 접할 때, 상수 $a$, $b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

**유제 053-2** 두 곡선 $f(x)=-x^3+kx$, $g(x)=x^2-1$이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가질 때, 상수 $k$의 값을 구하여라.

# 개념 053 롤의 정리

다음을 **롤의 정리**라 한다.

> 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면
>
> $$\boldsymbol{f'(c)=0}$$
>
> 인 $c$가 열린 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

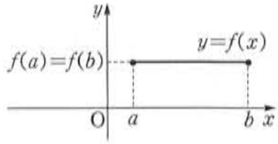



**개념 Approach**

롤의 정리를 증명해 보자.

(i) 함수 $f(x)$가 상수함수인 경우

열린 구간 $(a,\ b)$에 속하는 모든 $x$에 대하여 $f'(x)=0$이므로 열린 구간 $(a,\ b)$에 속하는 모든 $c$에 대하여 $f'(c)=0$이다.




(ii) 함수 $f(x)$가 상수함수가 아닌 경우

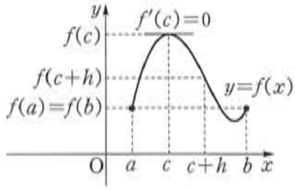
$f(a)=f(b)$이므로 함수 $f(x)$는 열린 구간 $(a, b)$에 속하는 $c$에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는다. 108쪽 • 개념 034

함수 $f(x)$가 $x=c$에서 최댓값 $f(c)$를 가질 때, 절댓값이 충분히 작은 수 $h(h\neq 0)$에 대하여

$$f(c+h)\leq f(c),\ \text{즉}\ f(c+h)-f(c)\leq 0$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0,\quad \lim_{h\to 0-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geq 0$$




이때 $f(x)$는 $x=c$에서 미분가능하므로 $x=c$에서의 우극한과 좌극한이 같다. 즉

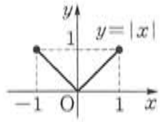
$$0\leq \lim_{h\to 0-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0$$

$$\therefore\ f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=0$$

같은 방법으로 함수 $f(x)$가 $x=c$에서 최솟값 $f(c)$를 가질 때에도 $f'(c)=0$임을 보일 수 있다.

$f'(c)=0$이라는 것은 $x=c$인 점에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선이 $x$축과 평행하다는 뜻이므로 롤의 정리는 곡선 $y=f(x)$에서 $f(a)=f(b)$이면 $x$축과 평행한 접선을 갖는 점이 열린 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재함을 의미한다.

**Remark** 함수 $f(x)$가 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하지 않으면 롤의 정리가 성립하지 않는다. 예를 들어 함수 $f(x)=|x|$는 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고 $f(-1)=f(1)$이지만 $f'(c)=0$인 $c$가 열린 구간 $(-1,\ 1)$에 존재하지 않는다.



## 대표유형 054 롤의 정리

• 개념 053

다음 함수에 대하여 주어진 구간에서 롤의 정리를 만족시키는 실수 $c$의 값을 구하여라.

(1) $f(x)=x^2-5x+2\quad[1,\ 4]$

(2) $f(x)=(x+2)(x-2)(x-4)\quad[2,\ 4]$



**유형 Guide** 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때, $f(a)$와 $f(b)$의 값이 서로 같으면 $f'(c)=0$을 만족시키는 실수 $c$를 구간 $(a,\ b)$에서 찾을 수 있다.

**유형 SSEN** **롤의 정리의 적용 ○ $f'(c)=0$인 $c\ (a<c<b)$를 찾는다.**

**풀이** (1) 함수 $f(x)=x^2-5x+2$는 닫힌 구간 $[1,\ 4]$에서 연속이고 열린 구간 $(1,\ 4)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(4)=-2$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 실수 $c$가 구간 $(1,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=x^2-5x+2$에서

$f'(x)=2x-5$

$f'(c)=2c-5=0$이므로

$c=\frac{5}{2}$

(2) 함수 $f(x)=(x+2)(x-2)(x-4)$는 닫힌 구간 $[2,\ 4]$에서 연속이고 열린 구간 $(2,\ 4)$에서 미분가능하며 $f(2)=f(4)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 실수 $c$가 구간 $(2,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=(x+2)(x-2)(x-4)=x^3-4x^2-4x+16$에서

$f'(x)=3x^2-8x-4$

$f'(c)=3c^2-8c-4=0$이므로

$c=\frac{4+2\sqrt{7}}{3}\ (\because\ 2<c<4)$

답 (1) $\frac{5}{2}$ (2) $\frac{4+2\sqrt{7}}{3}$

정답 및 풀이 • 52쪽

**유제 054-1** 함수 $f(x)=x^3-7x^2+7x+13$에 대하여 닫힌 구간 $[-1,\ 5]$에서 롤의 정리를 만족시키는 실수 $c$의 값을 모두 구하여라.

개념 054

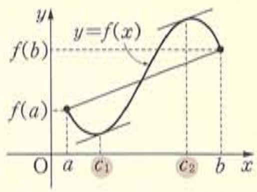
## 평균값 정리

롤의 정리로부터 다음과 같은 정리가 성립하며, 이것을 **평균값 정리**라 한다.

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 $c$가 열린 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.



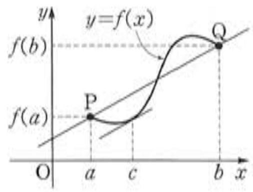

**Remark** 평균값 정리에서 $f(a)=f(b)$인 경우가 롤의 정리이다.

개념 Approach

롤의 정리를 이용하여 평균값 정리를 증명해 보자.

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$, $\mathrm{Q}(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$




이때

$$g(x)=f(x)-\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right\}$$

로 놓으면 함수 $g(x)$는 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하며 $g(a)=g(b)=0$이다.

따라서 롤의 정리에 의하여

$$g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,\text{ 즉 }\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

를 만족시키는 $c$가 열린 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

평균값 정리는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 잇는 직선에 평행한 접선을 갖는 점이 열린 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재함을 의미한다.

## 대표유형 055 평균값 정리

• 개념 054

다음 함수에 대하여 주어진 구간에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 $c$의 값을 구하여라.

(1) $f(x)=-x^2+6x-8$ $[1,\ 4]$　　(2) $f(x)=x^3+1$ $[-1,\ 2]$



**유형 Guide** 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$를 만족시키는 실수 $c$를 구간 $(a,\ b)$에서 찾을 수 있다.

**유형 SSEN 평균값 정리의 적용** ⊙ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 $c$ $(a<c<b)$를 찾는다.

**풀이** (1) 함수 $f(x)=-x^2+6x-8$은 닫힌 구간 $[1,\ 4]$에서 연속이고 열린 구간 $(1,\ 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c)$인 실수 $c$가 구간 $(1,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=-x^2+6x-8$에서 $f'(x)=-2x+6$이므로

$$\frac{0-(-3)}{4-1}=-2c+6,\qquad 1=-2c+6$$

$$2c=5\qquad \therefore c=\frac{5}{2}$$

(2) 함수 $f(x)=x^3+1$은 닫힌 구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이고 열린 구간 $(-1,\ 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$인 실수 $c$가 구간 $(-1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=x^3+1$에서 $f'(x)=3x^2$이므로

$$\frac{9-0}{2-(-1)}=3c^2,\qquad 3=3c^2$$

$$c^2=1\qquad \therefore c=1\ (\because -1<c<2)$$

답 (1) $\dfrac{5}{2}$ (2) 1

정답 및 풀이 • 52쪽

**유제 055-1** 함수 $f(x)=-x^3+2x$에 대하여 닫힌 구간 $[-2,\ 2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 $c$의 값을 모두 구하여라.

## 대표유형 056 평균값 정리의 변형

• 개념 054

함수 $f(x)=x^3$에서 $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$ $(0<\theta<1)$를 만족시키는 $\theta$에 대하여 $\lim_{h\to 0+}\theta$의 값을 구하여라. (단, $a>0$, $h>0$)

**유형Guide** 주어진 등식은 평균값 정리에서 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$를 변형한 것이다. (**Remark** 참고)

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구한 후 주어진 식에 $f(x)$와 $f'(x)$를 대입하여 $\theta$에 대한 식으로 정리한다.

**유형 SSEN** **$\theta$의 극한 ⊙ $\theta$에 대한 식으로 정리한다.**

**풀이** $f(x)=x^3$에서 $\quad f'(x)=3x^2$

$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$에서 $\quad (a+h)^3=a^3+h\{3(a+\theta h)^2\}$

$3a+h=6a\theta+3\theta^2 h,\quad 3h\theta^2+6a\theta-3a-h=0$

$\theta$에 대한 이차방정식으로 보고 근의 공식을 이용한다.

근의 공식에 의하여

$$\theta=\frac{-3a+\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}}{3h}\ (\because \theta>0)$$

$$\therefore \lim_{h\to 0+}\theta=\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}-3a}{3h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{9a^2+9ah+3h^2-9a^2}{3h(\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}+3a)}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{3a+h}{\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}+3a}$$

$$=\frac{3a}{3a+3a}=\frac{1}{2}$$

답 $\dfrac{1}{2}$

**Remark** 평균값 정리에서

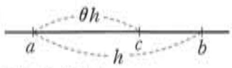
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ (a<c<b)\quad \cdots\cdots ㉠$$

의 양변에 $b-a$를 곱하고 $f(b)$에 대하여 정리하면 $\quad f(b)=f(a)+(b-a)f'(c)$

이때 $b-a=h$로 놓으면 $b=a+h$이므로 $\quad f(a+h)=f(a)+hf'(c)$

그런데 $a<c<b$이므로 $0<\theta<1$인 $\theta$에 대하여

$c=a+\theta(b-a)=a+\theta h$




인 $\theta$가 존재하고, ㉠은 $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$ $(0<\theta<1)$ 꼴로 나타낼 수 있다.

정답 및 풀이 • 52쪽

**유제 056-1** 함수 $f(x)=x^2+ax+b$에서

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)\ (0<\theta<1)$$

를 만족시키는 $\theta$의 값을 구하여라. (단, $a$, $b$는 상수이고, $h\neq 0$이다.)

# 중단원 연습 문제

정답 및 풀이 • 52쪽

## STEP 1 유형 Training

**01** 곡선 $y=-\frac{1}{3}x^3-x^2+1$의 접선의 기울기의 최댓값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

서술형

**02** 곡선 $y=-x^3+3x^2+2x$의 접선 중 직선 $7x+y+10=0$에 평행한 직선은 두 개이다. 이때 두 직선의 $y$절편의 합을 구하여라.

**03** 점 $(0,\ 2)$에서 곡선 $y=x^3$에 그은 접선이 점 $(-2,\ k)$를 지날 때, $k$의 값을 구하여라.

**04** 함수 $f(x)=x^4-2x^2+1$에 대하여 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 롤의 정리를 만족시키는 실수 $c$의 값을 구하여라.

## STEP 2 실전 Application

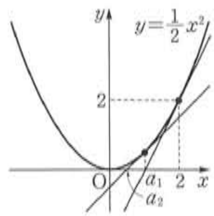
평가원기출

**05** 곡선 $y=x^3+2x+7$ 위의 점 $\mathrm{P}(-1,\ 4)$에서의 접선이 점 P가 아닌 점 $(a,\ b)$에서 곡선과 만난다. $a+b$의 값을 구하여라.

**06** 곡선 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 위의 점 $(2,\ -2)$에서의 접선이 곡선 $y=x^2-k$에 접할 때, 상수 $k$의 값을 구하여라.

서술형

**07** 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위의 점 $(2, 2)$에서의 접선과 $x$축의 교점을 $(a_1, 0)$, 점 $\left(a_1, \frac{1}{2}a_1^2\right)$에서의 접선과 $x$축의 교점을 $(a_2, 0)$, 점 $\left(a_2, \frac{1}{2}a_2^2\right)$에서의 접선과 $x$축의 교점을 $(a_3, 0)$, $\cdots$이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 수열 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n$을 구하여라.

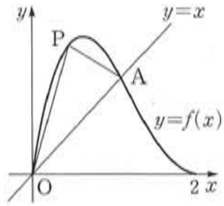



평가원기출

**08** 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 정의된 함수

$$f(x)=ax(x-2)^2\left(a>\frac{1}{2}\right)$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점 중 원점 O가 아닌 점을 A라 하자. 점 P가 원점으로부터 점 A까지 곡선 $y=f(x)$ 위를 움직일 때, 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되는 점 P의 $x$좌표가 $\frac{1}{2}$이다. 상수 $a$의 값은?




① $\frac{4}{5}$　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{17}{12}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{19}{12}$

서술형

**09** 두 함수 $f(x)=x^3-3x^2+2ax+8$, $g(x)=-x^2+ax$의 그래프가 한 점에서 접할 때, 상수 $a$의 값을 구하여라.

**10** 두 곡선 $y=-x^2+3$, $y=ax^2-1$의 교점에서 두 곡선의 접선이 서로 수직일 때, 상수 $a$의 값을 구하여라.

서술형

**11** 직선 $y=x$ 위를 움직이는 점 P에서 곡선 $y=x^2+1$에 그은 두 접선이 이루는 각이 직각이 될 때, 점 P의 좌표를 구하여라.

**12** 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 $c$가 존재하는 함수인 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

**보기**

ㄱ. $f(x)=x$

ㄴ. $f(x)=|x|+2$

ㄷ. $f(x)=-x^3+3x+1$

ㄹ. $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ ④ ㄱ, ㄴ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ



STEP 3 심화 Forwarding

**13** 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(3,\ 5)$에서의 접선의 방정식이 $y=4x-7$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left\{f\left(3+\frac{1}{6n}\right)-f(3)\right\}$의 값을 구하여라.

**14** 곡선 $y=x^4$과 점 $(1,\ 1)$에서 접하고 중심이 $y$축 위에 있는 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{15}}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{\sqrt{17}}{4}$

수능기출

**15** 좌표평면에서 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$와 실수 $t$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선이 $y$축과 만나는 점을 P라 할 때, 원점에서 점 P까지의 거리를 $g(t)$라 하자. 함수 $f(x)$와 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2$
(나) 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(3)$의 값은? (단, $a$, $b$는 상수이다.)

① 21 ② 24 ③ 27 ④ 30 ⑤ 33

# 07

## 도함수의 활용 (2)

제품을 생산하는 기업은 수요의 변화에 따라 공급량을 적절히 조절해야 최대의 이윤을 얻을 수 있다. 수요의 변화는 제품의 수요량이 나타내는 함수가 증가하는 구간과 감소하는 구간, 수요량이 최대가 되는 점과 최소가 되는 점 등을 조사하면 예측이 가능하다.

이 단원에서는 도함수를 이용하여 함수의 증가와 감소를 판정하는 방법과 함수의 증가와 감소가 바뀌는 극값에 대하여 공부하고, 이를 이용하여 함수의 그래프를 그리는 방법에 대하여 알아보자.

### 한눈에 보는 개념&유형 map

**소단원 & 학습목표**

**17 함수의 증가와 감소**

- 함수의 증가와 감소를 이해하고, 이를 판정할 수 있다.

**18 함수의 극대와 극소**

- 함수의 극대와 극소를 이해하고, 이를 판정하여 그래프를 그릴 수 있다.
- 삼차함수와 사차함수의 그래프의 개형을 살펴보고, 함수가 극값을 가질 조건을 이해한다.

**19 함수의 최대와 최소**

- 주어진 구간에서 함수의 최대 · 최소를 구하고 이를 활용할 수 있다.

| 개념 & 특강 | 대표유형 & 유제 | |
|---|---|---|
| 055 함수의 증가와 감소 | | |
| 056 함수의 증가와 감소의 판정 | 057 함수의 증가와 감소 | 058 함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건 |

| 개념 & 특강 | 대표유형 & 유제 | |
|---|---|---|
| 057 함수의 극대와 극소 | | |
| 058 극값과 미분계수 | 059 함수의 극값과 미정계수의 결정 | |
| 059 함수의 극대와 극소의 판정 | 060 도함수의 그래프와 함수의 극값 | |
| 060 함수의 그래프 | 061 함수의 극대 · 극소와 그래프 | |
| 특강 061 다항함수의 그래프의 개형과 극값을 가질 조건 | 062 극값을 가질 조건 | 063 특정 구간에서 극값을 가질 조건 |

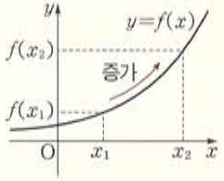
| 개념 & 특강 | 대표유형 & 유제 | | |
|---|---|---|---|
| 062 함수의 최대와 최소 / 063 극값이 하나뿐일 때의 함수의 최대와 최소 | 064 함수의 최대 · 최소 | 065 최대 · 최소가 주어진 함수의 미정계수의 결정 | 066 최대 · 최소의 활용 – 길이 |
| | | 068 최대 · 최소의 활용 – 부피 | 067 최대 · 최소의 활용 – 넓이 |

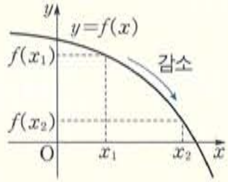
## 개념 055 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 $x_1$, $x_2$에 대하여

① $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)<f(x_2)$이면 $f(x)$는 이 구간에서 **증가**한다고 한다.

② $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)>f(x_2)$이면 $f(x)$는 이 구간에서 **감소**한다고 한다.



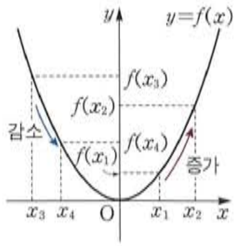




**Remark** 함수 $f(x)$가 정의역의 모든 $x$의 값에서 증가하면 $f(x)$를 **증가함수**라 하고, 모든 $x$의 값에서 감소하면 $f(x)$를 **감소함수**라 한다.

### 개념 Approach

함수 $f(x)=x^2$은 $x>0$일 때 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값이 증가하고, $x<0$일 때 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값이 감소함을 그래프를 통하여 직관적으로 알 수 있다.

이제 함수의 증가와 감소의 정의에 따라 함수 $f(x)=x^2$의 증가와 감소를 살펴보자.




① 임의의 두 양수 $x_1$, $x_2$에 대하여 $x_1<x_2$일 때,

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=\underbrace{(x_1+x_2)}_{+}\underbrace{(x_1-x_2)}_{-}<0$$

$$\therefore f(x_1)<f(x_2)$$

따라서 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $(0, \infty)$에서 증가한다.

② 임의의 두 음수 $x_3$, $x_4$에 대하여 $x_3<x_4$일 때,

$$f(x_3)-f(x_4)=x_3^2-x_4^2=\underbrace{(x_3+x_4)}_{-}\underbrace{(x_3-x_4)}_{-}>0$$

$$\therefore f(x_3)>f(x_4)$$

따라서 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $(-\infty, 0)$에서 감소한다.

### 개념 Check

함수 $f(x)=x^3$이 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가함을 보여라.

**풀이** $x_1<x_2$인 임의의 두 수 $x_1$, $x_2$에 대하여

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$$

이때 $x_1-x_2<0$, $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0$이므로

$$f(x_1)-f(x_2)<0 \qquad \therefore f(x_1)<f(x_2)$$

따라서 함수 $f(x)=x^3$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.

답 풀이 참조

## 개념 056 함수의 증가와 감소의 판정

함수 $f(x)$가 어떤 열린 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 $x$에 대하여

① $\boldsymbol{f'(x)>0}$이면 $f(x)$는 이 구간에서 **증가**한다.

② $\boldsymbol{f'(x)<0}$이면 $f(x)$는 이 구간에서 **감소**한다.

**Remark** 일반적으로 위의 역은 성립하지 않는다.

### 개념 Approach

함수의 증가와 감소를 도함수의 부호를 조사하여 판정하는 방법에 대하여 알아보자.
함수 $f(x)$가 열린 구간 $(a, b)$에서 미분가능하고 이 구간의 모든 $x$에 대하여 $f'(x)>0$이라 하자.
구간 $(a, b)$에 속하는 임의의 두 수 $x_1$, $x_2$에 대하여 $x_1<x_2$일 때, 닫힌 구간 $[x_1, x_2]$에서 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

인 $c$가 열린 구간 $(x_1, x_2)$에 적어도 하나 존재한다. 그런데

$$f'(c)>0\text{이고 } x_2-x_1>0$$

이므로

$$f(x_2)-f(x_1)>0,\text{ 즉 } f(x_1)<f(x_2)$$

따라서 구간 $(a, b)$에 속하는 임의의 두 수 $x_1$, $x_2$에 대하여

$$x_1<x_2\text{일 때 } f(x_1)<f(x_2)$$

이므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.
마찬가지로 열린 구간 $(a, b)$의 모든 $x$에 대하여 $f'(x)<0$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소함을 알 수 있다.

**개념 SSEN**

| | | |
|---|---|---|
| $f'(x)>0$ | → | $f(x)$가 증가 |
| $f'(x)<0$ | → | $f(x)$가 감소 |

일반적으로 **개념 056**의 역은 성립하지 않는다.
예를 들어 함수 $f(x)=x^3$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하지만

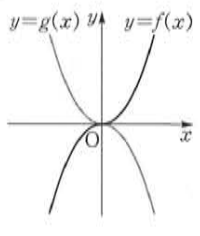
$$f'(x)=3x^2\text{에서}\qquad f'(0)=0$$

이므로 $\quad f'(x)=3x^2\geq0$

또 함수 $g(x)=-x^3$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하지만

$$g'(x)=-3x^2\text{에서}\qquad g'(0)=0$$

이므로 $\quad g'(x)=-3x^2\leq0$



따라서 다음이 성립한다.

어떤 열린 구간에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여
① $f(x)$가 이 구간에서 **증가**하면 이 구간의 모든 $x$에 대하여 $f'(x) \geq 0$이다.
② $f(x)$가 이 구간에서 **감소**하면 이 구간의 모든 $x$에 대하여 $f'(x) \leq 0$이다.

개념 SSEN

| | | |
|---|---|---|
| $f(x)$가 증가 | → | $f'(x) \geq 0$ |
| $f(x)$가 감소 | → | $f'(x) \leq 0$ |

개념 Check

함수 $f(x)=x^3-3x^2$의 증가와 감소를 조사하여라.

풀이 $f(x)=x^3-3x^2$에서

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$f'(x)=0$에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같으므로

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 0 | ↘ | $-4$ | ↗ |

$x<0$이면 $f'(x)>0$

$0<x<2$이면 $f'(x)<0$

$x>2$이면 $f'(x)>0$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$에서 증가하고, 구간 $(0, 2)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

**Remark** 위와 같이 도함수의 부호를 조사하여 함수의 증가와 감소를 표로 나타낸 것을 **증감표**라 한다.
함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같은 순서로 작성한다.
(i) $f'(x)=0$인 $x$의 값을 구한다.
(ii) (i)에서 구한 $x$의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사한다.
(iii) $f'(x)$의 부호에 따라 $f(x)$의 증가는 ↗로, 감소는 ↘로 나타낸다.

## 대표유형 057 함수의 증가와 감소

• 개념 056

다음 함수의 증가와 감소를 조사하여라.

(1) $f(x)=-x^3+6x^2-9x-4$　　(2) $f(x)=x^3-6x^2+12x-1$

**유형 Guide** 어떤 구간에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 증가와 감소는 $f'(x)$의 부호를 이용하여 다음과 같이 판정한다.

① $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

이때 함수 $f(x)$의 증감표를 이용하여 $f'(x)>0$인 구간과 $f'(x)<0$인 구간을 조사한다.

유형 55EN **함수 $f(x)$의 증가와 감소 ○ $f'(x)$의 부호를 조사한다.**

**풀이** (1) $f(x)=-x^3+6x^2-9x-4$에서

$$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서　$x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 1)$, $(3,\ \infty)$에서 감소하고, 구간 $(1,\ 3)$에서 증가한다.

| $x$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-8$ | ↗ | $-4$ | ↘ |

(2) $f(x)=x^3-6x^2+12x-1$에서

$$f'(x)=3x^2-12x+12=3(x-2)^2$$

$f'(x)=0$에서　$x=2$

함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

이때 $f(2)=0$이지만 $x=2$의 좌우에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가한다.

| $x$ | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 7 | ↗ |

답 풀이 참조

정답 및 풀이 • 56쪽

**유제 057-1** 함수 $f(x)=2x^3+6x^2-18x-5$의 증가와 감소를 조사하여라.

## 대표유형 058 함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건

• 개념 056

다음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x)=x^3-2ax^2+ax$가 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 $a$의 값의 범위를 구하여라.

(2) 함수 $f(x)=x^3-6x^2+ax+4$가 구간 $(0,\ 3)$에서 감소하도록 하는 실수 $a$의 값의 범위를 구하여라.

**유형 Guide** 어떤 구간에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)$가 이 구간에서

증가하면 $f'(x)\geq 0$, 감소하면 $f'(x)\leq 0$

이다. 이때 등호가 포함됨에 유의한다.

**유형 SSEN** 함수 $f(x)$가 [증가하면 ⊙ $f'(x)\geq 0$ / 감소하면 ⊙ $f'(x)\leq 0$]

**풀이** (1) $f(x)=x^3-2ax^2+ax$에서

$f'(x)=3x^2-4ax+a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면

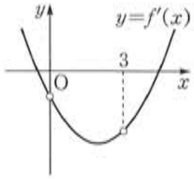
이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$이 항상 성립할 조건은 $a>0,\ b^2-4ac\leq 0$

$\frac{D}{4}=(-2a)^2-3a\leq 0,\qquad a(4a-3)\leq 0$

$\therefore 0\leq a\leq \frac{3}{4}$

(2) $f(x)=x^3-6x^2+ax+4$에서

$f'(x)=3x^2-12x+a$




함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ 3)$에서 감소하려면 오른쪽 그림과 같이 $0<x<3$에서 $f'(x)\leq 0$이어야 하므로

$f'(0)=a\leq 0,\ f'(3)=-9+a\leq 0$

$\therefore a\leq 0$

답 (1) $0\leq a\leq \frac{3}{4}$ (2) $a\leq 0$

정답 및 풀이 • 56쪽

**유제 058-1** 다음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x)=-x^3+x^2+ax$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소하도록 하는 실수 $a$의 값의 범위를 구하여라.

(2) 함수 $f(x)=2x^3+3(a-2)x^2-12ax+1$이 구간 $(-1,\ 2)$에서 증가하도록 하는 실수 $a$의 값의 범위를 구하여라.

개념 057

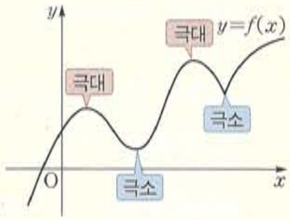
# 함수의 극대와 극소

함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 $x$에 대하여

① $f(x) \le f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극대**라 하고, $f(a)$를 **극댓값**이라 한다.

② $f(x) \ge f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극소**라 하고, $f(a)$를 **극솟값**이라 한다.

이때 극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라 한다.




**Remark** 위의 그림에서 다음을 알 수 있다.

① 극댓값이 극솟값보다 반드시 큰 것은 아니다.

② 하나의 함수에서 극값은 여러 개 존재할 수 있다.

③ $x=a$에서 미분가능하지 않을 때에도 $x=a$에서 극값을 가질 수 있다.

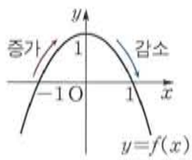


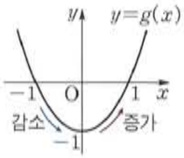
### 개념 Approach

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대이면 $x=a$의 충분히 가까운 근방에서 $f(a)$가 최댓값임을 뜻하고, $x=a$에서 극소이면 $x=a$의 충분히 가까운 근방에서 $f(a)$가 최솟값임을 뜻한다.

특히 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속일 때, $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 증가하다가 감소하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다. 또 $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 감소하다가 증가하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

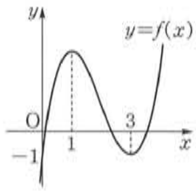
예를 들어 함수 $f(x)=-x^2+1$은 $x=0$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=1$이다.
또 함수 $g(x)=x^2-1$은 $x=0$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이고 극솟값은 $g(0)=-1$이다.




### 개념 Check

오른쪽 그림은 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$의 그래프이다. 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구하여라.

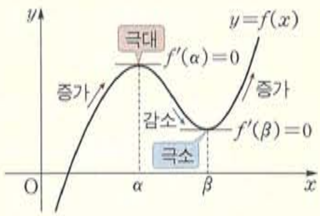



풀이 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이며 극댓값은 $f(1)=3$이다.
또 $x=3$에서 극소이며 극솟값은 $f(3)=-1$이다.

답 극댓값: 3, 극솟값: $-1$

## 개념 058 극값과 미분계수

함수의 극값에 대하여 다음이 성립한다.




> 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

**Remark** 위의 역은 성립하지 않는다.

**개념 Approach**

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극대라 하자.
절댓값이 충분히 작은 $h(h\neq0)$에 대하여 $f(a+h)\leq f(a)$, 즉 $f(a+h)-f(a)\leq0$이므로

$$h>0\text{이면}\qquad \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\leq0,$$

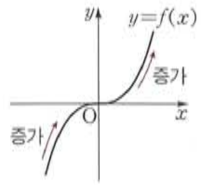
$$h<0\text{이면}\qquad \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\geq0$$

임을 알 수 있다. 이때 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 미분계수 $f'(a)$가 존재하므로

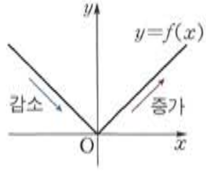
$$0\leq\lim_{h\to0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\leq0$$

따라서 $f'(a)=0$이 된다.
마찬가지로 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극소인 경우에도 $f'(a)=0$임을 보일 수 있다.

일반적으로 **개념 058**의 역은 성립하지 않는다. 즉 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이라고 해서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 반드시 극값을 갖는 것은 아니다. 예를 들어 함수 $f(x)=x^3$에 대하여 $f'(0)=0$이지만 오른쪽 그림과 같이 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.




한편 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖는다고 해서 $f'(a)$가 반드시 존재하는 것은 아니다. 즉 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가져도 $f'(a)$가 존재하지 않을 수 있다. 예를 들어 함수 $f(x)=|x|$는 오른쪽 그림과 같이 $x=0$의 좌우에서 $f(x)$가 감소하다가 증가하므로 $x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=0$이지만 $f'(0)$은 존재하지 않는다.




**개념 SSEN** 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능 $\xrightarrow[\text{극값을 가지면}]{x=a\text{에서}}$ $f'(a)=0$

## 대표유형 059 함수의 극값과 미정계수의 결정

• 개념 058

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 $x=-1$에서 극댓값 20을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 가질 때, $f(x)$의 극솟값을 구하여라. (단, $a$, $b$, $c$는 상수이다.)

**유형 Guide** 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값 $\beta$를 가지면
(i) $x=\alpha$에서의 함숫값이 $\beta$이므로 $f(\alpha)=\beta$
(ii) $x=\alpha$에서 극값을 가지므로 $f'(\alpha)=0$
임을 이용한다.

**유형 SSEN** **미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값 $\beta$를 가지면 ⊙ $f(\alpha)=\beta$, $f'(\alpha)=0$**

**풀이** $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 가지므로

$f'(-1)=0$, $f'(3)=0$

$\therefore 3-2a+b=0,\quad 27+6a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=-9$

즉 $f(x)=x^3-3x^2-9x+c$이고, 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 20을 가지므로

$f(-1)=20,\qquad 5+c=20$

$\therefore c=15$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2-9x+15$이므로 $f(x)$의 극솟값은

$f(3)=27-27-27+15=-12$

답 $-12$

정답 및 풀이 • 56쪽

**유제 059-1** 함수 $f(x)=2x^3+ax^2+bx-4$가 $x=-2$에서 극댓값 16을 갖고, $x=\alpha$에서 극솟값 $\beta$를 가질 때, 상수 $a$, $b$, $\alpha$, $\beta$의 값을 구하여라.

**Plus 유제 059-2** 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$는 $x=-2$에서 극댓값 18을 갖고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 2)$에서의 접선의 기울기가 4일 때, $f(1)$의 값을 구하여라.

(단, $a$, $b$, $c$, $d$는 상수이다.)

개념 059

# 함수의 극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때,

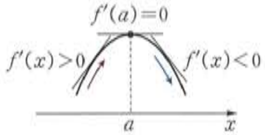
① $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$이다.

② $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$이다.

### 개념 Approach

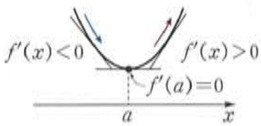
미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

| $x$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ |




또 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

| $x$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ |




### 개념 Check

다음 함수의 극값을 구하여라.

(1) $f(x)=2x^3-6x+1$　　(2) $f(x)=3x^4-4x^3-30x^2-36x$

**풀이** (1) $f(x)=2x^3-6x+1$에서　$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서　$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 5 | ↘ | $-3$ | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 5, $x=1$에서 극솟값 $-3$을 갖는다.

(2) $f(x)=3x^4-4x^3-30x^2-36x$에서

$$f'(x)=12x^3-12x^2-60x-36=12(x+1)^2(x-3)$$

$f'(x)=0$에서　$x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

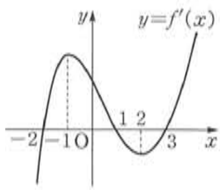
| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | 13 | ↘ | $-243$ | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 $-243$을 갖는다.

답 (1) 극댓값: 5, 극솟값: $-3$　(2) 극솟값: $-243$

대표유형 060 도함수의 그래프와 함수의 극값 • 개념 059

함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 함수 $y=f(x)$가 극댓값을 갖는 $x$의 값은?




① $-2$　② $-1$　③ $1$
④ $2$　⑤ $3$

유형 Guide　함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 주어지면 이를 이용하여 $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사한 후 $f(x)$의 극대 · 극소를 알아본다.

유형 SSEN　**$y=f'(x)$의 그래프가 주어질 때 함수 $f(x)$의 극값 ⇨ $f'(x)$의 부호를 조사한다.**

풀이　$y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(x)=0$이 되는 $x$의 값은 $-2$, $1$, $3$이므로 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

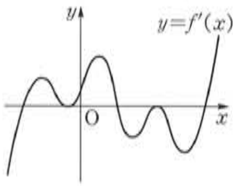
따라서 함수 $y=f(x)$가 극댓값을 갖는 $x$의 값은 $1$이다.

답 ③

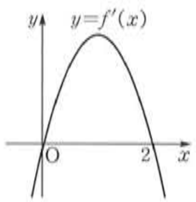
**Remark**　함수 $f(x)$의 증감표를 그리지 않고도 주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌는, 즉 $y=f'(x)$의 그래프가 $x$축의 위쪽에서 $x$축의 아래쪽으로 이어지는 $x$의 값을 찾아보면 $x=1$이므로 함수 $y=f(x)$가 극댓값을 갖는 $x$의 값은 $1$임을 알 수 있다.

정답 및 풀이 • 57쪽

**유제 060-1**　함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 함수 $y=f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 점의 개수를 구하여라.




**유제 060-2**　함수 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 5일 때, 극댓값을 구하여라. (단, $a$, $b$, $c$는 상수이다.)



## 개념 060 함수의 그래프

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같은 순서로 그린다.

(i) $f'(x)=0$인 $x$의 값을 구한다.

(ii) (i)에서 구한 $x$의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 증감표를 만든다.

(iii) 증감표를 이용하여 그래프의 개형을 그린다.

**Remark** 좌표축과의 교점의 좌표를 조사하면 그래프를 더 정확하게 그릴 수 있다.

### 개념 Approach

함수의 증가 · 감소 구간과 극댓값 · 극솟값을 구하여 증감표를 만들면 함수의 그래프를 그릴 수 있다.

예를 들어 함수 $f(x)=x^3-3x+1$의 그래프의 개형을 그려 보자.

(i) $f(x)=x^3-3x+1$에서

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

이므로 $f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$이다.

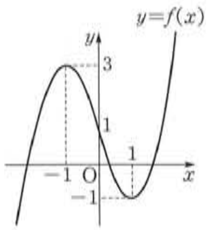
(ii) $x=-1$과 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-1$ | ↗ |

(iii) 함수 $f(x)$는 $x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=3$을 갖고, $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=1$에서 극솟값 $f(1)=-1$을 갖는다.

이때 $f(0)=1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

따라서 함수 $f(x)=x^3-3x+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




개념 SSEN $y=f(x)$의 그래프 → 증감표를 만든다.

## 대표유형 061 함수의 극대 · 극소와 그래프

• 개념 060

다음 함수의 극값을 구하고, 그 그래프를 그려라.

(1) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-1$ (2) $f(x)=-x^4+6x^2-8x-10$

**유형 Guide** 함수의 그래프를 그릴 때에는 먼저 $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값을 구한 후 이 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 증감표를 만든다.

**유형 SSEN** 함수의 그래프 그리기 ⊙ 증감표를 만든다.

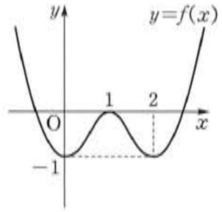
**풀이** (1) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-1$에서

$$f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ |




따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 극솟값 $-1$, $x=1$에서 극댓값 $0$을 가지므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

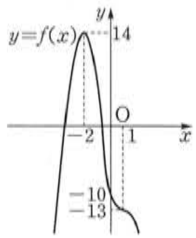
(2) $f(x)=-x^4+6x^2-8x-10$에서

$$f'(x)=-4x^3+12x-8=-4(x+2)(x-1)^2$$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | $14$ | ↘ | $-13$ | ↘ |




따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 14를 가지므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조

정답 및 풀이 • 57쪽

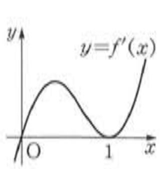
**유제 061-1** 다음 함수의 극값을 구하고, 그 그래프를 그려라.

(1) $f(x)=-x^3+3x^2-2$ (2) $f(x)=-x^4+4x^3-3$

특강 061

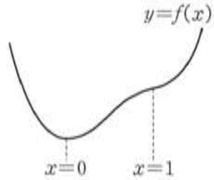
# 다항함수의 그래프의 개형과 극값을 가질 조건

다항함수는 정의역이 실수 전체의 집합이고 그래프가 점근선을 갖지 않으므로 도함수의 그래프만 주어지면 함수식에 대한 정보가 전혀 없는 경우에도 그 그래프의 개형을 그릴 수 있다. 예를 들어 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 [그림 1]과 같은 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 보자.



[그림 1]

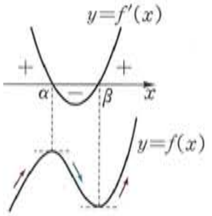
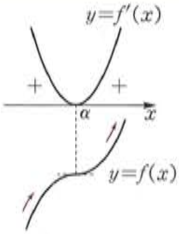
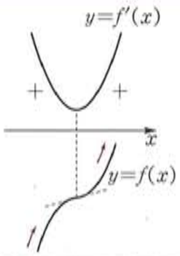
$y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(x)=0$이 되는 $x$의 값은 0, 1이다.
이때 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이다. 또 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=1$에서는 극값을 갖지 않는다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 2]와 같이 나타낼 수 있다.



[그림 2]

## 1 삼차함수의 그래프의 개형과 극값을 가질 조건

도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a>0)$의 그래프의 개형을 그려 보면 다음과 같다.

| $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근 $\alpha$, $\beta$를 갖는 경우 | $f'(x)=0$이 중근 $\alpha$를 갖는 경우 | $f'(x)=0$이 서로 다른 두 허근을 갖는 경우 |
|---|---|---|
|  |  |  |

$a<0$인 경우도 같은 방법으로 그래프를 그려 보면 삼차함수 $f(x)$는 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면 극댓값과 극솟값을 모두 갖고, 중근이나 서로 다른 두 허근을 가지면 극값을 갖지 않음을 알 수 있다.
따라서 삼차함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

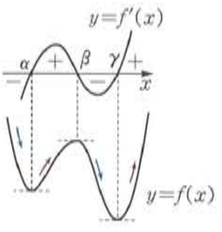
(1) 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다. ➡ 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D>0$이다.

(2) 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는다. ➡ 극댓값과 극솟값을 모두 갖지 않는다.
$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근을 갖거나 서로 다른 두 허근을 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D\le 0$이다.

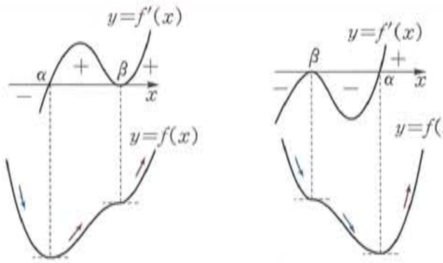
## 2 사차함수의 그래프의 개형과 극값을 가질 조건

도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 사차함수 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\ (a>0)$의 그래프의 개형을 그려 보면 다음과 같다.

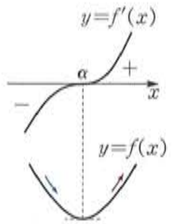
**$f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$를 갖는 경우**



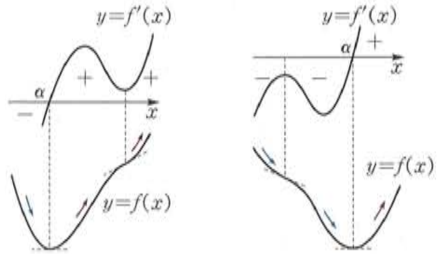

**$f'(x)=0$이 한 실근 $\alpha$와 중근 $\beta$를 갖는 경우**




**$f'(x)=0$이 삼중근 $\alpha$를 갖는 경우**




**$f'(x)=0$이 한 실근 $\alpha$와 서로 다른 두 허근을 갖는 경우**




위의 그림에서 $a>0$인 경우 사차함수 $f(x)$는 방정식 $f'(x)=0$의 근에 관계없이 항상 극솟값을 갖고, $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가질 때에만 극댓값을 가짐을 알 수 있다.
일반적으로 사차함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 최고차항이 양수일 때 ➡ 항상 극솟값을 갖는다.
① 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖는다.
$\iff$ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는다.
② 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않는다.
$\iff$ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다.

(2) 최고차항이 음수일 때 ➡ 항상 극댓값을 갖는다.
① 사차함수 $f(x)$가 극솟값을 갖는다.
$\iff$ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는다.
② 사차함수 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않는다.
$\iff$ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다.

## 대표유형 062 극값을 가질 조건

• 특강 061

다음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x)=x^3-ax^2+3x-1$이 극값을 갖도록 하는 실수 $a$의 값의 범위를 구하여라.

(2) 함수 $f(x)=x^4-4x^3+4ax^2-1$이 극댓값을 갖도록 하는 실수 $a$의 값의 범위를 구하여라.

**유형 Guide** (1) 삼차함수 $f(x)$에 대하여 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 할 때, $f(x)$가 극값을 가지려면 $D>0$이어야 하고, 극값을 갖지 않으려면 $D\le 0$이어야 한다.

(2) 사차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

**유형 SSEN** **함수 $f(x)$가 극값을 가질 조건 ➊ 방정식 $f'(x)=0$의 실근을 조사한다.**

**풀이** (1) $f(x)=x^3-ax^2+3x-1$에서 $\quad f'(x)=3x^2-2ax+3$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-9>0,\quad (a+3)(a-3)>0\quad \therefore a<-3 \text{ 또는 } a>3$$

(2) $f(x)=x^4-4x^3+4ax^2-1$에서 $\quad f'(x)=4x^3-12x^2+8ax=4x(x^2-3x+2a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 그런데 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $x^2-3x+2a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 방정식 $x^2-3x+2a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$$D=9-8a>0\quad \therefore a<\frac{9}{8}$$

이때 $x=0$이 방정식 $x^2-3x+2a=0$의 근이 아니어야 하므로 $\quad 2a\ne 0\quad \therefore a\ne 0$

따라서 구하는 실수 $a$의 값의 범위는 $\quad a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{8}$

답 (1) $a<-3$ 또는 $a>3$ (2) $a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{8}$

정답 및 풀이 • 57쪽

**유제 062-1** 함수 $f(x)=x^3-ax^2+ax-1$이 극값을 갖지 않도록 하는 실수 $a$의 값의 범위를 구하여라.

**유제 062-2** 함수 $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x^3+ax^2$이 극솟값을 갖도록 하는 실수 $a$의 값의 범위를 구하여라.

## 대표유형 063 특정 구간에서 극값을 가질 조건

• 특강 061

다음에 답하여라.

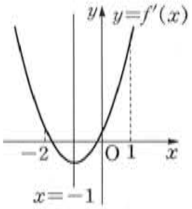
(1) 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+ax$가 $-2<x<1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 갖도록 하는 실수 $a$의 값의 범위를 구하여라.

(2) 함수 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x$가 $-1<x<1$에서 극댓값, $x>1$에서 극솟값을 갖도록 하는 실수 $a$의 값의 범위를 구하여라.

**유형 Guide** 삼차함수 $f(x)$가 주어진 구간에서 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 그 구간에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 근의 분리를 이용한다.

유형 SSEN **함수 $f(x)$가 특정 구간에서 극값을 가질 조건**
**⊙ 방정식 $f'(x)=0$의 근의 분리를 이용한다.**

**풀이** (1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+ax$에서 $\quad f'(x)=x^2+2x+a$




삼차함수 $f(x)$가 $-2<x<1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 $-2<x<1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면 $\quad \frac{D}{4}=1-a>0 \quad \therefore a<1$

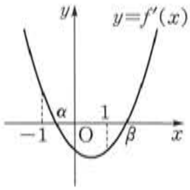
(ii) $f'(-2)=a>0 \quad \therefore a>0$

(iii) $f'(1)=3+a>0 \quad \therefore a>-3$

(iv) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-1$이고, $-2<-1<1$이다.

이상에서 구하는 실수 $a$의 값의 범위는 $\quad 0<a<1$

(2) $f(x)=x^3+ax^2-a^2x$에서 $\quad f'(x)=3x^2+2ax-a^2$




방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 $\alpha$, $\beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 $-1<\alpha<1$, $\beta>1$이어야 하므로

(i) $f'(-1)=3-2a-a^2>0, \quad a^2+2a-3<0$
$(a+3)(a-1)<0 \quad \therefore -3<a<1$

(ii) $f'(1)=3+2a-a^2<0, \quad a^2-2a-3>0$
$(a+1)(a-3)>0 \quad \therefore a<-1$ 또는 $a>3$

(i), (ii)에서 구하는 실수 $a$의 값의 범위는 $\quad -3<a<-1$

답 풀이 참조

정답 및 풀이 • 58쪽

**유제 063-1** 함수 $f(x)=x^3+(a-1)x^2-ax$가 $-1<x<1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 갖도록 하는 실수 $a$의 값의 범위를 구하여라.

**유제 063-2** 함수 $f(x)=-x^3+ax^2-ax$가 $x<1$에서 극솟값을 갖고 $1<x<2$에서 극댓값을 갖도록 하는 실수 $a$의 값의 범위를 구하여라.

## 개념 062 함수의 최대와 최소

닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속함수 $f(x)$의 최댓값, 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 주어진 구간에서 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 모두 구한다.

(ii) 주어진 구간의 양 끝 값에서의 함숫값 $f(a)$, $f(b)$를 구한다.

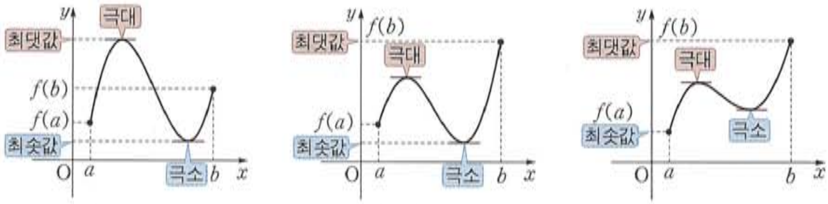
(iii) (i), (ii)에서 구한 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

**Remark** 연속함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구할 때에는 극댓값, 극솟값, 양 끝 값을 구해야 하므로 증감표를 이용하는 것이 편리하다.

### 개념 Approach

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 최대 · 최소 정리에 의하여 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다. 108쪽 • 개념 034

이때 [그림 1]과 같이 극댓값과 극솟값이 각각 최댓값과 최솟값이 되는 경우도 있고, [그림 2], [그림 3]과 같이 극댓값 또는 극솟값이 최댓값과 최솟값이 되지 않는 경우도 있다.




[그림 1] [그림 2] [그림 3]

따라서 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$를 모두 비교하여 구해야 한다.

### 개념 Check

구간 $[-3,\ 3]$에서 함수 $y=x^3-12x+8$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

**풀이** $f(x)=x^3-12x+8$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

구간 $[-3,\ 3]$에서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $-3$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $17$ | ↗ | $24$ | ↘ | $-8$ | ↗ | $-1$ |

따라서 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 $24$, $x=2$일 때 최솟값 $-8$을 갖는다.

답 최댓값: $24$, 최솟값: $-8$

## 극값이 하나뿐일 때의 함수의 최대와 최소

닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속함수 $f(x)$의 극값이 오직 하나 존재할 때, 다음이 성립한다.

① 하나뿐인 극값이 극댓값이면 (극댓값)=(최댓값)

② 하나뿐인 극값이 극솟값이면 (극솟값)=(최솟값)

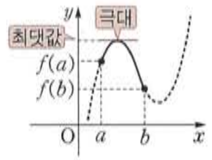
**Remark** 주어진 닫힌 구간에서 극값이 존재하지 않을 때에는 구간의 양 끝 값에서의 함숫값 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이 된다.

### 개념 Approach

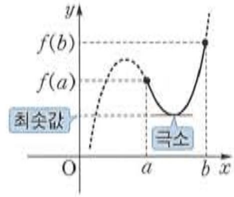
닫힌 구간에서 연속인 함수는 극댓값, 극솟값, 구간의 양 끝 값에서의 함숫값 중에서 최댓값과 최솟값을 갖는다. 이때 주어진 구간에서 극값이 하나뿐인 경우 그 극값은 반드시 최댓값 또는 최솟값이 된다.

구간 $[a,\ b]$에서 극값을 하나만 갖는 연속함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 이용하여 위의 내용을 확인해 보자.

① 구간 $[a,\ b]$에서 하나뿐인 극값이 극댓값이면 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $f(x)$의 극댓값이 최댓값이 되고, $f(a)$와 $f(b)$ 중 작은 값이 최솟값이 된다.




② 구간 $[a,\ b]$에서 하나뿐인 극값이 극솟값이면 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $f(x)$의 극솟값이 최솟값이 되고, $f(a)$와 $f(b)$ 중 큰 값이 최댓값이 된다.




### 개념 Check

구간 $[1,\ 3]$에서 함수 $y=2x^3-6x^2+3$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

**풀이** $f(x)=2x^3-6x^2+3$으로 놓으면 $f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 1\le x\le 3$)

구간 $[1,\ 3]$에서 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

| $x$ | 1 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | ↘ | $-5$ | ↗ | 3 |

따라서 $f(x)$는

$x=3$일 때 최댓값 3,

$x=2$일 때 최솟값 $-5$

를 갖는다.

답 최댓값: 3, 최솟값: $-5$

## 대표유형 064 함수의 최대 · 최소

• 개념 062, 063

다음 함수의 주어진 구간에서의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $f(x)=x^3+3x^2-9x+6$ $[-2,\ 2]$

(2) $f(x)=x^4-2x^2$ $[0,\ 3]$

**유형 Guide** 닫힌 구간에서 함수 $f(x)$가 연속이면 이 구간에서 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 갖는다.
따라서 구간 $[a,\ b]$에서 함수 $f(x)$의 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$의 값을 비교하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

**유형 SSEN** **닫힌 구간에서 함수의 최대 · 최소 ➲ 극값과 구간의 양 끝 값에서의 함숫값을 비교한다.**

**풀이** (1) $f(x)=x^3+3x^2-9x+6$에서

$$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because -2\le x\le 2$)

구간 $[-2,\ 2]$에서 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $28$ | ↘ | $1$ | ↗ | $8$ |

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-2$일 때 최댓값 28,

$x=1$일 때 최솟값 1

을 갖는다.

(2) $f(x)=x^4-2x^2$에서

$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ ($\because 0\le x\le 3$)

구간 $[0,\ 3]$에서 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $(0)$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $63$ |

따라서 함수 $f(x)$는

$x=3$일 때 최댓값 63,

$x=1$일 때 최솟값 $-1$

을 갖는다.

답 (1) 최댓값: 28, 최솟값: 1 (2) 최댓값: 63, 최솟값: $-1$

정답 및 풀이 • 58쪽

**유제 064-1** 다음 함수의 주어진 구간에서의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $f(x)=-2x^3+5x^2-4x+2$ $[0,\ 3]$

(2) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+10$ $[-1,\ 1]$

## 대표유형 065 최대 · 최소가 주어진 함수의 미정계수의 결정

• 개념 062, 063

구간 $[-1,\ 2]$에서 함수 $f(x)=ax^3-6ax^2+b$의 최댓값이 2, 최솟값이 $-30$일 때, 상수 $a$, $b$의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

**유형 Guide** 주어진 구간에서의 극값과 양 끝 값에서의 함숫값을 구한 후, 미정계수의 범위에 맞게 최댓값과 최솟값을 정한다.

유형 55EN **최대 · 최소가 주어진 함수의 미정계수의 결정**
**⊙ 극값과 구간의 양 끝 값에서의 함숫값을 비교한다.**

**풀이** $f(x)=ax^3-6ax^2+b$에서

$f'(x)=3ax^2-12ax=3ax(x-4)\ (a>0)$

$f'(x)=0$에서 $x=0\ (\because -1\le x\le 2)$

구간 $[-1,\ 2]$에서 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $b-7a$ | ↗ | $b$ | ↘ | $b-16a$ |

이때 $a>0$이므로

$b-16a<b-7a<b$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=0$일 때 최댓값 $b$,

$x=2$일 때 최솟값 $b-16a$

를 갖는다.

즉 $b=2$, $b-16a=-30$이므로

$a=2$, $b=2$

답 $a=2$, $b=2$

정답 및 풀이 • 59쪽

**유제 065-1** 구간 $[1,\ 4]$에서 함수 $f(x)=ax^4-4ax^3+b$의 최댓값이 6, 최솟값이 $-3$일 때, 상수 $a$, $b$에 대하여 $ab$의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

**유제 065-2** 구간 $[-2,\ 3]$에서 함수 $f(x)=-x^3+12x+a$의 최댓값이 20일 때, $f(x)$의 최솟값을 구하여라. (단, $a$는 상수이다.)

## 대표유형 066 최대 · 최소의 활용 – 길이

• 개념 062, 063

곡선 $y=x^2$ 위를 움직이는 점 P와 점 $(-3,\ 0)$ 사이의 거리를 $l$이라 할 때, $l$이 최소가 될 때의 점 P의 좌표를 구하여라.

**유형Guide** 점 P의 좌표를 $(t,\ t^2)$으로 놓고 $l$을 $t$에 대한 함수로 나타낸 다음, 이 함수의 최솟값을 구한다.

**유형 SSEN** 길이의 최대 · 최소 ⊙ 길이를 한 문자에 대한 함수로 나타낸 후 극값을 구한다.

**풀이** 점 P의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면

$$l^2=(t+3)^2+(t^2-0)^2=t^4+t^2+6t+9$$

$f(t)=t^4+t^2+6t+9$로 놓으면

$$f'(t)=4t^3+2t+6=2(2t^3+t+3)$$
$$=2(t+1)(2t^2-2t+3)$$

이때 $2t^2-2t+3=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$이므로 $f'(t)=0$에서

$$t=-1$$

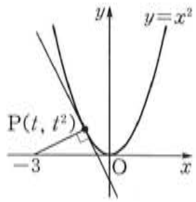
따라서 $f(t)$의 증감표는 오른쪽과 같고, 함수 $f(t)$는 $t=-1$일 때 극소이면서 최소이므로

$$\mathrm{P}(-1,\ 1)$$

| $t$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(t)$ | ↘ | 극소 | ↗ |

답 $(-1,\ 1)$

**다른 풀이** 점 P의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면 오른쪽 그림과 같이 점 P에서의 접선과 두 점 $(-3,\ 0)$, $(t,\ t^2)$을 잇는 직선이 수직일 때 $l$이 최소가 된다.




점 P에서의 접선의 기울기는 $y'=2x$에서 $2t$이므로

$$2t\cdot\frac{t^2-0}{t-(-3)}=-1$$

$$2t^3+t+3=0,\qquad (t+1)(2t^2-2t+3)=0$$

이때 $2t^2-2t+3=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$이므로 $\quad t=-1$

$$\therefore \mathrm{P}(-1,\ 1)$$

정답 및 풀이 • 59쪽

**유제 066-1** 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(10,\ 1)$에 대하여 점 P가 곡선 $y=x^2+2$ 위를 움직일 때, $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 최솟값을 구하여라.

## 대표유형 067 최대 · 최소의 활용 – 넓이

• 개념 062, 063

곡선 $y=9-x^2$과 $x$축으로 둘러싸인 부분에 내접하고, 한 변이 $x$축 위에 있는 직사각형 중에서 넓이가 최대인 직사각형의 $y$축과 평행한 변의 길이를 구하여라.

**유형 Guide** 곡선 $y=9-x^2$은 $y$축에 대하여 대칭이므로 구하는 직사각형이 곡선 $y=9-x^2$과 만나는 두 점의 좌표를 각각 $(a,\ 9-a^2)$, $(-a,\ 9-a^2)$으로 놓을 수 있다. 이때 직사각형은 곡선 $y=9-x^2$과 $x$축으로 둘러싸인 부분에 내접하므로 $0<a<3$임에 주의한다.

**유형 SSEN** 넓이의 최대 · 최소 ➡ 넓이를 한 문자에 대한 함수로 나타낸 후 극값을 구한다.

**풀이** 오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD의 한 꼭짓점 D의 $x$좌표를 $a$라 하면

$D(a,\ 9-a^2)$, $A(-a,\ 9-a^2)$ $(0<a<3)$

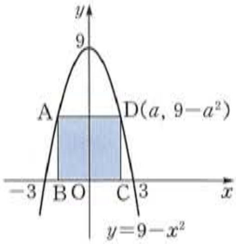
직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2a(9-a^2)=-2a^3+18a$

$\therefore S'(a)=-6a^2+18=-6(a^2-3)$

$=-6(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})$

$S'(a)=0$에서 $a=\sqrt{3}$ $(\because 0<a<3)$




$0<a<3$에서 $S(a)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

| $a$ | (0) | $\cdots$ | $\sqrt{3}$ | $\cdots$ | (3) |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(a)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $S(a)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | |

따라서 넓이 $S(a)$는 $a=\sqrt{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 이때 직사각형의 $y$축과 평행한 변의 길이는

$\overline{CD}=9-a^2=9-(\sqrt{3})^2=6$

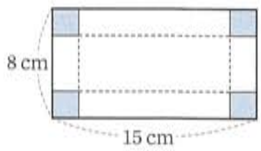
답 6

정답 및 풀이 • 59쪽

**유제 067-1** 두 곡선 $y=x^2-3$, $y=3-x^2$으로 둘러싸인 부분에 내접하고, 한 변이 $x$축에 평행한 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.

**대표유형 068** 최대 · 최소의 활용 – 부피 • 개념 062, 063

오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 15 cm, 세로의 길이가 8 cm인 직사각형 모양의 양철판의 네 모퉁이에서 같은 크기의 정사각형을 잘라내고 남은 부분을 접어서 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 상자를 만들려고 한다. 이 상자의 부피가 최대가 되도록 할 때, 잘라낼 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.




**유형 Guide** 잘라낼 정사각형의 한 변의 길이를 $x$ cm라 하고 상자의 부피를 $x$에 대한 함수로 나타낸 후, 이 함수의 최댓값을 구한다. 이때 모퉁이를 잘라낸 후의 상자의 가로와 세로의 길이가 모두 양수임을 이용하여 $x$의 값의 범위를 구한다.

유형 5SEN **부피의 최대 · 최소 ⊙ 부피를 한 문자에 대한 함수로 나타낸 후 극값을 구한다.**

**풀이** 잘라낼 정사각형의 한 변의 길이를 $x$ cm라 하면 상자의 밑면의 가로, 세로의 길이는 각각

$(15-2x)$ cm, $(8-2x)$ cm

이므로 $x$의 값의 범위는 $0<x<4$이다. 상자의 부피를 $V(x)$ cm$^3$라 하면

$V(x)=x(15-2x)(8-2x)=4x^3-46x^2+120x$

$V'(x)=12x^2-92x+120=4(3x-5)(x-6)$

$x>0,\ 15-2x>0,\ 8-2x>0$ 이어야 하므로 $0<x<4$

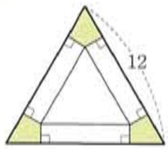
$V'(x)=0$에서 $x=\frac{5}{3}$ $(\because 0<x<4)$

따라서 $V(x)$의 증감표는 오른쪽과 같고, $V(x)$는 $x=\frac{5}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 잘라낼 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{5}{3}$ cm이다. 답 $\frac{5}{3}$ cm

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\frac{5}{3}$ | $\cdots$ | $(4)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $V(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | |

정답 및 풀이 • 59쪽

**유제 068-1** 한 변의 길이가 12인 정삼각형 모양의 종이에서 오른쪽 그림과 같이 세 모퉁이에서 합동인 사각형을 잘라내고 남은 부분으로 뚜껑이 없는 삼각기둥 모양의 상자를 만들려고 한다. 이때 상자의 부피의 최댓값을 구하여라.




**유제 068-2** 오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 3인 원뿔에 원기둥이 내접하고 있다. 이 원기둥의 부피가 최대일 때, 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 구하여라.

# 중단원 연습 문제

정답 및 풀이 • 60쪽

## STEP 1 유형 Training

서술형

**01** 함수 $f(x)=-x^3+ax^2+bx$가 증가하는 $x$의 값의 범위가 $-2<x<4$일 때, 상수 $a$, $b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

**02** 함수 $f(x)=-x^3+2x^2+kx+3$이 임의의 두 수 $x_1$, $x_2$에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$를 만족시킬 때, 실수 $k$의 값의 범위를 구하여라.

서술형

**03** 함수 $f(x)=x^3+ax^2+9x+b$가 $x=1$에서 극댓값 $c$를 갖고 $x=d$에서 극솟값 1을 갖도록 하는 상수 $a$, $b$, $c$, $d$에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

**04** 함수 $f(x)=-x^4+6x^2+8x-6$에 대하여 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

**보 기**

ㄱ. $f(x)$는 극값을 3개 갖는다.
ㄴ. $f(x)$는 구간 $(0,\ 1)$에서 증가한다.
ㄷ. $y=f(x)$의 치역은 $\{y\,|\,y\le 18\}$이다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄴ　　④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

서술형

**05** 함수 $f(x)=x^3+kx^2+3x+2$가 극값을 갖지 않도록 하는 정수 $k$의 개수를 구하여라.

**06** 구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $y=-x^3+3x^2+9x-1$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 할 때, $M+m$의 값을 구하여라.

**07** $1\leq x\leq 3$에서 함수 $f(x)=ax^3-3ax^2+b$가 최댓값 4, 최솟값 $-16$을 가질 때, 상수 $a$, $b$에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $a>0$)

① $\frac{15}{2}$ ② 8 ③ $\frac{17}{2}$ ④ 9 ⑤ $\frac{19}{2}$

서술형

**08** 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$와 곡선 $y=x^2-1$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 이때 $\overline{\mathrm{AP}}^2$의 최솟값을 구하여라.

STEP 2 실전 Application

**09** 삼차함수 $f(x)=x^3+3x-1$에 대하여 부등식

$$f(2x^2+5x+2)\leq\{f(x)\}^3+3f(x)-1$$

을 만족시키는 $x$의 최솟값을 $\alpha$라 할 때, $f(\alpha)$의 값은?

① 3 ② 13 ③ 35 ④ 65 ⑤ 139

평가원기출

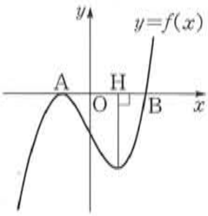
**10** 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+3ax$의 역함수가 존재하도록 하는 상수 $a$의 최댓값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

정답 및 풀이 • 61쪽

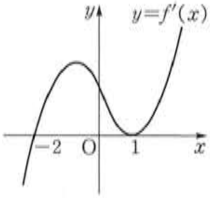
**11** 함수 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}ax^2-6a^2x$의 극댓값과 극솟값의 차가 $\frac{1}{2}$일 때, 상수 $a$의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

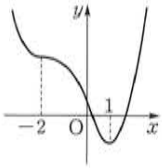
**12** 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $x$축에 접하고, 점 B에서 $x$축과 만난다. 함수 $f(x)$가 $x=p$에서 극솟값을 가질 때, 점 $(p,\ f(p))$에서 $x$축에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{\mathrm{AH}}=\frac{2}{3}$일 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이는?

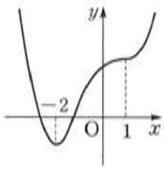


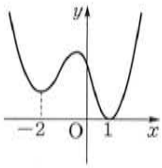

① 1　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{5}{3}$　④ 2　⑤ 3

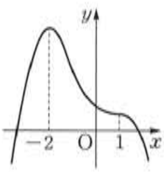
**13** 함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

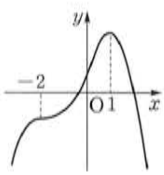



①



②



③



④



⑤



**14** 함수 $y=|2x^3-9x^2+12x|$가 극대 또는 극소가 되는 점의 개수를 구하여라.

서술형

**15** 함수 $f(x)=x^4-2(a+1)x^2-4ax$에 대하여 $f(x)$가 극댓값을 가질 때, 상수 $a$의 값의 범위를 구하여라.

평가원기출

**16** 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$는 $x=a$에서 극솟값 $b$를 가진다. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2,\ f(2))$에서 접하는 직선을 $l$이라 할 때, 점 $(a,\ b)$에서 직선 $l$까지의 거리가 $d$이다. $90d^2$의 값을 구하여라.

**17** 두 함수 $f(x)=2x^3-6x-4$, $g(x)=-x^2+3$에 대하여 $(f\circ g)(x)$의 최댓값은?

① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

**18** $0\le x\le 1$에서 $f(x)=-x^3+\frac{3}{2}ax^2-a$의 최댓값을 $g(a)$라 할 때, 함수 $g(a)$를 구하여라. (단, $a$는 상수이다.)

서술형

**19** 곡선 $y=-x^2+2x$ $(0<x<2)$ 위의 점 P에서 $x$축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 OPH의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, O는 원점이다.)

STEP 3 심화 Forwarding

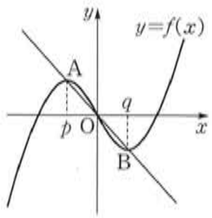
평가원기출

**20** 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$이다. 함수 $y=f(x)$가 구간 $(-\infty, 0)$에서 감소하고 구간 $(2, \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$에 대하여 $a^2+b^2$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 하자. $M+m$의 값은?

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{43}{8}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{45}{8}$ ⑤ $\frac{23}{4}$

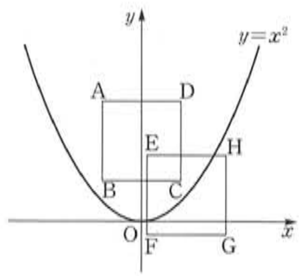
서술형

**21** 오른쪽 그림과 같이 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고 $x=p$에서 극대, $x=q$에서 극소이다. 극댓값을 갖는 점 A와 극솟값을 갖는 점 B를 잇는 직선 AB의 기울기가 $-\frac{4}{3}$일 때, $f(3)$의 값을 구하여라.




평가원기출

**22** 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표는 (0, 1)이고, 한 변의 길이가 1인 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점은 곡선 $y=x^2$ 위에 있다. 두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이의 최댓값은?
(단, 정사각형의 모든 변은 $x$축 또는 $y$축에 평행하다.)




① $\frac{4}{27}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{5}{27}$ ④ $\frac{11}{54}$ ⑤ $\frac{2}{9}$

07 도함수의 활용 (2)

# 08

# 도함수의 활용 (3)

시간에 따른 물체의 움직임은 이동 거리를 시간으로 나눈 평균속도로 나타낼 수 있다. 그러나 일상에서의 물체의 움직임은 그 속도가 일정하지 않다. 예를 들어 투수가 던진 공의 속력이 150 km/h라 할 때, 투수의 글러브를 떠나는 순간의 공의 속력과 포수의 글러브로 들어가는 순간의 공의 속력은 다르다. 이와 같은 순간속도를 계산하는 방법도 있을까? 또 점점 빨라지거나 점점 느려지는 공의 가속도를 계산할 수 있을까?

이 단원에서는 **수학** I 에서 배운 방정식의 실근의 개수와 함수의 그래프 사이의 관계를 바탕으로 도함수를 이용하여 방정식의 해의 존재 범위를 알아보고, 부등식을 증명해 보자.
또 도함수를 이용하여 수직선 위를 움직이는 물체의 순간속도와 가속도를 구하는 방법을 알아보자.

한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

**20 방정식과 부등식에의 활용**

- 함수의 그래프를 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있다.
- 함수의 최대 · 최소를 이용하여 부등식을 증명할 수 있다.

**21 속도와 가속도**

- 도함수를 이용하여 움직이는 물체의 속도와 가속도를 구할 수 있다.
- 도함수를 이용하여 시각에 대한 길이, 넓이, 부피의 변화율을 구할 수 있다.

| 개념 & 특강 | 대표유형 & 유제 | | |
|---|---|---|---|
| 064 방정식의 실근의 개수 | 069 방정식의 실근의 개수 | 070 방정식의 실근의 부호 | |
| 065 삼차방정식의 근의 판별 | 071 삼차방정식의 근의 판별 | | |
| 066 모든 실수에 대하여 성립하는 부등식의 증명 | 072 부등식의 증명 | 073 부등식에의 활용 | |
| 067 $x>a$에서 성립하는 부등식의 증명 | | | |
| 068 속도와 가속도 | 074 수직선 위를 움직이는 물체의 속도와 가속도 | 075 속도, 가속도와 그래프 | 076 속도와 가속도의 활용 |
| 069 시각에 대한 변화율 | 077 시각에 대한 변화율 – 길이 | 078 시각에 대한 변화율 – 넓이, 부피 | |

개념 064

## 방정식의 실근의 개수

방정식의 실근과 함수의 그래프 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

① 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수

$\Longleftrightarrow$ 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수

② 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수

$\Longleftrightarrow$ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축의 교점의 개수

**Remark** 방정식 $f(x)=g(x)$에서 $f(x)-g(x)=0$이므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프와 $x$축의 교점의 개수와 같다.

개념 Approach

**수학** I 에서 이차방정식의 실근의 개수를 구할 때, 실근을 직접 구하지 않아도 방정식 $f(x)=0$의 실근이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축의 교점의 $x$좌표와 같음을 이용하여 실근의 개수를 쉽게 구할 수 있었다.

여기에서는 도함수를 이용하여 함수의 그래프를 그려 삼차 이상의 방정식의 실근의 개수를 쉽게 구하는 방법에 대하여 알아보자.

예를 들어 방정식 $x^3+3x^2-1=0$의 실근의 개수를 함수의 그래프를 이용하여 구해 보자.

$f(x)=x^3+3x^2-1$로 놓으면

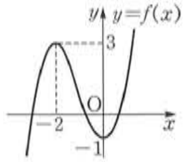
$$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$$

$f'(x)=0$에서

$$x=-2 \text{ 또는 } x=0$$

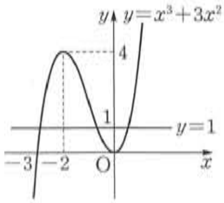
함수 $f(x)$의 증감표와 그래프는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ |




따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x$축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

이때 방정식 $x^3+3x^2-1=0$을 $x^3+3x^2=1$과 같이 변형하여 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=x^3+3x^2$의 그래프와 직선 $y=1$로 나타내어도 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 가짐을 알 수 있다.



대표유형 069 방정식의 실근의 개수 • 개념 064

다음 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라.

(1) $x^3-12x+11=0$ (2) $2x^4-3x=x^4+x-2$

유형 Guide (1) 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프와 $x$축의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

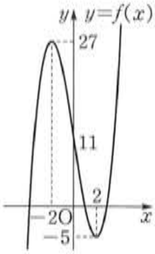
유형 SSEN **방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수 ⊙ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축의 교점의 개수**

풀이 (1) $f(x)=x^3-12x+11$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $27$ | ↘ | $-5$ | ↗ |




따라서 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x$축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

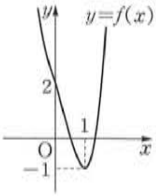
(2) $2x^4-3x=x^4+x-2$에서 $x^4-4x+2=0$

$f(x)=x^4-4x+2$로 놓으면 $f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x^2+x+1>0$)

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-1$ | ↗ |




따라서 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x$축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

답 (1) 3 (2) 2

정답 및 풀이 • 66쪽

**유제 069-1** 다음 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라.

(1) $x^4-2x^2-1=0$ (2) $x^3-4x^2+3=2x^2-9x$

## 대표유형 070 방정식의 실근의 부호

• 개념 064

방정식 $x^3-x^2+a=2x^2+9x$가 한 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 갖도록 하는 실수 $a$의 값의 범위를 구하여라.

**유형 Guide** 방정식 $f(x)=g(x)$가 한 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 가지려면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 $x$좌표가 한 개는 양수, 두 개는 음수이어야 한다.

**유형 SSEN** 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근 ⭘ 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 $x$좌표

**풀이** $x^3-x^2+a=2x^2+9x$에서

$-x^3+3x^2+9x=a$

$f(x)=-x^3+3x^2+9x$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

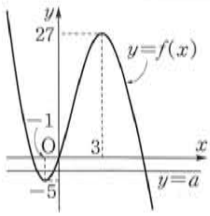
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-5$ | ↗ | $27$ | ↘ |

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=a$와의 교점의 $x$좌표가 한 개는 양수이고 두 개는 음수이어야 하므로

$-5<a<0$




답 $-5<a<0$

**다른 풀이** $x^3-x^2+a=2x^2+9x$에서

$x^3-3x^2-9x+a=0$

$f(x)=x^3-3x^2-9x+a$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

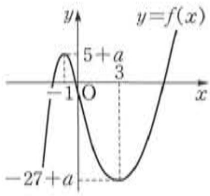
함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $5+a$ | ↘ | $-27+a$ | ↗ |

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$축과의 교점의 $x$좌표가 한 개는 양수이고 두 개는 음수이어야 하므로

$f(-1)=5+a>0$, $f(0)=a<0$

$\therefore -5<a<0$




정답 및 풀이 • 66쪽

**유제 070-1** 방정식 $x^3-6x=a$가 한 개의 음근과 서로 다른 두 개의 양근을 가질 때, 실수 $a$의 값의 범위를 구하여라.

**유제 070-2** 방정식 $x^3-2x^2-4x-a=0$이 한 개의 양근과 음의 이중근을 가질 때, 실수 $a$의 값을 구하여라.

개념 065

# 삼차방정식의 근의 판별

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 극값을 가질 때, 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 근은 극값을 이용하여 다음과 같이 판별할 수 있다.

① (극댓값)×(극솟값)$<0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 세 실근

② (극댓값)×(극솟값)$=0 \Longleftrightarrow$ 한 실근과 중근 (서로 다른 두 실근)

③ (극댓값)×(극솟값)$>0 \Longleftrightarrow$ 한 실근과 두 허근

**Remark** 삼차함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않으면 방정식 $f(x)=0$은 삼중근을 갖거나 한 실근과 두 허근을 갖는다.

**개념 Approach**

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a>0)$의 극값이 존재하면 그 도함수는

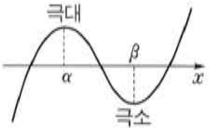
$$f'(x)=3a(x-\alpha)(x-\beta)\ (\alpha<\beta)$$

꼴이고, $f(\alpha)$와 $f(\beta)$는 극값이 된다. 이때 극댓값과 극솟값의 곱 $f(\alpha)f(\beta)$의 부호에 따라 삼차방정식 $f(x)=0$의 근을 다음과 같이 판별할 수 있다.

① $f(\alpha)f(\beta)<0$일 때,

극댓값과 극솟값의 부호가 다르므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

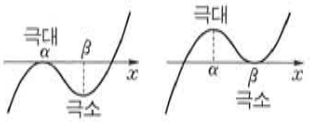
따라서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.




② $f(\alpha)f(\beta)=0$일 때,

극댓값 또는 극솟값이 0이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

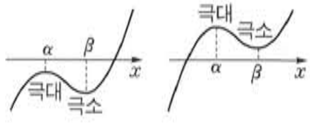
따라서 방정식 $f(x)=0$은 한 실근과 중근을 갖는다.




③ $f(\alpha)f(\beta)>0$일 때,

극댓값과 극솟값의 부호가 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

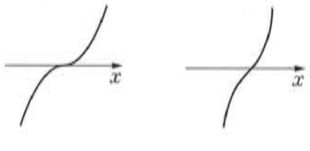
따라서 방정식 $f(x)=0$은 한 실근과 두 허근을 갖는다.




한편 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a>0)$의 극값이 존재하지 않을 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 두 가지 중 하나이다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 삼중근을 갖거나 한 실근과 두 허근을 갖는다.

(i) 삼중근 (ii) 한 실근과 두 허근




개념 SSEN 삼차방정식의 근의 판별 → (극댓값)×(극솟값)의 부호 조사

개념 Check

다음 삼차방정식의 근을 판별하여라.

(1) $2x^3-6x^2+3=0$ (2) $x^3-3x-2=0$ (3) $x^3-6x^2+9x+2=0$

풀이 (1) $f(x)=2x^3-6x^2+3$으로 놓으면

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

$\therefore$ (극댓값)$=f(0)=3$,

(극솟값)$=f(2)=-5$

따라서 (극댓값)$\times$(극솟값)$<0$이므로

방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

(2) $f(x)=x^3-3x-2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

$\therefore$ (극댓값)$=f(-1)=0$,

(극솟값)$=f(1)=-4$

따라서 (극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이므로

방정식 $f(x)=0$은 한 실근과 중근을 갖는다.

(3) $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

$\therefore$ (극댓값)$=f(1)=6$,

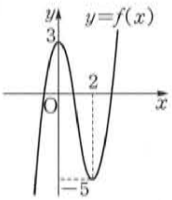
(극솟값)$=f(3)=2$

따라서 (극댓값)$\times$(극솟값)$>0$이므로

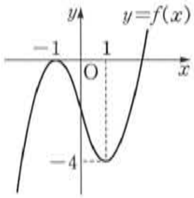
방정식 $f(x)=0$은 한 실근과 두 허근을 갖는다.

답 풀이 참조

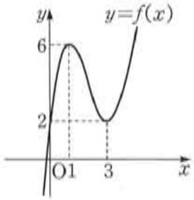
**Remark** (1)




(2)




(3)



## 대표유형 071 삼차방정식의 근의 판별

• 개념 064, 065

삼차방정식 $x^3-3x-n=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 $n$의 개수를 구하여라.

**유형 Guide** 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가질 때, $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 $\alpha$, $\beta$라 하면 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가질 조건은 $f(\alpha)f(\beta)<0$이다.

**유형 SSEN** **삼차방정식 $f(x)=0$의 근의 판별 ○ $f(x)$의 (극댓값)×(극솟값)의 부호를 조사한다.**

**풀이** $f(x)=x^3-3x-n$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

$\therefore$ (극댓값)$=f(-1)=2-n$,

(극솟값)$=f(1)=-2-n$

방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 (극댓값)×(극솟값)$<0$이어야 하므로

$(2-n)(-2-n)<0$, $(n+2)(n-2)<0$

$\therefore -2<n<2$

따라서 정수 $n$은 $-1$, $0$, $1$의 3개이다.

답 3

**다른 풀이** $x^3-3x=n$에서 $f(x)=x^3-3x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

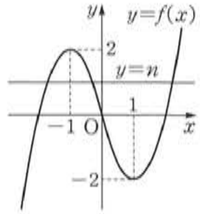
함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-2$ | ↗ |

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=n$이 서로 다른 세 점에서 만나려면

$-2<n<2$

따라서 정수 $n$은 $-1$, $0$, $1$의 3개이다.




정답 및 풀이 • 66쪽

**유제 071-1** 삼차방정식 $x^3-4x=8x+k$가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 실수 $k$의 값을 구하여라.

## 개념 066 모든 실수에 대하여 성립하는 부등식의 증명

모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $f(x)>0$ 또는 $f(x)<0$이 성립함을 다음과 같이 증명할 수 있다.

① 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립한다.

➡ 함수 $f(x)$에 대하여 ($f(x)$의 최솟값)$>0$임을 보인다.

② 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $f(x)<0$이 성립한다.

➡ 함수 $f(x)$에 대하여 ($f(x)$의 최댓값)$<0$임을 보인다.

**Remark**
- 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립함을 증명하려면 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고, $h(x)>0$임을 보인다.
- 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립함을 증명하려면 함수 $f(x)$에 대하여 ($f(x)$의 최솟값)$\geq 0$임을 보인다.

### 개념 Approach

모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 항상 $x$축의 위쪽에 있어야 한다.

즉 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립함을 증명하려면 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 이용하여 $f(x)$의 최솟값을 찾고, 그 최솟값이 0보다 크다는 것을 보이면 된다.

예를 들어 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $x^4-4x+5>0$이 성립함을 증명해 보자.

$f(x)=x^4-4x+5$로 놓으면

$$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ ($\because x^2+x+1>0$)

함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

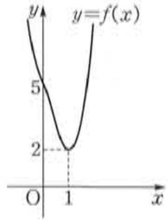
| $x$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | 2 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 2이므로

$$f(x)>0$$

이다.

따라서 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $x^4-4x+5>0$이 성립한다.




같은 방법으로 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $f(x)<0$이 성립함을 증명하려면 함수 $f(x)$의 최댓값이 0보다 작다는 것을 보이면 된다.

**개념 SSEN**

모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)>0$ ⟶ ($f(x)$의 최솟값)$>0$

모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)<0$ ⟶ ($f(x)$의 최댓값)$<0$

개념 067

## $x>a$에서 성립하는 부등식의 증명

$x>a$에서 부등식 $f(x)>0$이 성립함을 다음과 같이 증명할 수 있다.

① 함수 $f(x)$의 극값이 존재할 때

➡ $x>a$에서 ($f(x)$의 최솟값)$>0$임을 보인다.

② 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않을 때

➡ $x>a$에서 함수 $f(x)$가 증가하고, $f(a)\geq 0$임을 보인다.

즉 $f'(x)>0$, $f(a)\geq 0$임을 보인다.

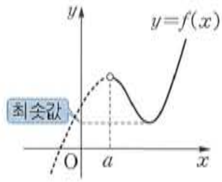
**Remark** $x>a$에서 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립함을 증명하려면 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고, $x>a$에서 $h(x)>0$임을 보인다.

개념 **Approach**

그래프를 이용하여 위의 내용을 확인해 보자.

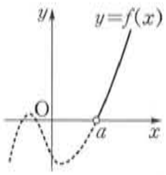
① $x>a$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 0보다 크면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x>a$에서 ($f(x)$의 최솟값)$>0$이면 $x>a$인 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립함을 알 수 있다.

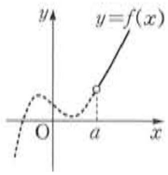



② $x>a$에서 증가하는 함수 $f(x)$에 대하여 그 그래프는 $f(a)=0$이면 [그림 1]과 같고, $f(a)>0$이면 [그림 2]와 같다.

따라서 $x>a$에서 함수 $f(x)$가 증가하고 $f(a)\geq 0$이면 $x>a$인 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립함을 알 수 있다.



[그림 1]



[그림 2]

예를 들어 $x>1$에서 부등식 $2x^3-6x+5>0$이 성립함을 증명해 보자.

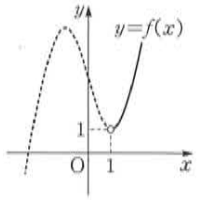
$f(x)=2x^3-6x+5$로 놓으면 $\quad f'(x)=6x^2-6$

이때 $x>1$이면 $f'(x)>0$이므로 $x>1$에서 함수 $f(x)$는 증가하고, $f(1)=1>0$이므로 $x>1$인 모든 실수 $x$에 대하여

$$f(x)>0$$

이다.

따라서 $x>1$에서 부등식 $2x^3-6x+5>0$이 성립한다.




개념 SSEN

$x>a$에서 $f(x)>0$ → $x>a$에서 ($f(x)$의 최솟값)$>0$

$x>a$에서 $f(x)>0$ → $x>a$에서 $f'(x)>0$, $f(a)\geq 0$

08 도함수의 활용 (3)

## 대표유형 072 부등식의 증명

• 개념 066, 067

다음에 답하여라.

(1) 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $2x^4-4x^2+3>0$이 성립함을 보여라.

(2) $x>1$일 때, 부등식 $2x^3+8x>6x^2+1$이 성립함을 보여라.

**유형Guide** (1) 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립함을 증명하려면 ($f(x)$의 최솟값)$>0$임을 보인다.

(2) $x>a$에서 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않을 때, 부등식 $f(x)>0$이 성립함을 증명하려면 $x>a$에서 $f'(x)>0$, $f(a)\ge 0$임을 보인다.

유형 SSEN **부등식 $f(x)>0$의 증명 ○ ($f(x)$의 최솟값)$>0$임을 보인다.**

**풀이** (1) $f(x)=2x^4-4x^2+3$으로 놓으면

$$f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $1$ | ↗ | $3$ | ↘ | $1$ | ↗ |

즉 함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 1이므로

$$f(x)>0$$

따라서 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $2x^4-4x^2+3>0$이 성립한다.

(2) $f(x)=2x^3+8x-(6x^2+1)$로 놓으면

$$f(x)=2x^3-6x^2+8x-1$$

$$f'(x)=6x^2-12x+8=6(x-1)^2+2>0$$

$x>1$일 때 $f'(x)>0$이므로 $x>1$에서 함수 $f(x)$는 증가하고, $f(1)=3$이므로

$$f(x)>0$$

따라서 $x>1$일 때, 부등식 $2x^3+8x>6x^2+1$이 성립한다.

답 풀이 참조

정답 및 풀이 • 67쪽

**유제 072-1** 다음에 답하여라.

(1) 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $x^4+5x\ge x-3$이 성립함을 보여라.

(2) $x\ge 0$일 때, 부등식 $x^3-x^2-x+1\ge 0$이 성립함을 보여라.

## 대표유형 073 부등식에의 활용

• 개념 066, 067

모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $x^4+2ax^2-4(a+1)x+a^2>0$이 성립할 때, 양의 실수 $a$의 값의 범위를 구하여라.

**유형 Guide** 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립하면 ($f(x)$의 최솟값)$>0$임을 이용한다.

**유형 SSEN** **부등식 $f(x)>0$이 성립 ➡ ($f(x)$의 최솟값)$>0$**

**풀이** $f(x)=x^4+2ax^2-4(a+1)x+a^2$으로 놓으면

$$f'(x)=4x^3+4ax-4(a+1)=4(x^3+ax-a-1)$$
$$=4(x-1)(x^2+x+a+1)$$

$a>0$이므로

$$x^2+x+a+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+a+\frac{3}{4}>0$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $a^2-2a-3$ | $\nearrow$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $a^2-2a-3$이므로 모든 실수 $x$에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

$$a^2-2a-3>0, \quad (a+1)(a-3)>0$$
$$\therefore a<-1 \text{ 또는 } a>3$$

그런데 $a>0$이므로 $\quad a>3$

답 $a>3$

정답 및 풀이 • 67쪽

**유제 073-1** 두 함수 $f(x)=4x^3-6x$, $g(x)=3x^2-a$에 대하여 구간 $[-1, 2]$에서 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립하도록 하는 실수 $a$의 값의 범위를 구하여라.

개념 068

# 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 위치 $x$가 $x=f(t)$일 때, 시각 $t$에서 점 P의 속도를 $v$, 가속도를 $a$라 하면 다음이 성립한다.

① $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$  ② $a=\dfrac{dv}{dt}$

**Remark** 속도의 절댓값 $|v|$를 시각 $t$에서 점 P의 **속도의 크기** 또는 **속력**이라 하고, $|a|$를 **가속도의 크기**라 한다.

개념 Approach

움직이는 물체의 위치는 시각에 대한 함수로 나타낼 수 있고, 이때 속도는 시각에 대한 위치의 변화율, 가속도는 시각에 대한 속도의 변화율을 의미하므로 위치와 속도의 함수를 시각에 대하여 각각 미분하면 물체의 속도와 가속도를 구할 수 있다.

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 위치를 좌표 $x$로 나타내면 $x$는 $t$의 함수이다. 이 함수를 $x=f(t)$라 하면 시각 $t$에서 $t+\Delta t$까지 점 P의 위치 $x$의 평균변화율은

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

이고, 이것은 시각 $t$에서 $t+\Delta t$까지의 점 P의 평균속도가 된다.

$\Delta t \longrightarrow 0$일 때의 위치의 평균변화율의 극한값, 즉 시각 $t$에서의 위치 $x$의 순간변화율

$$\frac{dx}{dt}=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=f'(t)$$

를 시각 $t$에서의 점 P의 순간속도 또는 속도라 하고 보통 $v$로 나타낸다. 즉 $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$이다.

또 수직선 위를 움직이는 점 P의 속도 $v$도 시각 $t$의 함수이므로 $\Delta t \longrightarrow 0$일 때의 속도의 평균변화율의 극한값, 즉 시각 $t$에서의 속도 $v$의 순간변화율

$$\frac{dv}{dt}=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$

를 시각 $t$에서의 점 P의 가속도라 하고 보통 $a$로 나타낸다. 즉 $a=\dfrac{dv}{dt}$이다.

개념 SSEN  위치 $x$ $\xrightarrow{\text{미분}}$ 속도 $v=\dfrac{dx}{dt}$ $\xrightarrow{\text{미분}}$ 가속도 $a=\dfrac{dv}{dt}$

개념 Check

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 좌표가 $x=3t^2-9t+6$일 때, $t=2$에서의 속도와 가속도를 구하여라.

**풀이** 시각 $t$에서의 속도 $v$와 가속도 $a$는  $v=\dfrac{dx}{dt}=6t-9,\ a=\dfrac{dv}{dt}=6$

따라서 $t=2$에서의 속도와 가속도는  $v=6\cdot 2-9=3,\ a=6$  답 속도: 3, 가속도: 6

## 대표유형 074 수직선 위를 움직이는 물체의 속도와 가속도

• 개념 068

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 $t$초 후의 위치가 $x=t^3-4t^2+3t$일 때, 다음에 답하여라.

(1) 점 P가 마지막으로 원점을 통과할 때의 속도를 구하여라.
(2) 점 P의 가속도가 4일 때, 점 P의 위치를 구하여라.

**유형 Guide** 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 위치 $x$가 $x=f(t)$로 주어질 때, 시각 $t$에서의

속도는 $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$, 가속도는 $a=\dfrac{dv}{dt}$

이다. 즉 위치를 미분하면 속도, 속도를 미분하면 가속도임을 이용한다.

**유형 SSEN** 위치 $x$ ➡ 속도 $v=\dfrac{dx}{dt}$ ➡ 가속도 $a=\dfrac{dv}{dt}$

**풀이** $t$초 후의 점 P의 속도를 $v$, 가속도를 $a$라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-8t+3,\ a=\frac{dv}{dt}=6t-8$$

(1) 점 P가 원점을 통과하는 것은 $x=0$일 때이므로

$t^3-4t^2+3t=0,\qquad t(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=1$ 또는 $t=3$

따라서 마지막으로 원점을 통과하는 것은 $t=3$일 때이므로 구하는 속도는

$v=3\cdot 3^2-8\cdot 3+3=6$

(2) $a=6t-8=4$에서 $\qquad t=2$

따라서 구하는 점 P의 위치는

$x=2^3-4\cdot 2^2+3\cdot 2=-2$

답 (1) 6 (2) $-2$

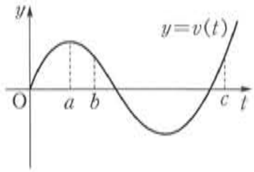
정답 및 풀이 • 67쪽

**유제 074-1** 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 위치가 $x=t^3-5t^2+6t$일 때, 점 P가 마지막으로 원점을 통과할 때의 가속도를 구하여라.

**유제 074-2** 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 위치가 $x=t^4-4t+5$일 때, 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 위치를 구하여라.

## 대표유형 075 속도, 가속도와 그래프 • 개념 068

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서 속도 $v(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 골라라.



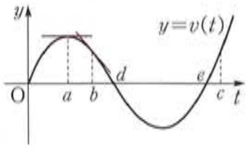

**보기**

ㄱ. $t=a$에서의 가속도는 0이다.
ㄴ. $t=b$에서의 가속도는 양이다.
ㄷ. $0<t<c$에서 운동 방향을 두 번 바꾼다.

**유형 Guide** 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다. 따라서 가속도는 속도의 순간변화율이므로 $t=a$에서의 가속도는 함수 $y=v(t)$의 그래프의 $t=a$에서의 접선의 기울기 $v'(a)$와 같음을 이용한다.

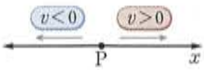
**유형 SSEN** **속도의 그래프에서 $t=a$에서의 접선의 기울기 ➡ $t=a$에서의 가속도**

**풀이** ㄱ. $t=a$에서의 가속도는 $v'(a)$이고 오른쪽 그림에서 $v'(a)=0$이므로 $t=a$에서의 가속도는 0이다.
ㄴ. $t=b$에서의 가속도는 $v'(b)$이고 오른쪽 그림에서 $v'(b)<0$이므로 $t=b$에서의 가속도는 음이다.
ㄷ. $t=d$, $t=e$에서 $v(t)=0$이고 그 좌우에서 $v(t)$의 부호가 달라지므로 $0<t<c$에서 운동 방향을 두 번 바꾼다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.



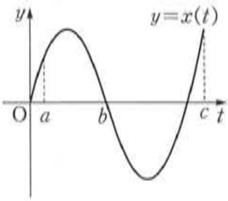

**답** ㄱ, ㄷ

**Remark** 수직선 위를 움직이는 점 P의 속도 $v$의 부호는 운동 방향을 의미하므로 다음이 성립한다.
① $v>0$이면 점 P가 양의 방향으로 움직인다.
② $v<0$이면 점 P가 음의 방향으로 움직인다.
③ $v=0$이면 점 P가 운동 방향을 바꾸거나 정지한다.




정답 및 풀이 • 67쪽

**유제 075-1** 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$ $(0\le t\le c)$에서 위치 $x(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 골라라.




**보기**

ㄱ. $t=a$에서 점 P는 양의 방향으로 움직인다.
ㄴ. $t=b$에서 점 P는 운동 방향을 바꾼다.
ㄷ. 출발 후 점 P는 원점을 두 번 지난다.

## 대표유형 076 속도와 가속도의 활용

• 개념 068

지면에서 초속 39.2 m의 속도로 똑바로 위로 던진 물체의 $t$초 후의 높이 $x$ m가 $x=39.2t-4.9t^2$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 2초 후의 물체의 속도와 가속도

(2) 이 물체가 도달할 수 있는 최고 높이

(3) 이 물체가 다시 지면에 떨어질 때의 속도

**유형 Guide** 물체는 속도가 양이면 양의 방향, 음이면 음의 방향으로 움직이며, 움직이는 방향을 바꿀 때 속도는 0이 된다. 즉 (2)에서 물체가 최고 높이에 도달하면 움직이는 방향이 바뀌므로 속도는 0이 된다.

**유형 SSEN** 물체가 정지하거나 움직이는 방향을 바꿀 때 ➔ (속도)$=0$

**풀이** 물체의 $t$초 후의 속도를 $v$, 가속도를 $a$라 하면 $x=39.2t-4.9t^2$에서

$$v=\frac{dx}{dt}=39.2-9.8t\ (\mathrm{m/s}),\ a=\frac{dv}{dt}=-9.8\ (\mathrm{m/s^2})$$

(1) $t=2$일 때의 물체의 속도와 가속도는

$$v=39.2-9.8\times 2=19.6\ (\mathrm{m/s}),\ a=-9.8\ (\mathrm{m/s^2})$$

(2) 물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0 m/s이므로 $39.2-9.8t=0$에서

$$9.8t=39.2 \qquad \therefore t=4$$

따라서 $t=4$일 때의 높이는

$$x=39.2\times 4-4.9\times 4^2=78.4\ (\mathrm{m})$$

(3) 물체가 지면에 떨어질 때의 높이는 0 m이므로 $39.2t-4.9t^2=0$에서

$$-4.9t(t-8)=0 \qquad \therefore t=8\ (\because t>0)$$

따라서 $t=8$일 때의 속도는

$$v=39.2-9.8\times 8=-39.2\ (\mathrm{m/s})$$

답 (1) 속도: 19.6 m/s, 가속도: $-9.8$ m/s$^2$
(2) 78.4 m (3) $-39.2$ m/s

정답 및 풀이 • 67쪽

**유제 076-1** 어떤 자동차가 브레이크를 밟은 후 $t$초 동안 달린 거리 $x$ m가 $x=7.2t-0.45t^2$이다. 이 자동차가 브레이크를 밟은 후 정지할 때까지 걸린 시간을 구하여라.

**유제 076-2** 직선 철로를 달리던 기차가 제동을 건 후 $t$초 동안 움직인 거리 $x$ m가 $x=30t-0.5t^2$이다. 이 기차가 제동을 건 후 정지할 때까지 움직인 거리를 구하여라.

## 개념 069 시각에 대한 변화율

시각 $t$의 함수 $y=f(t)$가 주어질 때, $y$의 $t$에 대한 변화율은 다음과 같다.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} = f'(t)$$

**Remark** 시각 $t$에서의 변화율은 $\Delta t \longrightarrow 0$일 때의 평균변화율의 극한값, 즉 순간변화율을 뜻한다.

**개념 Approach**

시각 $t$에서의 위치의 순간변화율은 속도, 속도의 순간변화율은 가속도임을 배웠다. 마찬가지로 길이, 넓이, 부피 등에 대해서도 시각에 대한 변화율을 생각해 보자.

시각 $t$에 대한 함수 $y=f(t)$가 주어질 때, $y$의 $t$에 대한 변화율은

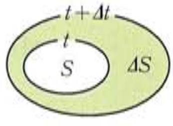
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} = f'(t)$$

이므로 $f(t)$가 길이, 넓이, 부피를 나타내는 함수이면 $f'(t)$는 각각 길이의 변화율, 넓이의 변화율, 부피의 변화율을 나타낸다.

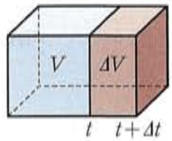
이를 정리하면 다음과 같다.

① 시각 $t$에서의 길이가 $l$인 어떤 물체가 시간이 $\Delta t$만큼 경과하는 동안 길이가 $\Delta l$만큼 변했다고 할 때, 이 물체의 시각 $t$에서의 길이에 대한 변화율 ➡ $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{dl}{dt}$


② 시각 $t$에서의 넓이가 $S$인 어떤 물체가 시간이 $\Delta t$만큼 경과하는 동안 넓이가 $\Delta S$만큼 변했다고 할 때, 이 물체의 시각 $t$에서의 넓이에 대한 변화율 ➡ $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$




③ 시각 $t$에서의 부피가 $V$인 어떤 물체가 시간이 $\Delta t$만큼 경과하는 동안 부피가 $\Delta V$만큼 변했다고 할 때, 이 물체의 시각 $t$에서의 부피에 대한 변화율 ➡ $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}$




**개념 Check**

어떤 물체의 시각 $t$에서의 길이 $l$이 $l=t^3+t^2+4t+3$이다. $t=3$일 때, 이 물체의 길이의 변화율을 구하여라.

**풀이** $\frac{dl}{dt}=3t^2+2t+4$이므로 $t=3$일 때 이 물체의 길이의 변화율은

$3\cdot3^2+2\cdot3+4=37$

답 37

## 대표유형 077 시각에 대한 변화율 – 길이

오른쪽 그림과 같이 키가 1.6 m인 윤서가 높이 4 m인 가로등 바로 밑에서 출발하여 일직선으로 3 m/s의 속도로 걷고 있다. 다음에 답하여라.

(1) 윤서의 그림자의 앞 끝이 움직이는 속도를 구하여라.

(2) 윤서의 그림자의 길이의 변화율을 구하여라.


**유형 Guide** 시각에 대한 변화율의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 해결한다.

(i) $t$초 후의 길이 (또는 넓이, 부피)에 대한 관계식을 구한다.

(ii) (i)에서 구한 식의 양변을 $t$에 대하여 미분한다.

(iii) 주어진 조건을 만족시키는 $t$의 값을 대입한다.

**유형 SSEN 길이의 변화율에 대한 활용 문제 ⊙ 길이를 시각에 대한 함수로 나타낸다.**

**풀이** $t$초 후 윤서가 가로등 바로 밑에서부터 $x$ m, 그림자의 앞 끝은 $y$ m 떨어져 있다고 하고, 이때의 그림자의 길이를 $l$ m라 하면

$x=3t$, $l=y-x=y-3t$ …… ㉠

(1) 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC \backsim \triangle DEC$(AA 닮음)이므로

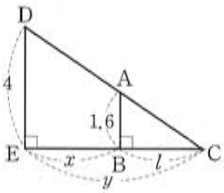
$\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{BC} : \overline{EC}$, 즉 $1.6 : 4 = l : y$

㉠을 위의 식에 대입하면 $1.6 : 4 = (y-3t) : y$

$1.6y = 4y - 12t$, $2.4y = 12t$ $\therefore y = 5t$

양변을 $t$에 대하여 미분하면 $\dfrac{dy}{dt}=5$

따라서 그림자의 앞 끝이 움직이는 속도는 5 m/s이다.




(2) $y=5t$이므로 ㉠에서 $l=5t-3t=2t$

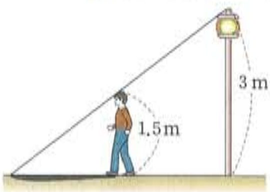
양변을 $t$에 대하여 미분하면 $\dfrac{dl}{dt}=2$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 2 m/s이다.

답 (1) 5 m/s (2) 2 m/s

정답 및 풀이 • 68쪽

**유제 077-1** 오른쪽 그림과 같이 키가 1.5 m인 민재가 높이 3 m의 가로등 바로 밑에서 출발하여 일직선으로 90 m/min의 속도로 걸어가고 있다. 이때 민재의 그림자의 앞 끝이 움직이는 속도를 구하여라. (단, 단위는 m/min이다.)



## 대표유형 078 시각에 대한 변화율 - 넓이, 부피

• 개념 069

반지름의 길이가 2 cm인 구 모양의 풍선에 공기를 넣어서 반지름의 길이가 매초 2 mm씩 늘어나고 있다. 공기를 넣기 시작하여 풍선의 반지름의 길이가 3 cm가 되었을 때, 다음을 구하여라. (단, 풍선은 계속 구 모양을 유지한다.)

(1) 풍선의 겉넓이의 변화율　　　　(2) 풍선의 부피의 변화율

**유형 Guide** 반지름의 길이가 매초 2mm, 즉 0.2cm씩 늘어나면 $t$초 후의 구의 반지름의 길이는 $(2+0.2t)$ cm이다. 이를 이용하여 $t$초 후의 구의 겉넓이, 부피에 대한 함수식을 구한 후, 양변을 $t$에 대하여 미분하여 각각의 변화율을 구한다.

**유형 SSEN** 넓이, 부피의 변화율에 대한 활용 문제 ○ 넓이, 부피를 시각에 대한 함수로 나타낸다.

**풀이** 공기를 넣기 시작하여 $t$초 후의 풍선의 반지름의 길이를 $r$ cm, 겉넓이를 $S\,\text{cm}^2$, 부피를 $V\,\text{cm}^3$라 하자.

$r=2+0.2t$이므로 풍선의 반지름의 길이가 3cm가 될 때의 시각은

$2+0.2t=3 \qquad \therefore t=5$

(1) $S=4\pi r^2=4\pi(2+0.2t)^2$에서

$$\frac{dS}{dt}=4\pi\times2(2+0.2t)\times0.2=1.6\pi(2+0.2t)$$

따라서 5초 후의 풍선의 겉넓이의 변화율은

$1.6\pi(2+0.2\times5)=4.8\pi\ (\text{cm}^2/\text{s})$

(2) $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(2+0.2t)^3$에서

$$\frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}\pi\times3(2+0.2t)^2\times0.2=0.8\pi(2+0.2t)^2$$

따라서 5초 후의 풍선의 부피의 변화율은

$0.8\pi(2+0.2\times5)^2=7.2\pi\ (\text{cm}^3/\text{s})$

답 (1) $4.8\pi\ \text{cm}^2/\text{s}$　(2) $7.2\pi\ \text{cm}^3/\text{s}$

정답 및 풀이 • 68쪽

**유제 078-1** 한 변의 길이가 5 cm인 정사각형의 각 변의 길이가 매초 2 cm씩 늘어나고 있다. 정사각형의 한 변의 길이가 15 cm일 때, 넓이의 변화율을 구하여라.

(단, 단위는 $\text{cm}^2/\text{s}$이다.)

**유제 078-2** 밑면의 반지름의 길이가 5 cm, 높이가 10 cm인 원기둥이 있다. 이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이가 매초 0.5 cm씩 늘어나고, 높이는 매초 1 cm씩 줄어든다고 할 때, 3초 후의 원기둥의 부피의 변화율을 구하여라. (단, 단위는 $\text{cm}^3/\text{s}$이다.)

# 중단원 연습 문제

정답 및 풀이 • 68쪽

STEP 1 유형 Training

**01** 삼차방정식 $x^3-6x^2+a=0$이 한 개의 음근과 양의 이중근을 가질 때, 실수 $a$의 값을 구하여라.

**02** 곡선 $y=x^3-9x^2+20x$와 직선 $y=-4x+a$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 $a$의 값의 범위는?

① $12<a<16$ ② $14<a<18$ ③ $16<a<20$
④ $18<a<22$ ⑤ $20<a<24$

서술형

**03** 두 함수 $f(x)=x^4+2x^3-x^2-9x$, $g(x)=2x^3+5x^2-x-a$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있을 때, 실수 $a$의 값의 범위를 구하여라.

**04** $x$축 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 위치가 $x=t^3-6t^2+9t$라 한다. $t=t_1$, $t=t_2$에서 점 P가 운동 방향을 바꿀 때, $t_1+t_2$의 값을 구하여라.

**05** 지면에서 초속 40 m로 똑바로 위로 던진 물체의 $t$초 후의 높이 $x$ m가 $x=40t-kt^2$이라 한다. 이 물체가 최고 높이에 도달하는 데 걸린 시간이 4초일 때, 물체를 던진 후 1초 후의 속도는?

① 15 m/s ② 20 m/s ③ 25 m/s ④ 30 m/s ⑤ 35 m/s

STEP 2 실전 Application

서술형

**06** 두 함수 $f(x)=-2x^3+3x^2+2$, $g(x)=x^2-2x-3$에 대하여 방정식 $(g\circ f)(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라.

**07** 삼차방정식 $2x^3+3x^2-12x-k=0$이 1보다 큰 근을 갖도록 하는 실수 $k$의 값의 범위를 구하여라.

서술형

**08** 함수 $f(x)=2x^3-6ax-3a$가 극값을 가질 때, 방정식 $f(x)=0$이 단 하나의 실근을 갖도록 하는 실수 $a$의 값의 범위를 구하여라.

**09** $x>0$일 때, 부등식 $x^3-3x^2-9x+a\geq 0$이 항상 성립하도록 하는 실수 $a$의 최솟값을 구하여라.

평가원기출

**10** 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t$일 때의 위치는 각각 $f(t)=2t^2-2t$, $g(t)=t^2-8t$이다. 두 점 P와 Q가 서로 반대 방향으로 움직이는 시각 $t$의 범위는?

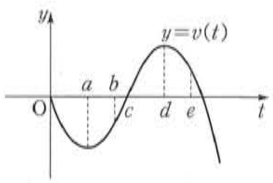
① $\frac{1}{2}<t<4$ ② $1<t<5$ ③ $2<t<5$

④ $\frac{3}{2}<t<6$ ⑤ $2<t<8$

**11** 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 위치 $x$가 $x=\frac{1}{3}t^3-4t^2+12t$로 주어질 때, $3\le t\le 8$에서 점 P의 최대 속력은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 8 ⑤ 12

**12** 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?



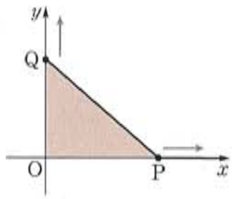

**보 기**

ㄱ. $t=b$에서의 가속도는 양이다.
ㄴ. $0<t<e$에서 가속도가 0이 될 때는 한 번 있다.
ㄷ. $0<t<e$에서 운동 방향을 두 번 바꾼다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

서술형

**13** 오른쪽 그림과 같이 점 P는 원점 O를 출발하여 $x$축 위의 양의 방향으로 매초 3의 속도로 움직이고, 점 Q는 점 P가 출발한 지 2초 후에 원점을 출발하여 $y$축 위의 양의 방향으로 매초 4의 속도로 움직이고 있다. 점 P가 출발한 지 5초 후의 삼각형 OPQ의 넓이의 변화율을 구하여라.




**14** 잔잔한 호수에 돌을 던질 때 생기는 동심원의 파문 중에서 가장 바깥쪽 원의 반지름의 길이가 매초 $\frac{1}{2}$m의 비율로 커진다고 한다. 돌을 던진 후 4초가 지났을 때, 가장 바깥쪽 동심원의 넓이의 변화율을 구하여라. (단, 단위는 $\mathrm{m^2/s}$이다.)

STEP 3 심화 Forwarding

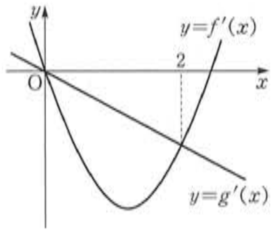
수능기출

**15** 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때, $f(3)$의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

평가원기출

**16** 삼차함수 $f(x)$의 도함수의 그래프와 이차함수 $g(x)$의 도함수의 그래프가 그림과 같다. 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자. $f(0)=g(0)$일 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?




**보기**

ㄱ. $0<x<2$에서 $h(x)$는 감소한다.
ㄴ. $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

서술형

**17** 원점 O를 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 $t$초 후의 위치를 각각 $x_1$, $x_2$라 하면

$$x_1=2t^3-11t^2,\ x_2=3t^2+8t$$

이다. 선분 PQ의 중점을 M이라 하고, 두 점 P, Q가 원점을 출발한 후 4초 동안 세 점 P, Q, M이 움직이는 방향을 바꾼 횟수를 각각 $a$, $b$, $c$라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

# IV 다항함수의 적분법

# 09

# 부정적분

수학에서는 같은 상황을 다른 식으로 표현하는 경우가 존재한다. 이것을 수학적으로 표현하자면 역연산의 관계라 한다.

예를 들어 지수와 로그 사이의 관계가 그렇다. 지수 $a^x=N$은 $x$와 $N$ 사이의 관계를 $N$의 입장에서 표현한 식이고, 로그 $x=\log_a N$은 $x$와 $N$ 사이의 관계를 $x$의 입장에서 표현한 식이다.

미분과 역연산의 관계에 있는 것도 있다. 함수 $f(x)$가 $F(x)$의 도함수이면 $f(x)=F'(x)$와 같이 나타낼 수 있다. 이것은 $f(x)$의 입장에서 둘 사이의 관계를 표현한 식이다. 이 식을 $F(x)$의 입장에서 표현하려면 어떻게 해야 할까?

이 단원에서는 미분의 역연산인 부정적분의 뜻과 성질에 대하여 알아보고, 다항함수의 부정적분을 구해 보자.

## 한눈에 보는 개념&유형 map

**소단원 & 학습목표**

**22 부정적분**

- 부정적분의 뜻을 안다.

**23 부정적분의 계산**

- 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.

| 개념 & 특강 | 대표유형 & 유제 |
|---|---|
| 070 부정적분 | 079 부정적분 |
| 071 부정적분과 도함수의 관계 | 080 부정적분과 도함수의 관계 |

| 개념 & 특강 | 대표유형 & 유제 | | |
|---|---|---|---|
| 072 함수 $y=x^n$의 부정적분<br>073 부정적분의 성질 | 081 부정적분의 계산 | 082 도함수가 주어진 함수 구하기 | 083 함수와 그 부정적분 사이의 관계식 |

## 개념 070 부정적분

(1) 부정적분

함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉

$$F'(x)=f(x)$$

일 때, $F(x)$를 $f(x)$의 **부정적분**이라 하고, 이것을 기호로 $\int f(x)dx$와 같이 나타낸다.

**Remark** • 적분은 미분의 역연산이다.
• $\int f(x)dx$를 '적분 $f(x)dx$' 또는 '인티그럴(integral) $f(x)dx$'라 읽는다.

(2) 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\int f(x)dx=F(x)+C \ (C\text{는 상수})$$

로 나타낸다. 이때 $f(x)$를 **피적분함수**, $C$를 **적분상수**, $x$를 **적분변수**라 한다.

(3) 함수 $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 **적분한다**고 하고, 그 계산법을 **적분법**이라 한다.

**Remark** $\int f(x)dx$에서 $dx$는 $x$에 대하여 적분한다는 뜻이다.

**개념 Approach**

함수 $x^2$, $x^2+2$, $x^2-1$, …을 각각 미분하면

$$(x^2)'=2x,\ (x^2+2)'=2x,\ (x^2-1)'=2x,\ \cdots$$

이므로 $x^2$, $x^2+2$, $x^2-1$, …은 모두 $2x$의 부정적분이다.

이와 같이 함수 $2x$의 부정적분은 여러 개가 존재하고 모두 상수항만 다름을 알 수 있다.

따라서 함수 $2x$의 부정적분을 통틀어 $x^2+C$ ($C$는 상수) 꼴로 나타낼 수 있다.

일반적으로 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 함수 $f(x)$의 부정적분은 적당한 상수 $C$에 대하여 $F(x)+C$로 나타낼 수 있다.

이것을 도함수의 성질을 이용하여 확인해 보자.

$F(x)$, $G(x)$를 모두 함수 $f(x)$의 부정적분이라 하면

$$F'(x)=f(x),\ G'(x)=f(x)$$

이므로

$$\{G(x)-F(x)\}'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

이다. 이때 도함수가 0인 함수는 상수함수이므로 그 상수를 $C$라 하면

$$G(x)-F(x)=C \qquad \therefore G(x)=F(x)+C$$

따라서 $f(x)$의 부정적분은 $F(x)+C$ ($C$는 상수) 꼴로 나타낼 수 있다. 즉

$$\int f(x)dx=F(x)+C \ (C\text{는 적분상수})$$

이다.

이상에서 '함수 $f(x)$는 $F(x)$의 도함수이다.'와 '함수 $F(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분이다.'는 서로 같은 표현임을 알 수 있다.
즉 적분은 미분의 역연산이다.

부정적분

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

미분

개념 SSEN $F'(x)=f(x)$ $\longrightarrow$ $\int f(x)dx=F(x)+C$

개념 Check 1

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int 3x^2dx$　　(2) $\int 4x^3dx$

(3) $\int x\,dx$　　(4) $\int 1\,dx$

풀이 (1) $(x^3)'=3x^2$이므로 $\int 3x^2dx=x^3+C$

(2) $(x^4)'=4x^3$이므로 $\int 4x^3dx=x^4+C$

(3) $\left(\frac{1}{2}x^2\right)'=x$이므로 $\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C$

(4) $(x)'=1$이므로 $\int 1\,dx=x+C$

답 풀이 참조

**Remark** (4) $\int 1dx$는 보통 $\int dx$로 나타낸다.

개념 Check 2

다음 등식을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하여라. (단, $C$는 적분상수이다.)

(1) $\int f(x)dx=3x^2-4x+C$　　(2) $\int f(x)dx=x^3-2x^2+5x+C$

풀이 (1) $f(x)=(3x^2-4x+C)'=6x-4$

(2) $f(x)=(x^3-2x^2+5x+C)'=3x^2-4x+5$

답 (1) $f(x)=6x-4$　(2) $f(x)=3x^2-4x+5$

## 대표유형 079 부정적분

• 개념 070

다음에 답하여라.

(1) 등식 $\int (x+1)f(x)dx=\frac{1}{4}x^4+x+C$를 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하여라.

(단, $C$는 적분상수이다.)

(2) 등식 $\int (8x^3+ax-6)dx=bx^4+3x^2+cx+1$을 만족시키는 상수 $a$, $b$, $c$에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

**유형 Guide** $\int f(x)dx=F(x)$이면 부정적분의 정의에 의하여 $F'(x)=f(x)$임을 이용한다.

유형 SSEN $\int f(x)dx=F(x)$ ⭘ $F'(x)=f(x)$

**풀이** (1) $\left(\frac{1}{4}x^4+x+C\right)'=(x+1)f(x)$이므로

$x^3+1=(x+1)f(x)$

$(x+1)(x^2-x+1)=(x+1)f(x)$

$\therefore f(x)=x^2-x+1$

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

(2) $(bx^4+3x^2+cx+1)'=8x^3+ax-6$이므로

$4bx^3+6x+c=8x^3+ax-6$

따라서 $4b=8$, $6=a$, $c=-6$이므로

$a=6$, $b=2$, $c=-6$

$\therefore a+b+c=2$

답 (1) $f(x)=x^2-x+1$ (2) 2

정답 및 풀이 • 72쪽

**유제 079-1** 등식 $\int (x-2)f(x)dx=x^4-2x^3-2x^2+C$를 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 값을 구하여라. (단, $C$는 적분상수이다.)

## 개념 071 부정적분과 도함수의 관계



함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$

(2) $\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$ (단, $C$는 적분상수)

**개념 Approach**

부정적분과 도함수의 관계를 증명해 보자.

(1) $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\int f(x)dx=F(x)+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=\frac{d}{dx}\{F(x)+C\}=\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$$

(2) $\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx=F(x)$로 놓고 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}F(x)$$

도함수의 성질에 의하여 $\dfrac{d}{dx}\{F(x)-f(x)\}=0$

따라서 $F(x)-f(x)=C$ ($C$는 상수)이므로 $F(x)=f(x)+C$

$$\therefore \int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

**Remark** (1), (2)에서 미분과 적분의 순서가 바뀌면 그 결과는 적분상수 $C$만큼의 차이가 생긴다는 것을 알 수 있다. 즉 $\dfrac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}\neq\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx$임에 유의한다.

**개념 Check**

함수 $f(x)=x^3-2x$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}$

(2) $\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx$

**풀이** (1) $\dfrac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)=x^3-2x$

(2) $\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C=x^3-2x+C$

답 풀이 참조

## 대표유형 080 부정적분과 도함수의 관계

• 개념 071

다음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{d}{dx}\left\{\int xf(x)dx\right\}=5x^4-2x^3+x$일 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

(2) 함수 $f(x)=\int\left\{\dfrac{d}{dx}(x^2-2x)\right\}dx$에 대하여 $f(0)=1$일 때, $f(-1)$의 값을 구하여라.

**유형 Guide** 함수 $f(x)$를 적분한 다음 미분하면 원래의 함수 $f(x)$가 된다. 그러나 순서를 바꾸어 함수 $f(x)$를 미분한 다음 적분하면 원래의 함수 $f(x)$에 적분상수 $C$가 더해진다. 따라서 (2)의 경우 $f(x)$에 주어진 함숫값을 대입하여 적분상수를 구한다.

**유형 SSEN**
- $f(x)$를 적분한 후 미분하면 ○ $f(x)$
- $f(x)$를 미분한 후 적분하면 ○ $f(x)+C$ (단, $C$는 적분상수)

**풀이** (1) $\dfrac{d}{dx}\left\{\int xf(x)dx\right\}=xf(x)$이므로

$xf(x)=5x^4-2x^3+x$

따라서 $f(x)=5x^3-2x^2+1$이므로

$f(2)=40-8+1=33$

(2) $\int\left\{\dfrac{d}{dx}(x^2-2x)\right\}dx=x^2-2x+C$이므로

$f(x)=x^2-2x+C$

그런데 $f(0)=1$이므로 $\quad f(0)=C=1$

따라서 $f(x)=x^2-2x+1$이므로

$f(-1)=1+2+1=4$

답 (1) 33 (2) 4

정답 및 풀이 • 72쪽

**유제 080-1** 등식 $\dfrac{d}{dx}\left\{\int(ax^2+4x+5)dx\right\}=6x^2+bx+c$를 만족시키는 상수 $a$, $b$, $c$에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

**유제 080-2** 함수 $f(x)=\int\left\{\dfrac{d}{dx}(x^2-4x)\right\}dx$의 최솟값이 3일 때, $f(1)$의 값을 구하여라.

# 개념 072 함수 $y=x^n$의 부정적분

$n$이 음이 아닌 정수일 때, 함수 $y=x^n$의 부정적분은 다음과 같다.

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

## 개념 Approach

적분은 미분의 역연산이므로 미분법의 공식으로부터 $x^n$의 부정적분을 구할 수 있다.
$n$이 양의 정수일 때,

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n$$

이므로

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \text{ (}C\text{는 적분상수)}$$

이다. 또 $n=0$이면 $x^0=1$이고, $\int 1\,dx=x+C$ ($C$는 적분상수)이므로

$$\int x^0 dx=\int 1\,dx=\frac{1}{0+1}x^{0+1}+C$$

가 성립한다.

개념 SSEN

1만큼 큰 수

$$\int x^n dx \longrightarrow \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

1만큼 큰 수

## 개념 Check

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x^2 dx$ (2) $\int x^{10} dx$ (3) $\int 5\,dx$

**풀이** (1) $\int x^2 dx=\frac{1}{2+1}x^{2+1}+C=\frac{1}{3}x^3+C$

(2) $\int x^{10} dx=\frac{1}{10+1}x^{10+1}+C=\frac{1}{11}x^{11}+C$

(3) $\int 5\,dx=\frac{5}{0+1}x^{0+1}+C=5x+C$

답 풀이 참조

개념 073

## 부정적분의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

① $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, $k$는 실수)

② $\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

③ $\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

**Remark** ②, ③은 세 개 이상의 함수에 대해서도 성립한다.

### 개념 Approach

도함수의 성질을 이용하여 부정적분의 성질을 증명해 보자.
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 한 부정적분을 각각 $F(x)$, $G(x)$라 하면

$$F'(x)=f(x),\ G'(x)=g(x) \Leftarrow F(x)=\int f(x)dx,\ G(x)=\int g(x)dx$$

① 실수 $k$에 대하여 $\{kF(x)\}'=kF'(x)=kf(x)$이므로

$$\int kf(x)dx=kF(x)=k\int f(x)dx$$

② $\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$이므로

$$\int\{f(x)+g(x)\}dx=F(x)+G(x)=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

③ $\{F(x)-G(x)\}'=F'(x)-G'(x)=f(x)-g(x)$이므로

$$\int\{f(x)-g(x)\}dx=F(x)-G(x)=\int f(x)dx-\int g(x)dx$$

### 개념 Check

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int(3x+4)dx$

(2) $\int(x^2+2x-1)dx$

풀이 (1) $\int(3x+4)dx=3\int x\,dx+\int 4\,dx=3\left(\frac{1}{2}x^2+C_1\right)+(4x+C_2)=\frac{3}{2}x^2+4x+C$

(2) $\int(x^2+2x-1)dx=\int x^2dx+2\int x\,dx-\int 1\,dx$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right)+2\left(\frac{1}{2}x^2+C_2\right)-(x+C_3)=\frac{1}{3}x^3+x^2-x+C$$

답 풀이 참조

**Remark** 적분상수가 여러 개 있는 경우에는 이들을 모두 묶어서 하나의 적분상수 $C$로 나타낸다.

## 대표유형 081 부정적분의 계산

• 개념 072, 073

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (x-1)^3\,dx$

(2) $\int \frac{x^3+1}{x+1}dx$

(3) $\int (x^2+tx+t^2)dx$

(4) $\int \frac{x^2}{x-1}dx-\int \frac{1}{x-1}dx$

**유형 Guide** 다항함수의 부정적분은 함수 $y=x^n$($n$은 음이 아닌 정수)의 부정적분과 부정적분의 성질을 이용하여 구할 수 있다. 이때 피적분함수가 복잡한 경우에는 함수를 간단히 한 후 부정적분을 구한다.

(1) 곱셈 공식을 이용하여 전개한다.

(2) 분자를 인수분해한 후 약분하여 간단히 한다.

(3) 적분변수가 $x$이므로 $x$ 이외의 문자는 상수로 본다.

(4) $\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = \int \{f(x) \pm g(x)\}dx$ (복호동순)임을 이용하여 간단히 한다.

유형 SSEN **피적분함수가 복잡한 경우 ➡ 전개, 인수분해 등을 이용하여 간단히 한다.**

**풀이**

(1) $\int (x-1)^3\,dx=\int (x^3-3x^2+3x-1)dx=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+C$

(2) $\int \frac{x^3+1}{x+1}dx=\int \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx=\int (x^2-x+1)dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

(3) $\int (x^2+tx+t^2)dx=\int x^2\,dx+t\int x\,dx+t^2\int dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{t}{2}x^2+t^2x+C$

(4) $\int \frac{x^2}{x-1}dx-\int \frac{1}{x-1}dx=\int\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\int \frac{x^2-1}{x-1}dx$

$=\int \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}dx=\int (x+1)dx$

$=\frac{1}{2}x^2+x+C$

답 풀이 참조

정답 및 풀이 • 72쪽

**유제 081-1** 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (x^2+x+1)(x^2-x+1)dx$

(2) $\int \frac{2x^2-3x-2}{x-2}dx$

(3) $\int (x-t)^2\,dx$

(4) $\int (\sqrt{x}+1)^2\,dx+\int (\sqrt{x}-1)^2\,dx$

## 대표유형 082 도함수가 주어진 함수 구하기

• 개념 072, 073

다음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=2x+1$, $f(0)=3$이 성립할 때, $f(-3)$의 값을 구하여라.

(2) 점 $(0,\ 1)$을 지나는 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $3x^2-2x+1$일 때, 함수 $f(x)$를 구하여라.

**유형 Guide** 도함수 $f'(x)$와 함숫값이 주어질 때, 함수 $f(x)$는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용하여 $f(x)$를 적분상수 $C$를 포함한 식으로 나타낸다.

(ii) $f(x)$에 주어진 함숫값을 대입하여 적분상수 $C$의 값을 구한다.

**유형 SSEN** **$f'(x)$가 주어지고 $f(x)$를 구할 때 ○ $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용한다.**

**풀이** (1) $f'(x)=2x+1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x+1)dx=x^2+x+C$$

$f(0)=3$에서 $\quad C=3$

따라서 $f(x)=x^2+x+3$이므로

$$f(-3)=9-3+3=9$$

(2) 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$이므로

$$f'(x)=3x^2-2x+1$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-2x+1)dx=x^3-x^2+x+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $f(0)=1$에서 $\quad C=1$

$$\therefore f(x)=x^3-x^2+x+1$$

답 (1) 9 (2) $f(x)=x^3-x^2+x+1$

정답 및 풀이 • 73쪽

**유제 082-1** 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2+2x-3$, $f(-1)=0$이 성립할 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

**유제 082-2** 점 $(0,\ -1)$을 지나는 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $-2x+3$일 때, 함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 값을 구하여라.

## 대표유형 083 함수와 그 부정적분 사이의 관계식

• 개념 072, 073

이차함수 $f(x)$에 대하여 $\int f(x)dx=xf(x)+x^3-2x^2$이 성립하고 $f(0)=3$일 때, 함수 $f(x)$를 구하여라.

**유형 Guide** $\int f(x)dx$를 포함한 등식에서 피적분함수 $f(x)$를 구할 때에는 $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$임을 이용한다. 즉 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한 후 $f'(x)$를 적분하여 $f(x)$를 구한다.

**유형 SSEN** $\int f(x)dx$를 포함한 등식에서 $f(x)$ 구하기 ⊙ 양변을 $x$에 대하여 미분한다.

**풀이** 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=\frac{d}{dx}\{xf(x)+x^3-2x^2\}$$

$$f(x)=f(x)+xf'(x)+3x^2-4x$$

$$xf'(x)=-3x^2+4x$$

$$\therefore f'(x)=-3x+4$$

$y=f(x)g(x)$일 때,
$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

따라서

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-3x+4)dx=-\frac{3}{2}x^2+4x+C$$

이고 $f(0)=3$이므로 $C=3$

$$\therefore f(x)=-\frac{3}{2}x^2+4x+3$$

답 $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+4x+3$

정답 및 풀이 • 73쪽

**유제 083-1** 이차함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때,

$$F(x)=xf(x)-4x^3+x^2$$

이 성립한다. $f(1)=6$일 때, 함수 $f(x)$를 구하여라.

# 중단원 연습 문제

**STEP 1 유형 Training**

**01** 등식 $\frac{d}{dx}\left\{\int(ax^3-3x^2+1)dx\right\}=5x^3+bx^2+c$를 만족시키는 상수 $a$, $b$, $c$에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

**02** 함수 $f(x)=\int(1+2x+3x^2+\cdots+9x^8)dx$에 대하여 $f(0)=1$일 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

**03** $f'(x)=x^2+2x-3$을 만족시키는 함수 $f(x)$의 극댓값이 4일 때, $f(x)$의 극솟값은?

① $-\frac{20}{3}$ ② $-6$ ③ $-\frac{16}{3}$ ④ $-5$ ⑤ $-\frac{14}{3}$

서술형

**04** 삼차함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때,

$$F(x)=xf(x)-3x^2(x^2-1)$$

이 성립한다. $f(1)=0$일 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

**STEP 2 실전 Application**

**05** 함수 $f(x)=\int(4x^3-6x+2)dx$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$의 값은?

① 0 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 6

**06** 함수 $f(x)=x^2-4x+1$의 한 부정적분 $F(x)$와 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 $F(x)$가 $f'(x)$를 인수로 가질 때, $F(1)$의 값은?

① 2 ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ 4

서술형

**07** 함수 $f(x)$에 대하여 $\int(2x-3)f'(x)dx=\frac{4}{3}x^3+2x^2-15x$가 성립하고 $f(-1)=-3$일 때, 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱을 구하여라.

서술형

**08** 함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x<1) \\ k & (x>1) \end{cases}$이고, $f(0)=1$, $f(2)=6$일 때, 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 연속이 되도록 하는 상수 $k$의 값을 구하여라.

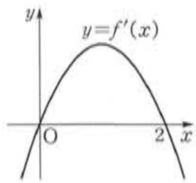
**09** 두 점 $(0,\ -2)$, $(3,\ 7)$을 지나는 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $x^2-x$에 정비례할 때, $f(-3)$의 값은?

① $-27$ ② $-28$ ③ $-29$ ④ $-30$ ⑤ $-31$

**10** 삼차함수 $y=f(x)$는 $x=-2$에서 극값을 갖고, $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 이때 이 그래프와 $x$축의 교점의 $x$좌표 중에서 양수인 것은?

① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

**11** 삼차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같고, $f(x)$의 극댓값이 4, 극솟값이 0일 때, $f(1)$의 값은?




① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

**12** 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2-6x+a$이고 $f(x)$가 이차식 $x^2-4x+3$으로 나누어떨어질 때, 상수 $a$의 값을 구하여라.

서술형

**13** 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y=f(x)+1$은 $x$좌표가 1인 점에서 $x$축에 접한다.
> (나) 곡선 $y=f(x)-1$은 $x$좌표가 $-1$인 점에서 $x$축에 접한다.

이때 $f(4)$의 값을 구하여라.

교육청기출

**14** 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=(x-1)^3$이다. 함수 $f(x)$의 극값을 $M$, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(0,\ f(0))$, $\mathrm{B}(2,\ f(2))$에서 접하는 두 접선의 교점의 $y$좌표를 $N$이라 할 때, $16(M-N)$의 값을 구하여라.

**15** 이차함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때,

$$xf(x)-F(x)=2x^3+6x^2$$

이 성립한다. $f(1)=5$일 때, $f(x)$의 최솟값을 구하여라.

STEP 3 심화 Forwarding

서술형

**16** 미분가능한 함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 $x$, $y$에 대하여
$f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$를 만족시키고 $f'(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

평가원기출

**17** 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx,\quad f(x)g(x)=-2x^4+8x^3$$

을 만족시킬 때, $g(1)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

**18** 두 일차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

| | |
|---|---|
| (가) $f'(x)+g'(x)=4$ | (나) $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=6x-7$ |
| (다) $f(0)=-3$, $g(0)=2$ | |

이때 $f(4)+g(6)$의 값을 구하여라.

수능기출

**19** 함수 $y=f(x)$가 모든 실수에서 연속이고, $|x|\neq1$인 모든 $x$의 값에 대하여 미분계수 $f'(x)$가

$$f'(x)=\begin{cases} x^2 & (|x|<1) \\ -1 & (|x|>1) \end{cases}$$

일 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

**보기**

ㄱ. 함수 $y=f(x)$는 $x=-1$에서 극값을 갖는다.
ㄴ. 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)=f(-x)$이다.
ㄷ. $f(0)=0$이면 $f(1)>0$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

# 10

## 정적분 (1)

삼각형이나 사각형의 넓이, 사각기둥이나 원기둥의 부피는 공식을 이용하면 쉽게 구할 수 있다. 그렇다면 공식이 정해져 있지 않은 도형의 넓이나 부피는 어떻게 구할 수 있을까?
고대 그리스의 수학자인 아르키메데스는 원을 작은 부채꼴로 나누어 그 넓이를 구하였고, 구를 작은 원기둥으로 나누어 그 부피를 구하였다. 이와 같이 어떤 도형의 넓이나 부피를 구할 때, 주어진 도형을 잘게 나누어 합을 구하고, 그 합의 극한값을 구하면 주어진 도형의 넓이나 부피를 구할 수 있다.

이 단원에서는 도형의 넓이나 부피를 잘게 나누어서 구하는 방법인 구분구적법에 대하여 알아보고, 급수의 합으로 정의된 정적분에 대하여 알아보자.

### 한눈에 보는 개념 & 유형 map

**소단원 & 학습목표**

**24 구분구적법**

- 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.

**25 정적분**

- 정적분의 뜻을 안다.
- 적분과 미분의 관계를 이해한다.
- 미적분의 기본 정리를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.

**26 정적분의 계산**

- 정적분의 성질을 이해하고, 이를 이용하여 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.

개념 & 특강 | 대표유형 & 유제

074 구분구적법 — 084 구분구적법으로 넓이 구하기 — 085 구분구적법으로 부피 구하기

075 정적분

076 적분과 미분의 관계

077 미적분의 기본 정리 — 086 미적분의 기본 정리

078 정적분의 성질 — 087 정적분의 계산 — 088 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분 — 089 절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분

079 우함수와 기함수의 정적분 — 090 우함수와 기함수의 정적분

특강 080 주기함수의 정적분

개념 074

## 구분구적법

다음과 같은 방법으로 도형의 넓이 또는 부피를 구하는 방법을 **구분구적법**이라 한다.

(i) 주어진 도형을 충분히 작은 $n$개의 기본 도형으로 분할한다.

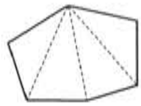
(ii) 기본 도형의 넓이 또는 부피의 합을 구한다.

(iii) (ii)에서 구한 합의 $n \longrightarrow \infty$일 때의 극한값을 구한다.

이 극한값이 구하는 도형의 넓이 또는 부피이다.

**Remark** 기본 도형은 직사각형, 이등변삼각형, 원기둥, 직육면체 등과 같이 넓이 또는 부피를 쉽게 구할 수 있는 도형으로 정한다.

개념 Approach

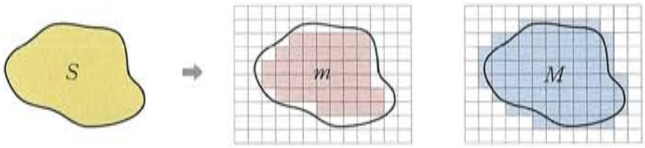


오른쪽 그림과 같이 다각형은 여러 개의 삼각형 또는 직사각형으로 분할하여 그 넓이를 구할 수 있다. 그러나 직선과 곡선 또는 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 이와 같은 방법으로 구할 수 없다. 그렇다면 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 어떻게 구해야 할까?

다음 그림과 같이 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S$라 하고, 이 도형 위에 정사각형 모양의 모눈을 그린 후 곡선 내부의 정사각형의 넓이의 합을 $m$, 곡선의 내부와 곡선의 경계선을 포함하는 정사각형의 넓이의 합을 $M$이라 하면

$$m \le S \le M$$

이 성립한다.




이때 정사각형의 크기를 한없이 작게 하면 $m$과 $M$은 도형의 넓이 $S$에 한없이 가까워지므로 $m$과 $M$의 극한을 구하면 $S$를 알 수 있다.

마찬가지로 원뿔, 구, 사각뿔과 같은 입체도형도 원기둥 또는 직육면체로 나누어 그 부피의 합을 구한 다음 극한을 이용하면 그 부피를 구할 수 있다.

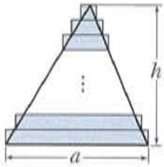
이와 같이 어떤 도형의 넓이 또는 부피를 구할 때, 주어진 도형을 잘게 나누어 간단한 도형의 넓이 또는 부피의 합의 극한값으로 구하는 방법이 구분구적법이다.

**Remark** $a_n < c_n < b_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ ($\alpha$는 실수)이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이므로 $m \le S \le M$에서 ($m$의 극한)$=$($M$의 극한)$=S$가 된다.

밑변의 길이가 $a$, 높이가 $h$인 삼각형의 넓이를 구분구적법으로 구해 보자.

(i) 삼각형을 $n$개의 직사각형으로 분할한다.

오른쪽 그림과 같이 높이 $h$를 $n$등분하여 $n$개의 직사각형을 만들어 그 넓이를 위에서부터 차례대로 $s_1$, $s_2$, $s_3$, $\cdots$, $s_n$이라 하자.




(ii) $n$개의 직사각형의 넓이의 합을 구한다.

위에서 $k$번째 직사각형의 넓이는

$$s_k=\frac{ak}{n}\cdot\frac{h}{n}$$

이므로 $n$개의 직사각형의 넓이의 합을 $S_n$이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} s_k=\frac{ah}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k=\frac{ah(n+1)}{2n}$$

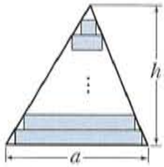
(iii) (ii)에서 구한 합의 $n \longrightarrow \infty$일 때의 극한값을 구한다.

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{ah(n+1)}{2n}=\frac{1}{2}ah$$

따라서 밑변의 길이가 $a$, 높이가 $h$인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ah$이다.

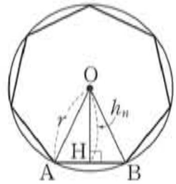
오른쪽 그림과 같이 직사각형을 삼각형의 안쪽에 만들어서 넓이를 구한 후 극한값을 구하여도 결과는 $\frac{1}{2}ah$로 위의 방법으로 구한 결과와 같다.

즉 도형을 분할하는 기본 도형을 도형의 안쪽과 바깥쪽 중 어느 쪽에 만들어도 기본 도형의 넓이의 합의 극한값은 같으므로 어느 한 경우만 생각하여 넓이를 구하면 된다.




개념 Check

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 $r$인 원 $O$에 내접하는 정$n$각형이 있다. 점 O에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H, 정$n$각형의 둘레의 길이를 $l_n$, $\overline{\mathrm{OH}}=h_n$이라 할 때, 다음에 답하여라.




(1) 정$n$각형의 넓이 $S_n$을 $l_n$과 $h_n$으로 나타내어라.

(2) $\lim_{n\to\infty} S_n$을 $r$에 대한 식으로 나타내어라.

풀이 (1) $S_n=n\cdot\triangle\mathrm{OAB}=n\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{l_n}{n}\cdot h_n\right)=\frac{1}{2}l_n h_n$

(2) $n \longrightarrow \infty$이면 $l_n \longrightarrow 2\pi r$, $h_n \longrightarrow r$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}l_n h_n=\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r=\pi r^2$$

답 (1) $S_n=\frac{1}{2}l_n h_n$ (2) $\pi r^2$

## 대표유형 084 구분구적법으로 넓이 구하기

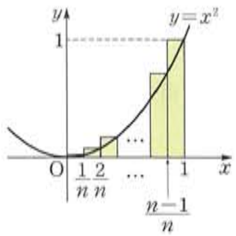
• 개념 074

곡선 $y=x^2$과 $x$축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구분구적법으로 구하여라.

**유형 Guide** 주어진 도형을 $n$개의 직사각형으로 나누어 $n$개의 직사각형의 넓이의 합을 구한 다음 $n \longrightarrow \infty$일 때의 극한값을 구한다.

**유형 SSEN** **구분구적법으로 넓이 구하기 ⊙ 주어진 도형을 $n$개의 기본 도형으로 분할한다.**

**풀이** 오른쪽 그림과 같이 구간 $[0,\ 1]$을 $n$등분하면 양 끝 점과 각 분점의 $x$좌표는 차례대로 $0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ \frac{n}{n}=1$




이때 곡선 $y=x^2$의 위쪽에 $n$등분한 각 구간을 가로의 길이로, 구간의 오른쪽 끝에서의 함숫값을 세로의 길이로 하는 $n$개의 직사각형을 만들면 그 넓이의 합 $S_n$은

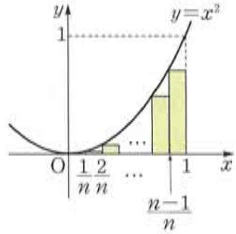
$$S_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2) \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$
$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

**다른 풀이** 오른쪽 그림과 같이 구간 $[0,\ 1]$을 $n$등분하고 곡선 $y=x^2$의 아래쪽에 직사각형을 만들면 그 넓이의 합 $S_n'$은




$$S_n'=\frac{1}{n}\cdot 0+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\}$$
$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n'=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$

정답 및 풀이 • 79쪽

**유제 084-1** 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$과 $x$축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구분구적법으로 구하여라.

## 대표유형 085 구분구적법으로 부피 구하기

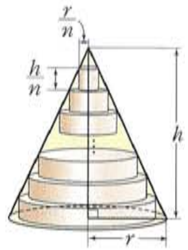
• 개념 074

밑면의 반지름의 길이가 $r$이고 높이가 $h$인 원뿔의 부피를 구분구적법으로 구하여라.

**유형 Guide** 주어진 도형을 $n$개의 원기둥으로 나누어 $n$개의 원기둥의 부피의 합을 구한 다음 $n \longrightarrow \infty$일 때의 극한값을 구한다.

**유형 SSEN** **구분구적법으로 부피 구하기 ➡ 주어진 도형을 $n$개의 기본 도형으로 분할한다.**

**풀이** 오른쪽 그림과 같이 원뿔의 높이를 $n$등분하여 $(n-1)$개의 원기둥을 만들면 각 원기둥의 높이는 $\frac{h}{n}$이고, 밑면의 반지름의 길이는 위에서부터 차례대로




$$\frac{r}{n},\ \frac{2r}{n},\ \frac{3r}{n},\ \cdots,\ \frac{(n-1)r}{n}$$

이므로 $(n-1)$개의 원기둥의 부피의 합 $V_n$은

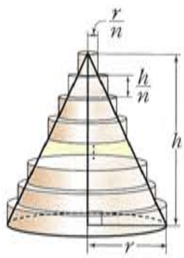
$$\begin{aligned} V_n &= \pi\left(\frac{r}{n}\right)^2\frac{h}{n} + \pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2\frac{h}{n} + \cdots + \pi\left\{\frac{(n-1)r}{n}\right\}^2\frac{h}{n} \\ &= \frac{\pi r^2 h}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\} \\ &= \frac{\pi r^2 h}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{6}\pi r^2 h\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

따라서 구하는 부피를 $V$라 하면

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\pi r^2 h\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

답 $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

**다른 풀이** 오른쪽 그림과 같이 원뿔의 높이를 $n$등분하여 $n$개의 원기둥을 만들면 그 부피의 합 $V_n'$은




$$\begin{aligned} V_n' &= \pi\left(\frac{r}{n}\right)^2\frac{h}{n} + \pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2\frac{h}{n} + \cdots + \pi\left(\frac{nr}{n}\right)^2\frac{h}{n} \\ &= \frac{\pi r^2 h}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2) \\ &= \frac{\pi r^2 h}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{6}\pi r^2 h\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

따라서 구하는 부피를 $V$라 하면

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n' = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\pi r^2 h\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

정답 및 풀이 • 79쪽

**유제 085-1** 밑면의 넓이가 $S$이고 높이가 $h$인 사각뿔의 부피를 구분구적법으로 구하여라.

## 개념 075 정적분

(1) 정적분

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 구간 $[a,\ b]$를 $n$등분하여 양 끝 점과 각 분점의 $x$좌표를 차례대로 $a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=b$, $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$라 할 때, 극한값 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$를 함수 $f(x)$의 $a$에서 $b$까지의 **정적분**이라 하며, 이것을 기호로 $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx}$와 같이 나타낸다.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x\ \left(단,\ \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$

특히 $\int_a^a f(x)dx=0$으로 정의한다.

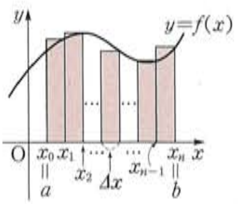
**Remark** • 정적분을 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x$로 정의해도 된다.

• 정적분 $\int_a^b f(x)dx$를 '구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$의 정적분'이라 읽는다.

(2) 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값을 구하는 것을 함수 $f(x)$를 $a$에서 $b$까지 적분한다고 하고, $a$를 **아래끝**, $b$를 **위끝**이라 하며 구간 $[a,\ b]$를 **적분 구간**이라 한다.

**Remark** 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값은 함수 $f$와 아래끝 $a$, 위끝 $b$로 결정되므로 적분변수와는 상관없다.
즉 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(y)dy=\int_a^b f(t)dt$가 성립한다.

### 개념 Approach




함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x)\ge 0$일 때,
구간 $[a,\ b]$를 $n$등분하여 양 끝 점과 각 분점의 $x$좌표를 차례대로

$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=b$$

라 하고, 각 구간의 길이를 $\Delta x$라 하면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이다. 이때 직사각형의 넓이의 합 $S_n$은

$$S_n=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

이고, $n\longrightarrow\infty$일 때 $S_n$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 $x$축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이에 한없이 가까워지므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

일반적으로 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 앞의 극한값 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$는 항상 존재하고, 이 극한값을 함수 $f(x)$의 $a$에서 $b$까지의 정적분이라 한다.

이제 정적분과 넓이의 관계를 알아보자.
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 $x$축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S$라 하자.

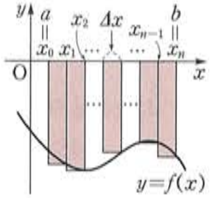
(i) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\ge 0$일 때,
정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값은 정적분의 정의에 의하여 $S$와 같다.

$$\therefore \int_a^b f(x)dx=S$$

(ii) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\le 0$일 때,
$f(x_k)\le 0$이므로 $f(x_k)\Delta x\le 0$에서

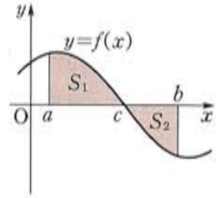
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x\le 0$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx=-S$$




(iii) 구간 $[a,\ c]$에서 $f(x)\ge 0$이고, 구간 $[c,\ b]$에서 $f(x)\le 0$일 때,
$\int_a^c f(x)dx=S_1$, $\int_c^b f(x)dx=-S_2$이므로 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값은 $x$축의 위쪽의 넓이 $S_1$에서 $x$축의 아래쪽의 넓이 $S_2$를 뺀 값을 나타낸다.

$$\therefore \int_a^b f(x)dx=S_1-S_2$$




**Remark** 부정적분 $\int f(x)dx$는 $x$에 대한 함수이지만 정적분 $\int_a^b f(x)dx$ ($a$, $b$는 상수)는 실수이다.

**개념 Check**

정적분의 정의를 이용하여 $\int_0^2 x^2dx$의 값을 구하여라.

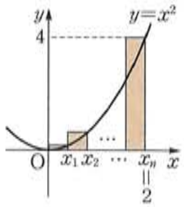
**풀이** $f(x)=x^2$으로 놓으면 정적분의 정의에 의하여

$$\Delta x=\frac{2}{n},\ x_k=k\Delta x=\frac{2k}{n},\ f(x_k)=x_k^2=\left(\frac{2k}{n}\right)^2=\frac{4k^2}{n^2}$$

$$\therefore \int_0^2 x^2dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{n^2}\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{8}{3}$$




답 $\frac{8}{3}$

개념 076

# 적분과 미분의 관계

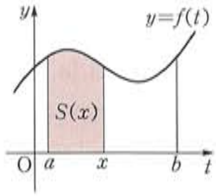
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \text{ (단, } a<x<b\text{)}$$

개념 Approach

넓이를 이용하여 적분과 미분의 관계를 알아보자.

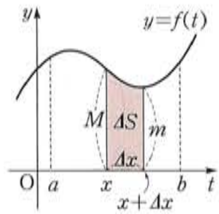
함수 $f(t)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(t)\geq 0$일 때, 곡선 $y=f(t)$와 $t$축 및 두 직선 $t=a$, $t=x$ $(a<x<b)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(x)$라 하면 $S(x)=\int_a^x f(t)dt$




$\Delta x>0$일 때, $x$의 증분 $\Delta x$에 대한 $S(x)$의 증분을 $\Delta S$라 하면

$$\Delta S=S(x+\Delta x)-S(x)$$

이때 함수 $f(t)$는 닫힌 구간 $[x, x+\Delta x]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다. 108쪽 • 개념 034




함수 $f(t)$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 하면

$$m\Delta x\leq \Delta S\leq M\Delta x \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\Delta x<0$일 때, 같은 방법으로 하면

$$M\Delta x\leq \Delta S\leq m\Delta x \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡의 각 변을 $\Delta x$로 나누면 $m\leq \frac{\Delta S}{\Delta x}\leq M$ $\quad\therefore \lim_{\Delta x\to 0} m\leq \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}\leq \lim_{\Delta x\to 0} M$

이때 함수 $f(t)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이므로 $\lim_{\Delta x\to 0} m=\lim_{\Delta x\to 0} M=f(x)$

따라서 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}=f(x)$이므로

$$\frac{d}{dx}S(x)=f(x), \text{ 즉 } \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \quad \cdots\cdots ㉢$$

$f(t)\leq 0$일 때에도 같은 방법으로 하면 ㉢이 성립함을 보일 수 있다.

따라서 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$가 성립한다.

개념 Check

다음을 $x$에 대하여 미분하여라.

(1) $\int_1^x (t^2-3t)dt$ (2) $\int_{-2}^x (1+3t-t^2)dt$

풀이 (1) $\frac{d}{dx}\int_1^x (t^2-3t)dt=x^2-3x$ (2) $\frac{d}{dx}\int_{-2}^x (1+3t-t^2)dt=1+3x-x^2$

답 풀이 참조

개념 077

# 미적분의 기본 정리

## 1 미적분의 기본 정리

다음을 **미적분의 기본 정리**라 한다.

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

가 성립하고, $F(b)-F(a)$를 기호로 $\left[F(x)\right]_a^b$와 같이 나타낸다.

**Remark** $\left[F(x)+C\right]_a^b=\{F(b)+C\}-\{F(a)+C\}=F(b)-F(a)$이므로 정적분의 계산에서 적분상수 $C$는 고려하지 않는다.

## 2 정적분의 기본 정의

$a>b$인 경우에는 정적분 $\int_a^b f(x)dx$를 다음과 같이 정의한다.

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

개념 Approach

**1 미적분의 기본 정리**

적분과 미분의 관계를 이용하여 미적분의 기본 정리를 증명해 보자.

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, $S(x)=\int_a^x f(t)dt$라 하면 적분과 미분의 관계에 의하여 $S'(x)=f(x)$이므로 $S(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분이다.

$f(x)$의 또 다른 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$S(x)=\int_a^x f(t)dt=F(x)+C\ (C\text{는 적분상수})$$

그런데 $x=a$이면 $S(a)=0$이므로

$$S(a)=F(a)+C=0 \qquad \therefore C=-F(a)$$

$$\therefore \int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$$

위의 식에 $x=b$를 대입하고 적분변수 $t$를 $x$로 바꾸면 다음과 같다.

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

미적분의 기본 정리는 정적분의 값을 정적분의 정의를 이용하지 않고 부정적분을 이용하여 간단히 계산하는 것이다.

$F'(x)=f(x)$일 때, 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값을 구하는 순서는 다음과 같다.

(i) $f(x)$를 적분하여 $F(x)$를 구한다.
(ii) $F(x)$의 위끝 $b$와 아래끝 $a$를 대입한 함숫값 $F(b)$, $F(a)$를 각각 구한다.
(iii) $F(b)-F(a)$를 계산한다.

### 2 정적분의 기본 정의

지금까지는 $a\le b$일 때의 정적분 $\int_a^b f(x)dx$를 정의하였다.

이제 $a>b$일 때 $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$로 정의하면 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx&=-\int_b^a f(x)dx=-\Big[F(x)\Big]_b^a\\&=-\{F(a)-F(b)\}=F(b)-F(a)\end{aligned}$$

이다.
따라서 미적분의 기본 정리는 아래끝과 위끝의 대소에 관계없이 항상 성립한다.

**개념 Check**

다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\int_{-1}^2 (x^2-2x)dx$　　(2) $\int_2^2 (4x^3-1)dx$　　(3) $\int_3^1 (3x^2-x+1)dx$

**풀이** (1) $\int_{-1}^2 (x^2-2x)dx=\Big[\frac{1}{3}x^3-x^2\Big]_{-1}^2=\Big(\frac{8}{3}-4\Big)-\Big(-\frac{1}{3}-1\Big)=0$

(2) $\int_2^2 (4x^3-1)dx=0$

(3) $\int_3^1 (3x^2-x+1)dx=\Big[x^3-\frac{1}{2}x^2+x\Big]_3^1=\Big(1-\frac{1}{2}+1\Big)-\Big(27-\frac{9}{2}+3\Big)=-24$

답 (1) 0　(2) 0　(3) $-24$

**다른 풀이** (3) $\int_3^1 (3x^2-x+1)dx=-\int_1^3 (3x^2-x+1)dx=-\Big[x^3-\frac{1}{2}x^2+x\Big]_1^3$

$$=-\Big\{\Big(27-\frac{9}{2}+3\Big)-\Big(1-\frac{1}{2}+1\Big)\Big\}=-24$$

## 대표유형 086 미적분의 기본 정리

• 개념 077

다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\int_1^3 (t^2-2t+1)dt$ (2) $\int_0^2 (3x^2-6x+2)dx$

(3) $\int_{-1}^2 (t-1)^2 dt$ (4) $\int_1^0 (x-1)(x^2+x+1)dx$

유형 Guide 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값은 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

임을 이용하여 구한다. 즉 먼저 적분상수를 생략한 부정적분을 구한 다음 이 함수에 위끝을 대입한 값에서 아래끝을 대입한 값을 뺀다.

**유형 SSEN** **$f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이면** ➡ $\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$

풀이

(1) $\int_1^3 (t^2-2t+1)dt=\Big[\frac{1}{3}t^3-t^2+t\Big]_1^3$

$$=(9-9+3)-\left(\frac{1}{3}-1+1\right)=\frac{8}{3}$$

(2) $\int_0^2 (3x^2-6x+2)dx=\Big[x^3-3x^2+2x\Big]_0^2$

$$=8-12+4=0$$

(3) $\int_{-1}^2 (t-1)^2 dt=\int_{-1}^2 (t^2-2t+1)dt=\Big[\frac{1}{3}t^3-t^2+t\Big]_{-1}^2$

$$=\left(\frac{8}{3}-4+2\right)-\left(-\frac{1}{3}-1-1\right)=3$$

(4) $\int_1^0 (x-1)(x^2+x+1)dx=\int_1^0 (x^3-1)dx=\Big[\frac{1}{4}x^4-x\Big]_1^0$

$$=-\left(\frac{1}{4}-1\right)=\frac{3}{4}$$

답 (1) $\frac{8}{3}$ (2) 0 (3) 3 (4) $\frac{3}{4}$

정답 및 풀이 • 80쪽

**유제 086-1** 다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\int_1^2 (4x^3-2x-3)dx$ (2) $\int_1^{-3} (t-2)(3t+2)dt$

(3) $\int_{-1}^0 (x-1)^3 dx$ (4) $\int_1^{-1} \frac{x^3+8}{x+2}dx$

# 개념 078 정적분의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 세 실수 $a$, $b$, $c$를 포함하는 구간에서 연속일 때, 다음이 성립한다.

① $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, $k$는 실수)

② $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

③ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

④ $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$ ⇐ $a$, $b$, $c$의 대소에 관계없이 성립한다.

### 개념 Approach

정적분의 성질을 증명해 보자.

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$, 함수 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 하면

① $\int_a^b kf(x)dx=\Big[kF(x)\Big]_a^b=kF(b)-kF(a)=k\{F(b)-F(a)\}=k\Big[F(x)\Big]_a^b=k\int_a^b f(x)dx$

②, ③ $\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}dx=\Big[F(x)\pm G(x)\Big]_a^b=\{F(b)\pm G(b)\}-\{F(a)\pm G(a)\}$

$=\{F(b)-F(a)\}\pm\{G(b)-G(a)\}=\Big[F(x)\Big]_a^b\pm\Big[G(x)\Big]_a^b$

$=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$ (복호동순)

④ $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^c+\Big[F(x)\Big]_c^b=\{F(c)-F(a)\}+\{F(b)-F(c)\}$

$=F(b)-F(a)=\Big[F(x)\Big]_a^b=\int_a^b f(x)dx$

### 개념 Check

다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\int_0^1 (x^2+2x)dx+\int_0^1 (-x^2+2x)dx$ (2) $\int_{-2}^1 (x^3+3x^2)dx+\int_1^2 (x^3+3x^2)dx$

풀이 (1) (주어진 식)$=\int_0^1 \{(x^2+2x)+(-x^2+2x)\}dx=\int_0^1 4x\,dx=\Big[2x^2\Big]_0^1=2$

(2) (주어진 식)$=\int_{-2}^2 (x^3+3x^2)dx=\Big[\frac{1}{4}x^4+x^3\Big]_{-2}^2=(4+8)-(4-8)=16$

답 (1) 2 (2) 16

## 대표유형 087 정적분의 계산

• 개념 077, 078

다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{x-1}dx+\int_{0}^{-1} \frac{1}{t-1}dt$

(2) $\int_{-2}^{-1} (x^3+3x^2+1)dx+\int_{-1}^{1}(y^3+3y^2+1)dy+\int_{1}^{2} (u^3+3u^2+1)du$

**유형 Guide** 정적분의 합 · 차는 적분변수를 통일한 후 정적분의 성질을 이용하여 간단히 계산할 수 있다.
(1) 적분 구간이 같아지도록 변형한 후 하나의 정적분으로 나타내어 계산한다.
(2) 세 정적분의 피적분함수가 모두 같으므로 적분 구간을 합쳐서 하나의 정적분으로 나타내어 계산한다.

**유형 SSEN** 정적분의 합 · 차 ➡ 피적분함수와 적분 구간을 확인한다.

**풀이** (1) (주어진 식) $=\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{x-1}dx-\int_{-1}^{0} \frac{1}{x-1}dx=\int_{-1}^{0} \frac{x^3-1}{x-1}dx$

$=\int_{-1}^{0} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}dx=\int_{-1}^{0} (x^2+x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{0}=-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1\right)=\frac{5}{6}$

(2) (주어진 식) $=\int_{-2}^{-1} (x^3+3x^2+1)dx+\int_{-1}^{1} (x^3+3x^2+1)dx+\int_{1}^{2} (x^3+3x^2+1)dx$

$=\int_{-2}^{2} (x^3+3x^2+1)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+x\right]_{-2}^{2}=(4+8+2)-(4-8-2)=20$

답 (1) $\frac{5}{6}$ (2) 20

정답 및 풀이 • 80쪽

**유제 087-1** 다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\int_{0}^{3} (2x+1)^2dx+\int_{3}^{0} (2x-1)^2dx$

(2) $\int_{0}^{2} (\sqrt{x}+1)^3dx-\int_{0}^{2} (\sqrt{y}-1)^3 dy$

**유제 087-2** 함수 $f(x)=x^2-4x+3$에 대하여 $\int_{2}^{4}f(x)dx-\int_{3}^{4}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$의 값을 구하여라.

## 대표유형 088 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분
• 개념 077, 078

함수 $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x+1 & (x\ge 0) \\ x+1 & (x\le 0) \end{cases}$ 에 대하여 다음에 답하여라.

(1) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$의 값을 구하여라.

(2) $\int_{-1}^{a} f(x)dx=0$을 만족시키는 상수 $a$의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

**유형 Guide** 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분의 값을 구할 때에는 적분 구간을 나누어

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

임을 이용한다.

유형 SSEN **구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분 ⊙ 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.**

**풀이** (1) $-1\le x\le 0$일 때 $f(x)=x+1$, $0\le x\le 1$일 때 $f(x)=-\frac{1}{2}x+1$이므로

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0}(x+1)dx+\int_{0}^{1}\left(-\frac{1}{2}x+1\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^2+x\right]_{0}^{1}=-\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(-\frac{1}{4}+1\right)=\frac{5}{4}$$

(2) $\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_{-1}^{0}(x+1)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{0}=-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{2}$이므로 $\int_{-1}^{a} f(x)dx=0$, 즉

$\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=0$이려면

$$\int_{0}^{a} f(x)dx=-\int_{-1}^{0} f(x)dx=-\frac{1}{2}$$

따라서 $\int_{0}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{a}\left(-\frac{1}{2}x+1\right)dx=\left[-\frac{1}{4}x^2+x\right]_{0}^{a}=-\frac{1}{4}a^2+a=-\frac{1}{2}$이므로

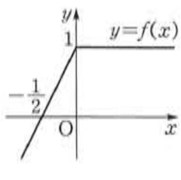
$a^2-4a-2=0 \qquad \therefore a=2\pm\sqrt{6}$

그런데 $a>0$이므로 $\quad a=2+\sqrt{6}$

답 (1) $\frac{5}{4}$ (2) $2+\sqrt{6}$

정답 및 풀이 • 80쪽

**유제 088-1** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $\int_{-2}^{2} f(x)dx$의 값을 구하여라.



대표유형 089 **절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분** • 개념 077, 078

다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\int_{-2}^{1} |x+1|\,dx$　　(2) $\int_{0}^{2} |x^2-x|\,dx$



유형 Guide　절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분의 값을 구할 때에는 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 $x$의 값을 경계로 구간을 나누어 절댓값 기호를 없앤 후 각 정적분의 값의 합을 구한다.

유형 SSEN **절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분 ○ 구간을 나누어 절댓값 기호를 없앤다.**

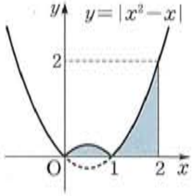
풀이　(1) $x+1=0$에서 $x=-1$이므로

$$|x+1|=\begin{cases} x+1 & (x\geq -1) \\ -x-1 & (x\leq -1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-2}^{1}|x+1|\,dx &= \int_{-2}^{-1}(-x-1)\,dx+\int_{-1}^{1}(x+1)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2-x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{1} \\ &= \left\{\left(-\frac{1}{2}+1\right)-(-2+2)\right\}+\left\{\left(\frac{1}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right\}=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

(2) $x^2-x=0$, 즉 $x(x-1)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$이므로

$$|x^2-x|=\begin{cases} x^2-x & (x\leq 0 \text{ 또는 } x\geq 1) \\ -x^2+x & (0\leq x\leq 1) \end{cases}$$




$$\begin{aligned}\therefore \int_{0}^{2}|x^2-x|\,dx &= \int_{0}^{1}(-x^2+x)\,dx+\int_{1}^{2}(x^2-x)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{2} \\ &= \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left\{\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right\}=1\end{aligned}$$

답 (1) $\frac{5}{2}$　(2) 1

정답 및 풀이 • 80쪽

**유제 089-1**　다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\int_{0}^{3} |2-x|\,dx$　　(2) $\int_{1}^{3} |x^2-x-2|\,dx$

(3) $\int_{-1}^{1} (|x|+x+1)^2\,dx$　　(4) $\int_{-1}^{2} |x^3+x|\,dx$

개념 079

# 우함수와 기함수의 정적분

연속함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

① $f(x)$가 우함수, 즉 $f(-x)=f(x)$이면

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

② $f(x)$가 기함수, 즉 $f(-x)=-f(x)$이면

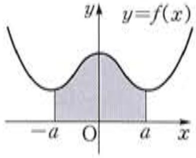
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$$

개념 Approach

**수학 Ⅱ**에서 모든 실수 $x$에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시키는 함수 $f(x)$를 우함수, $f(-x)=-f(x)$를 만족시키는 함수 $f(x)$를 기함수라 함을 배웠다.

정적분 $\int_{-a}^{a} f(x)dx$와 같이 위끝과 아래끝의 절댓값이 같고 부호가 다를 때, 함수 $f(x)$가 우함수 또는 기함수이면 함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 정적분의 값을 다음과 같이 간단히 구할 수 있다.

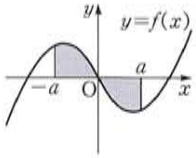
① $f(x)$가 우함수, 즉 $f(-x)=f(x)$이면 $y=f(x)$의 그래프는 $y$축에 대하여 대칭이므로 구간 $[-a,\ 0]$과 구간 $[0,\ a]$의 정적분의 값이 같다. 즉




$$\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

② $f(x)$가 기함수, 즉 $f(-x)=-f(x)$이면 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 구간 $[-a,\ 0]$과 구간 $[0,\ a]$의 정적분의 값은 그 절댓값이 같고 부호가 다르다. 즉




$$\int_{-a}^{0} f(x)dx=-\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=0$$

**Remark** 일반적으로 다항함수에서 우함수는 짝수 차수의 항 또는 상수항으로만 이루어져 있고, 기함수는 홀수 차수의 항으로만 이루어져 있다. 즉 자연수 $n$에 대하여

① $f(x)=a_{2n}x^{2n}+a_{2n-2}x^{2n-2}+\cdots+a_0$ ➡ $f(-x)=f(x)$ ➡ 우함수

② $f(x)=a_{2n-1}x^{2n-1}+a_{2n-3}x^{2n-3}+\cdots+a_1x$ ➡ $f(-x)=-f(x)$ ➡ 기함수

개념 Check 1

다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\int_{-1}^{1}(3x^2+4)dx$ (2) $\int_{-2}^{2}(x^3+2x)dx$

풀이 (1) $\int_{-1}^{1}(3x^2+4)dx=2\int_{0}^{1}(3x^2+4)dx=2\Big[x^3+4x\Big]_0^1$

$=2\cdot(1+4)=10$

(2) $\int_{-2}^{2}(x^3+2x)dx=0$

답 (1) 10 (2) 0

10 정적분 (1)

개념 Check 2

다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\int_{-1}^{4}(x^5-9x^2-4x+2)dx+\int_{4}^{1}(x^5-9x^2-4x+2)dx$

(2) $\int_{-2}^{0}(x^7-4x^3+3x^2+1)dx-\int_{2}^{0}(x^7-4x^3+3x^2+1)dx$

풀이 (1) (주어진 식) $=\int_{-1}^{1}(x^5-9x^2-4x+2)dx=2\int_{0}^{1}(-9x^2+2)dx$

$=2\Big[-3x^3+2x\Big]_0^1=2\cdot(-3+2)=-2$

(2) (주어진 식) $=\int_{-2}^{0}(x^7-4x^3+3x^2+1)dx+\int_{0}^{2}(x^7-4x^3+3x^2+1)dx$

$=\int_{-2}^{2}(x^7-4x^3+3x^2+1)dx=2\int_{0}^{2}(3x^2+1)dx$

$=2\Big[x^3+x\Big]_0^2=2\cdot(8+2)=20$

답 (1) $-2$ (2) 20

## 대표유형 090 우함수와 기함수의 정적분

• 개념 079

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시키고, $\int_0^1 f(x)dx=-1$일 때, $\int_{-1}^1 (x^3-2x-5)f(x)dx$의 값을 구하여라.

**유형 Guide** 위끝과 아래끝의 절댓값이 같고 부호가 다른 정적분의 값을 구할 때에는 피적분함수를 우함수 부분과 기함수 부분으로 나누어

함수 $f(x)$가 우함수이면 ➡ $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

함수 $f(x)$가 기함수이면 ➡ $\int_{-a}^a f(x)dx=0$

임을 이용한다.

유형 SSEN **적분 구간이 $[-a, a]$인 정적분 ➲ 피적분함수를 우함수와 기함수로 나눈다.**

**풀이** $\int_{-1}^1 (x^3-2x-5)f(x)dx=\int_{-1}^1 x^3f(x)dx-2\int_{-1}^1 xf(x)dx-5\int_{-1}^1 f(x)dx$

이때 $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=2\int_0^1 f(x)dx=2\cdot(-1)=-2$$

한편 $g(x)=x^3f(x)$, $h(x)=xf(x)$라 하면

$$g(-x)=(-x)^3f(-x)=-x^3f(x)=-g(x),$$
$$h(-x)=-xf(-x)=-xf(x)=-h(x)$$

에서 $g(x)$, $h(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-1}^1 g(x)dx=0,\ \int_{-1}^1 h(x)dx=0$$

즉 $\int_{-1}^1 x^3f(x)dx=0,\ \int_{-1}^1 xf(x)dx=0$

$\therefore$ (주어진 식)$=-5\int_{-1}^1 f(x)dx=-5\cdot(-2)=10$

답 10

**Remark** 피적분함수의 식이 구체적으로 주어지지 않은 경우에는

(우함수)×(우함수)=(우함수), (우함수)×(기함수)=(기함수), (기함수)×(기함수)=(우함수)

임을 이용한다.

정답 및 풀이 • 81쪽

**유제 090-1** 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키고, $\int_0^3 xf(x)dx=5$일 때, $\int_{-3}^3 (2x^2-3x+1)f(x)dx$의 값을 구하여라.

# 특강 080 주기함수의 정적분

## 1 주기함수

상수함수가 아닌 함수 $f(x)$에서 정의역에 속하는 모든 $x$에 대하여

$$f(x+p)=f(x)$$

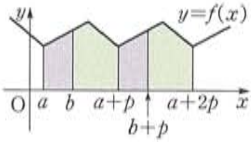
를 만족시키는 0이 아닌 상수 $p$가 존재할 때, 함수 $f(x)$를 **주기함수**라 한다.
또 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 상수 $p$의 값 중에서 최소의 양수를 함수 $f$의 **주기**라 한다.

## 2 주기함수의 정적분

함수 $f(x)$의 주기가 $p$이면

$$f(x+p)=f(x)$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 일정한 모양이 반복된다. 따라서 다음이 성립한다.




① 구간 $[a, b]$의 정적분의 값은 구간 $[a+p, b+p]$의 정적분의 값과 같다.

➡ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_{a+p}^{b+p} f(x)dx$

② 한 주기에 해당하는 구간의 정적분의 값은 항상 같다.

➡ $\displaystyle\int_a^{a+p} f(x)dx=\int_b^{b+p} f(x)dx$

개념 Check

연속함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시키고, $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx=4$일 때, $\displaystyle\int_{-2}^{6} f(x)dx$의 값을 구하여라.

풀이 $f(x+1)=f(x)$에서 $f(x)$는 주기함수이므로

$$\int_{-2}^{-1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx=\cdots=\int_{5}^{6} f(x)dx$$

따라서 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx=4$에서

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{1} f(x)dx=2$$

$$\therefore \int_{-2}^{6} f(x)dx=\int_{-2}^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^{0} f(x)dx+\cdots+\int_{5}^{6} f(x)dx$$

$$=8\int_{0}^{1} f(x)dx=8\cdot 2=16$$

답 16

# 중단원 연습 문제

STEP 1 유형 Training

**01** 다음 중 곡선 $y=x^3$과 $x$축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 나타내는 식은?

① $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}$　② $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\cdot\frac{2}{n}$　③ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}$

④ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^3\cdot\frac{2}{n}$　⑤ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{2n}\right)^3\cdot\frac{1}{2n}$

**02** 정적분 $\int_{-2}^{k}(2x-4)dx$의 값이 최소가 되도록 하는 상수 $k$의 값을 구하여라.

**03** 다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\int_{0}^{1}(t+2)(t^2-2t+4)dt$

(2) $\int_{-1}^{3}(3x^2+2x-1)dx-\int_{-1}^{2}(3x^2+2x-1)dx$

**04** 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x\geq 0) \\ -x-1 & (x\leq 0)\end{cases}$ 일 때, $\int_{0}^{2}xf(x-1)dx$의 값을 구하여라.

**05** $\int_{-1}^{1}|x(x-1)^2|dx$의 값을 구하여라.

서술형

**06** 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)=f(-x)$, $g(x)=-g(-x)$를 만족시킨다. $\int_{0}^{3}f(x)dx=5$, $\int_{0}^{3}g(x)dx=8$일 때, $\int_{-3}^{3}\{f(x)+g(x)\}dx$의 값을 구하여라.

STEP 2 실전 Application

서술형

**07** 반지름의 길이가 $r$인 구의 부피를 구분구적법으로 구하여라.



서술형

**08** 함수 $f(x)=ax^2-bx+2$가

$$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{12},\ \int_0^1 x^2 f(x)dx=-\frac{1}{30}$$

을 만족시킬 때, 상수 $a$, $b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

수능기출

**09** 이차함수 $f(x)$는 $f(0)=-1$이고,

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx$$

를 만족시킨다. $f(2)$의 값은?

① 11　② 10　③ 9　④ 8　⑤ 7

**10** 두 실수 $a$, $b$에 대하여 연산 $*$을 $a*b=\begin{cases} a & (a\geq b) \\ b & (a\leq b) \end{cases}$로 정의할 때,

$\int_0^2 (x*x^2)dx$의 값을 구하여라.

수능기출

**11** 삼차함수 $f(x)=x^3-3x-1$이 있다. 실수 $t\ (t\geq-1)$에 대하여 $-1\leq x\leq t$에서 $|f(x)|$의 최댓값을 $g(t)$라고 하자. $\int_{-1}^1 g(t)dt=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라.

(단, $p$, $q$는 서로소인 자연수이다.)

**12** 함수 $f(x)=|x|+|x-1|$의 최솟값을 $a$라 할 때, $\int_{-1}^{a} f(x)dx$의 값을 구하여라.

서술형

**13** 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $3x^2-2x+1$이다. $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$일 때, $\int_{0}^{2} f(x)dx$의 값을 구하여라.

서술형

**14** 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)=f(-x)$를 만족시키고, $f(1)=2$이다. 이때 $\int_{0}^{1} \{f(x)\}^2dx$의 값이 최소가 되도록 하는 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $3a+2b+c$의 값을 구하여라.

수능기출

**15** 함수 $f(x)=x+1$에 대하여

$$\int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2dx=k\left(\int_{-1}^{1} f(x)dx\right)^2$$

일 때, 상수 $k$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

**16** 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킬 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

**보기**

ㄱ. $\int_{-1}^{3} f(x)dx=\int_{1}^{3} f(x)dx$

ㄴ. $\int_{0}^{4} f(x-1)dx=\int_{1}^{3} f(x)dx$

ㄷ. $\int_{0}^{2} f(x+1)dx=-\int_{-2}^{2} f(x-1)dx$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

STEP 3 심화 Forwarding

**17** $0\le x\le 1$에서 정의된 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

| | |
|---|---|
| (가) $2<f(x)<3$ | (나) $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$ |

옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $0<x<1$인 임의의 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\ge 0$이다.

ㄴ. 방정식 $f(x)-3x=0$의 해가 열린 구간 $(0,\ 1)$에 적어도 한 개 존재한다.

ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}<\int_0^1 f(x)dx<\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

서술형

**18** 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x-1)=f(x+1)$을 만족시키고, $-1\le x\le 1$에서 $f(x)=-x^2+1$이다. 이때 $\displaystyle\int_{-1}^{9} f(x)dx$의 값을 구하여라.

**19** 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)+f(-x)=2$를 만족시킬 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1} f(-x)dx$

ㄴ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\int_{-k}^{k} f(x)dx=110$

ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\int_{-k}^{k} x\{f(x)+f(-x)\}dx=550$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

# 11

# 정적분 (2)

앞에서 부정적분은 함수이고, 정적분은 실수임을 배웠다. 그렇다면 정적분이 함수가 되도록 하는 방법은 없을까?

이 단원에서는 아래끝 또는 위끝에 변수가 있는 정적분으로 정의된 함수에 대하여 알아보고 정적분을 포함한 등식에서 함수를 구하는 방법을 공부해 보자. 또 복잡한 급수의 합을 정적분의 정의를 이용하여 간단하게 계산하는 방법을 공부해 보자.

## 한눈에 보는 개념&유형 map

### 소단원 & 학습목표

**27 정적분으로 정의된 함수**

- 정적분으로 정의된 함수의 성질을 이해하고 미분할 수 있다.
- 정적분을 포함한 등식에서 함수를 구할 수 있다.

**28 정적분과 급수**

- 정적분의 정의를 이용하여 복잡한 급수의 합을 구할 수 있다.

개념 & 특강 | 대표유형 & 유제

081 정적분으로 정의된 함수

082 정적분으로 정의된 함수의 미분

특강 083 정적분을 포함한 등식에서 함수 구하기 — 091 적분 구간이 상수인 정적분을 포함한 등식 — 092 적분 구간에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식 — 093 적분 구간과 피적분함수에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식

094 정적분으로 정의된 함수의 극대 · 극소

095 정적분으로 정의된 함수의 최대 · 최소

084 정적분으로 정의된 함수의 극한 — 096 정적분으로 정의된 함수의 극한

085 정적분과 급수

특강 086 급수를 정적분으로 나타내는 방법 — 097 정적분과 급수 (1) — 098 정적분과 급수 (2) — 099 정적분과 급수의 활용

## 개념 081 정적분으로 정의된 함수

정적분 $\int_a^x f(t)dt$ ($a$는 상수)에서 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\int_a^x f(t)dt=\Big[F(t)\Big]_a^x=F(x)-F(a)$$

이므로 $\int_a^x f(t)dt$는 $x$에 대한 함수이다.

이와 같이 정적분의 위끝, 아래끝에 적분변수가 아닌 다른 변수가 있는 정적분으로 함수를 정의할 수 있다.

**Remark** $\int_a^x f(t)dt$에서 $t$는 적분변수이므로 $\int_a^x f(t)dt$는 $t$에 대한 함수가 아니고 $x$에 대한 함수이다.

### 개념 Approach

**개념 075**에서 정적분 $\int_a^b f(t)dt$ ($a$, $b$는 상수)는 실수임을 공부하였다. 그러나 $a$, $b$에 적분변수 $t$가 아닌 다른 변수 $x$가 있으면 $x$의 값에 따라 정적분의 값이 결정되므로 이 정적분은 $x$에 대한 함수가 된다.

예를 들어 위끝에 변수가 있는 정적분 $\int_2^x (t^2-2t)dt$를 계산하면

$$\begin{aligned}\int_2^x (t^2-2t)dt&=\Big[\frac{1}{3}t^3-t^2\Big]_2^x=\Big(\frac{1}{3}x^3-x^2\Big)-\Big(\frac{1}{3}\cdot2^3-2^2\Big)\\&=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{4}{3}\end{aligned}$$

이므로 이 정적분은 $x$에 대한 함수이다.

또 위끝과 아래끝에 변수가 있는 정적분 $\int_x^{x+1} 2t\,dt$를 계산하면

$$\begin{aligned}\int_x^{x+1} 2t\,dt&=\Big[t^2\Big]_x^{x+1}=(x+1)^2-x^2\\&=2x+1\end{aligned}$$

이므로 이 정적분도 $x$에 대한 함수이다.

## 개념 082 정적분으로 정의된 함수의 미분

정적분으로 정의된 함수 $\int_a^x f(t)dt$, $\int_x^{x+a} f(t)dt$를 $x$에 대하여 미분하면 다음과 같다.

① $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ (단, $a$는 상수)

② $\frac{d}{dx}\int_x^{x+a} f(t)dt=f(x+a)-f(x)$ (단, $a$는 상수)

### 개념 Approach

정적분으로 정의된 함수의 미분에 대한 등식을 증명해 보자.

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

① $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_a^x=\frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\}=F'(x)=f(x)$

② $\frac{d}{dx}\int_x^{x+a} f(t)dt=\frac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_x^{x+a}=\frac{d}{dx}\{F(x+a)-F(x)\}$

$$=\frac{d}{dx}F(x+a)-\frac{d}{dx}F(x)=F'(x+a)-F'(x)$$

$$=f(x+a)-f(x)$$

**Remark** ②에서 위끝과 아래끝이 $x$ 또는 $x+a$ ($a$는 상수)가 아닌 경우에는 등식이 성립하지 않는다.

예를 들어 $\int_x^{x^2} t\,dt$를 미분할 때에는 ②를 적용할 수 없다. 즉 $\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} t\,dt \neq x^2-x$이다.

이때에는 다음과 같이 실제로 정적분을 계산하여 미분해야 한다.

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} t\,dt=\frac{d}{dx}\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_x^{x^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2\right)=2x^3-x$$

### 개념 Check

다음 함수를 $x$에 대하여 미분하여라.

(1) $\int_2^x (2t^2-3)dt$ (2) $\int_x^{x+2} (t^2-3t+2)dt$

**풀이** (1) $\frac{d}{dx}\int_2^x (2t^2-3)dt=2x^2-3$

(2) $\frac{d}{dx}\int_x^{x+2} (t^2-3t+2)dt=\{(x+2)^2-3(x+2)+2\}-(x^2-3x+2)=4x-2$

답 (1) $2x^2-3$ (2) $4x-2$

특강 083

# 정적분을 포함한 등식에서 함수 구하기

정적분을 포함한 등식에서 함수 $f(x)$는 다음과 같은 방법으로 구한다. (단, $a$, $b$는 상수)

(1) $f(x)=g(x)+\int_a^b f(t)dt$와 같이 적분 구간이 상수인 경우 263쪽 • 대표유형 091

➡ $\int_a^b f(t)dt=k$ ($k$는 상수)로 놓고 $f(x)=g(x)+k$임을 이용한다.

(2) $\int_a^x f(t)dt=g(x)$와 같이 적분 구간에 변수 $x$가 있는 경우 264쪽 • 대표유형 092

➡ 양변을 $x$에 대하여 미분하고 $\int_a^a f(t)dt=0$임을 이용한다.

(3) $\int_a^x (x-t)f(t)dt=g(x)$와 같이 적분 구간과 피적분함수에 변수 $x$가 있는 경우 265쪽 • 대표유형 093

➡ 좌변을 $x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$로 변형한 후 양변을 $x$에 대하여 미분한다.

위의 방법을 자세히 살펴보자.

(1) $f(x)=g(x)+\int_a^b f(t)dt$에서 $\int_a^b f(t)dt$는 상수이므로 $\int_a^b f(t)dt=k$ ($k$는 상수)로 놓고 이를 주어진 식에 대입하면 $f(x)=g(x)+k$이다.

따라서 $\int_a^b \{g(x)+k\}dx=k$이므로 이를 만족시키는 $k$의 값을 구하면 $f(x)$를 구할 수 있다.

(2) $\int_a^x f(t)dt=g(x)$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면 $\quad f(x)=g'(x)$

$g(x)$가 미정계수를 포함하고 있을 때에는 주어진 등식에 $x=a$를 대입하면

$\int_a^a f(t)dt=g(a)=0$임을 이용하여 미정계수를 구한다.

(3) $\int_a^x (x-t)f(t)dt=g(x)$에서 적분변수 이외의 문자는 상수로 생각하고 좌변을 정리하면

$$x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt=g(x)$$

양변을 $x$에 대하여 미분하면 $\quad \int_a^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=g'(x)$

$$\therefore \int_a^x f(t)dt=g'(x)$$

양변을 다시 $x$에 대하여 미분하면 $f(x)$를 구할 수 있다.

개념 SSEN

정적분을 포함한 등식
- → 정적분을 상수로 놓는다.
- → 양변을 $x$에 대하여 미분한다.

## 대표유형 091 적분 구간이 상수인 정적분을 포함한 등식

• 특강 083

다음 등식을 만족시키는 다항함수 $f(x)$를 구하여라.

(1) $f(x)=2x-3\int_0^1 f(t)dt$　　　(2) $f(x)=x^2-x+\int_0^1 tf(t)dt$

**유형 Guide** $f(x)=g(x)+\int_a^b f(t)dt$ ($a$, $b$는 상수) 꼴의 등식이 주어지면 다음과 같은 순서로 $f(x)$를 구한다.

(i) $\int_a^b f(t)dt=k$ ($k$는 상수)로 놓는다.

(ii) $f(x)=g(x)+k$를 (i)의 식에 대입하여 $k$의 값을 구한다.

(iii) $k$의 값을 $f(x)=g(x)+k$에 대입하여 $f(x)$를 구한다.

**유형 SSEN** $f(x)=g(x)+\int_a^b f(t)dt$ ○ $\int_a^b f(t)dt=k$($k$는 상수)로 놓는다.

**풀이** (1) $\int_0^1 f(t)dt=k$ ($k$는 상수)　　…… ㉠

로 놓으면　$f(x)=2x-3k$

$f(t)=2t-3k$를 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 (2t-3k)dt=\left[t^2-3kt\right]_0^1=1-3k=k$　　$\therefore k=\frac{1}{4}$

$\therefore f(x)=2x-\frac{3}{4}$

(2) $\int_0^1 tf(t)dt=k$ ($k$는 상수)　　…… ㉠

로 놓으면　$f(x)=x^2-x+k$

$f(t)=t^2-t+k$를 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 t(t^2-t+k)dt=\int_0^1 (t^3-t^2+kt)dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{k}{2}=k$

$\therefore k=-\frac{1}{6}$

$\therefore f(x)=x^2-x-\frac{1}{6}$

답 (1) $f(x)=2x-\frac{3}{4}$　(2) $f(x)=x^2-x-\frac{1}{6}$

정답 및 풀이 • 87쪽

**유제 091-1** 다음 등식을 만족시키는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 값을 구하여라.

(1) $f(x)=-3x^2+2x+\int_0^1 tf(t)dt$　　　(2) $f(x)=-3x^2+\int_0^1 (x-1)f(t)dt$

## 대표유형 092 적분 구간에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식

• 특강 083

임의의 실수 $x$에 대하여 다항함수 $f(x)$가 $\int_1^x f(t)dt=x^4-ax^2+2x$를 만족시킬 때, $f(-1)$의 값을 구하여라. (단, $a$는 상수이다.)

**유형 Guide** $\int_a^x f(t)dt=g(x)$ ($a$는 상수) 꼴의 등식에서 $f(x)$를 구하려면 양변을 $x$에 대하여 미분한다. 이때 $g(x)$가 미정계수를 포함하고 있으면 주어진 등식에 $x=a$를 대입한 후 $\int_a^a f(t)dt=0$임을 이용한다.

**유형 SSEN** $\int_a^x f(t)dt=g(x)$ ➔ **양변을 $x$에 대하여 미분한다.**

**풀이** 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=4x^3-2ax+2$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1-a+2 \quad \therefore a=3$ $\boxed{\int_1^1 f(t)dt=0}$

따라서 $f(x)=4x^3-6x+2$이므로

$f(-1)=-4+6+2=4$

답 4

정답 및 풀이 • 87쪽

**유제 092-1** 임의의 실수 $x$에 대하여 다항함수 $f(x)$가 $\int_a^x f(t)dt=x^2-2x-3$을 만족시킬 때, $f(a)$의 값을 구하여라. (단, $a<0$)

**Plus 유제 092-2** 임의의 실수 $x$에 대하여 다항함수 $f(x)$가 $xf(x)=2x^3+x^2+\int_2^x f(t)dt$를 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하여라.

대표유형 093 적분 구간과 피적분함수에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식 • 특강 083

임의의 실수 $x$에 대하여 다항함수 $f(x)$가 $\int_1^x (x-t)f(t)dt=x^4+2x^3+ax^2+2$를 만족시킬 때, $f(x)$를 구하여라. (단, $a$는 상수이다.)

**유형 Guide** $\int_a^x (x-t)f(t)dt=g(x)$ ($a$는 상수) 꼴의 등식에서 $f(x)$를 구하려면 좌변을 $x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$와 같이 피적분함수에 변수 $x$가 포함되지 않도록 변형한 후 양변을 $x$에 대하여 미분한다.

**유형 SSEN** $\int_a^x (x-t)f(t)dt=g(x)$ ⊙ 좌변을 $x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$로 변형한다.

**풀이** 주어진 등식의 좌변은

$$\int_1^x (x-t)f(t)dt=x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt$$

이므로 주어진 등식은

$$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^4+2x^3+ax^2+2$$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=4x^3+6x^2+2ax$$

$$\therefore \int_1^x f(t)dt=4x^3+6x^2+2ax$$

양변을 다시 $x$에 대하여 미분하면

$$f(x)=12x^2+12x+2a$$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$0=1+2+a+2 \qquad \therefore a=-5$$

$$\therefore f(x)=12x^2+12x-10$$

답 $f(x)=12x^2+12x-10$

정답 및 풀이 • 87쪽

**유제 093-1** 임의의 실수 $x$에 대하여 다항함수 $f(x)$가 $\int_1^x (x-t)f(t)dt=2x^3+3x^2-12x+7$을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값을 구하여라.

**유제 093-2** 임의의 실수 $x$에 대하여 다항함수 $f(x)$가 $\int_{-1}^x (x-t)f(t)dt=x^3+ax^2-bx+3$을 만족시킬 때, 상수 $a$, $b$에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라.

## 대표유형 094 정적분으로 정의된 함수의 극대 · 극소

• 특강 083

함수 $f(x)=\int_0^x (t^2-1)dt$의 극댓값과 극솟값을 구하여라.

**유형 Guide** 함수 $f(x)$의 극값은 $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값을 구한 후 그 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호의 변화를 확인하여 구한다. $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 극대, 음에서 양으로 바뀌면 극소이다.

이때 함수 $f(x)$가 $f(x)=\int_0^x g(t)dt$와 같이 적분 구간에 변수가 있는 정적분으로 정의된 경우 $f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x g(t)dt=g(x)$임을 이용한다.

**유형 SSEN** 함수 $f(x)$의 극대 · 극소 ➡ $f(x)$를 $x$에 대하여 미분한다.

**풀이** $f(x)=\int_0^x (t^2-1)dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$f'(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극대, $x=1$일 때 극소이고

$$f(-1)=\int_0^{-1} (t^2-1)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_0^{-1}=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3},$$

$$f(1)=\int_0^1 (t^2-1)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_0^1=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$$

이므로 극댓값은 $\frac{2}{3}$, 극솟값은 $-\frac{2}{3}$이다.

답 극댓값: $\frac{2}{3}$, 극솟값: $-\frac{2}{3}$

**Remark** 주어진 식을 적분하여 함수 $f(x)$를 구할 수도 있지만 극댓값과 극솟값을 구하는 문제이므로 $f(x)$를 미분하여 $f'(x)$를 구하는 것이 더 편리하다.

정답 및 풀이 • 88쪽

**유제 094-1** 함수 $f(x)=\int_0^x (3t^2+6t-9)dt$의 극댓값과 극솟값을 구하여라.

**Plus 유제 094-2** 함수 $f(x)=\int_1^x (4t^3-3t^2+kt)dt$가 극댓값을 가질 때, 상수 $k$의 값의 범위를 구하여라.

## 대표유형 095 정적분으로 정의된 함수의 최대 · 최소

• 특강 083

$-1 \le x \le 0$에서 함수 $f(x)=\int_{x}^{x+1}(t^2+t-1)dt$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

**유형 Guide** $a \le x \le b$에서 함수 $f(x)$의 최대, 최소를 구할 때에는 주어진 구간에서 $f(x)$의 극값, 양 끝 값에서의 함숫값을 비교하여 구한다.

이때 함수 $f(x)$가 $f(x)=\int_{x}^{x+a}g(t)dt$와 같이 적분 구간에 변수가 있는 정적분으로 정의된 경우

$f'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_{x}^{x+a}g(t)dt=g(x+a)-g(x)$임을 이용한다.

**유형 SSEN** 함수 $f(x)$의 최대 · 최소 ⊙ 극값과 구간의 양 끝 값에서의 함숫값을 비교한다.

**풀이** $f(x)=\int_{x}^{x+1}(t^2+t-1)dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\{(x+1)^2+(x+1)-1\}-(x^2+x-1)$$
$$=2(x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

$-1 \le x \le 0$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | |

따라서 $f(x)$는 $x=0$일 때 최대, $x=-1$일 때 최소이고

$$f(0)=\int_{0}^{1}(t^2+t-1)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-t\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{6},$$

$$f(-1)=\int_{-1}^{0}(t^2+t-1)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-t\right]_{-1}^0=-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{7}{6}$$

이므로 최댓값은 $-\frac{1}{6}$, 최솟값은 $-\frac{7}{6}$이다.

답 최댓값: $-\frac{1}{6}$, 최솟값: $-\frac{7}{6}$

**Remark**
- $f(x)=\int_{x}^{x+a}g(t)dt$일 때, $f'(x)=g(x+a)-g(x)$
- $f(x)=\int_{x+a}^{x+b}g(t)dt$일 때, $f'(x)=g(x+b)-g(x+a)$

정답 및 풀이 • 88쪽

**유제 095-1** $-1 \le x \le 1$에서 함수 $f(x)=\int_{1}^{x}t(t^2-1)dt$의 최댓값을 구하여라.

**Plus 유제 095-2** 함수 $f(x)=x^2-5x+1$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_{x}^{x+1}f(t)dt$로 정의할 때, $g(x)$의 최솟값을 구하여라.

개념 084

## 정적분으로 정의된 함수의 극한

정적분으로 정의된 함수의 극한에 대하여 다음이 성립한다.

① $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$

② $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)dt=f(a)$

**개념 Approach**

정적분으로 정의된 함수의 극한이 $\frac{0}{0}$ 꼴인 경우에는 미분계수의 정의

$$F'(a)=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}$$

를 이용하여 ①, ②와 같이 계산할 수 있다. 이를 증명해 보자.

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

① $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\lim_{x\to a}\frac{\Big[F(t)\Big]_a^x}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)=f(a)$

② $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{\Big[F(t)\Big]_a^{x+a}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{F(x+a)-F(a)}{x}=F'(a)=f(a)$

**개념 Check**

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x (t^2+2t)dt$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_2^{2+x} (3t+4)dt$

**풀이** (1) $f(t)=t^2+2t$로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt&=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\Big[F(t)\Big]_1^x\\&=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\\&=F'(1)=f(1)=1+2=3\end{aligned}$$

(2) $f(t)=3t+4$로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_2^{2+x} f(t)dt&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_2^{2+x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{F(2+x)-F(2)}{x}\\&=F'(2)=f(2)=6+4=10\end{aligned}$$

답 (1) 3　(2) 10

## 대표유형 096 정적분으로 정의된 함수의 극한

• 개념 084

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}(t^3-t^2+t)dt$　　(2) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{2-x}^{2+x}(3t^2-t+1)dt$

**유형 Guide** 정적분으로 정의된 함수의 극한이 $\frac{0}{0}$ 꼴인 경우에는 피적분함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$로 놓고, 다음과 같이 미분계수의 정의를 이용한다.

① 분모의 항이 2개인 경우: $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)=f(a)$

② 분모의 항이 1개인 경우: $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a}f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x+a)-F(a)}{x}=F'(a)=f(a)$

유형 SSEN **정적분으로 정의된 함수의 극한 ⊙ 미분계수의 정의를 이용한다.**

**풀이** (1) $f(t)=t^3-t^2+t$로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\Big[F(t)\Big]_1^{x^2}=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)=2F'(1)=2f(1)$$

$$=2\cdot(1-1+1)=2$$

(2) $f(t)=3t^2-t+1$로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{2-x}^{2+x}f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_{2-x}^{2+x}=\lim_{x\to0}\frac{F(2+x)-F(2-x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{F(2+x)-F(2)+F(2)-F(2-x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{F(2+x)-F(2)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{F(2-x)-F(2)}{-x}$$

$$=F'(2)+F'(2)=2F'(2)=2f(2)$$

$$=2\cdot(12-2+1)=22$$

답 (1) 2　(2) 22

정답 및 풀이 • 88쪽

**유제 096-1** 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^{x^3}(t+1)^3dt$　　(2) $\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_2^{2+h}(2t-1)^3(t+1)^2\,dt$

**유제 096-2** 함수 $f(x)=-2x^3+4x+1$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt$의 값을 구하여라.

# 개념 085 정적분과 급수

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 정적분의 정의

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx\ \left(\Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$

를 이용하면 다음과 같이 급수의 합을 구할 수 있다.

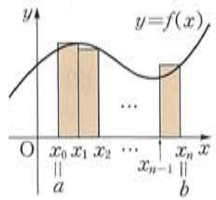
① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{(b-a)k}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$ ⬅ 정적분의 정의

② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{pk}{n}\right)\cdot\frac{p}{n}=\int_a^{a+p} f(x)dx=\int_0^p f(x+a)dx$

③ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{pk}{n}\right)\cdot\frac{q}{n}=q\int_0^1 f(a+px)dx$

## 개념 Approach

지금까지 급수의 합은 부분합으로 이루어진 수열의 극한으로 구할 수 있었다. 그런데 부분합을 계산하는 것이 복잡하거나 불가능한 경우에는 다음과 같이 정적분을 이용하여 그 합을 쉽게 구할 수 있다.




① $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$, $x_k=a+k\Delta x=a+\dfrac{b-a}{n}k$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{(b-a)k}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx \quad\cdots\cdots ㉠$$

② ㉠에서 $p=b-a$로 놓으면 $b=a+p$이고,

$$\Delta x=\frac{p}{n},\ x_k=a+k\Delta x=a+\frac{p}{n}k$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{pk}{n}\right)\cdot\frac{p}{n}=\int_a^{a+p} f(x)dx$$

$\displaystyle\int_a^{a+p} f(x)dx$는 함수 $f(x)$를 구간 $[a,\ a+p]$에서 적분한 값이다. 이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 구간 $[a,\ a+p]$를 $x$축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동하면 $y=f(x+a)$의 그래프와 구간 $[0,\ p]$가 되므로 $\displaystyle\int_a^{a+p} f(x)dx$의 값은 함수 $f(x+a)$를 구간 $[0,\ p]$에서 적분한 값과 같다.

$$\therefore \int_a^{a+p} f(x)dx=\int_0^p f(x+a)dx$$

③ $\Delta x=\dfrac{1}{n}=\dfrac{1-0}{n}$이라 하면 $x_k=0+k\Delta x=\dfrac{k}{n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{pk}{n}\right)\cdot\frac{q}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+p\cdot\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\cdot q=q\int_0^1 f(a+px)dx$$

특강 086

## 급수를 정적분으로 나타내는 방법

급수를 정적분으로 나타낼 때에는 다음과 같은 순서로 한다.

| (i) 적분변수를 정한다. | (ii) 적분 구간을 구한다. | (iii) 정적분으로 나타낸다. |
|---|---|---|

이때 무엇을 적분변수로 정하느냐에 따라 여러 가지 정적분으로 나타낼 수 있다.

예를 들어 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{2k}{n}\right)^2\cdot\dfrac{2}{n}$ 의 값을 정적분을 이용하여 구해 보자.

**방법 1** $1+\dfrac{2k}{n}$ 를 $x$로 나타내는 경우 ⇐ 개념 **085**의 ① 이용

(i) $1+\dfrac{2k}{n}$ 를 $x$로, $k$의 계수 $\dfrac{2}{n}$ 를 $dx$로 나타낸다.

(ii) $k=1$이고 $n\longrightarrow\infty$이면 $x=1$이고, $k=n$이면 $x=3$이므로 적분 구간은 $[1,\ 3]$이다.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{2k}{n}\right)^2\cdot\dfrac{2}{n}=\displaystyle\int_1^3 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3=9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$

**방법 2** $\dfrac{2k}{n}$ 를 $x$로 나타내는 경우 ⇐ 개념 **085**의 ② 이용

(i) $\dfrac{2k}{n}$ 를 $x$로, $k$의 계수 $\dfrac{2}{n}$ 를 $dx$로 나타낸다.

(ii) $k=1$이고 $n\longrightarrow\infty$이면 $x=0$이고, $k=n$이면 $x=2$이므로 적분 구간은 $[0,\ 2]$이다.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{2k}{n}\right)^2\cdot\dfrac{2}{n}=\displaystyle\int_0^2 (1+x)^2\,dx=\int_0^2 (x^2+2x+1)\,dx$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_0^2=\frac{8}{3}+4+2=\frac{26}{3}$$

**방법 3** $\dfrac{k}{n}$ 를 $x$로 나타내는 경우 ⇐ 개념 **085**의 ③ 이용

(i) $\dfrac{k}{n}$ 를 $x$로, $k$의 계수 $\dfrac{1}{n}$ 을 $dx$로 나타낸다.

(ii) $k=1$이고 $n\longrightarrow\infty$이면 $x=0$이고, $k=n$이면 $x=1$이므로 적분 구간은 $[0,\ 1]$이다.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{2k}{n}\right)^2\cdot\dfrac{2}{n}=2\displaystyle\int_0^1 (1+2x)^2\,dx=2\int_0^1 (4x^2+4x+1)\,dx$

$$=2\left[\frac{4}{3}x^3+2x^2+x\right]_0^1=2\cdot\left(\frac{4}{3}+2+1\right)=\frac{26}{3}$$

급수와 정적분의 각 요소 사이의 관계를 다음과 같이 이해하면 도움이 된다.

개념 SSEN

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{pk}{n}\right)\cdot\frac{p}{n} \Rightarrow \int_a^{a+p} f(x)\,dx$$

## 대표유형 097 정적분과 급수 (1)

• 개념 085 • 특강 086

정적분을 이용하여 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^3\cdot\frac{2}{n}$

**유형 Guide** 복잡한 급수의 계산은 다음과 같이 정적분으로 나타내어 구하면 편리하다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{pk}{n}\right)\cdot\frac{p}{n} \Rightarrow \int_{a}^{a+p} f(x)\,dx$$

**유형 SSEN** 복잡한 급수의 계산 ⊙ 정적분을 이용한다.

**풀이** (1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$에서 $\frac{k}{n}$를 $x$로, $\frac{1}{n}$을 $dx$로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n \longrightarrow \infty$이면 $x=0$이고, $k=n$이면 $x=1$

이므로 적분 구간은 $[0,\ 1]$이다.

$\therefore$ (주어진 식)$=\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^3\cdot\frac{2}{n}=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^3\cdot\frac{3}{n}$에서 $1+\frac{3k}{n}$를 $x$로, $\frac{3}{n}$을 $dx$로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n \longrightarrow \infty$이면 $x=1$이고, $k=n$이면 $x=4$

이므로 적분 구간은 $[1,\ 4]$이다.

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{2}{3}\int_1^4 x^3\,dx=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^4=\frac{1}{6}(4^4-1)=\frac{85}{2}$

답 (1) $\frac{1}{3}$　(2) $\frac{85}{2}$

**다른 풀이 1** (2) $\frac{3k}{n}$를 $x$로, $\frac{3}{n}$을 $dx$로 나타낼 때,

(주어진 식)$=\frac{2}{3}\int_0^3 (1+x)^3\,dx=\frac{2}{3}\int_0^3 (x^3+3x^2+3x+1)\,dx=\frac{85}{2}$

**다른 풀이 2** (2) $\frac{k}{n}$를 $x$로, $\frac{1}{n}$을 $dx$로 나타낼 때,

(주어진 식)$=2\int_0^1 (1+3x)^3\,dx=2\int_0^1 (27x^3+27x^2+9x+1)\,dx=\frac{85}{2}$

정답 및 풀이 • 89쪽

**유제 097-1** 정적분을 이용하여 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(4+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{3}{n}$

## 대표유형 098 정적분과 급수 (2)

• 개념 085 • 특강 086

정적분을 이용하여 $\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^3+(n+2)^3+\cdots+(n+n)^3}{n^4}$의 값을 구하여라.

**유형 Guide** 합이 나열된 식의 극한값은 주어진 식을 합의 기호 $\Sigma$를 이용하여 $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{pk}{n}\right) \cdot \frac{p}{n}$ 꼴로 변형한 후

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{pk}{n}\right) \cdot \frac{p}{n} = \int_a^{a+p} f(x)dx$$

임을 이용하여 정적분으로 나타내어 구한다.

**유형 SSEN** 복잡한 급수의 계산 ➡ 정적분을 이용한다.

**풀이** (주어진 식)$=\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k)^3}{n^4} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n}$

$1+\frac{k}{n}$를 $x$로, $\frac{1}{n}$을 $dx$로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n \longrightarrow \infty$이면 $x=1$이고, $k=n$이면 $x=2$

이므로 적분 구간은 $[1, 2]$이다.

$\therefore$ (주어진 식)$=\int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2 = \frac{15}{4}$

답 $\frac{15}{4}$

**다른 풀이** $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n}$에서 $\frac{k}{n}$를 $x$로, $\frac{1}{n}$을 $dx$로 나타낼 때,

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= \int_0^1 (1+x)^3 dx = \int_0^1 (1+3x+3x^2+x^3)dx \\ &= \left[x+\frac{3}{2}x^2+x^3+\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 \\ &= \frac{15}{4}\end{aligned}$$

정답 및 풀이 • 89쪽

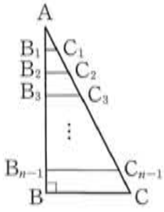
**유제 098-1** 정적분을 이용하여 $\lim_{n \to \infty} \frac{(2n+1)^2+(2n+2)^2+\cdots+(3n)^2}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$의 값을 구하여라.

## 대표유형 099 정적분과 급수의 활용

• 개념 085 • 특강 086

$\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=1$, $\angle B=90°$인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AB를 $n$등분한 점을 오른쪽 그림과 같이 $B_1$, $B_2$, $B_3$, $\cdots$, $B_{n-1}$이라 하고, 각 점에서 변 BC에 평행하게 직선을 그어 변 AC와 만나는 점을 각각 $C_1$, $C_2$, $C_3$, $\cdots$, $C_{n-1}$이라 할 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{B_kC_k}^4$의 값을 구하여라.




**유형 Guide** 급수를 정적분으로 나타내어 그 합을 구하는 유형으로 여러 가지 도형의 성질을 이용하여 급수를 $\frac{k}{n}$를 포함한 식으로 나타낸다. 여기에서는 삼각형의 닮음을 이용하여 $\overline{B_kC_k}$의 길이를 $n$과 $k$에 대한 식으로 나타낸다.

**유형 5SEN** 급수의 활용 ○ 급수를 $\frac{k}{n}$를 포함한 식으로 나타낸다.

**풀이** $\overline{BC}=1$이므로 닮음의 성질에 의하여

$$\overline{B_1C_1}=\frac{1}{n},\ \overline{B_2C_2}=\frac{2}{n},\ \overline{B_3C_3}=\frac{3}{n},\ \cdots,\ \overline{B_kC_k}=\frac{k}{n},\ \cdots,\ \overline{B_{n-1}C_{n-1}}=\frac{n-1}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{B_kC_k}^4=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^4\,dx$$

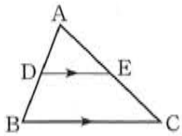
$$=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{1}{5}$$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$

답 $\frac{1}{5}$

**Remark** 오른쪽 그림에서 $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{DE}$이면 $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$(AA닮음)이므로

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$$

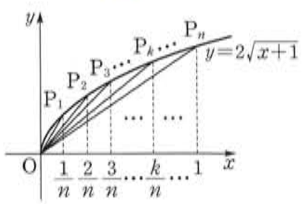



정답 및 풀이 • 89쪽

**유제 099-1** 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=2\sqrt{x+1}$ 위의 $x$좌표가 $\frac{k}{n}$인 점을 $P_k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$라 할 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{OP_k}$의 값을 구하여라.

(단, 점 O는 원점이다.)



# 중단원 연습 문제

정답 및 풀이 • 90쪽

STEP 1 유형 Training

**01** 임의의 실수 $x$에 대하여 다항함수 $f(x)$가 $f(x)=6x^2+\int_0^1 (4x-3)f(t)dt$를 만족시킬 때, $\int_0^1 f(x)dx$의 값은?

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

서술형

**02** 임의의 실수 $x$에 대하여 다항함수 $f(x)$가 $\int_1^x f(t)dt=xf(x)-x^3+x^2$을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하여라.

**03** 임의의 실수 $x$에 대하여 다항함수 $f(x)$가 $\int_0^x (x-t)f'(t)dt=2x^3$을 만족시키고 $f(0)=5$일 때, $f(x)$를 구하여라.

서술형

**04** 함수 $f(x)=12x^3-12x^2-24x$에 대하여 함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$로 정의하자. 구간 $[0, 3]$에서 함수 $F(x)$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 할 때, $M+m$의 값을 구하여라.

**05** $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\int_{1-h}^{1+h} (x^2+x+1)dx$의 값은?

① 2　② 3　③ 5　④ 6　⑤ 10

**06** 함수 $f(x)=x^2-1$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(2+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{3}{n}$의 값을 구하여라.

STEP 2 실전 Application

**07** 임의의 실수 $x$에 대하여 다항함수 $f(x)$가 $f(x)-x^2+2ax=3\int_0^a \left\{2+\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt$를 만족시키고 $f(0)=0$일 때, 양수 $a$의 값을 구하여라.

평가원기출

**08** 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt=x^3-2x^2-2x\int_0^1 f(t)dt$$

일 때, $f(0)=a$라 하자. $60a$의 값을 구하여라.

서술형

**09** 임의의 실수 $x$에 대하여 다항함수 $f(x)$가 $\int_2^x (x-t)f(t)dt=-x^3+4ax+b$를 만족시킬 때, $a-b$의 값을 구하여라. (단, $a$, $b$는 상수이다.)

수능기출

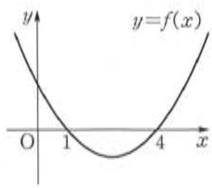
**10** 삼차함수 $f(x)=x^3-3x+a$에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 양수 $a$의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

**11** 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_x^{x+1} f(t)dt$라 할 때, $g(x)$가 최소일 때의 $x$의 값은?




① 1 ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

**12** 등식 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x |t-a|\,dt=a^2-2$를 만족시키는 음수 $a$의 값을 구하여라.

서술형

**13** 두 함수 $f(x)=x^2-4x$와 $y=g(x)$가 임의의 실수 $h$에 대하여
$g(x+h)-g(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt$이고 $g(3)=1$일 때, 방정식 $g(x)=0$의 모든 근의 곱을 구하여라.



**14** 급수를 정적분으로 옳게 나타낸 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

**보 기**

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\int_0^2 (1+x)^2\,dx$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{2n}\right)^2\frac{1}{n}=2\int_0^1 (1+x)^2\,dx$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{3n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\int_0^3 (1+x)^2\,dx$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

수능기출

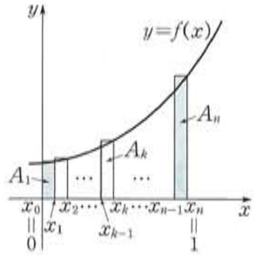
**15** 함수 $f(x)=x^2+ax+b$ $(a\geq 0,\ b>0)$가 있다. 그림과 같이 2 이상인 자연수 $n$에 대하여 닫힌 구간 $[0,\ 1]$을 $n$등분한 각 분점(양 끝 점도 포함)을 차례로

$$0=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=1$$

이라 하자. 닫힌 구간 $[x_{k-1},\ x_k]$를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$인 직사각형의 넓이를 $A_k$라 하자. $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$
양 끝에 있는 두 직사각형의 넓이의 합이

$$A_1+A_n=\frac{7n^2+1}{n^3}$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k$의 값을 구하여라.



수능기출

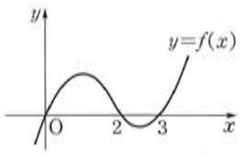
**16** 함수 $f(x)=3x^2-ax$가 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{3k}{n}\right)=f(1)$을 만족시킬 때, 상수 $a$의 값을 구하여라.

STEP 3 심화 Forwarding

**17** 다항함수 $f(x)$가 $f(f(x))=\int_0^x f(t)dt-x^2+3x+3$을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① 3 ② 2 ③ 1 ④ 0 ⑤ $-1$

**18** 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 함수 $G(x)$를 $G(x)=\int_2^x (x-t)f(t)dt$라 할 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?




보기

ㄱ. $G(0)>0$

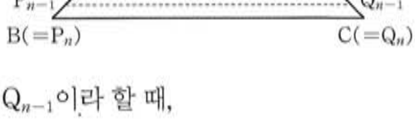
ㄴ. $G(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖는다.

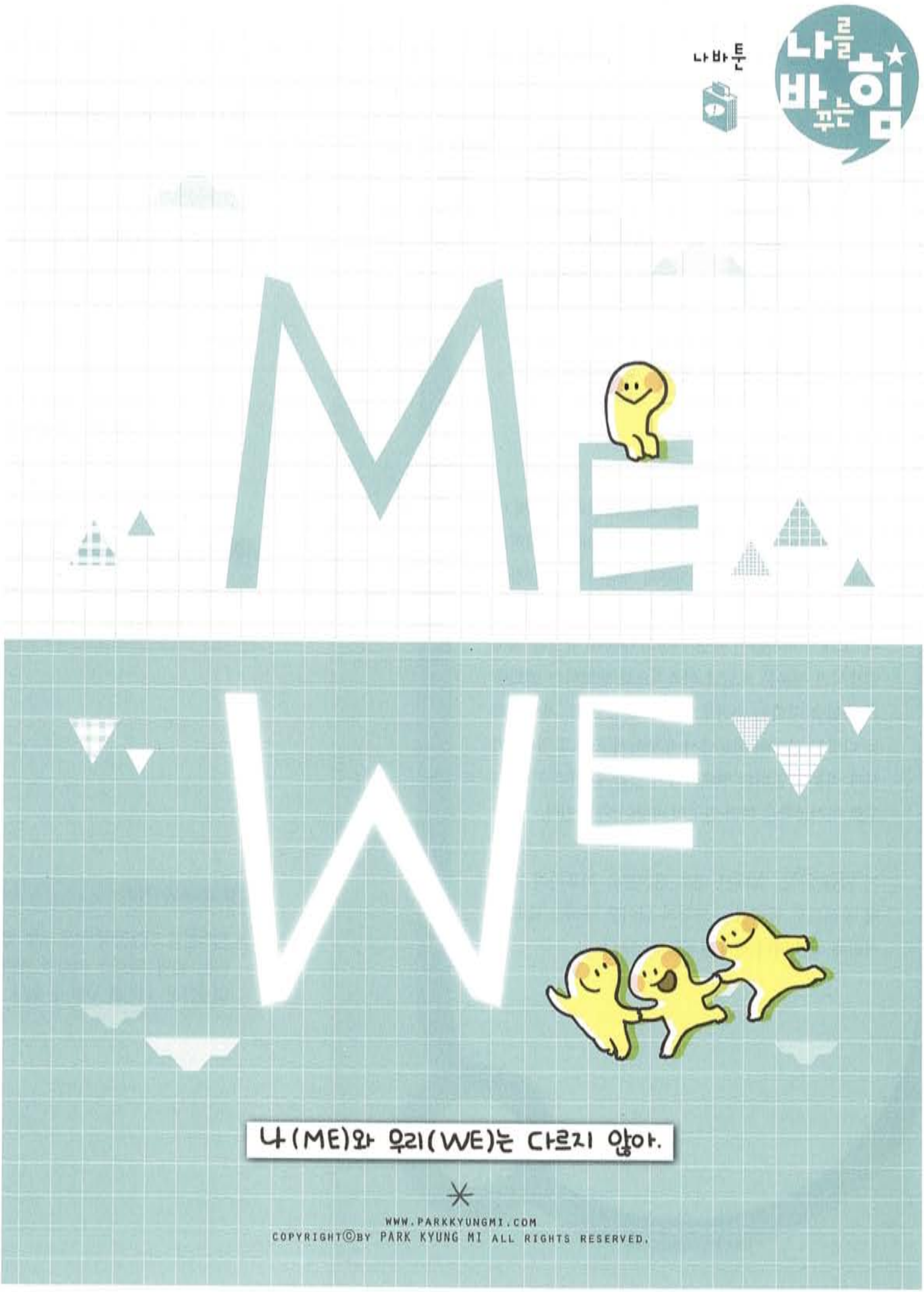
ㄷ. 구간 $[0, 3]$에서 $G(x)$는 $x=3$일 때 최소이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

서술형

**19** $\overline{AD}=2$, $\overline{AB}=\sqrt{2}$, $\overline{BC}=4$인 등변사다리꼴 ABCD에서 오른쪽 그림과 같이 변 AB를 $n$등분한 점을 각각 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$이라 하고 각 점에서 변 BC에 평행한 직선을 그어 변 CD와 만나는 점을 각각 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{n-1}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\overline{P_1Q_1}^3+\overline{P_2Q_2}^3+\cdots+\overline{P_nQ_n}^3)$의 값을 구하여라.




나바툰
나를 바꾸는 힘
ME
WE
나(ME)와 우리(WE)는 다르지 않아.
WWW.PARKKYUNGMI.COM
COPYRIGHT©BY PARK KYUNG MI ALL RIGHTS RESERVED.

# 12

# 정적분의 활용

우리는 미분을 배우고 적분을 배웠다. 그러나 실제 미적분의 역사는 그 반대이다. 넓이나 부피를 측정하기 위해 고대 그리스 시대에 적분의 개념이 먼저 등장하였고, 17세기에 이르러서야 미분의 개념이 정립되었다. 고대 수학자들이 자연 현상의 수학적 규명을 위해 탄생시킨 적분은 오늘날 연속적으로 변화하는 변화량의 총합을 구하는 수단으로써 경제학, 공학, 자연과학 등 다양한 분야의 학문에서 유용하게 쓰이고 있다. 미분과 적분이 없이는 현대과학이 있을 수 없다고 할 정도로 미적분학은 여러 연구의 바탕이 되고 있다.

이 단원에서는 앞에서 배운 정적분을 이용하여 직선 및 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하고 속도와 거리에 대한 여러 가지 문제를 해결해 보자.

한눈에 보는 개념&유형 map

소단원 & 학습목표

**29 곡선과 좌표축 사이의 넓이**

- 정적분을 이용하여 곡선과 좌표축 사이의 넓이를 구할 수 있다.

**30 두 곡선 사이의 넓이**

- 정적분을 이용하여 두 곡선 사이의 넓이를 구할 수 있다.

**31 속도와 거리**

- 정적분을 이용하여 직선 위를 움직이는 점의 위치와 위치의 변화량 및 움직인 거리를 구할 수 있다.

| 개념 & 특강 | | 대표유형 & 유제 | | |
|---|---|---|---|---|
| 087 | 곡선과 $x$축 사이의 넓이 | 100 곡선과 $x$축 사이의 넓이 | 101 곡선과 $x$축 사이의 넓이의 활용 | |
| 088 | 곡선과 $y$축 사이의 넓이 | 102 곡선과 $y$축 사이의 넓이 | | |
| 특강 089 | 곡선 $x=ay^2$의 이해 | | | |
| 090 | 두 곡선 사이의 넓이 | 103 두 곡선 사이의 넓이 (1) | 104 두 곡선 사이의 넓이 (2) | 105 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이 |
| 특강 091 | 이차함수의 그래프와 넓이 | | | 106 두 곡선 사이의 넓이의 활용 |
| 특강 092 | 역함수의 그래프와 넓이 | 107 역함수의 그래프와 좌표축 사이의 넓이 | | |
| 093 | 직선 위의 운동에서 위치와 위치의 변화량 | 108 수직선 위의 점이 움직인 거리 | 109 쏘아 올린 물체가 움직인 거리 | 110 속도의 그래프와 움직인 거리 |
| 094 | 직선 위의 운동에서 움직인 거리 | | | |

## 개념 087 곡선과 $x$축 사이의 넓이

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 $x$축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 $S$는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

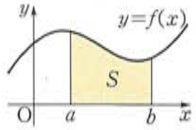
**개념 Approach**

정적분과 넓이 사이의 관계를 이용하여 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 $x$축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 $S$를 구해 보자.

(i) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\ge 0$일 때,

정적분의 정의에 의하여 240쪽 • 개념 075

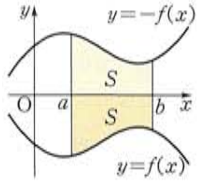
$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b |f(x)|dx$$




(ii) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\le 0$일 때,

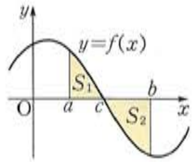
곡선 $y=f(x)$를 $x$축에 대하여 대칭이동한 곡선은 $y=-f(x)$이고, $-f(x)\ge 0$이므로

$$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx=\int_a^b |f(x)|dx$$




(iii) 구간 $[a,\ c]$에서 $f(x)\ge 0$이고, 구간 $[c,\ b]$에서 $f(x)\le 0$일 때,

$$\begin{aligned}S=S_1+S_2&=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b \{-f(x)\}dx\\&=\int_a^c |f(x)|dx+\int_c^b |f(x)|dx\\&=\int_a^b |f(x)|dx\end{aligned}$$




이상에서 구하는 넓이 $S$는 $S=\int_a^b |f(x)|dx$이다.

**개념 Check**

곡선 $y=x^2-4x$와 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

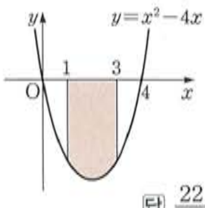
**풀이** 곡선 $y=x^2-4x$와 $x$축의 교점의 $x$좌표는 $x^2-4x=0$에서

$x(x-4)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=4$

구간 $[1,\ 3]$에서 $y\le 0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_1^3 |x^2-4x|dx=-\int_1^3 (x^2-4x)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_1^3=\frac{22}{3}$$




답 $\frac{22}{3}$

## 대표유형 100 곡선과 $x$축 사이의 넓이

• 개념 087

다음 곡선과 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-4x+3$　　　　(2) $y=-x^3+x$

**유형Guide** 곡선과 $x$축 사이의 넓이를 구할 때에는 곡선과 $x$축의 교점을 구하여 그래프를 그린 후, $y\geq 0$인 구간과 $y\leq 0$인 구간으로 나누어 정적분의 값을 구한다.

**유형 SSEN** **곡선과 $x$축 사이의 넓이 ➲ $y\geq 0$인 구간과 $y\leq 0$인 구간으로 나눈다.**

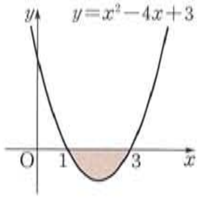
**풀이** (1) 곡선 $y=x^2-4x+3$과 $x$축의 교점의 $x$좌표는

$x^2-4x+3=0$에서

$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

$1\leq x\leq 3$일 때 $y\leq 0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면




$$S=-\int_1^3 (x^2-4x+3)dx$$

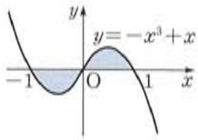
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^3=\frac{4}{3}$$

(2) 곡선 $y=-x^3+x$와 $x$축의 교점의 $x$좌표는

$-x^3+x=0$에서

$x^3-x=0,\quad x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$




$-1\leq x\leq 0$일 때 $y\leq 0$이고, $0\leq x\leq 1$일 때 $y\geq 0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=-\int_{-1}^0 (-x^3+x)dx+\int_0^1 (-x^3+x)dx$$

$$=-\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

답 (1) $\frac{4}{3}$　(2) $\frac{1}{2}$

정답 및 풀이 • 95쪽

**유제 100-1** 다음 곡선과 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=-x^2-2x+8$　　　　(2) $y=x^3-x^2-2x$

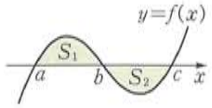
## 대표유형 101 곡선과 $x$축 사이의 넓이의 활용 • 개념 087

곡선 $y=x(x-1)(x-k)$와 $x$축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같을 때, 상수 $k$의 값을 구하여라. (단, $k>1$)

**유형 Guide** 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 $x$축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으면, 즉 $S_1=S_2$이면 $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^c f(x)dx$이므로

$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=0,\ \text{즉}\ \int_a^c f(x)dx=0$$

임을 이용한다.



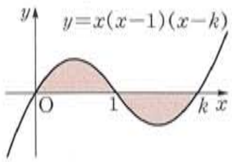

유형 SSEN **곡선 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(a<b<c)$와 $x$축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으면 ⭘ $\int_a^c f(x)dx=0$**

**풀이** 곡선 $y=x(x-1)(x-k)$와 $x$축의 교점의 $x$좌표는

$x(x-1)(x-k)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=k$

이때 $k>1$이므로 곡선 $y=x(x-1)(x-k)$는 오른쪽 그림과 같다.




이 곡선과 $x$축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_0^k x(x-1)(x-k)dx=0, \quad \int_0^k \{x^3-(k+1)x^2+kx\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{k+1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_0^k=0, \quad -\frac{1}{12}k^4+\frac{1}{6}k^3=0$$

$k^3(k-2)=0$

$\therefore k=2\ (\because k>1)$

답 2

정답 및 풀이 • 95쪽

**유제 101-1** 곡선 $y=-x^3+(k-1)x^2+kx$와 $x$축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같을 때, 상수 $k$의 값을 구하여라. (단, $k<-1$)

## 개념 088 곡선과 $y$축 사이의 넓이

함수 $g(y)$가 닫힌 구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 $y$축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 $S$는 다음과 같다.

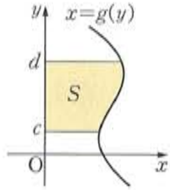
$$S=\int_c^d |g(y)|dy$$

### 개념 Approach

곡선과 $y$축 사이의 넓이는 곡선과 $x$축 사이의 넓이를 구하는 것과 같은 원리로 구할 수 있다.
함수 $g(y)$가 구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 $y$축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 $S$를 구해 보자.

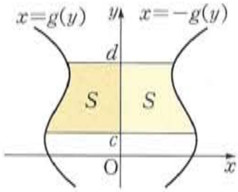
(i) 구간 $[c,\ d]$에서 $g(y)\geq 0$일 때,
정적분의 정의에 의하여 240쪽 • 개념 075

$$S=\int_c^d g(y)dy=\int_c^d |g(y)|dy$$



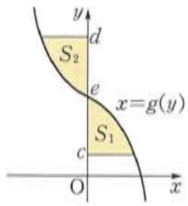

(ii) 구간 $[c,\ d]$에서 $g(y)\leq 0$일 때,
곡선 $x=g(y)$를 $y$축에 대하여 대칭이동한 곡선은 $x=-g(y)$이고, $-g(y)\geq 0$이므로

$$S=\int_c^d \{-g(y)\}dy=\int_c^d |g(y)|dy$$




(iii) 구간 $[c,\ e]$에서 $g(y)\geq 0$이고, 구간 $[e,\ d]$에서 $g(y)\leq 0$일 때,

$$\begin{aligned}S&=S_1+S_2=\int_c^e g(y)dy+\int_e^d \{-g(y)\}dy\\&=\int_c^e |g(y)|dy+\int_e^d |g(y)|dy\\&=\int_c^d |g(y)|dy\end{aligned}$$




이상에서 구하는 넓이 $S$는 $S=\int_c^d |g(y)|dy$이다.

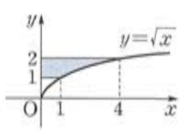
### 개념 Check

곡선 $y=\sqrt{x}$와 $y$축 및 두 직선 $y=1$, $y=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

**풀이** $y=\sqrt{x}$에서 $x=y^2$이고, 구간 $[1,\ 2]$에서 $x\geq 0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_1^2 y^2dy=\left[\frac{1}{3}y^3\right]_1^2=\frac{7}{3}$$

답 $\frac{7}{3}$

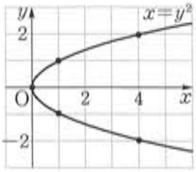


## 곡선 $x=ay^2$의 이해

곡선 $x=g(y)$와 $y$축 사이의 넓이를 구하려면 곡선 $x=g(y)$를 그려서 $g(y)\ge 0$인지 $g(y)\le 0$인지 알아보아야 한다. 곡선 $x=g(y)$ 중에서 가장 대표적인 $x=ay^2$ ($a\ne 0$) 꼴의 곡선을 그려서 그 모양을 살펴보자.

① 곡선 $x=y^2$

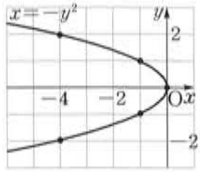
$x=y^2$의 $y$에 $-2$, $-1$, $0$, $1$, $2$를 대입하고 이에 대응하는 $x$의 값을 찾아 $x$, $y$의 순서쌍 $(x, y)$를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타낸 후 곡선으로 연결하면 오른쪽 그림과 같다.




즉 곡선 $x=y^2$은 꼭짓점이 원점이고 축이 $x$축이며 왼쪽으로 볼록한 포물선임을 알 수 있다.

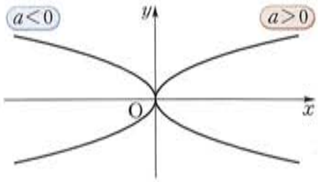
② 곡선 $x=-y^2$

①과 마찬가지 방법으로 곡선 $x=-y^2$을 그리면 오른쪽 그림과 같다.

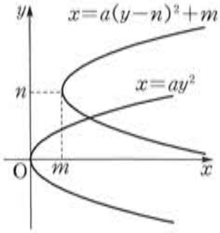



즉 곡선 $x=-y^2$은 꼭짓점이 원점이고 축이 $x$축이며 오른쪽으로 볼록한 포물선임을 알 수 있다.

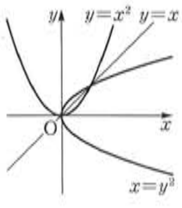
일반적으로 곡선 $x=ay^2$의 모양은 오른쪽 그림과 같다.




또 곡선 $x=a(y-n)^2+m$은 곡선 $x=ay^2$을 $x$축의 방향으로 $m$만큼, $y$축의 방향으로 $n$만큼 평행이동하여 그릴 수 있다.




**Remark** 곡선 $x=ay^2$과 곡선 $y=ax^2$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 따라서 곡선 $x=ay^2$을 그릴 때 곡선 $y=ax^2$을 그린 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하여 그려도 된다.
예를 들어 곡선 $x=y^2$은 곡선 $y=x^2$을 그린 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하여 그리면 오른쪽 그림과 같다.



대표유형 **102** **곡선과 $y$축 사이의 넓이** • 개념 088 • 특강 089

다음을 구하여라.

(1) 곡선 $x=-y^2+9$와 $y$축으로 둘러싸인 도형의 넓이

(2) 곡선 $y=\sqrt{x+1}$과 $y$축 및 두 직선 $y=0$, $y=2$로 둘러싸인 도형의 넓이

**유형 Guide** 곡선과 $y$축 사이의 넓이를 구할 때에는 곡선과 $y$축의 교점을 구하여 그래프를 그린 후, $x\geq 0$인 구간과 $x\leq 0$인 구간으로 나누어 정적분의 값을 구한다. 이때 (2)와 같이 곡선의 방정식이 $y=f(x)$ 꼴이면 먼저 $y=f(x)$를 $x=g(y)$ 꼴로 변형한다.

유형 SSEN **곡선과 $y$축 사이의 넓이 ⊙ $x\geq 0$인 구간과 $x\leq 0$인 구간으로 나눈다.**

**풀이** (1) 곡선 $x=-y^2+9$와 $y$축의 교점의 $y$좌표는 $-y^2+9=0$에서

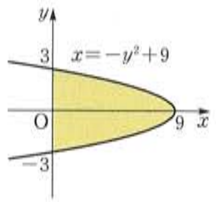
$y^2-9=0$, $\quad (y+3)(y-3)=0$

$\therefore y=-3$ 또는 $y=3$

$-3\leq y\leq 3$일 때 $x\geq 0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-3}^{3}(-y^2+9)dy=2\int_{0}^{3}(-y^2+9)dy$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}y^3+9y\right]_0^3=36$$




(2) $y=\sqrt{x+1}$에서 $\quad y^2=x+1 \quad \therefore x=y^2-1\ (y\geq 0)$

곡선 $x=y^2-1$과 $y$축의 교점의 $y$좌표는 $y^2-1=0$에서

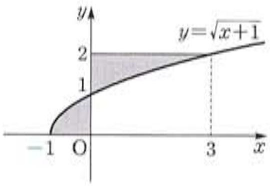
$(y+1)(y-1)=0 \quad \therefore y=1\ (\because y\geq 0)$

$0\leq y\leq 1$일 때 $x\leq 0$, $1\leq y\leq 2$일 때 $x\geq 0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=-\int_{0}^{1}(y^2-1)dy+\int_{1}^{2}(y^2-1)dy$$

$$=-\left[\frac{1}{3}y^3-y\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}y^3-y\right]_1^2$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$$




답 (1) 36 (2) 2

정답 및 풀이 • 96쪽

**유제 102-1** 다음을 구하여라.

(1) 곡선 $x=y^2-4y$와 $y$축으로 둘러싸인 도형의 넓이

(2) 곡선 $y=-\sqrt{x+4}$와 $y$축 및 두 직선 $y=0$, $y=-3$으로 둘러싸인 도형의 넓이

## 개념 090 두 곡선 사이의 넓이

(1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 $S$는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

(2) 두 함수 $f(y)$와 $g(y)$가 닫힌 구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 두 곡선 $x=f(y)$, $x=g(y)$와 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 $S$는 다음과 같다.

$$S=\int_c^d |f(y)-g(y)|dy$$

개념 Approach

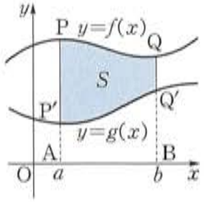
두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 $S$를 구해 보자.

(i) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\geq g(x)\geq 0$일 때,

$S=$(도형 PABQ의 넓이)$-$(도형 P′ABQ′의 넓이)

$=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

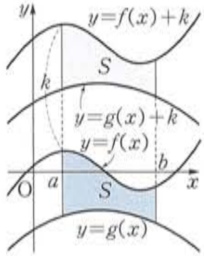
$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$




(ii) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\geq g(x)$이고, $f(x)$ 또는 $g(x)$의 값이 음수일 때, 두 곡선을 $y$축의 방향으로 $k$만큼 평행이동하여 구간 $[a,\ b]$에서 두 곡선이 $x$축보다 위쪽에 오도록 하면 구하는 넓이 $S$는 두 곡선 $y=f(x)+k$, $y=g(x)+k$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$S=\int_a^b [\{f(x)+k\}-\{g(x)+k\}]dx$

$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

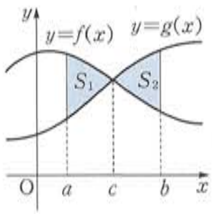



(iii) 구간 $[a,\ c]$에서 $f(x)\geq g(x)$이고, 구간 $[c,\ b]$에서 $f(x)\leq g(x)$일 때,

$S=S_1+S_2=\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx+\int_c^b \{g(x)-f(x)\}dx$

$=\int_a^c |f(x)-g(x)|dx+\int_c^b |f(x)-g(x)|dx$

$=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

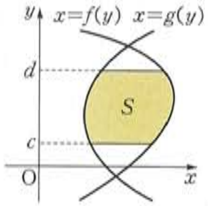



이상에서 구하는 넓이 $S$는 $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$이다.

같은 방법으로 오른쪽 그림과 같이 구간 $[c, d]$에서 두 곡선 $x=f(y)$, $x=g(y)$와 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 $S$는

$$S=\int_c^d |f(y)-g(y)|dy$$

이다.




개념 55EN

두 곡선 사이의 넓이

→ $\int_a^b \{($위의 식$)-($아래의 식$)\}dx$

→ $\int_c^d \{($오른쪽의 식$)-($왼쪽의 식$)\}dy$

### 개념 Check 1

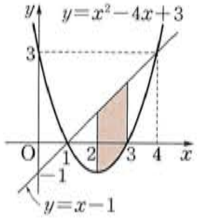
곡선 $y=x^2-4x+3$과 직선 $y=x-1$ 및 두 직선 $x=2$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

**풀이** 구간 $[2, 3]$에서 $x-1>x^2-4x+3$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_2^3 \{(x-1)-(x^2-4x+3)\}dx$$

$$=\int_2^3 (-x^2+5x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_2^3=\frac{13}{6}$$




답 $\frac{13}{6}$

### 개념 Check 2

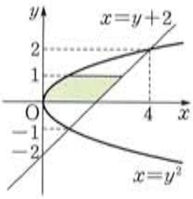
곡선 $x=y^2$과 직선 $x=y+2$ 및 두 직선 $y=0$, $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

**풀이** 구간 $[0, 1]$에서 $y+2>y^2$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_0^1 \{(y+2)-y^2\}dy$$

$$=\int_0^1 (-y^2+y+2)dy$$

$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2+2y\right]_0^1=\frac{13}{6}$$




답 $\frac{13}{6}$

## 대표유형 103 두 곡선 사이의 넓이 (1)

• 개념 090

다음 곡선 또는 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=-x^2+3x,\ y=-x$　　(2) $y=x^2-3x,\ y=-x^2+x+6$

**유형Guide** 적분변수를 $x$로 하여 두 곡선 사이의 넓이를 구하는 방법은 다음과 같다.

(i) 두 곡선의 교점의 $x$좌표를 구하여 적분 구간을 정한다.

(ii) 두 곡선의 위치 관계를 파악한다.

(iii) (i)에서 정한 구간에서 {(위의 식)−(아래의 식)}을 적분한 값을 구한다.

**유형 SSEN** 두 곡선 사이의 넓이 ➡ 두 곡선의 위치 관계를 파악한다.

**풀이** (1) 곡선 $y=-x^2+3x$와 직선 $y=-x$의 교점의 $x$좌표는

$-x^2+3x=-x$에서

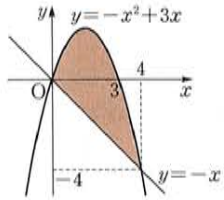
$x^2-4x=0,\quad x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_0^4\{(-x^2+3x)-(-x)\}dx$$

$$=\int_0^4(-x^2+4x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$$




(2) 두 곡선 $y=x^2-3x,\ y=-x^2+x+6$의 교점의 $x$좌표는

$x^2-3x=-x^2+x+6$에서

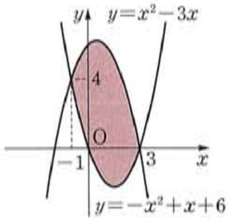
$x^2-2x-3=0,\quad (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-1}^3\{(-x^2+x+6)-(x^2-3x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^3(-2x^2+4x+6)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\right]_{-1}^3=\frac{64}{3}$$




답 (1) $\frac{32}{3}$　(2) $\frac{64}{3}$

정답 및 풀이 • 96쪽

**유제 103-1** 다음 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-1,\ y=-x^2+2x+3$　　(2) $y=x^3-2x,\ y=x^2$

대표유형 104 **두 곡선 사이의 넓이 (2)** • 개념 090

다음 곡선 또는 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y^2=x$, $x=4$ (2) $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$, $y=0$

**유형 Guide** 적분변수를 $y$로 하여 두 곡선 사이의 넓이를 구하는 방법은 다음과 같다.

(i) 두 곡선의 교점의 $y$좌표를 구하여 적분 구간을 정한다.

(ii) 두 곡선의 위치 관계를 파악한다.

(iii) (i)에서 정한 구간에서 {(오른쪽의 식)−(왼쪽의 식)}을 적분한 값을 구한다.

유형 SSEN **두 곡선 사이의 넓이 ◎ 두 곡선의 위치 관계를 파악한다.**

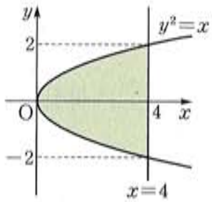
**풀이** (1) 곡선 $y^2=x$와 직선 $x=4$의 교점의 $y$좌표는 $y^2=4$에서

$y=-2$ 또는 $y=2$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-2}^{2}(4-y^2)dy=2\int_{0}^{2}(4-y^2)dy$$

$$=2\left[4y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^2=\frac{32}{3}$$




(2) $y=\sqrt{x}$에서 $x=y^2$ $(y\geq 0)$이므로 곡선 $x=y^2$과 직선 $x=y+2$의 교점의 $y$좌표는 $y^2=y+2$에서

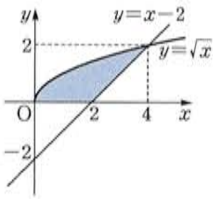
$y^2-y-2=0$, $(y+1)(y-2)=0$

$\therefore y=2$ $(\because y\geq 0)$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{0}^{2}\{(y+2)-y^2\}dy=\int_{0}^{2}(-y^2+y+2)dy$$

$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2+2y\right]_0^2=\frac{10}{3}$$




답 (1) $\frac{32}{3}$ (2) $\frac{10}{3}$

정답 및 풀이 • 96쪽

**유제 104-1** 다음 곡선 또는 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y^2=x+1$, $y=-x+1$ (2) $y=2\sqrt{x}$, $y=x$

## 대표유형 105 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이

• 개념 090

곡선 $y=x^3-x+1$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선과 이 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

**유형Guide** 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$임을 이용하여 접선의 방정식을 구한 후, 곡선과 접선의 위치 관계를 파악한다.

**유형 SSEN** **곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이 ➡ 곡선과 접선의 위치 관계를 파악한다.**

**풀이** $f(x)=x^3-x+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-1$이므로 곡선 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=3-1=2$$

따라서 곡선 $y=x^3-x+1$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$$y-1=2(x-1) \qquad \therefore y=2x-1$$

곡선 $y=x^3-x+1$과 직선 $y=2x-1$의 교점의 $x$좌표는

$x^3-x+1=2x-1$에서

$$x^3-3x+2=0, \qquad (x-1)^2(x+2)=0$$

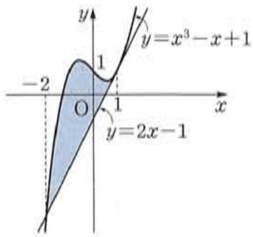
$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-2}^{1}\{(x^3-x+1)-(2x-1)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{27}{4}$$




답 $\frac{27}{4}$

**Remark** 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)$$

정답 및 풀이 • 97쪽

**Plus 유제 105-1** 점 $(1,\ -3)$에서 곡선 $y=x^2$에 그은 두 접선과 이 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

## 대표유형 106 두 곡선 사이의 넓이의 활용

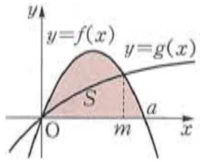
• 개념 090

곡선 $y=-x^2+2x$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 직선 $y=mx$에 의하여 이등분될 때, 상수 $m$의 값을 구하여라.

**유형 Guide** 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이 $S$가 곡선 $y=g(x)$에 의하여 이등분되면

$$\int_0^a |f(x)|dx=S, \quad \int_0^m |f(x)-g(x)|dx=\frac{1}{2}S$$

임을 이용한다.




**유형 SSEN** **도형의 넓이 $S$를 곡선 $y=g(x)$가 이등분하면 ➡ 정적분을 이용하여 $S$와 $\frac{1}{2}S$를 구한다.**

**풀이** 곡선 $y=-x^2+2x$와 $x$축의 교점의 $x$좌표는 $-x^2+2x=0$에서

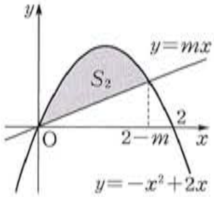
$x(x-2)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=2$

곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=mx$의 교점의 $x$좌표는 $-x^2+2x=mx$에서

$x^2+(m-2)x=0, \qquad x\{x+(m-2)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2-m$

곡선 $y=-x^2+2x$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1$, 곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2$라 하면




$$S_1=\int_0^2 (-x^2+2x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

$$S_2=\int_0^{2-m}\{(-x^2+2x)-mx\}dx$$

$$=\int_0^{2-m}\{-x^2+(2-m)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{2-m}{2}x^2\right]_0^{2-m}=\frac{1}{6}(2-m)^3$$

이때 $S_1=2S_2$이므로 $\quad \frac{4}{3}=2\cdot\frac{1}{6}(2-m)^3, \qquad (2-m)^3=4$

$2-m=\sqrt[3]{4} \qquad \therefore m=2-\sqrt[3]{4}$

답 $2-\sqrt[3]{4}$

정답 및 풀이 • 97쪽

**유제 106-1** 곡선 $x=y^2-4y$와 직선 $x=my$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $y$축에 의하여 이등분될 때, 상수 $m$의 값을 구하여라.

**유제 106-2** 곡선 $y=x^2-3x$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 곡선 $y=ax^2$ $(a<0)$에 의하여 이등분될 때, 상수 $a$의 값을 구하여라.

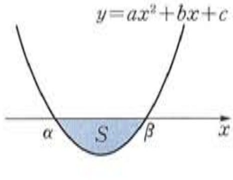
특강 091

# 이차함수의 그래프와 넓이

곡선과 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이 또는 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 때, 곡선이 이차함수의 그래프, 즉 포물선이면 다음과 같은 공식을 이용하여 간단히 계산할 수 있다.

(1) 포물선과 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이

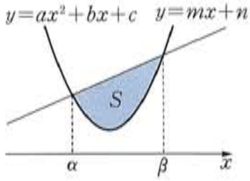
포물선 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$와 $x$축이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 교점의 $x$좌표를 $\alpha$, $\beta$ $(\alpha<\beta)$라 하면 이 포물선과 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이 $S$는




$$S=\int_\alpha^\beta |ax^2+bx+c|\,dx$$
$$=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(2) 포물선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이

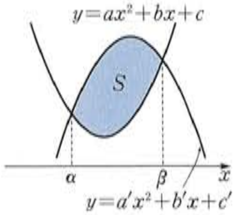
포물선 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$와 직선 $y=mx+n$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 교점의 $x$좌표를 $\alpha$, $\beta$ $(\alpha<\beta)$라 하면 포물선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이 $S$는




$$S=\int_\alpha^\beta |(ax^2+bx+c)-(mx+n)|\,dx$$
$$=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(3) 두 포물선으로 둘러싸인 도형의 넓이

두 포물선 $y=ax^2+bx+c$, $y=a'x^2+b'x+c'$ $(aa'\neq0)$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 교점의 $x$좌표를 $\alpha$, $\beta$ $(\alpha<\beta)$라 하면 두 포물선으로 둘러싸인 도형의 넓이 $S$는




$$S=\int_\alpha^\beta |ax^2+bx+c-(a'x^2+b'x+c')|\,dx$$
$$=\frac{|a-a'|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(1)의 공식을 유도해 보자.

포물선 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$와 $x$축의 서로 다른 두 교점의 $x$좌표가 $\alpha$, $\beta$ $(\alpha<\beta)$이므로 방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근이 $\alpha$, $\beta$이다.

따라서 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$이므로 넓이 $S$는

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}|ax^2+bx+c|dx=\int_{\alpha}^{\beta}|a(x-\alpha)(x-\beta)|dx$$
$$=|a|\int_{\alpha}^{\beta}\{-(x-\alpha)(x-\beta)\}dx=-|a|\int_{\alpha}^{\beta}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx$$
$$=-|a|\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\right]_{\alpha}^{\beta}$$
$$=-|a|\left\{\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)\right\}$$
$$=-\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta\}$$
$$=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)(\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2)=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(2), (3)의 공식도 (1)과 같은 방법으로 유도할 수 있다.

**Remark** 피적분함수가 이차함수이고, 위끝과 아래끝에서 피적분함수의 값이 모두 0인 정적분을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\int_{\alpha}^{\beta}a(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3 \text{ (단, } \alpha<\beta)$$

개념 Check

다음 포물선 또는 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 공식을 이용하여 구하여라.

(1) $y=x^2-2x-3,\ y=0$

(2) $y=x^2-4x+1,\ y=-2x+9$

(3) $y=x^2-4x+2,\ y=-x^2+6x-6$

풀이 (1) $x^2-2x-3=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

즉 주어진 포물선과 $x$축의 두 교점의 $x$좌표가 $-1$, $3$이므로 구하는 넓이 $S$는

$$S=\frac{|1|}{6}\{3-(-1)\}^3=\frac{32}{3}$$

(2) $x^2-4x+1=-2x+9$에서 $x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

즉 주어진 포물선과 직선의 두 교점의 $x$좌표가 $-2$, $4$이므로 구하는 넓이 $S$는

$$S=\frac{|1|}{6}\{4-(-2)\}^3=36$$

(3) $x^2-4x+2=-x^2+6x-6$에서 $2x^2-10x+8=0$

$2(x-1)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=4$

즉 주어진 두 포물선의 교점의 $x$좌표가 $1$, $4$이므로 구하는 넓이 $S$는

$$S=\frac{|1-(-1)|}{6}(4-1)^3=9$$

답 (1) $\frac{32}{3}$ (2) 36 (3) 9

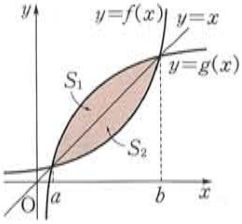
12 정적분의 활용

## 특강 092 역함수의 그래프와 넓이

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 두 함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이 또는 역함수의 그래프와 좌표축 사이의 넓이는 함수 $g(x)$의 식을 구하기보다는 그래프의 대칭성을 이용하여 다음과 같이 구한다.

(1) 함수와 그 역함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 $x$좌표가 $a$, $b$일 때, 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 $S$를 구해 보자.

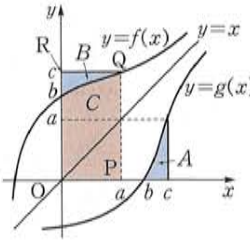



두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $S=S_1+S_2$이고, $S_1=S_2$이다. 즉 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배임을 알 수 있다.

$$\therefore S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx=2\int_a^b |x-f(x)|dx$$

(2) 역함수의 그래프와 좌표축으로 둘러싸인 도형의 넓이

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=g(x)$의 그래프와 $x$축 및 직선 $x=c$로 둘러싸인 도형의 넓이 $A$를 구해 보자.




두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $A=B$이다.

따라서 구하는 넓이 $A$는

$$A=B=\square\text{OPQR}-C=ac-\int_0^a f(x)dx$$

와 같이 구할 수 있다.

**개념 Check**

함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2\ (x\geq 0)$의 역함수를 $g(x)\,(x\geq 0)$라 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

**풀이** 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표는 $\frac{1}{2}x^2=x$에서

$x^2-2x=0,\quad x(x-2)=0\quad \therefore x=0$ 또는 $x=2$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이고, 구간 $[0, 2]$에서 $x\geq f(x)$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=2\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

## 대표유형 107 역함수의 그래프와 좌표축 사이의 넓이

• 특강 092

함수 $f(x)=2x^3+x+3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_0^1 f(x)dx+\int_3^6 g(x)dx$의 값을 구하여라.

**유형 Guide** 함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 따라서 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 $y=g(x)$의 그래프를 그리고 그래프의 대칭성을 이용하여 넓이를 구한 후 정적분의 값을 구한다.

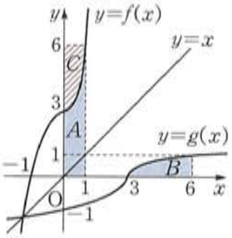
**유형 SSEN** **역함수의 그래프와 넓이**
**➲ 함수와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.**

**풀이** $f(x)=2x^3+x+3$에서

$f'(x)=6x^2+1>0$

이므로 $y=f(x)$는 증가함수이고, 그 그래프는 두 점 $(0,\ 3)$, $(1,\ 6)$을 지난다.

한편 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.




따라서 $\int_0^1 f(x)dx=A$, $\int_3^6 g(x)dx=B$라 하고, 빗금친 부분의 넓이를 $C$라 하면 $B=C$이므로

$$\int_0^1 f(x)dx+\int_3^6 g(x)dx=A+B=A+C$$

$$=1\cdot 6=6$$

답 6

➲ 정답 및 풀이 • 98쪽

**유제 107-1** 일대일 대응인 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이고, $f(0)=3$, $f(2)=7$일 때, $\int_0^2 f(x)dx+\int_3^7 g(x)dx$의 값을 구하여라.

**유제 107-2** 함수 $f(x)=x^3+1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_2^9 g(x)dx$의 값을 구하여라.

12 정적분의 활용

## 개념 093 직선 위의 운동에서 위치와 위치의 변화량

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 속도가 $v(t)$이고, 시각 $t=a$에서의 위치가 $x_0$일 때, 다음이 성립한다.

① 시각 $t$에서 점 P의 위치 $x$는

$$x=x_0+\int_a^t v(t)dt$$

② 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_a^b v(t)dt$$

**개념 Approach**

**개념 068**에서 위치를 미분하면 속도가 됨을 공부하였다. 적분은 미분의 역연산이므로 속도를 적분하면 위치를 구할 수 있다.
수직선 위를 움직이는 점 P의 속도가 주어졌을 때, 적분을 이용하여 점 P의 위치와 위치의 변화량을 구해 보자.

위치 $\underset{\text{적분}}{\overset{\text{미분}}{\rightleftarrows}}$ 속도

① 위치

점 P의 시각 $t$에서의 속도가 $v(t)$이고 시각 $t=a$에서의 위치가 $x_0$일 때, 점 P의 시각 $t$에서의 위치를 $x=f(t)$라 하자.

$\dfrac{dx}{dt}=f'(t)=v(t)$에서 $f(t)$는 $v(t)$의 한 부정적분이므로

$$\int_a^t v(t)dt=\Big[f(t)\Big]_a^t=f(t)-f(a) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

여기서 $f(a)=x_0$이므로 시각 $t$에서 점 P의 위치 $x$는 다음과 같다.

$$x=f(t)=f(a)+\int_a^t v(t)dt=x_0+\int_a^t v(t)dt$$

② 위치의 변화량

①에서 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은 ㉠에 의하여 다음과 같다.

$$f(b)-f(a)=\int_a^b v(t)dt$$ ⇐ (시각 $t=b$에서의 위치) − (시각 $t=a$에서의 위치)

개념 094

## 직선 위의 운동에서 움직인 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 속도가 $v(t)$일 때, 다음이 성립한다.

> 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 $s$는
>
> $$s=\int_a^b |v(t)|dt$$

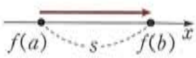
**개념 Approach**

수직선 위를 움직이는 점 P의 속도가 주어졌을 때, 점 P가 움직인 거리를 구해 보자.

점 P의 시각 $t$에서의 속도가 $v(t)$이고 위치가 $x=f(t)$일 때, 점 P가 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리를 $s$라 하면

(i) $v(t)>0$일 때,

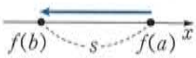
점 P는 수직선의 양의 방향으로 움직이므로 점 P가 움직인 거리는 시각 $t=b$에서의 위치에서 시각 $t=a$에서의 위치를 뺀 것과 같다. 즉




$$s=f(b)-f(a)=\int_a^b v(t)dt=\int_a^b |v(t)|dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $v(t)<0$일 때,

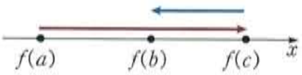
점 P는 수직선의 음의 방향으로 움직이므로 점 P가 움직인 거리는 시각 $t=a$에서의 위치에서 시각 $t=b$에서의 위치를 뺀 것과 같다. 즉




$$s=f(a)-f(b)=\int_b^a v(t)dt=-\int_a^b v(t)dt$$

$$=\int_a^b \{-v(t)\}dt=\int_a^b |v(t)|dt \quad \cdots\cdots ㉡$$

(iii) 시각 $t=a$에서 $t=c$까지 $v(t)>0$이고, 시각 $t=c$에서 $t=b$까지 $v(t)<0$일 때, 점 P가 움직인 거리는 ㉠, ㉡에 의하여




$$s=\{f(c)-f(a)\}+\{f(c)-f(b)\}$$

$$=\int_a^c v(t)dt+\int_c^b \{-v(t)\}dt$$

$$=\int_a^c |v(t)|dt+\int_c^b |v(t)|dt$$

$$=\int_a^b |v(t)|dt$$

이상에서 점 P가 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리 $s$는 $s=\int_a^b |v(t)|dt$이다.

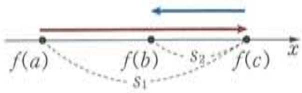
위치의 변화량은 단순히 물체의 위치가 변화한 양을 뜻하는 것으로 속도를 적분하여 구하고, 움직인 거리는 운동 방향에 관계없이 실제로 움직인 거리의 총합을 뜻하는 것으로 속도의 절댓값을 적분하여 구한다.

이때 중간에 운동 방향이 바뀌지 않으면 위치의 변화량의 절댓값과 움직인 거리는 같다.

그러나 (iii)과 같이 $t=c$에서 운동 방향이 바뀔 때, 시각 $t=a$에서 $t=c$까지 움직인 거리를 $s_1$, 시각 $t=c$에서 $t=b$까지 움직인 거리를 $s_2$라 하면

위치의 변화량 ➡ $s_1-s_2$

움직인 거리 ➡ $s_1+s_2$




가 된다.

**개념 SSEN**

위치의 변화량 ⟶ $\int_a^b (\text{속도})\,dt$

움직인 거리 ⟶ $\int_a^b |(\text{속도})|\,dt$

**개념 Check**

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 속도가 $v(t)=-t+2$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 시각 $t=2$에서 점 P의 위치

(2) $t=0$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량

(3) $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리

**풀이** (1) 시각 $t=0$에서 점 P의 위치가 0이므로 시각 $t=2$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^2 (-t+2)dt=\left[-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^2=2$$

(2) $t=0$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^3 (-t+2)dt=\left[-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^3=\frac{3}{2}$$

(3) $0\le t\le 2$일 때 $v(t)\ge 0$, $2\le t\le 3$일 때 $v(t)\le 0$이므로 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^3 |-t+2|dt&=\int_0^2 (-t+2)dt+\int_2^3 (t-2)dt\\&=\left[-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^2+\left[\frac{1}{2}t^2-2t\right]_2^3\\&=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

답 (1) 2 (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{5}{2}$

## 대표유형 108 수직선 위의 점이 움직인 거리

• 개념 093, 094

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 $t$초 후의 속도가 $v(t)=2t^2-6t$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 처음으로 운동 방향이 바뀔 때의 점 P의 위치

(2) 점 P가 원점으로 다시 돌아오는 데 걸리는 시간

(3) 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 움직인 거리

**유형 Guide** 위치, 위치의 변화량, 움직인 거리는 속도의 함수의 적분을 이용하여 구할 수 있다.

(1) 운동 방향이 바뀔 때 (속도)$=0$임을 이용한다.

(2) 원점으로 다시 돌아오면 (위치의 변화량)$=0$임을 이용한다.

(3) 원점으로 돌아올 때까지 걸린 시간이 $a$초이면 움직인 거리는 $\int_0^a |v(t)|dt$임을 이용한다.

**유형 SSEN** **위치, 위치의 변화량, 움직인 거리 ➡ 속도의 적분을 이용한다.**

**풀이** (1) 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $2t^2-6t=0$에서

$2t(t-3)=0 \qquad \therefore t=3\ (\because t>0)$

즉 출발한 지 3초 후 처음으로 운동 방향이 바뀌므로 3초 후의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^3(2t^2-6t)dt=0+2\int_0^3(t^2-3t)dt=2\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_0^3=-9$$

(2) 점 P가 원점을 출발하여 다시 원점으로 돌아오는 데 걸리는 시간을 $a$초라 하면 출발한 지 $a$초 후의 점 P의 위치의 변화량은 0이므로

$$\int_0^a(2t^2-6t)dt=0, \qquad 2\int_0^a(t^2-3t)dt=0, \qquad 2\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_0^a=0$$

$$a^2\left(\frac{1}{3}a-\frac{3}{2}\right)=0 \qquad \therefore a=\frac{9}{2}\ (\because a>0)$$

따라서 점 P가 원점으로 다시 돌아오는 데 걸리는 시간은 $\frac{9}{2}$초이다.

(3) $$\int_0^{\frac{9}{2}}|2t^2-6t|dt=2\int_0^{\frac{9}{2}}|t^2-3t|dt=2\int_0^3(-t^2+3t)dt+2\int_3^{\frac{9}{2}}(t^2-3t)dt$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^3+2\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_3^{\frac{9}{2}}=9+9=18$$

답 (1) $-9$ (2) $\frac{9}{2}$초 (3) 18

정답 및 풀이 • 98쪽

**유제 108-1** 좌표가 1인 점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 $t$초 후의 속도가 $v(t)=2t-t^2$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 처음으로 운동 방향이 바뀔 때의 점 P의 위치

(2) 점 P가 좌표가 1인 점으로 다시 돌아오는 데 걸리는 시간

(3) 점 P가 좌표가 1인 점으로 돌아올 때까지 움직인 거리

## 대표유형 109 쏘아 올린 물체가 움직인 거리

• 개념 093, 094

지상 10 m의 높이에서 처음 속도 50 m/s로 똑바로 위로 쏘아 올린 물체의 $t$초 후의 속도가 $v(t)=50-10t$(m/s)일 때, 다음을 구하여라.

(1) 물체를 쏘아 올린 후 2초가 지났을 때, 이 물체의 지면으로부터의 높이

(2) 이 물체가 최고 지점에 도달할 때의 지면으로부터의 높이

(3) 물체를 쏘아 올린 후 7초 동안 물체가 움직인 거리

**유형 Guide** 쏘아 올린 물체의 속도가 양이면 위로, 음이면 아래로 움직이고, 방향이 바뀔 때 (속도)=0이다.
즉 (2)에서 물체가 최고 지점에 도달하면 움직이는 방향이 바뀌므로 (속도)=0임을 이용한다.

**유형 SSEN** 위치, 위치의 변화량, 움직인 거리 ➡ 속도의 적분을 이용한다.

**풀이** 물체를 쏘아 올린 후 $t$초가 지났을 때의 물체의 높이를 $x(t)$ m라 하자.

(1) $t=2$일 때 물체의 높이는

$$x(2)=10+\int_0^2(50-10t)dt=10+\Big[50t-5t^2\Big]_0^2=90(\mathrm{m})$$

(2) 물체가 최고 지점에 도달할 때의 속도는 0이므로 $50-10t=0$에서 $t=5$

따라서 $t=5$일 때 물체가 최고 높이에 도달하게 되므로 최고 높이는

$$x(5)=10+\int_0^5(50-10t)dt=10+\Big[50t-5t^2\Big]_0^5=135(\mathrm{m})$$

(3) $$\int_0^7|50-10t|dt=\int_0^5(50-10t)dt+\int_5^7(-50+10t)dt$$

$$=\Big[50t-5t^2\Big]_0^5+\Big[-50t+5t^2\Big]_5^7$$

$$=125+20=145(\mathrm{m})$$

답 (1) 90 m (2) 135 m (3) 145 m

**Remark** 물체의 속도가 0인 경우

① 물체가 정지할 때

② 물체가 운동 방향을 바꿀 때

③ 위로 쏘아 올린 물체가 최고 높이에 도달할 때

정답 및 풀이 • 98쪽

**유제 109-1** 지면에서 처음 속도 40 m/s로 똑바로 위로 쏘아 올린 물체의 $t$초 후의 속도가 $v(t)=-10t+40$(m/s)일 때, 다음을 구하여라.

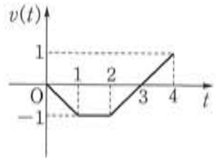
(1) 이 물체가 최고 지점에 도달할 때의 지면으로부터의 높이

(2) 물체가 땅에 떨어질 때의 속도

## 대표유형 110 속도의 그래프와 움직인 거리

• 개념 093, 094

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$ $(0\le t\le 4)$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음을 구하여라.




(1) 시각 $t=4$에서 점 P의 위치

(2) $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리

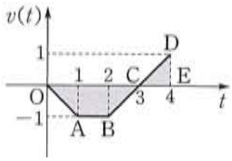
**유형 Guide** 주어진 구간에서 속도 $v(t)$의 정적분 값이 위치의 변화량이고, $|v(t)|$의 정적분 값이 움직인 거리이므로 구간별로 함수를 구하여 정적분의 값을 구한다. 이때 속도의 그래프가 직선으로만 되어 있는 경우에는 삼각형 또는 사각형의 넓이를 이용하면 편리하다.

**유형 SSEN** **속도의 그래프가 주어질 때 움직인 거리 ⊙ 속도의 그래프와 $t$축 사이의 넓이와 같다.**

**풀이** (1) $0+\int_0^4 v(t)dt=\int_0^3 v(t)dt+\int_3^4 v(t)dt$

$=-\square\mathrm{OABC}+\triangle\mathrm{CDE}$

$=-\frac{1}{2}\cdot(1+3)\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=-\frac{3}{2}$



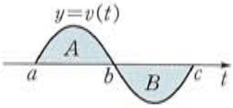

(2) $\int_0^4 |v(t)|dt=\int_0^3 \{-v(t)\}dt+\int_3^4 v(t)dt$

$=\square\mathrm{OABC}+\triangle\mathrm{CDE}$

$=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

답 (1) $-\frac{3}{2}$ (2) $\frac{5}{2}$

**Remark** 오른쪽 그림과 같이 구간 $[a, b]$와 구간 $[b, c]$에서 속도 $v(t)$의 그래프와 $t$축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 각각 $A$, $B$라 하면 $t=a$에서 $t=c$까지의 위치의 변화량과 움직인 거리는 각각 다음과 같다.

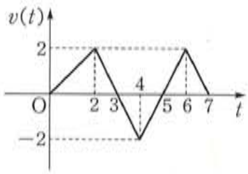



① (위치의 변화량)$=\int_a^c v(t)dt=\int_a^b v(t)dt+\int_b^c v(t)dt=A-B$

② (움직인 거리)$=\int_a^c |v(t)|dt=\int_a^b v(t)dt+\int_b^c \{-v(t)\}dt=A+B$

정답 및 풀이 • 98쪽

**유제 110-1** 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 $t$초 $(0\le t\le 7)$ 후의 속도 $v(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. 출발한 후 7초 동안 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

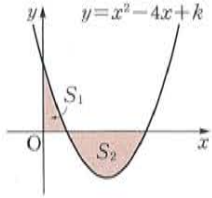


# 중단원 연습 문제

STEP 1 유형 Training

서술형

**01** 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=x^2-4x+k$와 $x$축, $y$축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 $S_1$, $S_2$라 할 때, $S_2=2S_1$이 되도록 하는 상수 $k$의 값을 구하여라.




**02** 곡선 $y^2=1-ax$와 $y$축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 4일 때, 양수 $a$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

**03** 곡선 $y=x^3-6x^2+9x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

**04** 곡선 $y=x^3+2x^2-x-2$ 위의 점 $(-2,\ 0)$에서의 접선과 이 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

**05** 곡선 $y=x(x-2)$와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $x$축에 의하여 이등분될 때, 상수 $m$의 값을 구하여라.

**06** 함수 $f(x)=x^3+x^2+x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

서술형

**07** 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 $t$초 후의 속도가 $v(t)=3t^2-12t+9$이다. 점 P가 원점으로 다시 돌아오는 것은 $a$초 후이고 그때까지 움직인 거리가 $s$일 때, $a+s$의 값을 구하여라.

**08** 지면에서 처음 속도 $v_0$으로 똑바로 위로 던진 돌의 $t$초 후의 속도가 $v(t)=v_0-10t$(m/s)이다. 돌을 던진 후 3초가 지났을 때 지면으로부터 30m 높이에 도달하려면 처음 속도 $v_0$은 몇 m/s이어야 하는가?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

**STEP 2 실전 Application**

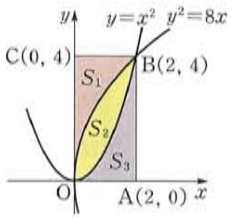
수능기출

**09** 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 $f(3)=0$이고,

$$\int_0^{2013} f(x)dx=\int_3^{2013} f(x)dx$$

를 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $S$일 때, $30S$의 값을 구하여라.

**10** 오른쪽 그림과 같이 네 점 O(0, 0), A(2, 0), B(2, 4), C(0, 4)를 꼭짓점으로 하는 직사각형 OABC가 두 곡선 $y=x^2$, $y^2=8x$에 의하여 나누어질 때, 세 도형의 넓이의 비 $S_1 : S_2 : S_3$은?




① 1 : 1 : 1 ② 1 : 2 : 1 ③ 2 : 1 : 2
④ 2 : 3 : 2 ⑤ 3 : 2 : 3

12 정적분의 활용

서술형

**11** 곡선 $y=x^2-2x-3$과 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, $a$는 상수이다.)

서술형

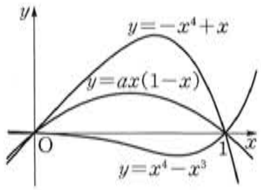
**12** 곡선 $y=x^2$을 $x$축에 대하여 대칭이동한 후 다시 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 5만큼 평행이동한 곡선을 $y=g(x)$라 할 때, 두 곡선 $y=x^2$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

**13** 곡선 $y=x^2+2x$ 위의 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$을 지나고 점 A에서의 접선에 수직인 직선과 이 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{121}{48}$ ② $\frac{41}{16}$ ③ $\frac{125}{48}$ ④ $\frac{21}{8}$ ⑤ $\frac{43}{16}$

평가원기출

**14** 두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 곡선 $y=ax(1-x)$에 의하여 이등분될 때, 상수 $a$의 값은? (단, $0<a<1$)




① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{5}{8}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

**15** 철도 위를 30 m/s로 달리는 열차가 브레이크를 건 후 $t$초가 지났을 때의 속도는 $v(t)=30-t$(m/s)라 한다. 이 열차가 브레이크를 건 후 정지할 때까지 움직인 거리는?

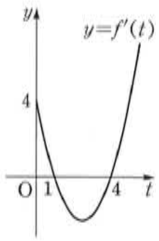
① 300 m ② 350 m ③ 380 m ④ 420 m ⑤ 450 m

서술형

**16** 좌표평면 위의 두 점 P, Q가 각각 점 $(-3,\ 0)$과 점 $(0,\ -4)$에서 동시에 출발하여 점 P는 $x$축 위를 양의 방향으로, 점 Q는 $y$축 위를 양의 방향으로 움직이고 있다. 출발한 지 $t$초 후 두 점 P, Q의 속도가 각각 $v_{\mathrm{P}}=2t$, $v_{\mathrm{Q}}=\frac{8}{3}t$일 때, 출발한 지 3초 후의 두 점 사이의 거리를 구하여라.

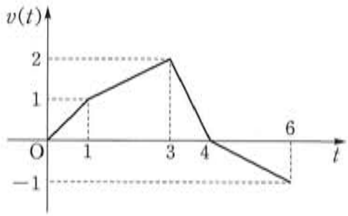
**17** 직선 도로 위를 움직이는 자동차가 A지점을 출발하여 6분 후에 B지점에 도착한다고 한다. 출발한 지 $t$분 후의 자동차의 속도가 $-15t^2+90t$ (m/min)일 때, 이 자동차의 속도가 최대가 되는 것은 A지점으로부터 몇 m 떨어진 지점에 있을 때인지 구하여라.

**18** 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 위치 $f(t)$에 대하여 이차함수 $y=f'(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 점 P가 출발할 때의 운동 방향에 대하여 반대 방향으로 움직인 거리를 구하여라.




평가원기출

**19** 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (0\le t\le 6)$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같다. 점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=6$까지 움직인 거리는?



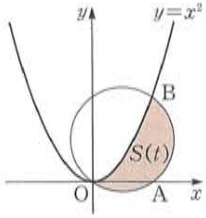

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$

④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

STEP 3 심화 Forwarding

평가원기출

**20** 그림과 같이 곡선 $y=x^2$과 양수 $t$에 대하여 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(t,\ 0)$, $\mathrm{B}(t,\ t^2)$을 지나는 원 $C$가 있다. 원 $C$의 내부와 부등식 $y\le x^2$이 나타내는 영역의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $S'(1)=\dfrac{p\pi+q}{4}$이다. $p^2+q^2$의 값을 구하여라. (단, $p$, $q$는 정수이다.)




서술형

**21** 자연수 $n$에 대하여 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}_n$의 시각 $t$에서의 속도는 $v_n(t)=\dfrac{1}{3^n}t(2-t)$이다. 점 $\mathrm{P}_n$이 다시 원점을 지날 때까지 움직인 거리를 $S_n$이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하여라.

수능기출

**22** 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$ $(0\le t\le 5)$에서의 속도 $v(t)$가 다음과 같다.

$$\begin{cases} 4t & (0\le t<1) \\ -2t+6 & (1\le t<3) \\ t-3 & (3\le t\le 5) \end{cases}$$

$0<x<3$인 실수 $x$에 대하여 점 P가

시각 $t=0$에서 $t=x$까지 움직인 거리,
시각 $t=x$에서 $t=x+2$까지 움직인 거리,
시각 $t=x+2$에서 $t=5$까지 움직인 거리

중에서 최소인 값을 $f(x)$라 할 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(1)=2$

ㄴ. $f(2)-f(1)=\displaystyle\int_1^2 v(t)dt$

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

# 찾아보기

MEMO

나를 바꾸는 힘 신사고 SINSAGO

수학이 즐겁다!
수학 전문 인강
신사고 피클
Fun & True
본 도서는 신사고 피클에서 인강으로 만나볼 수 있습니다.

수학의 **쎈** 힘을 키우는 사전식 **개념 기본서**

# 개념 SSEN

## 미적분 I

### AWARDS

**대한민국 1등 교육 브랜드, 좋은책신사고**

한국산업의 브랜드파워 1위 4년 연속 수상
2011 ~ 2014

대한민국 교육기업대상
6회 수상

학부모가 뽑은 교육브랜드대상
7회 수상

한국교육산업대상
6회 수상

좋은책신사고는 자기주도학습 No.1 Content Company
비전을 실현하기 위해 오늘도 열심히 달리고 있습니다.
언제나 고객의 입장에서 생각하며, 고객에게 사랑받는
좋은 책, 좋은 서비스를 만들 것을 약속드립니다.

### T.E.S.S.

**Total Educational Service System**

**씽씽씽(新辛信)시스템**
(新) 나날이 새로워지는 좋은책신사고의 고객 서비스는
(辛) 고객의 매서운 충고를 감사히 받아들이고
(信) 믿을 수 있는 도서를 만들기 위한 노력입니다.

● 무결점 도서를 위한 노력
도서 오류에 대한 고객의 매서운 충고는 홈페이지에서
전할 수 있습니다. (홈페이지 〉 고객센터 〉 오류신고하기)

● SMS 실시간 알리미
홈페이지에 문의하신 사항에 대한 A/S 답변이 끝나면
문자 메시지가 발송됩니다.

● 도서제안하기
원하는 도서는 홈페이지에서 언제든지 제안할 수 있습니다.

SINSAGO WINDOW | Internet | www.sinsago.co.kr
mail | 우137-828. 서울시 서초구 동작대로 212 (방배동 764-30)
tel | 1661-5590 | fax | 02-3481-5762