

정답 및 풀이

I 평면 곡선

- 01 이차곡선 2
- 02 평면 곡선의 접선 12

II 평면벡터

- 03 벡터의 연산 22
- 04 평면벡터의 성분 28
- 05 평면벡터의 내적 32
- 06 평면 운동 38

III 공간도형

- 07 공간도형 43
- 08 공간좌표 50

IV 공간벡터

- 09 공간벡터 59
- 10 도형의 방정식 66

01 이차곡선

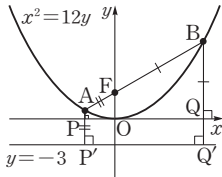
유제

본책 11~39쪽

001-1 $x^2=12y=4\cdot 3y$ 에서 포물선의 초점은 $F(0, 3)$ 이고 준선의 방정식은 $y=-3$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B 에서 직선 $y=-3$ 에 내린 수선의 발을 각각 P', Q' 이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AF} &= \overline{AP'} = \overline{AP} + \overline{PP'} \\ &= 1 + 3 = 4 \\ \overline{BF} &= \overline{BQ'} = \overline{BQ} + \overline{QQ'} \\ &= 9 + 3 = 12 \\ \therefore \overline{AB} &= \overline{AF} + \overline{BF} \\ &= 4 + 12 = 16 \end{aligned}$$



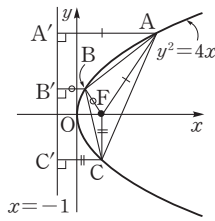
답 16

001-2 포물선 $y^2=4x$ 위의 세 점 A, B, C 의 x 좌표를 각각 a, b, c 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{3} &= 2 \\ \therefore a+b+c &= 6 \end{aligned}$$

포물선 $y^2=4x$ 의 준선의 방정식은 $x=-1$ 이므로 세 점 A, B, C 에서 직선 $x=-1$ 에 내린 수선의 발을 각각 A', B', C' 이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AF} &= \overline{AA'}, \quad \overline{BF} = \overline{BB'}, \\ \overline{CF} &= \overline{CC'} \\ \therefore \overline{AF} + \overline{BF} + \overline{CF} &= \overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} \\ &= (a+1) + (b+1) + (c+1) \\ &= (a+b+c) + 3 \\ &= 6 + 3 = 9 \end{aligned}$$



답 9

002-1 주어진 조건을 만족시키는 점을 $P(x, y)$ 라 하고, 점 P 에서 직선 $y=-1$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = |y+1|$$

양변을 제곱하면

$$(x-1)^2 + y^2 + 4y + 4 = y^2 + 2y + 1$$

$$\therefore (x-1)^2 = -2\left(y + \frac{3}{2}\right)$$

따라서 $a=-1, b=-2, c=\frac{3}{2}$ 이므로

$$a+b+c = -\frac{3}{2}$$

답 $-\frac{3}{2}$

다른 풀이 주어진 점의 자취는 초점의 좌표가

$(0, -\frac{1}{2})$ 이고 준선의 방정식이 $y=\frac{1}{2}$ 인 포물선

$x^2=4\cdot(-\frac{1}{2})y=-2y$ 를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축

의 방향으로 $-\frac{3}{2}$ 만큼 평행이동한 것이므로

$$(x-1)^2 = -2\left(y + \frac{3}{2}\right)$$

따라서 $a=-1, b=-2, c=\frac{3}{2}$ 이므로

$$a+b+c = -\frac{3}{2}$$

003-1 (1) 주어진 포물선의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$y^2=6(x+1)$$

따라서 이 포물선은 포물선 $y^2=6x$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2=6x=4\cdot\frac{3}{2}x$ 에서

$$\text{초점의 좌표: } \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

$$\text{준선의 방정식: } x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{꼭짓점의 좌표: } (0, 0)$$

이므로 포물선 $y^2=6(x+1)$ 에서

$$\text{초점의 좌표: } \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\text{준선의 방정식: } x = -\frac{5}{2}$$

$$\text{꼭짓점의 좌표: } (-1, 0)$$

(2) 주어진 포물선의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$x^2-10x+25=2y$$

$$\therefore (x-5)^2=2y$$

따라서 이 포물선은 포물선 $x^2=2y$ 를 x 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $x^2=2y=4 \cdot \frac{1}{2}y$ 에서

초점의 좌표: $(0, \frac{1}{2})$

준선의 방정식: $y = -\frac{1}{2}$

꼭짓점의 좌표: $(0, 0)$

이므로 포물선 $(x-5)^2=2y$ 에서

초점의 좌표: $(5, \frac{1}{2})$

준선의 방정식: $y = -\frac{1}{2}$

꼭짓점의 좌표: $(5, 0)$

답 풀이 참조

003-2 축이 x 축에 평행하므로 구하는 포물선의 방정식을

$$y^2 + Ax + By + C = 0$$

으로 놓으면 이 포물선은 세 점 $(1, 0)$, $(4, -1)$, $(-2, 2)$ 를 지나므로

$$A + C = 0$$

$$1 + 4A - B + C = 0$$

$$4 - 2A + 2B + C = 0$$

위의 식을 연립하여 풀면

$$A = -2, B = -5, C = 2$$

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$$y^2 - 2x - 5y + 2 = 0$$

$$\text{답 } y^2 - 2x - 5y + 2 = 0$$

004-1 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 직선 $x = -2$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 원과 직선 $x = -2$ 의 접점이므로

$$\overline{PA} = \overline{PH}$$

이때 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

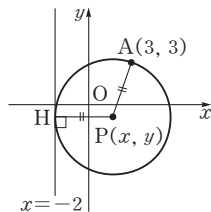
$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} = |x+2|$$

양변을 제곱하면

$$x^2 - 6x + 9 + (y-3)^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$\therefore (y-3)^2 = 10\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{답 } (y-3)^2 = 10\left(x - \frac{1}{2}\right)$$



004-2 오른쪽 그림에서 점 Q는 선분 AP의 수직이등분선 위의 점이므로

$$\overline{AQ} = \overline{PQ}$$

이때 점 Q의 좌표를

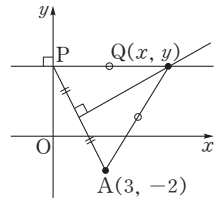
(x, y) 라 하면

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} = |x|$$

양변을 제곱하면

$$x^2 - 6x + 9 + (y+2)^2 = x^2$$

$$\therefore (y+2)^2 = 6\left(x - \frac{3}{2}\right)$$



$$\text{답 } (y+2)^2 = 6\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

005-1 초점이 x 축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)이라 하자.

초점의 좌표가 $(5, 0)$, $(-5, 0)$ 이므로

$$a^2 - b^2 = 5^2$$

$$\therefore (a+b)(a-b) = 25 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

또 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 장축의 길이와 단축의 길이의 차가 2이므로

$$2a - 2b = 2 \quad \therefore a - b = 1 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$a + b = 25 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$a = 13, b = 12$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$$

$$\text{답 } \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$$

006-1 타원의 정의에 의하여

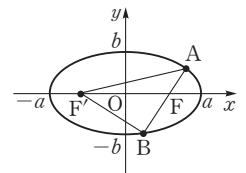
$$\begin{aligned} \overline{AF} + \overline{AF'} \\ = \overline{BF} + \overline{BF'} \end{aligned}$$

$$= 2a$$

이므로 삼각형 ABF' 의

둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{BF'} + \overline{F'A} \\ = (\overline{AF} + \overline{BF}) + \overline{BF'} + \overline{AF'} \\ = (\overline{AF} + \overline{AF'}) + (\overline{BF} + \overline{BF'}) \\ = 2a + 2a = 4a \end{aligned}$$



즉 $4a=12$ 이므로 $a=3$
 이때 초점이 $F(2, 0), F'(-2, 0)$ 이므로
 $b^2=3^2-2^2=5$
 $\therefore b=\sqrt{5} (\because b>0)$
 $\therefore ab=3\sqrt{5}$

답 $3\sqrt{5}$

006-2 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \cdot 3 = 6$$

$\overline{PF} = p$ 라 하면

$$\overline{PF'} = 6 - p$$

또 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에서

$$\sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

이므로 타원의 초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{5}), (0, -\sqrt{5})$$

$$\therefore \overline{FF'} = 2\sqrt{5}$$

$\triangle FPF'$ 에서 피타고라스 정리에 의하여

$$p^2 + (6-p)^2 = (2\sqrt{5})^2$$

$$p^2 - 6p + 8 = 0, \quad (p-2)(p-4) = 0$$

$$\therefore p=2 \text{ 또는 } p=4$$

$$\therefore \overline{PF} = 2 (\because \overline{PF'} > \overline{PF})$$

답 2

007-1 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 6 \text{이므로}$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 6$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = 6 - \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$3\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 2y+7$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$9(x-1)^2 + 5(y-1)^2 = 45$$

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{5} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

$$\text{답 } \frac{(x-1)^2}{5} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

다른 풀이 $\overline{FF'} = 4$ 이므로 점 P의 자취는 초점의 좌표가 $(0, 2), (0, -2)$ 이고 두 초점에서의 거리의 합이 6인 타원을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

장축의 길이가 6이고, $3^2 - 2^2 = 5$ 이므로 평행이동하기 전의 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

따라서 구하는 자취의 방정식은

$$\frac{(x-1)^2}{5} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

008-1 (1) 주어진 타원의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 + 2y + 1) = 4$$

$$(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 4$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{4} + (y+1)^2 = 1$$

따라서 이 타원은 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 에서

$$\text{초점의 좌표: } (\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$$

$$(\text{장축의 길이}) = 2 \cdot 2 = 4$$

이므로 타원 $\frac{(x-2)^2}{4} + (y+1)^2 = 1$ 에서

$$\text{초점의 좌표: } (2+\sqrt{3}, -1), (2-\sqrt{3}, -1)$$

$$\text{장축의 길이: } 4$$

(2) 주어진 타원의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$3(x^2 + 6x + 9) + 2(y^2 - 2y + 1) = 12$$

$$3(x+3)^2 + 2(y-1)^2 = 12$$

$$\therefore \frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{6} = 1$$

따라서 이 타원은 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} = 1$ 에서

$$\text{초점의 좌표: } (0, \sqrt{2}), (0, -\sqrt{2})$$

$$(\text{장축의 길이}) = 2 \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

이므로 타원 $\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{6} = 1$ 에서

$$\text{초점의 좌표: } (-3, 1+\sqrt{2}), (-3, 1-\sqrt{2})$$

$$\text{장축의 길이: } 2\sqrt{6}$$

답 풀이 참조

009-1 A(a, 0), B(0, b)라 하면 $\overline{AB}=9$ 이므로

$$\sqrt{a^2+b^2}=9$$

$$\therefore a^2+b^2=81 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 점 P는 \overline{AB} 를 2 : 1로 내분하는 점이므로

P(x, y)라 하면

$$x = \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot a}{2+1} = \frac{a}{3},$$

$$y = \frac{2 \cdot b + 1 \cdot 0}{2+1} = \frac{2}{3}b$$

$$\therefore a=3x, b=\frac{3}{2}y \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$(3x)^2 + \left(\frac{3}{2}y\right)^2 = 81$$

$$\therefore x^2 + \frac{y^2}{4} = 9$$

$$\text{답 } x^2 + \frac{y^2}{4} = 9$$

009-2 원 $(x-4)^2+y^2=36$ 의 중심을 C(4, 0)이라 하고, 두 원의 접점을 Q라 하면

$$\overline{CP} = \overline{CQ} - \overline{PQ}$$

$$= 6 - \overline{PO}$$

따라서 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2} = 6 - \sqrt{x^2+y^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$3\sqrt{x^2+y^2} = 2x+5$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$5(x-2)^2 + 9y^2 = 45$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

$$\text{답 } \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

다른 풀이 $\overline{CP} = 6 - \overline{PO}$ 에서

$$\overline{CP} + \overline{PO} = 6$$

즉 점 P의 자취는 두 점 C, O를 초점으로 하고 장축의 길이가 6인 타원이다. 이것은 초점의 좌표가

(2, 0), (-2, 0)이고 장축의 길이가 6인 타원

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것

이므로 자취의 방정식은

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

Remark 두 원의 위치 관계

반지름의 길이가 r, r'(r>r')이고 중심 사이의 거리가 d인 두 원의 위치 관계는 다음과 같다.

- ① 외접한다. $\Rightarrow d=r+r'$
- ② 두 점에서 만난다. $\Rightarrow r-r' < d < r+r'$
- ③ 내접한다. $\Rightarrow d=r-r'$

010-1 초점이 x축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의

방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이라 하자.

초점의 좌표가 (5, 0), (-5, 0)이므로

$$a^2+b^2=5^2=25 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점근선의 방정식이 $y = \pm 2x$ 이므로

$$\frac{b}{a} = \pm 2$$

$$\therefore b = \pm 2a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a^2=5, b^2=20$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$$

$$\text{답 } \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$$

011-1 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$ 에서 $\sqrt{9+16}=5$ 이므로 초점의 좌표는

$$(0, 5), (0, -5)$$

$$\therefore \overline{FF'} = 10$$

쌍곡선의 정의에 의하여

$$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2 \cdot 4 = 8$$

이때 $\overline{PF} = 2\overline{PF'}$ 이므로

$$\overline{PF} = 8, \overline{PF'} = 16$$

따라서 $\triangle PFF'$ 의 둘레의 길이는

$$\overline{PF} + \overline{FF'} + \overline{PF'} = 8 + 10 + 16 = 34$$

답 34

011-2 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 에서 $\sqrt{4+5}=3$ 이므로 초점의 좌표는

$$(3, 0), (-3, 0)$$

$$\therefore \overline{FF'} = 6$$

쌍곡선의 정의에 의하여

$$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2 \cdot 2 = 4$$

△PF'F의 둘레의 길이가 24이므로

$$\overline{PF} + \overline{FF'} + \overline{PF'} = 24$$

$$\therefore \overline{PF} + \overline{PF'} = 18$$

$$\therefore |\overline{PF}^2 - \overline{PF'}^2| = |\overline{PF} + \overline{PF'}| \cdot |\overline{PF} - \overline{PF'}| \\ = 18 \cdot 4 = 72$$

답 72

012-1 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 8$, 즉 $\overline{PF} - \overline{PF'} = \pm 8$ 이므로

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} - \sqrt{(x+6)^2 + (y-2)^2} = \pm 8$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = \pm 8 + \sqrt{(x+6)^2 + (y-2)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$\pm 4\sqrt{(x+6)^2 + (y-2)^2} = 5x + 21$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$9(x+1)^2 - 16(y-2)^2 = 144$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

$$\text{답 } \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

다른 풀이 $\overline{FF'} = 10$ 이므로 점 P의 자취는 초점의 좌표가 $(5, 0)$, $(-5, 0)$ 이고 두 초점에서의 거리의 차이가 8인 쌍곡선을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

두 초점에서의 거리의 차이가 8이고 $5^2 - 4^2 = 9$ 이므로 평행이동하기 전의 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

따라서 구하는 자취의 방정식은

$$\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

013-1 (1) 주어진 쌍곡선의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$5(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) = 20$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$$

따라서 이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 에서

초점의 좌표: $(3, 0)$, $(-3, 0)$

$$\text{점근선의 방정식: } y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$$

이므로 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$$(2, 2), (-4, 2)$$

점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}(x+1) + 2$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{5}}{2}x + \frac{\sqrt{5}}{2} + 2, y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x - \frac{\sqrt{5}}{2} + 2$$

(2) 주어진 쌍곡선의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$9(x^2 - 4x + 4) - 4(y^2 - 2y + 1) = -36$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = -1$$

따라서 이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$ 에서

$$\text{초점의 좌표: } (0, \sqrt{13}), (0, -\sqrt{13})$$

$$\text{점근선의 방정식: } y = \pm \frac{3}{2}x$$

이므로 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$$(2, 1 + \sqrt{13}), (2, 1 - \sqrt{13})$$

점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{3}{2}(x-2) + 1$$

$$\therefore y = \frac{3}{2}x - 2, y = -\frac{3}{2}x + 4$$

답 풀이 참조

014-1 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$Q(0, y)$$

$$\therefore \overline{AQ} = \sqrt{(-2)^2 + y^2}, \overline{PQ} = |x|$$

$\overline{AQ} = \overline{PQ}$ 에서

$$\sqrt{4 + y^2} = |x|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 - y^2 = 4$$

$$\text{답 } x^2 - y^2 = 4$$

Remark

$$x^2 - y^2 = 4 \text{에서 } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

따라서 점 P의 자취는 초점의 좌표가 $(2\sqrt{2}, 0)$, $(-2\sqrt{2}, 0)$ 이고 주축의 길이가 4인 쌍곡선이다.

중단원 연습 문제

● 본책 41~45쪽

- 01 ⑤ 02 ③ 03 25 04 10
 05 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = -1$ 06 4 07 4 08 ②
 09 $27\sqrt{2}$ 10 2 11 36 12 105 13 10
 14 ④ 15 19 16 ⑤ 17 $\frac{9}{10}$ 18 5
 19 3 20 ① 21 ② 22 ⑤

01 **전략** 포물선의 정의를 이용한다.
풀이 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH} = 3$ 이므로 $\triangle PHF$ 는 이등변삼각형이다.
 이때 점 P에서 선분 HF에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\triangle HPM$ 은 직각삼각형이므로

$$\overline{HM} = \overline{PH} \cos 30^\circ$$

$$= 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \overline{FH} = 2\overline{HM} = 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$
답 ⑤

02 **전략** P(a, b), Q(x, y)라 하고 a, b를 각각 x, y에 대한 식으로 나타낸다.
풀이 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 점 P는 포물선 $x^2 = 12y$ 위를 움직이므로

$$a^2 = 12b \quad \dots\dots ①$$
 점 Q는 선분 OP의 중점이므로 Q(x, y)라 하면

$$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2} \quad \therefore a = 2x, b = 2y$$
 이것을 ①에 대입하면

$$(2x)^2 = 12 \cdot 2y \quad \therefore x^2 = 6y$$
 따라서 점 Q의 자취의 방정식은 $x^2 = 6y$ 이다.
답 ③

03 **해결과정** $\overline{PA} = a, \overline{PB} = b$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$a + b = 2 \cdot 5 = 10 \quad \rightarrow 40\% \text{ 배점}$$
 이때 $a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad 10 \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\therefore ab \leq 25 \quad (\text{단, 등호는 } a = b \text{ 일 때 성립})$$
→ 40% 배점

답구하기 · 따라서 $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ 의 최댓값은 25이다.
→ 20% 배점
답 25

다른 풀이 $\overline{PA} = a$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PB} = 10 - a \quad (0 < a < 10)$$

$$\therefore \overline{PA} \cdot \overline{PB} = a(10 - a) = 10a - a^2$$

$$= -(a - 5)^2 + 25$$
 즉 $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ 는 $a = 5$ 일 때 최댓값 25를 갖는다.

04 **해결과정** · $3x^2 + 2y^2 - 12x + 4y + 2 = 0$ 에서

$$3(x - 2)^2 + 2(y + 1)^2 = 12 \quad \rightarrow 40\% \text{ 배점}$$
 타원 $3(x - 2)^2 + 2(y + 1)^2 = 12$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$$3(x - 2 - a)^2 + 2(y + 1 - b)^2 = 12 \quad \rightarrow 40\% \text{ 배점}$$
답구하기 · 이것이 $3x^2 + 2y^2 = c$ 와 일치하므로

$$a = -2, b = 1, c = 12$$

$$\therefore ab + c = 10 \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$
답 10

05 **전략** 두 초점으로부터의 거리의 차가 4인 점의 자취는 쌍곡선이다.
풀이 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ 에서 $\sqrt{25 - 16} = 3$ 이므로 타원의 초점의 좌표는
 $(0, 3), (0, -3)$
 따라서 초점 $(0, 3), (0, -3)$ 으로부터의 거리의 차가 4인 점의 자취의 방정식은

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = -1 \quad \text{답 } \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = -1$$

다른 풀이 주어진 조건을 만족시키는 점을 P(x, y)라 하고, F(0, 3), F'(0, -3)이라 하면

$$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 4, \text{ 즉 } \overline{PF} - \overline{PF'} = \pm 4$$
 이므로

$$\sqrt{x^2 + (y - 3)^2} - \sqrt{x^2 + (y + 3)^2} = \pm 4$$

$$\sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = \pm 4 + \sqrt{x^2 + (y + 3)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$\pm 2\sqrt{x^2 + (y + 3)^2} = 3y + 4$$
 다시 양변을 제곱하여 정리하면 $4x^2 - 5y^2 = -20$

$$\therefore \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = -1$$

06 **전략** 일반형으로 주어진 쌍곡선의 방정식은 표준형으로 변형한다.

풀이 주어진 쌍곡선의 방정식을 표준형으로 변형하면
 $(x+1)^2 - 3(y-3)^2 = 12$
 $\therefore \frac{(x+1)^2}{12} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

따라서 이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ 의 초점의 좌표가 $(4, 0)$, $(-4, 0)$ 이므로 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는 $(3, 3)$, $(-5, 3)$
 $\therefore a+b+c+d = 3+3+(-5)+3 = 4$

답 4

07 해결과정 • 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AP}, \overline{BF} = \overline{BQ}$$

$$\overline{AB} = 8 \text{에서 } \overline{AF} + \overline{BF} = 8$$

이므로 $\overline{AP} + \overline{BQ} = 8$ $\rightarrow 50\%$ 배점

답구하기 • 이때 $\overline{AP} \parallel \overline{MR} \parallel \overline{BQ}$ 이고, 점 M 이 \overline{AB} 의 중점이므로

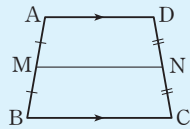
$$\overline{MR} = \frac{1}{2}(\overline{AP} + \overline{BQ}) = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \quad \rightarrow 50\% \text{ 배점}$$

답 4

Remark 사다리꼴에서 삼각형의 중점 연결 정리의 응용

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 인 사다리꼴 $ABCD$ 에서 \overline{AB} , \overline{CD} 의 중점을 각각 M , N 이라 하면

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$$



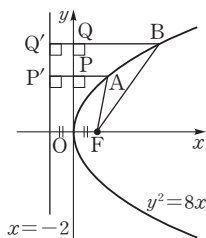
08 전략 포물선의 정의를 이용하여 \overline{AP} , \overline{BQ} 를 x 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $y^2 = 8x = 4 \cdot 2x$ 에서 포물선의 초점은 $F(2, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x = -2$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A , B 에서 직선 $x = -2$ 에 내린 수선의 발을 각각 P' , Q' 이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AP'} = \overline{AF} = a,$$

$$\overline{BQ'} = \overline{BF} = 2a$$



$$\therefore \overline{AP} = \overline{AP'} - \overline{PP'} = a - 2$$

$$\overline{BQ} = \overline{BQ'} - \overline{QQ'} = 2a - 2$$

이때 $\overline{BQ} = 3\overline{AP}$ 이므로
 $2a - 2 = 3(a - 2)$
 $\therefore a = 4$

답 ②

09 문제이해 • $y = \frac{1}{8}x^2$ 에서 $x^2 = 8y = 4 \cdot 2y$

따라서 점 $F(0, 2)$ 와 직선 $y = -2$ 는 각각 포물선 $y = \frac{1}{8}x^2$ 의 초점과 준선이므로 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AA'} = \overline{AF} = 3, \overline{BB'} = \overline{BF} = 6 \quad \rightarrow 40\% \text{ 배점}$$

해결과정 • 오른쪽 그림과 같이 점 A 에서 $\overline{BB'}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{BH} = \overline{BB'} - \overline{HB'}$$

$$= 6 - 3 = 3$$

직각삼각형 BAH 에서

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BH}^2}$$

$$= \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}$$

$\rightarrow 40\%$ 배점

답구하기 • 따라서 $\square AA'B'B$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2}(\overline{AA'} + \overline{BB'}) \cdot \overline{AH} = \frac{1}{2}(3 + 6) \cdot 6\sqrt{2}$$

$$= 27\sqrt{2} \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

답 $27\sqrt{2}$

10 전략 포물선의 꼭짓점은 포물선의 축 위의 점임을 이용한다.

풀이 직선 $y = -2$ 를 축으로 하는 포물선의 방정식을 $(y+2)^2 = 4p(x-m)$

이라 하면 이 포물선이 두 점 $(4, -4)$, $(12, 4)$ 를 지나므로

$$4 = 4p(4 - m) \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$36 = 4p(12 - m) \quad \dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $m = 3, p = 1$

$$\therefore (y+2)^2 = 4(x-3)$$

따라서 이 포물선은 포물선 $y^2 = 4x$ 를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 초점의 좌표는

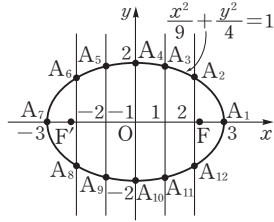
$$(1+3, 0-2), \text{ 즉 } (4, -2)$$

따라서 $a = 4, b = -2$ 이므로

$$a + b = 2$$

답 2

11 해결과정 · 다음 그림과 같이 A_1, A_2, \dots, A_{12} 를 정하고 주어진 타원의 다른 한 초점을 F' 이라 하자.



타원의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{A_i F} + \overline{A_i F'} &= 2 \cdot 3 \\ &= 6 \quad (i=1, 2, \dots, 12) \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{12} (\overline{A_i F} + \overline{A_i F'}) = 6 \cdot 12 = 72 \quad \rightarrow 50\% \text{ 배점}$$

그런데 주어진 타원은 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\sum_{i=1}^{12} \overline{A_i F} = \sum_{i=1}^{12} \overline{A_i F'} \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

답구하기 · $\therefore \overline{A_1 F} + \overline{A_2 F} + \overline{A_3 F} + \dots + \overline{A_{12} F}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{12} \overline{A_i F} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 72 = 36 \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점} \end{aligned}$$

답 36

Remark

주어진 타원이 y 축에 대하여 대칭이므로 위의 그림에서 초점 F 와 F' , 타원 위의 점 A_2 와 점 A_6 도 y 축에 대하여 대칭이다.

$$\therefore \overline{A_2 F} = \overline{A_6 F'}$$

나머지 점들도 같은 방법으로 $\sum_{i=1}^{12} \overline{A_i F} = \sum_{i=1}^{12} \overline{A_i F'}$ 임을 알 수 있다.

12 전략 타원의 정의에 의하여 $\overline{FP} + \overline{F'P} = 10$ 임을 이용한다.

풀이 타원의 정의에 의하여

$$\overline{FP} + \overline{F'P} = 2 \cdot 5 = 10$$

이므로 $\overline{FP} = 10 - \overline{F'P}$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AP} - \overline{FP} &= \overline{AP} - (10 - \overline{F'P}) \\ &= \overline{AP} + \overline{F'P} - 10 \\ &\geq \overline{AF'} - 10 \end{aligned}$$

$\overline{AP} - \overline{FP}$ 의 최솟값이 1이므로 $\overline{AF'} = 11$

이때 $F'(-4, 0)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AF'} &= \sqrt{16 + a^2} = 11, \quad 16 + a^2 = 121 \\ \therefore a^2 &= 105 \end{aligned}$$

답 105

13 전략 타원의 정의와 포물선의 정의를 이용한다.

풀이 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에

서 $\sqrt{25-16}=3$ 이므로

타원의 초점의 좌표는

$$(3, 0), (-3, 0)$$

$F(3, 0)$ 이라 하면 타

원의 초점은 두 점 F ,

Q 이므로 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PQ} = 2 \cdot 5 = 10$$

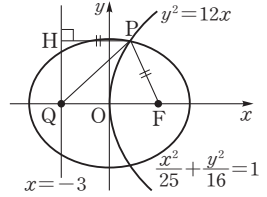
한편 $y^2 = 12x = 4 \cdot 3x$ 에서 포물선의 초점은 점 F 이

고, 준선은 직선 $x = -3$ 이다.

포물선의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{PF} &= \overline{PH} \\ \therefore \overline{PH} + \overline{PQ} &= \overline{PF} + \overline{PQ} = 10 \end{aligned}$$

답 10



01 이차곡선

14 전략 타원의 정의를 이용하여 삼각형 AFB 의 넓이를 b 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서

$$\overline{OA} = |a|, \overline{OB} = |b|, \overline{OF} = c$$

이때 삼각형 OFB 는 직각삼각형이고, $c^2 = a^2 - b^2$ 이므로

$$\overline{OA}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{BF}^2$$

$$\therefore \overline{OA} = \overline{BF}$$

$$\overline{BF} = \frac{\overline{OB}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} |b|, \overline{OF} = \frac{\overline{OB}}{\tan \frac{\pi}{3}} = \frac{|b|}{\sqrt{3}}$$

로 삼각형 AFB 의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \overline{AF} \cdot \overline{OB} &= \frac{1}{2} (\overline{OA} + \overline{OF}) \cdot \overline{OB} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} |b| + \frac{|b|}{\sqrt{3}} \right) \cdot |b| \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} b^2 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{\sqrt{3}}{2} b^2 = 6\sqrt{3} \text{이므로 } b^2 = 12$$

이때 $\overline{OA} = \overline{BF}$, 즉 $|a| = \frac{2}{\sqrt{3}} |b|$ 이므로

$$a^2 = \frac{4}{3} b^2 = 16$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 28$$

답 ④

15 **전략** 사각형의 넓이를 a 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 타원 $x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1$ 에서 $a > 1$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{a^2-1}), (0, -\sqrt{a^2-1})$$

쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$ 에서 $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$$

위의 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 마름모이고 넓이가 12이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{a^2-1} = 12$$

$$\sqrt{a^2-1} = 3\sqrt{2}, \quad a^2-1 = 18$$

$$\therefore a^2 = 19$$

답 19

16 **전략** 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 의 점근선의 방정식이 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 임을 이용한다.

풀이 쌍곡선 $x^2 - 3y^2 = -12$, 즉 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = -1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}x, \quad \text{즉 } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

두 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x, y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2 라 하면

$$\tan \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\tan \theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \theta_1 = \frac{\pi}{6}, \theta_2 = \frac{5}{6}\pi$$

따라서 두 점근선이 이루는 예각의 크기는

$$\theta_1 + (\pi - \theta_2) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

답 ⑤

17 **전략** $\overline{PA}, \overline{PB}$ 의 길이는 각각 점 P와 두 점근선 사이의 거리와 같음을 이용한다.

풀이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{1}{3}x \quad \therefore x \pm 3y = 0$$

점 P에서 두 직선 $x+3y=0, x-3y=0$ 에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하면 $\overline{PA}, \overline{PB}$ 의 길이는 각각 점 P(a, b)와 두 직선 $x+3y=0, x-3y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{PA} = \frac{|a+3b|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|a+3b|}{\sqrt{10}}$$

$$\overline{PB} = \frac{|a-3b|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{|a-3b|}{\sqrt{10}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PA} \cdot \overline{PB} &= \frac{|a+3b|}{\sqrt{10}} \cdot \frac{|a-3b|}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{|a^2-9b^2|}{10} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때 점 P(a, b)는 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{9} - b^2 = 1 \quad \therefore a^2 - 9b^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \frac{9}{10}$$

답 $\frac{9}{10}$

18 **문제이해** • 주축이 x 축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하자.

주축의 길이가 2이므로

$$2a = 2 \quad \therefore a = 1$$

점근선의 방정식이 $y = \pm 2x$ 이므로

$$\frac{b}{a} = 2 \quad \therefore b = 2a = 2$$

따라서 쌍곡선의 방정식은

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \rightarrow 40\% \text{ 배점}$$

해결과정 • 점 P의 좌표를 (s, t)라 하면 점 P는 쌍곡선 ① 위의 점이므로

$$s^2 - \frac{t^2}{4} = 1$$

$$\therefore t^2 = 4s^2 - 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

점 A(5, 0)과 점 P 사이의 거리를 d 라 하면

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(s-5)^2 + t^2} \\ &= \sqrt{(s-5)^2 + 4s^2 - 4} \quad (\because \textcircled{2}) \\ &= \sqrt{5s^2 - 10s + 21} \\ &= \sqrt{5(s-1)^2 + 16} \end{aligned}$$

$\rightarrow 40\% \text{ 배점}$

답구하기 · 따라서 d 는 $s=1$ 일 때 최소이고, 이때의 최솟값은 4이므로

$$p=1, m=4$$

또 $s=1$ 을 ㉠에 대입하면

$$t^2=4 \cdot 1^2-4=0 \quad \therefore t=0$$

$$\therefore q=0$$

$$\therefore p+q+m=5$$

→ 20% 배점
답 5

19 문제이해 · $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 에서 $\sqrt{4+12}=4$,

$x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$ 에서 $\sqrt{1+15}=4$ 이므로 두 쌍곡선의 초점의 좌표는

$$(4, 0), (-4, 0)$$

즉 두 점 P, Q는 두 쌍곡선의 초점이다. → 30% 배점

해결과정 · 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{AQ} - \overline{AP} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\overline{BQ} - \overline{BP} = 2 \cdot 1 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

답구하기 · 삼각형 QAB의 둘레의 길이가 12이므로

$$\overline{BQ} + \overline{AQ} + \overline{AB} = 12$$

$$\overline{BQ} + \overline{AQ} + (\overline{BP} - \overline{AP}) = 12$$

㉠에서 $\overline{BQ} = \overline{BP} + 2$ 이므로

$$(\overline{BP} + 2) + (\overline{AQ} - \overline{AP}) + \overline{BP} = 12$$

$$2\overline{BP} + 6 = 12 \quad \therefore \overline{BP} = 3 \quad \rightarrow 40\% \text{ 배점}$$

답 3

20 전략 포물선의 정의를 이용한다.

풀이 포물선 $y^2 = \frac{x}{n}$ 의 초점의 좌표는 $(\frac{1}{4n}, 0)$ 이고,

준선의 방정식은 $x = -\frac{1}{4n}$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두

점 P, Q에서 준선

$x = -\frac{1}{4n}$ 에 내린 수선

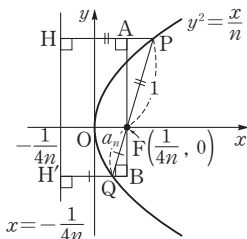
의 발을 각각 H, H'이

라 하면 포물선의 정의

에 의하여

$$\overline{PH} = \overline{PF} = 1,$$

$$\overline{QH'} = \overline{QF} = a_n$$



따라서 점 F에서 두 직선 PH와 QH'에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하면

$$\overline{PA} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4n} = 1 - \frac{1}{2n},$$

$$\overline{QB} = 2 \cdot \frac{1}{4n} - a_n = \frac{1}{2n} - a_n$$

또 $\triangle FAP \sim \triangle FBQ$ 이므로

$$\overline{PF} : \overline{QF} = \overline{PA} : \overline{QB}$$

$$1 : a_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) : \left(\frac{1}{2n} - a_n\right)$$

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right)a_n = \frac{1}{2n} - a_n$$

$$\left(2 - \frac{1}{2n}\right)a_n = \frac{1}{2n}, \quad \frac{4n-1}{2n}a_n = \frac{1}{2n}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{4n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{10} (4n-1)$$

$$= 4 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - 10$$

$$= 210$$

답 ①

21 전략 타원의 정의를 이용한다.

풀이 타원의 정의에 의하여

$$\overline{FP} + \overline{F'P} = 2 \cdot 7 = 14$$

$\overline{FP} = 9$ 이므로 $\overline{F'P} = 14 - 9 = 5$

오른쪽 그림에서

$\overline{F'H} = t (0 < t < 5)$ 라 하

면

$$\overline{HP} = 5 - t$$

직각삼각형 PHF에서

$$(5-t)^2 + (6\sqrt{2})^2 = 9^2$$

$$\therefore (5-t)^2 = 9$$

이때 $0 < t < 5$ 이므로 $t = 2$

따라서 직각삼각형 FHF'에서

$$\overline{FF'} = \sqrt{2^2 + (6\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{19}$$

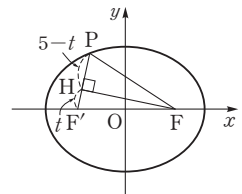
이므로 주어진 타원의 두 초점은

$$(\sqrt{19}, 0), (-\sqrt{19}, 0)$$

따라서 $\sqrt{49-a} = \sqrt{19}$ 이므로

$$a = 49 - 19 = 30$$

답 ②



22 **전략** 점근선의 방정식을 이용하여 초점과 점 P를 지나는 직선의 위치에 따른 기울기를 알아본다.

풀이 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{11} = 1$ 에서

$$c = \sqrt{4+11} = \sqrt{15}$$

오른쪽 그림에서 $2 \leq s < \sqrt{15}$ 이면

$$a(s) \leq 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$s > \sqrt{15}$ 이면

$$a(s) > 0$$

이때 쌍곡선의 점근선의 방

정식이 $y = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}x$ 이므로

$$a(s) > \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$\therefore a(s) \leq 0 \text{ 또는 } a(s) > \frac{\sqrt{11}}{2}$$

ㄱ. ㉠에서 $a(s) \leq 0$ 인 정수 s 는 2, 3의 2개이다.

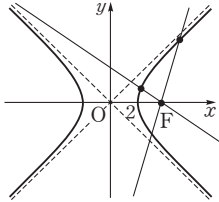
ㄴ. $\frac{\sqrt{11}}{2} > \frac{3}{2}$ 이므로 $a(s) = \frac{3}{2}$ 인 s 의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{s \rightarrow \sqrt{15}^+} a(s) = \infty$, $\lim_{s \rightarrow \sqrt{15}^-} a(s) = -\infty$ 이므로

$$\lim_{s \rightarrow c} \frac{1}{a(s)} = \lim_{s \rightarrow \sqrt{15}} \frac{1}{a(s)} = 0$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤



02 평면 곡선의 접선

유제

본책 49~70쪽

015-1 (1) 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} - 2 + 4 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2y+4) \frac{dy}{dx} = 2 - 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y+2} \quad (y \neq -2)$$

(2) 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$6x^2 - y - x \frac{dy}{dx} + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x - 3y^2) \frac{dy}{dx} = 6x^2 - y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{6x^2 - y}{x - 3y^2} \quad (x \neq 3y^2)$$

답 풀이 참조

015-2 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + 3y + 3x \frac{dy}{dx} = 0, \quad 3x \frac{dy}{dx} = -2x - 3y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 3y}{3x}$$

$x=2$ 를 $x^2 + 3xy = 10$ 에 대입하면

$$4 + 6y = 10 \quad \therefore y = 1$$

따라서 $x=2$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{-2 \cdot 2 - 3 \cdot 1}{3 \cdot 2} = -\frac{7}{6}$$

답 $-\frac{7}{6}$

016-1 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ 에서

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \quad (x \neq 0)$$

점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - 1 = -(x - 1) \quad \therefore y = -x + 2$$

따라서 $a = -1$, $b = 2$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 5$$

답 5

016-2 $x^3+x=xy^2$ 에서

$$3x^2+1=y^2+2xy\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-y^2+1}{2xy}$$

점 $(2, \sqrt{5})$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cdot 2^2 - (\sqrt{5})^2 + 1}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - \sqrt{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}(x - 2)$$

$$\therefore y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{\sqrt{5}}{5}$$

이 직선의 x 절편은 $-\frac{1}{2}$, y 절편은 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 이므로

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{10} \quad \square -\frac{\sqrt{5}}{10}$$

017-1 포물선 $x^2=8y=4 \cdot 2y$ 위의 점 $(4, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4x=2 \cdot 2(y+2) \quad \therefore y=x-2$$

따라서 구하는 직선의 기울기는 1이고 점 $(-2, 1)$ 을 지나므로 구하는 직선의 방정식은

$$y-1=1 \cdot (x+2)$$

$$\therefore y=x+3$$

$$\square y=x+3$$

017-2 $y^2=-8x$ 에 $x=-2$ 를 대입하면

$$y^2=16 \quad \therefore y=4 \text{ 또는 } y=-4$$

따라서 교점의 좌표는 $(-2, 4), (-2, -4)$

(i) 점 $(-2, 4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4y=2 \cdot (-2)\{x+(-2)\}$$

$$\therefore y=-x+2$$

(ii) 점 $(-2, -4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-4y=2 \cdot (-2)\{x+(-2)\}$$

$$\therefore y=x-2$$

(i), (ii)에서 구하는 접선의 방정식은

$$y=-x+2, y=x-2$$

$$\square y=-x+2, y=x-2$$

018-1 타원 $x^2+2y^2=6$ 위의 점 $(2, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2x+2 \cdot (-y)=6 \quad \therefore y=x-3$$

따라서 직선 $y=x-3$ 에 수직인 직선의 기울기는 -1 이고 이 직선이 점 $(6, 1)$ 을 지나므로 구하는 직선의 방정식은

$$y-1=-(x-6) \quad \therefore y=-x+7$$

$$\square y=-x+7$$

Remark

타원 $Ax^2+By^2=C$ (A, B, C 는 상수) 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식을 구할 때에는 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 꼴로 변형할 필요없이 $Ax^2+By^2=C$ 에 x^2 대신 x_1x, y^2 대신 y_1y 를 대입하면 된다.

02
평면 곡선의 접선

018-2 $4x^2+y^2=20$ 에 $x=1$ 을 대입하면

$$4+y^2=20, \quad y^2=16$$

$$\therefore y=-4 \text{ 또는 } y=4$$

따라서 교점의 좌표는 $(1, -4), (1, 4)$

(i) 점 $(1, -4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4 \cdot 1 \cdot x + (-4) \cdot y = 20 \quad \therefore x - y = 5$$

(ii) 점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4 \cdot 1 \cdot x + 4y = 20 \quad \therefore x + y = 5$$

(i), (ii)에서 구하는 접선의 방정식은

$$x - y = 5, x + y = 5$$

$$\square x - y = 5, x + y = 5$$

019-1 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{2} - 1 \cdot y = 1 \quad \therefore y = x - 1$$

따라서 구하는 y 절편은 -1 이다.

$$\square -1$$

019-2 $x^2-4y^2=-5$ 에 $x=2$ 를 대입하면

$$4-4y^2=-5, \quad y^2=\frac{9}{4}$$

$$\therefore y=-\frac{3}{2} \text{ 또는 } y=\frac{3}{2}$$

따라서 교점의 좌표는 $(2, \frac{3}{2}), (2, -\frac{3}{2})$

(i) 점 $(2, \frac{3}{2})$ 에서의 접선의 방정식은

$$2x - 4 \cdot \frac{3}{2}y = -5$$

$$\therefore 2x - 6y = -5$$

(ii) 점 $(2, -\frac{3}{2})$ 에서의 접선의 방정식은

$$2x - 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)y = -5$$

$$\therefore 2x + 6y = -5$$

(i), (ii)에서 구하는 접선의 방정식은

$$2x - 6y = -5, 2x + 6y = -5$$

$$\boxed{\text{답}} 2x - 6y = -5, 2x + 6y = -5$$

020-1 포물선 $y^2 = -3x = 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)x$ 위의 점

(x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$y_1 y = 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)(x + x_1)$$

$$\therefore y = -\frac{3}{2y_1}x - \frac{3x_1}{2y_1}$$

접선의 기울기가 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ 이므로

$$-\frac{3}{2y_1} = \sqrt{3} \quad \therefore y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $y_1^2 = -3x_1$ 이므로 $x_1 = -\frac{y_1^2}{3} = -\frac{1}{4}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{\text{답}} y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

020-2 초점의 좌표가 $(0, 1)$ 이고 준선의 방정식이

$y = -1$ 인 포물선의 방정식은

$$x^2 = 4y$$

포물선 $x^2 = 4y$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1 x = 2(y + y_1) \quad \therefore y = \frac{x_1}{2}x - y_1$$

직선 $2x + y + 1 = 0$, 즉 $y = -2x - 1$ 에 평행한 직선의 기울기는 -2 이므로

$$\frac{x_1}{2} = -2 \quad \therefore x_1 = -4$$

이때 $x_1^2 = 4y_1$ 이므로 $y_1 = \frac{x_1^2}{4} = 4$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = -2x - 4$$

$$\boxed{\text{답}} y = -2x - 4$$

021-1 타원 $4x^2 + y^2 = 12$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$4x_1 x + y_1 y = 12 \quad \therefore y = -\frac{4x_1}{y_1}x + \frac{12}{y_1}$$

직선 $3x - y + 5 = 0$, 즉 $y = 3x + 5$ 와 평행한 직선의 기울기는 3이므로

$$-\frac{4x_1}{y_1} = 3 \quad \therefore x_1 = -\frac{3}{4}y_1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $4x_1^2 + y_1^2 = 12$ 이므로 $\textcircled{1}$ 을 대입하여 정리하면

$$\frac{13}{4}y_1^2 = 12 \quad \therefore y_1 = \pm \frac{4\sqrt{39}}{13}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{39}$$

$$\boxed{\text{답}} y = 3x \pm \sqrt{39}$$

021-2 타원 $x^2 + 2y^2 = 16$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1 x + 2y_1 y = 16 \quad \therefore y = -\frac{x_1}{2y_1}x + \frac{8}{y_1}$$

접선의 기울기가 $\tan 45^\circ = 1$ 이므로

$$-\frac{x_1}{2y_1} = 1 \quad \therefore x_1 = -2y_1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $x_1^2 + 2y_1^2 = 16$ 이므로 $\textcircled{1}$ 을 대입하여 정리하면

$$6y_1^2 = 16 \quad \therefore y_1 = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = x \pm 2\sqrt{6}$$

$$\boxed{\text{답}} y = x \pm 2\sqrt{6}$$

022-1 쌍곡선 $3x^2 - 4y^2 = 12$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$3x_1 x - 4y_1 y = 12 \quad \therefore y = \frac{3x_1}{4y_1}x - \frac{3}{y_1}$$

접선의 기울기가 $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{3x_1}{4y_1} = -\sqrt{3} \quad \therefore x_1 = -\frac{4\sqrt{3}}{3}y_1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $3x_1^2 - 4y_1^2 = 12$ 이므로 $\textcircled{1}$ 을 대입하여 정리하면

$$12y_1^2 = 12 \quad \therefore y_1 = \pm 1$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = -\sqrt{3}x \pm 3$$

$$\boxed{\text{답}} y = -\sqrt{3}x \pm 3$$

022-2 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{9} - \frac{y_1 y}{16} = 1 \quad \therefore y = \frac{16x_1}{9y_1}x - \frac{16}{y_1}$$

접선의 기울기가 2이므로

$$\frac{16x_1}{9y_1}=2 \quad \therefore x_1=\frac{9}{8}y_1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $\frac{x_1^2}{9}-\frac{y_1^2}{16}=1$ 이므로 $\textcircled{1}$ 을 대입하여 정리하면

$$\frac{5}{64}y_1^2=1 \quad \therefore y_1=\pm\frac{8\sqrt{5}}{5}$$

따라서 직선의 방정식은 $y=2x\pm 2\sqrt{5}$

이때 두 직선 $y=2x-2\sqrt{5}$ 와 $y=2x+2\sqrt{5}$ 사이의 거리는 직선 $y=2x-2\sqrt{5}$ 위의 점 $(0, -2\sqrt{5})$ 와 직선 $y=2x+2\sqrt{5}$, 즉 $2x-y+2\sqrt{5}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-(-2\sqrt{5})+2\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=4$$

☞ 4

023-1 포물선 $x^2=8y=4\cdot 2y$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x=2\cdot 2(y+y_1) \quad \therefore x_1x=4(y+y_1)$$

이 직선이 점 $(1, -1)$ 을 지나므로

$$x_1=4(y_1-1) \quad \therefore y_1=\frac{1}{4}x_1+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $x_1^2=8y_1$ 이므로 $\textcircled{1}$ 을 대입하여 정리하면

$$x_1^2-2x_1-8=0, \quad (x_1+2)(x_1-4)=0$$

$$\therefore x_1=-2 \text{ 또는 } x_1=4$$

따라서 $x_1=-2$ 일 때 $y_1=\frac{1}{2}$, $x_1=4$ 일 때 $y_1=2$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}, y=x-2$$

$$\text{☞ } y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}, y=x-2$$

023-2 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2(x+x_1)$$

이 직선이 점 $(2, 3)$ 을 지나므로

$$3y_1=2(x_1+2)$$

$$\therefore x_1=\frac{3}{2}y_1-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $y_1^2=4x_1$ 이므로 $\textcircled{1}$ 을 대입하여 정리하면

$$y_1^2-6y_1+8=0, \quad (y_1-2)(y_1-4)=0$$

$$\therefore y_1=2 \text{ 또는 } y_1=4$$

따라서 $y_1=2$ 일 때 $x_1=1$, $y_1=4$ 일 때 $x_1=4$ 이므로 두 접선의 접점은

$$(1, 2), (4, 4)$$

따라서 선분 PQ의 길이는

$$\overline{PQ}=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{13}$$

☞ $\sqrt{13}$

024-1 타원 $4x^2+y^2=4$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$4x_1x+y_1y=4$$

이 직선이 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$4x_1+y_1=4$$

$$\therefore y_1=-4x_1+4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $4x_1^2+y_1^2=4$ 이므로 $\textcircled{1}$ 을 대입하여 정리하면

$$5x_1^2-8x_1+3=0, \quad (5x_1-3)(x_1-1)=0$$

$$\therefore x_1=\frac{3}{5} \text{ 또는 } x_1=1$$

따라서 $x_1=\frac{3}{5}$ 일 때 $y_1=\frac{8}{5}$, $x_1=1$ 일 때 $y_1=0$ 이므로

구하는 접선의 방정식은

$$3x+2y=5, x=1 \quad \text{☞ } 3x+2y=5, x=1$$

024-2 타원 $x^2+2y^2=4$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+2y_1y=4$$

이 직선이 점 $(-4, 0)$ 을 지나므로

$$-4x_1=4 \quad \therefore x_1=-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $x_1^2+2y_1^2=4$ 이므로 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$2y_1^2=3 \quad \therefore y_1=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

따라서 접선의 방정식은

$$-x\pm\sqrt{6}y=4 \quad \therefore x\pm\sqrt{6}y+4=0$$

따라서 $a=\pm\sqrt{6}$, $b=4$ 이므로

$$a^2+b^2=6+16=22 \quad \text{☞ } 22$$

025-1 쌍곡선 $x^2-2y^2=1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 $x_1x-2y_1y=1$

이 직선이 점 $(-1, 1)$ 을 지나므로

$$-x_1-2y_1=1$$

$$\therefore x_1=-2y_1-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $x_1^2-2y_1^2=1$ 이므로 $\textcircled{1}$ 을 대입하여 정리하면

$$y_1^2+2y_1=0, \quad y_1(y_1+2)=0$$

$$\therefore y_1=0 \text{ 또는 } y_1=-2$$

따라서 $y_1=0$ 일 때 $x_1=-1$, $y_1=-2$ 일 때 $x_1=3$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$x=-1, 3x+4y=1 \quad \text{☞ } x=-1, 3x+4y=1$$

025-2 쌍곡선 $x^2 - 4y^2 = 4$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x - 4y_1y = 4$$

이 직선이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$-4y_1 = 4 \quad \therefore y_1 = -1 \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 $x_1^2 - 4y_1^2 = 4$ 이므로 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$x_1^2 = 8 \quad \therefore x_1 = \pm 2\sqrt{2}$$

따라서 두 접선의 접점의 x 좌표가 $\pm 2\sqrt{2}$ 이므로

$$ac = 2\sqrt{2} \cdot (-2\sqrt{2}) = -8$$

답 -8

026-1 (1) $x = t^2 + 1$ 에서 $\frac{dx}{dt} = 2t$

$$y = 2t^3 - t + 3 \text{에서} \quad \frac{dy}{dt} = 6t^2 - 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6t^2 - 1}{2t} \quad (t \neq 0)$$

(2) $x = t^2$ 에서 $\frac{dx}{dt} = 2t$

$$y = t + \frac{1}{t} \text{에서} \quad \frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 - \frac{1}{t^2}}{2t} = \frac{t^2 - 1}{2t^3}$$

$$\text{답 (1) } \frac{dy}{dx} = \frac{6t^2 - 1}{2t} \quad (t \neq 0) \quad (2) \frac{dy}{dx} = \frac{t^2 - 1}{2t^3}$$

027-1 $x = 3 \cos \theta$ 에서 $\frac{dx}{d\theta} = -3 \sin \theta$

$$y = 2 \sin \theta \text{에서} \quad \frac{dy}{d\theta} = 2 \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{2 \cos \theta}{-3 \sin \theta} \\ &= -\frac{2}{3} \cot \theta \quad (\sin \theta \neq 0) \end{aligned}$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ 일 때,

$$x = 3 \cos \frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad y = 2 \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3} \cot \frac{\pi}{4} = -\frac{2}{3}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - \sqrt{2} = -\frac{2}{3} \left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\therefore y = -\frac{2}{3}x + 2\sqrt{2}$$

$$\text{답 } y = -\frac{2}{3}x + 2\sqrt{2}$$

027-2 $x = t^2 - t + 2$ 에서 $\frac{dx}{dt} = 2t - 1$

$$y = 2t^3 + at \text{에서} \quad \frac{dy}{dt} = 6t^2 + a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6t^2 + a}{2t - 1} \quad (t \neq \frac{1}{2})$$

$t = 1$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6 + a}{2 - 1} = 6 + a$$

즉 $6 + a = 3$ 이므로 $a = -3$

답 -3

중단원 연습 문제

● 본책 71~74쪽

01 0, 3 **02** -1 **03** 2 **04** ③ **05** ④

06 $\frac{4e^4}{e^4+1}$ **07** 2 **08** 5 **09** ①

10 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **11** ④ **12** $5\sqrt{2}$ **13** $2\sqrt{7}$ **14** -1

15 ④ **16** ① **17** 15 **18** 9

01 **전략** 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.

풀이 $y^2 = 3xy - x^3$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2y \frac{dy}{dx} = 3y + 3x \frac{dy}{dx} - 3x^2$$

$$(3x - 2y) \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3(x^2 - y)}{3x - 2y} \quad (3x \neq 2y) \quad \dots \textcircled{1}$$

$x = 2$ 를 주어진 식에 대입하면

$$y^2 = 6y - 8, \quad (y - 2)(y - 4) = 0$$

$\therefore y = 2$ 또는 $y = 4$

$x=2, y=2$ 를 ㉠에 대입하면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(2^2-2)}{3 \cdot 2 - 2 \cdot 2} = 3$$

$x=2, y=4$ 를 ㉠에 대입하면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(2^2-4)}{3 \cdot 2 - 2 \cdot 4} = 0 \quad \text{답 0, 3}$$

02 해결과정 $x^2+axy+by^2=4$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2x+ay+ax\frac{dy}{dx}+2by\frac{dy}{dx}=0$$

$$(ax+2by)\frac{dy}{dx}=-2x-ay$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+ay}{ax+2by} \quad (ax+2by \neq 0)$$

→ 40% 배점

점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는 $-\frac{2+a}{a+2b}$

$$\text{즉 } -\frac{2+a}{a+2b} = -\frac{3}{5} \text{ 이므로 } 10+5a=3a+6b$$

$$\therefore a-3b=-5 \quad \dots\dots \text{㉠} \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

또 점 (1, 1)은 주어진 곡선 위의 점이므로

$$1+a+b=4$$

$$\therefore a+b=3 \quad \dots\dots \text{㉡} \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

답구하기 \cdot ㉠, ㉡을 연립하면 $a=1, b=2$

$$\therefore a-b=-1 \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

답 -1

03 해결과정 $x^2=2y=4 \cdot \frac{1}{2}y$ 에서 포물선의 초점의 좌표는 $(0, \frac{1}{2})$ → 20% 배점

포물선 $x^2=2y$ 위의 점 (4, 8)에서의 접선의 방정식은

$$4x=2 \cdot \frac{1}{2}(y+8) \quad \therefore y=4x-8 \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

직선 $y=4x-8$ 에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$ 이고,

이 직선이 점 $(0, \frac{1}{2})$ 을 지나므로

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

답구하기 \cdot 이 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$0 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \quad \therefore x=2$$

따라서 구하는 x 절편은 2이다. → 20% 배점

답 2

04 전략 타원 $ax^2+by^2=c$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 $ax_1x+by_1y=c$ 임을 이용한다.

풀이 타원 $x^2+4y^2=20$

위의 점 (4, -1)에서의

접선의 방정식은

$$4x+4 \cdot (-y)=20$$

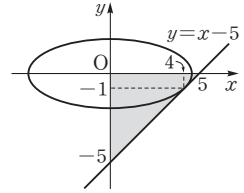
$$\therefore y=x-5$$

따라서 오른쪽 그림에서

구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2}$$

답 ③



05 전략 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용한다.

풀이 $x=t-\frac{1}{t}$ 에서 $\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{1}{t^2} = \frac{t^2+1}{t^2}$

$y=t+\frac{1}{t}$ 에서 $\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2-1}{t^2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{t^2-1}{t^2}}{\frac{t^2+1}{t^2}} = \frac{t^2-1}{t^2+1}$$

따라서 $t=2$ 일 때 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{2^2-1}{2^2+1} = \frac{3}{5}$$

답 ④

다른 풀이 $x=t-\frac{1}{t}$ 의 양변을 제곱하면

$$x^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} - 2$$

$$\therefore t^2 + \frac{1}{t^2} = x^2 + 2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

또 $y=t+\frac{1}{t}$ 의 양변을 제곱하면

$$y^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$y^2 = (x^2 + 2) + 2 \quad \therefore y^2 = x^2 + 4$$

위의 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2y \frac{dy}{dx} = 2x \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

따라서 $t=2$ 일 때 $x=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}, y=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ 이

므로 구하는 값은

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5}$$

06 **전략** 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.

풀이 $e^x - e^y = e^2 - 1$ 에서 $e^x - e^y \frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y}$$

점 (2, 0)에서의 접선의 기울기는 $\frac{dy}{dx} = e^2$

이므로 접선의 방정식은

$$y = e^2(x-2) \quad \therefore e^2x - y - 2e^2 = 0$$

따라서 직선 $e^2x - y - 2e^2 = 0$ 과 원점 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|-2e^2|}{\sqrt{(e^2)^2 + (-1)^2}} = \frac{2e^2}{\sqrt{e^4 + 1}}$$

$$\therefore d^2 = \frac{4e^4}{e^4 + 1}$$

$$\text{답 } \frac{4e^4}{e^4 + 1}$$

07 **문제이해** · 포물선

$y^2 = 4x$ 위의 점 P(4, 4)에서의 접선의 방정식은

$$4y = 2(x+4)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + 2$$

위의 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$0 = \frac{1}{2}x + 2 \quad \therefore x = -4$$

$$\therefore Q(-4, 0) \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

해결과정 · 주어진 포물선의 초점은 F(1, 0)이므로

$$\overline{PF} = \sqrt{(4-1)^2 + 4^2} = 5$$

$$\overline{QF} = |1 - (-4)| = 5$$

즉 삼각형 PQF는 $\overline{PF} = \overline{QF}$ 인 이등변삼각형이다.

$\rightarrow 40\% \text{ 배점}$

답구하기 · 따라서 $\angle PFQ$ 의 이등분선은 \overline{PQ} 의 중점 $(\frac{4-4}{2}, \frac{4}{2})$, 즉 (0, 2)를 지나므로 구하는 y 절편은

2이다.

$\rightarrow 30\% \text{ 배점}$

답 2

08 **전략** 접선의 방정식과 점근선의 방정식을 연립하여 교점의 좌표를 구한다.

풀이 쌍곡선 $y^2 - x^2 = 5$ 위의 점 (2, 3)에서의 접선의 방정식은

$$3y - 2x = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$y^2 - x^2 = 5$ 에서 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} = -1$ 이므로 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}x, \text{ 즉 } y = \pm x \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$x = -1, y = 1 \text{ 또는 } x = 5, y = 5$$

오른쪽 그림과 같이 P(5, 5),

Q(-1, 1)이라 하면 두 점근

선의 기울기의 곱이 -1이므로

로

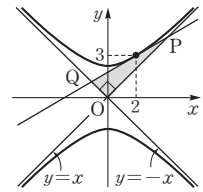
$$\angle POQ = \frac{\pi}{2}$$

$\overline{OP} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$, $\overline{OQ} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ 이므로

삼각형 OPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 5$$

답 5



09 **전략** 쌍곡선 $ax^2 - by^2 = c$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 $ax_1x - by_1y = c$ 임을 이용한다.

풀이 쌍곡선 $x^2 - 4y^2 = a$ 위의 점 (b, 1)에서의 접선의 방정식은

$$bx - 4y = a \quad \therefore y = \frac{b}{4}x - \frac{a}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x^2 - 4y^2 = a$ 에서 $\frac{x^2}{a} - \frac{4y^2}{a} = 1$ 이므로 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{4a}}x, \text{ 즉 } y = \pm \frac{1}{2}x \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 의 한 직선이 수직이므로

$$\frac{b}{4} \cdot \frac{1}{2} = -1 \text{ 또는 } \frac{b}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$b > 0$ 이므로 $b = 8$

즉 점 (8, 1)이 쌍곡선 $x^2 - 4y^2 = a$ 위의 점이므로

$$a = 8^2 - 4 \cdot 1^2 = 60$$

$$\therefore a + b = 68$$

답 ①

10 **전략** 점 P에서의 접선이 직선 $x+y-2=0$ 과 평행할 때, 점 P와 직선 사이의 거리가 최소임을 이용한다.

풀이 직선 $x+y-2=0$, 즉 $y=-x+2$ 의 기울기가 -1 이므로 구하는 최솟값은 점 P에서의 접선의 기울기가 -1 일 때의 점 P와 직선 $x+y-2=0$ 사이의 거리와 같다.

점 P의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 포물선 $y^2=-4x=4 \cdot (-1)x$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$y_1 y = -2(x+x_1)$$

$$\therefore y = -\frac{2}{y_1}x - \frac{2x_1}{y_1}$$

직선의 기울기가 -1 이므로

$$-\frac{2}{y_1} = -1 \quad \therefore y_1 = 2$$

이때 $y_1^2 = -4x_1$ 이므로

$$x_1 = -\frac{y_1^2}{4} = -1$$

따라서 접점의 좌표가 $(-1, 2)$ 이므로 점 $(-1, 2)$ 와 직선 $x+y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1+2-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

즉 구하는 최솟값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

다른 풀이 점 P의 좌표를 $(-\frac{a^2}{4}, a)$ 로 놓으면 점 P와 직선 $x+y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left| -\frac{a^2}{4} + a - 2 \right|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| -\frac{1}{4}(a-2)^2 - 1 \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{4}(a-2)^2 + 1 \right\}$$

따라서 $a=2$ 일 때 구하는 거리의 최솟값은 $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

11 **전략** 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 $y_1 y = 2p(x+x_1)$ 임을 이용한다.

풀이 포물선 $y^2=8x=4 \cdot 2x$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$y_1 y = 4(x+x_1)$$

$$\therefore y = \frac{4}{y_1}x + \frac{4x_1}{y_1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2x^2-3x+1=0 \text{에서} \quad (2x-1)(x-1)=0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x=1$$

이때 $m_1 = \frac{1}{2}$, $m_2 = 1$ 이라 하면 직선 l_1 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$\frac{4}{y_1} = \frac{1}{2} \quad \therefore y_1 = 8$$

$$\text{이때 } y_1^2 = 8x_1 \text{이므로} \quad x_1 = \frac{y_1^2}{8} = 8$$

따라서 직선 l_1 의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x + 4$$

또 직선 l_2 의 기울기가 1이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$\frac{4}{y_1} = 1 \quad \therefore y_1 = 4$$

$$\text{이때 } y_1^2 = 8x_1 \text{이므로} \quad x_1 = \frac{y_1^2}{8} = 2$$

따라서 직선 l_2 의 방정식은

$$y = x + 2$$

두 직선 l_1, l_2 의 교점의 x 좌표는 $\frac{1}{2}x+4=x+2$ 에서

$$\frac{1}{2}x = 2 \quad \therefore x = 4$$

답 $\textcircled{4}$

12 **전략** 직선 $x-y=5$ 와 평행한 타원의 접선의 접점을 구한다.

풀이 직선 $x-y=5$, 즉 $y=x-5$ 의 기울기는 1이므로 최댓값 또는 최솟값은 타원 $2x^2+y^2=6$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 접점과 직선 $x-y=5$ 사이의 거리와 같다.

타원 $2x^2+y^2=6$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$2x_1 x + y_1 y = 6$$

$$\therefore y = -\frac{2x_1}{y_1}x + \frac{6}{y_1}$$

접선의 기울기가 1이므로

$$-\frac{2x_1}{y_1} = 1 \quad \therefore x_1 = -\frac{y_1}{2}$$

이때 $2x_1^2+y_1^2=6$ 이므로

$$\frac{3}{2}y_1^2 = 6 \quad \therefore y_1 = \pm 2$$

즉 접점의 좌표는 $(-1, 2), (1, -2)$

따라서 오른쪽 그림과 같이 최댓값은 직선 $x-y=5$ 와 점 $(-1, 2)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-1-2-5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4\sqrt{2}$$

최솟값은 직선 $x-y=5$

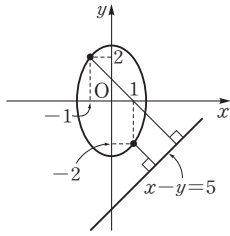
와 점 $(1, -2)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|1+2-5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$$4\sqrt{2}+\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

답 5√2



13 해결과정 • 초점의 좌표가 $(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$

이므로 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)이라 하면

$$a^2 - b^2 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \quad \therefore y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x + \frac{b^2}{y_1}$$

이 직선이 직선 $y = -x + 4$ 와 일치해야 하므로

$$-\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} = -1, \quad \frac{b^2}{y_1} = 4$$

$$\therefore y_1 = \frac{b^2}{4}, \quad x_1 = \frac{a^2}{b^2} y_1 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

이때 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ 이므로 $\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{16} = 1$

$$\therefore a^2 + b^2 = 16 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \rightarrow 40\% \text{ 배점}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a^2 = 9, \quad b^2 = 7 \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

답구하기 • 따라서 단축의 길이는

$$2b = 2\sqrt{7} \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

답 2√7

14 문제이해 • 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$y_1 y = 2(x + x_1)$$

$$\therefore y = \frac{2}{y_1} x + \frac{2x_1}{y_1} \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

해결과정 • 이 직선이 점 $(a, -a)$ 를 지나므로

$$-a = \frac{2}{y_1} a + \frac{2x_1}{y_1}, \quad 2x_1 = -ay_1 - 2a$$

$$\therefore x_1 = -\frac{a}{2} y_1 - a$$

이때 $y_1^2 = 4x_1$ 이므로

$$y_1^2 + 2ay_1 + 4a = 0 \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

이 이차방정식의 두 실근을 α, β 라 하면 접선의 기울

기는 $\frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\beta}$

이고 두 접선이 수직이므로 $\frac{4}{\alpha\beta} = -1$

$$\therefore \alpha\beta = -4 \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

답구하기 • 한편 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$4a = -4 \quad \therefore a = -1 \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

답 -1

15 전략 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용

하여 $\frac{dy}{dx}$ 를 n 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $x = t + t^2 + t^3 + \dots + t^n$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = 1 + 2t + 3t^2 + \dots + nt^{n-1}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 1} \frac{dx}{dt} = \lim_{t \rightarrow 1} (1 + 2t + 3t^2 + \dots + nt^{n-1})$$

$$= 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

$y = t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{3}t^3 + \dots + \frac{2n-1}{n}t^n$ 에서

$$\frac{dy}{dt} = 1 + 3t + 5t^2 + \dots + (2n-1)t^{n-1}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 1} \frac{dy}{dt}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \{1 + 3t + 5t^2 + \dots + (2n-1)t^{n-1}\}$$

$$= 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$$

$$= \sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$= n^2$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 1} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= \frac{2n}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{t \rightarrow 1} \frac{dy}{dx} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2$$

답 ④

16 **전략** 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.

풀이 두 직각삼각형 AQP, BQP에서 $\overline{AQ}=x$, $\overline{BQ}=y$ 라 하면

$$\overline{AP} = \sqrt{x^2+9}, \quad \overline{BP} = \sqrt{y^2+9}$$

$$\overline{AP} + \overline{BP} = 20 \text{에서}$$

$$\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+9} = 20 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 각 항을 시간 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{2y}{2\sqrt{y^2+9}} \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{y}{\sqrt{y^2+9}} \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

..... ②

$x=4$ 를 ②에 대입하면

$$\sqrt{4^2+9} + \sqrt{y^2+9} = 20, \quad \sqrt{y^2+9} = 15$$

$$y^2 = 216 \quad \therefore y = 6\sqrt{6} \quad (\because y > 0)$$

한편 점 A가 점 Q를 출발하여 직선 l 을 따라 초속 1m의 속력으로 움직이므로 $\frac{dx}{dt} = 1$

$x=4, y=6\sqrt{6}$, $\frac{dx}{dt} = 1$ 을 ②에 대입하면

$$\frac{4}{5} + \frac{6\sqrt{6}}{15} \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

즉 선분 BQ의 길이의 시간에 대한 변화율은 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ 이다. 답 ①

17 **전략** 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$ 임을 이용한다.

풀이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(4, k)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4x}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 1$$

이 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$\frac{4x}{a^2} = 1 \quad \therefore x = \frac{a^2}{4}$$

점 P에서의 접선과 x 축과의 교점의 좌표 $\left(\frac{a^2}{4}, 0\right)$ 은 선분 F'F를 2:1로 내분하는 점의 좌표

$$\left(\frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot (-3)}{2+1}, \frac{0}{2+1}\right), \text{ 즉 } (1, 0)$$

과 같으므로

$$\frac{a^2}{4} = 1 \quad \therefore a^2 = 4$$

즉 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점이 $F(3, 0)$,

$F'(-3, 0)$ 이므로

$$b^2 = 3^2 - 4 = 5$$

따라서 점 $P(4, k)$ 가 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 위의 점이므로

$$4 - \frac{k^2}{5} = 1 \quad \therefore k^2 = 15 \quad \text{답 15}$$

18 **전략** 점 P에서의 쌍곡선과 타원의 접선의 방정식을 각각 구한다.

풀이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 위의 점 $P\left(\sqrt{5}, \frac{1}{2}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\sqrt{5}}{4}x - \frac{1}{2}y = 1 \quad \therefore y = \frac{\sqrt{5}}{2}x - 2$$

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P\left(\sqrt{5}, \frac{1}{2}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\sqrt{5}}{a^2}x + \frac{1}{2b^2}y = 1 \quad \therefore y = -\frac{2\sqrt{5}b^2}{a^2}x + 2b^2$$

두 접선이 서로 수직이므로

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{5}b^2}{a^2}\right) = -1$$

$$\therefore a^2 = 5b^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 $P\left(\sqrt{5}, \frac{1}{2}\right)$ 이 타원 위의 점이므로

$$\frac{5}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\frac{5}{5b^2} + \frac{1}{4b^2} = 1 \quad \therefore b^2 = \frac{5}{4}$$

따라서 $p=4, q=5$ 이므로

$$p+q=9 \quad \text{답 9}$$

03 벡터의 연산

유제

본책 81~95쪽

- 028-1 (1) $\vec{FO} = \vec{AB} = \vec{a}$
 (2) $\vec{DO} = \vec{CB} = -\vec{BC} = -\vec{c}$
 (3) $\vec{DE} = \vec{BA} = -\vec{AB} = -\vec{a}$
 (4) $\vec{AF} = \vec{BO} = \vec{b}$

답 풀이 참조

- 028-2 \vec{AC} 와 같은 벡터는 \vec{FD} 이고
 $\vec{FD} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$
 이므로 $|\vec{FD}| = 3\sqrt{2}$

답 $\vec{FD}, 3\sqrt{2}$

- 029-1 (1) $\vec{OF} = \vec{OA} + \vec{AF} = \vec{OA} + \vec{OE}$
 $= \vec{a} + \vec{b}$
 (2) $\vec{BD} = \vec{BO} + \vec{OD} = \vec{OE} - \vec{OA}$
 $= -\vec{a} + \vec{b}$

답 (1) $\vec{a} + \vec{b}$ (2) $-\vec{a} + \vec{b}$

- 029-2 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA}$
 $= \vec{AC} + \vec{CA}$
 $= \vec{AA}$
 $= \vec{0}$ 증명 끝

답 풀이 참조

- 030-1 (1) $\vec{AE} = \vec{AO} + \vec{OE} = \vec{BC} + \vec{BO}$
 $= \vec{b} + (-\vec{a} + \vec{b})$
 $= -\vec{a} + 2\vec{b}$
 (2) $\vec{BF} = \vec{AF} - \vec{AB} = \vec{BO} - \vec{AB}$
 $= (-\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a}$
 $= -2\vec{a} + \vec{b}$

답 (1) $-\vec{a} + 2\vec{b}$ (2) $-2\vec{a} + \vec{b}$

- 031-1 (1) $2(\vec{a} + 3\vec{b}) - 3(2\vec{a} - \vec{x}) = \vec{x}$ 에서
 $2\vec{a} + 6\vec{b} - 6\vec{a} + 3\vec{x} = \vec{x}$
 $2\vec{x} = 4\vec{a} - 6\vec{b}$
 $\therefore \vec{x} = \frac{1}{2}(4\vec{a} - 6\vec{b})$
 $= 2\vec{a} - 3\vec{b}$

- (2) $3(\vec{a} - 3\vec{b} - 2\vec{x}) - 2(\vec{a} - 3\vec{c}) = 7\vec{a} + 3\vec{b}$ 에서
 $3\vec{a} - 9\vec{b} - 6\vec{x} - 2\vec{a} + 6\vec{c} = 7\vec{a} + 3\vec{b}$
 $-6\vec{x} = 6\vec{a} + 12\vec{b} - 6\vec{c}$
 $\therefore \vec{x} = -\frac{1}{6}(6\vec{a} + 12\vec{b} - 6\vec{c})$
 $= -\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$

답 (1) $2\vec{a} - 3\vec{b}$ (2) $-\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$

- 031-2 (1) $\begin{cases} \vec{x} - \vec{y} = -2\vec{a} & \dots \textcircled{1} \\ -\vec{x} + 2\vec{y} = \vec{a} + \vec{b} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$\vec{y} = -\vec{a} + \vec{b}$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\vec{x} - (-\vec{a} + \vec{b}) = -2\vec{a}$$

$$\vec{x} + \vec{a} - \vec{b} = -2\vec{a}$$

$$\therefore \vec{x} = -3\vec{a} + \vec{b}$$

- (2) $\begin{cases} 2\vec{x} + \vec{y} = \vec{a} - 3\vec{b} & \dots \textcircled{1} \\ \vec{x} - 3\vec{y} = 2\vec{a} + \vec{b} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$

$\textcircled{1} \times 3 + \textcircled{2}$ 을 하면

$$7\vec{x} = 5\vec{a} - 8\vec{b}$$

$$\therefore \vec{x} = \frac{5}{7}\vec{a} - \frac{8}{7}\vec{b}$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2\left(\frac{5}{7}\vec{a} - \frac{8}{7}\vec{b}\right) + \vec{y} = \vec{a} - 3\vec{b}$$

$$\frac{10}{7}\vec{a} - \frac{16}{7}\vec{b} + \vec{y} = \vec{a} - 3\vec{b}$$

$$\therefore \vec{y} = -\frac{3}{7}\vec{a} - \frac{5}{7}\vec{b}$$

답 풀이 참조

- 032-1 (1) $(m+2)\vec{a} + (3n-1)\vec{b}$
 $= 4\vec{a} - (m+3)\vec{b}$

에서

$$m+2=4, 3n-1=-(m+3)$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$m=2, n=-\frac{4}{3}$$

- (2) $(m+n-3)\vec{a} + (mn+10)\vec{b} = \vec{0}$ 에서

$$m+n-3=0, mn+10=0$$

$$\therefore m+n=3, mn=-10$$

이를 만족시키는 실수 m, n 은 이차방정식 $x^2 - 3x - 10 = 0$ 의 두 실근이다.

따라서 $(x+2)(x-5)=0$ 에서
 $x=-2$ 또는 $x=5$

$$\therefore \begin{cases} m=-2 \\ n=5 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} m=5 \\ n=-2 \end{cases}$$

답 풀이 참조

다른 풀이 (1) 주어진 식의 우변을 좌변으로 이항하여 정리하면

$$(m-2)\vec{a} + (m+3n+2)\vec{b} = \vec{0}$$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$m-2=0, m+3n+2=0$$

$$\therefore m=2, n=-\frac{4}{3}$$

033-1 두 벡터 \vec{p}, \vec{q} 가 서로 평행하려면

$$\vec{q} = k\vec{p}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.

$\vec{p} = m\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{q} = 8\vec{a} + m\vec{b}$ 이므로

$$\begin{aligned} 8\vec{a} + m\vec{b} &= k(m\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= km\vec{a} + 2k\vec{b} \end{aligned}$$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$8 = km, m = 2k$$

$m = 2k$ 를 $8 = km$ 에 대입하면

$$2k^2 = 8, k^2 = 4$$

$$\therefore k = \pm 2, m = \pm 4 \text{ (복호동순)}$$

답 -4, 4

033-2 두 벡터 $\vec{p} + \vec{q}, \vec{q} - \vec{r}$ 가 서로 평행하려면

$$\vec{q} - \vec{r} = k(\vec{p} + \vec{q}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.

세 벡터 $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \vec{p} + \vec{q} &= (\vec{a} + \vec{b}) + (m\vec{a} - 2\vec{b}) \\ &= (m+1)\vec{a} - \vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{q} - \vec{r} &= (m\vec{a} - 2\vec{b}) - (3\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= (m-3)\vec{a} - 4\vec{b} \end{aligned}$$

이를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} (m-3)\vec{a} - 4\vec{b} &= k\{(m+1)\vec{a} - \vec{b}\} \\ &= k(m+1)\vec{a} - k\vec{b} \end{aligned}$$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$m-3 = k(m+1), -4 = -k$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$k=4, m=-\frac{7}{3}$$

답 $-\frac{7}{3}$

034-1 서로 다른 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$\vec{AC} = k\vec{AB} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.

이때

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{OB} - \vec{OA} \\ &= (\vec{a} + \vec{b}) - (2\vec{a} - \vec{b}) \\ &= -\vec{a} + 2\vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{AC} &= \vec{OC} - \vec{OA} \\ &= (-\vec{a} + m\vec{b}) - (2\vec{a} - \vec{b}) \\ &= -3\vec{a} + (m+1)\vec{b} \end{aligned}$$

이를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} -3\vec{a} + (m+1)\vec{b} &= k(-\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= -k\vec{a} + 2k\vec{b} \end{aligned}$$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-3 = -k, m+1 = 2k$$

$$\therefore k=3, m=5$$

답 5

중단원 연습 문제

◎ 본책 96~99쪽

- | | | |
|-------------------------|---|-------------|
| 01 3 | 02 $-\frac{3}{10}\vec{a} + \vec{b} - \frac{9}{5}\vec{c}$ | 03 2 |
| 04 ③ | 05 D, E | 06 ③ |
| 07 8 | 08 ② | |
| 09 $3\sqrt{2}$ | 10 $-\vec{b} + \sqrt{2}\vec{c}$ | 11 ① |
| 12 $\frac{5}{2}$ | | |
| 13 $m=1, n=0$ | 14 $\frac{\pi}{3}$ | 15 ② |
| 16 ⑤ | | |

01 해결과정 $\cdot \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{AB} - \vec{AD} + \vec{AC}$
 $= \vec{AB} + \vec{DA} + \vec{AC}$
 $= \vec{AB} + \vec{DC}$
 $= \vec{AB} + \vec{AB}$
 $= 2\vec{AB} \quad \rightarrow 60\% \text{ 배점}$

답구하기 \cdot 즉 $|2\vec{AB}| = 6$ 이므로

$$|\vec{AB}| = 3$$

따라서 정사각형의 한 변의 길이는 3이다. $\rightarrow 40\% \text{ 배점}$

답 3

02 **전략** 실수를 계수, 벡터를 문자로 생각하여 주어진 등식을 다항식의 연산과 같은 방법으로 간단히 한다.

풀이 $\frac{1}{2}(\vec{a}+4\vec{x})-\frac{1}{3}(2\vec{b}+\vec{x})=-3\vec{c}+\vec{b}$ 에서

$$\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{x}-\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{x}=-3\vec{c}+\vec{b}$$

$$\frac{5}{3}\vec{x}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{5}{3}\vec{b}-3\vec{c}$$

$$\therefore \vec{x}=-\frac{3}{10}\vec{a}+\vec{b}-\frac{9}{5}\vec{c}$$

답 $-\frac{3}{10}\vec{a}+\vec{b}-\frac{9}{5}\vec{c}$

03 **해결과정** $(4m+2n)\vec{a}+(3m-2n-5)\vec{b}=(3m-n)\vec{a}+(m+3n+6)\vec{b}$

에서

$$4m+2n=3m-n, 3m-2n-5=m+3n+6$$

$$\therefore m+3n=0, 2m-5n-11=0 \quad \rightarrow 50\% \text{ 배점}$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$m=3, n=-1 \quad \rightarrow 40\% \text{ 배점}$$

답구하기 $\therefore m+n=2 \quad \rightarrow 10\% \text{ 배점}$

답 2

다른 풀이 주어진 식의 우변을 좌변으로 이항하여 정리하면

$$(m+3n)\vec{a}+(2m-5n-11)\vec{b}=\vec{0}$$

이므로 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$m+3n=0, 2m-5n-11=0$$

위의 식을 연립하여 풀면

$$m=3, n=-1$$

$$\therefore m+n=2$$

04 **전략** 보기에 주어진 벡터 중 $k(\vec{a}+\vec{b})$ 꼴인 것을 찾는다.

풀이 ㄱ. $2\vec{a}-\vec{c}=2\vec{a}-(2\vec{a}-\vec{b})=\vec{b}$

ㄴ. $-3\vec{a}+\vec{c}=-3\vec{a}+(2\vec{a}-\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}=-(\vec{a}+\vec{b})$

ㄷ. $3\vec{b}+\vec{c}=3\vec{b}+(2\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}=2(\vec{a}+\vec{b})$

ㄹ. $\vec{b}-\vec{c}=\vec{b}-(2\vec{a}-\vec{b})=-2\vec{a}+2\vec{b}=-2(\vec{a}-\vec{b})$

이상에서 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$ 와 서로 평행한 벡터는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

05 **해결과정** $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=\vec{b}-\vec{a}$ 이고

$$\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}=(2\vec{a}-3\vec{b})-\vec{a}=\vec{a}-3\vec{b}$$

$$\vec{AD}=\vec{OD}-\vec{OA}=(4\vec{a}-3\vec{b})-\vec{a}=3\vec{a}-3\vec{b}=3(\vec{a}-\vec{b})$$

$$\vec{AE}=\vec{OE}-\vec{OA}=(5\vec{a}-4\vec{b})-\vec{a}=4\vec{a}-4\vec{b}=4(\vec{a}-\vec{b}) \quad \rightarrow 70\% \text{ 배점}$$

답구하기 따라서 $\vec{AD}=-3\vec{AB}$, $\vec{AE}=-4\vec{AB}$ 이므로 직선 AB 위의 점인 것은 D, E이다. $\rightarrow 30\% \text{ 배점}$

답 D, E

06 **전략** 먼저 주어진 조건을 만족시키는 점 P의 위치를 찾은 후 삼각형 ABC를 그린다.

풀이 $\vec{PB}+\vec{PC}=\vec{0}$ 에서

$$\vec{PB}=-\vec{PC}$$

즉 점 P는 선분 BC의 중점이다.

오른쪽 그림의 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{BC}=\frac{2}{\tan 30^\circ}=2\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{PB}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\sqrt{3}$$

따라서 $\overline{PA}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$ 이므로

$$|\overline{PA}|^2=\overline{PA}^2=7$$

답 ③

07 **전략** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 를 A, B, C, D를 시점과 중점으로 하는 벡터로 나타낸다.

풀이 $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}=\vec{BA}+(\vec{BC}+\vec{CD})=\vec{DE}+\vec{BD}=\vec{BE}$

오른쪽 그림과 같이 $\vec{AD}, \vec{BE}, \vec{CF}$ 의 교점을 O라 하면

$$\begin{aligned} & \vec{a}-\vec{b}+\vec{c} \\ &= \vec{AB}-\vec{BC}+\vec{CD} \\ &= \vec{AB}+\vec{CB}+\vec{CD} \\ &= \vec{AB}+(\vec{OA}+\vec{BO}) \\ &= \vec{AB}+\vec{BA} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FA} \\ &= \overrightarrow{FC} \end{aligned}$$

따라서 $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = |\overrightarrow{BE}| = 4$, $|\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}| = 0$,
 $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = |\overrightarrow{FC}| = 4$ 이므로 구하는 값은
 $4 + 0 + 4 = 8$ 답 8

08 **전략** 주어진 벡터들을 $m\vec{a} + n\vec{b}$ 꼴로 나타낸 후 $mn < 0$ 을 만족시키는 벡터를 찾는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이

$$\begin{aligned} \vec{x}, \vec{y} \text{를 정하면} \\ \vec{a} &= \vec{x} + \vec{y}, \\ \vec{b} &= \vec{x} - \vec{y} \end{aligned}$$

이므로 위의 식을 정리하면

$$\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\vec{y} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\therefore \vec{p} = \vec{x} + 2\vec{y} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\vec{q} = 2\vec{x} - 2\vec{y} = 2\vec{b}$$

$$\vec{r} = -3\vec{x} + \vec{y} = -\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\vec{s} = -4\vec{x} - 2\vec{y} = -3\vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{t} = -2\vec{y} = -\vec{a} + \vec{b}$$

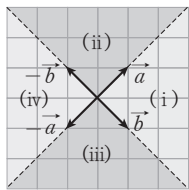
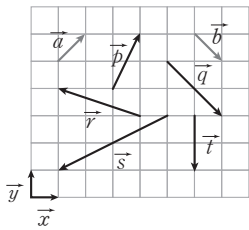
이때 집합 C의 원소는 $m\vec{a} + n\vec{b}$ 꼴로 나타내었을 때 $mn < 0$ 이어야 한다.

따라서 집합 C의 원소인 벡터는 \vec{p}, \vec{t} 이다. 답 ②

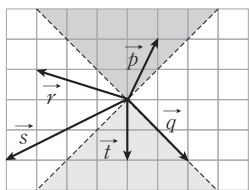
다른 풀이 네 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{a}, -\vec{b}$ 가 [그림 1]과 같으므로 벡터 $m\vec{a} + n\vec{b}$ 의 방향을 다음과 같이 4가지로 나눌 수 있다.

- (i) $m > 0, n > 0$
- (ii) $m > 0, n < 0$
- (iii) $m < 0, n > 0$
- (iv) $m < 0, n < 0$

즉 집합 C의 원소이려면 [그림 1]에서 영역 (ii) 또는 (iii)에 있어야 한다. 따라서 [그림 2]에서 집합 C의 원소인 벡터는 벡터 \vec{p}, \vec{t} 이다.



[그림 1]



[그림 2]

09 **전략** $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 를 이웃하는 두 변으로 하는 정사각형을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 정사각형 AOBD를 그리면
 $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OD} = 2\vec{c}$

이므로

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} &= 2\vec{c} + \vec{c} \\ &= 3\vec{c} \end{aligned}$$

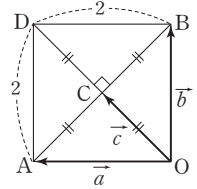
$$\therefore |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = |3\vec{c}|$$

$$= \frac{3}{2}|2\vec{c}| = \frac{3}{2}|\overrightarrow{OD}|$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2^2 + 2^2}$$

$$= 3\sqrt{2}$$

답 $3\sqrt{2}$



10 **해결과정** · 오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 를 이웃하는 두 변으로 하는 정사각형을 그리고 나머지 꼭짓점을 D라 하면

$$|\overrightarrow{OD}| = \sqrt{2}|\overrightarrow{OB}|$$

이때 \overrightarrow{OC} 는 \overrightarrow{OD} 와 방향이 같고 크기가 $|\overrightarrow{OB}|$ 이므로

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{OD}$$

→ 70% 배점

답구하기 · 따라서 $\overrightarrow{OD} = \sqrt{2}\overrightarrow{OC}$ 이므로

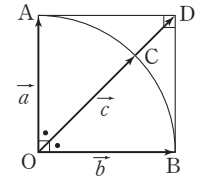
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \sqrt{2}\overrightarrow{OC}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \sqrt{2}\vec{c}$$

$$\therefore \vec{a} = -\vec{b} + \sqrt{2}\vec{c}$$

→ 30% 배점

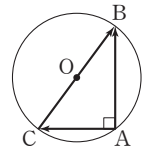
답 $-\vec{b} + \sqrt{2}\vec{c}$



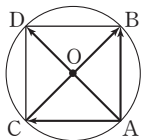
11 **전략** 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 직각삼각형과 정삼각형의 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\angle BAC = 90^\circ$ 이면 \overline{BC} 는 원 O의 지름이므로

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| &= |\overrightarrow{CB}| \\ &= \overline{CB} = 2 \end{aligned}$$



ㄴ. [반례] 원에 내접하는 정사각형의 네 꼭짓점을 각각 A, B, D, C라 하면 $\overline{AD}, \overline{BC}$ 는 원 O의 지름이므로



$$|\overline{AB} + \overline{AC}| = |\overline{AD}|$$

$$= \overline{AD} = 2$$

$$|\overline{AB} - \overline{AC}| = |\overline{CB}|$$

$$= \overline{CB} = 2$$

$$\therefore |\overline{AB} + \overline{AC}| = |\overline{AB} - \overline{AC}|$$

ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$ 가 정삼각형일 때, 선분 BC의 중점을 M이라 하자.

\overline{AB} , \overline{AC} 를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형에 대하여 나머지 꼭짓점을 D라 하면 $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD}$ 이고, $\overline{AD} = 2\overline{AM}$ 이므로

$$|\overline{AB} + \overline{AC}| = 2|\overline{AM}|$$

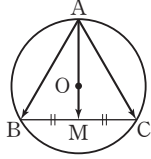
그런데 $\triangle ABC$ 가 정삼각형이므로 원의 중심 O는 $\triangle ABC$ 의 무게중심과 같다.

$$\text{즉 } \overline{AM} = \frac{3}{2}\overline{AO} = \frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$|\overline{AB} + \overline{AC}| = 2\overline{AM}$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.



답 ①

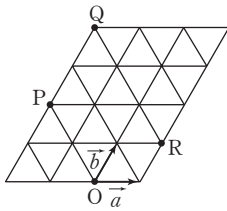
12 **전략** 점 O를 시점으로 하는 두 벡터를 잡아 \overline{OP} , \overline{OQ} , \overline{OR} 를 두 벡터로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 O를 시점으로 하는 두 벡터 \vec{a} , \vec{b} 를 잡으면

$$\overline{OP} = -2\vec{a} + 2\vec{b},$$

$$\overline{OQ} = -2\vec{a} + 4\vec{b},$$

$$\overline{OR} = \vec{a} + \vec{b}$$



위의 식을 $\overline{OQ} = m\overline{OP} + n\overline{OR}$ 에 대입하면

$$-2\vec{a} + 4\vec{b} = m(-2\vec{a} + 2\vec{b}) + n(\vec{a} + \vec{b})$$

$$= (-2m + n)\vec{a} + (2m + n)\vec{b}$$

이때 두 벡터 \vec{a} , \vec{b} 는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않으므로 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-2 = -2m + n, \quad 4 = 2m + n$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$m = \frac{3}{2}, \quad n = 1$$

$$\therefore m + n = \frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

다른 풀이 $\overline{OQ} = \overline{OR} + \overline{RQ}$ ㉠

이때 $\overline{OP} \parallel \overline{RQ}$ 이고 $|\overline{RQ}| = \frac{3}{2}|\overline{OP}|$ 이므로

$$\overline{RQ} = \frac{3}{2}\overline{OP}$$

따라서 이를 ㉠에 대입하면

$$\overline{OQ} = \frac{3}{2}\overline{OP} + \overline{OR}$$

즉 $m = \frac{3}{2}$, $n = 1$ 이므로

$$m + n = \frac{5}{2}$$

13 **문제이해** 서로 다른 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\overline{AB} = k\overline{BC}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재한다. \rightarrow 20% 배점

해결과정 세 벡터 \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} 에 대하여

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (2\vec{a} + \vec{b}) - (m\vec{a} + 2\vec{b})$$

$$= (2-m)\vec{a} - \vec{b}$$

$$\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = (3\vec{a} + n\vec{b}) - (2\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \vec{a} + (n-1)\vec{b}$$

이므로

$$(2-m)\vec{a} - \vec{b} = k(\vec{a} + (n-1)\vec{b})$$

$$= k\vec{a} + k(n-1)\vec{b}$$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$2-m = k \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$-1 = k(n-1) \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$(m-2)(n-1) = 1 \quad \rightarrow 40\% \text{ 배점}$$

답구하기 $m-2$, $n-1$ 은 정수이므로

$$\begin{cases} m-2 = -1 \\ n-1 = -1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} m-2 = 1 \\ n-1 = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m = 1 \\ n = 0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} m = 3 \\ n = 2 \end{cases}$$

그런데 $\overline{OA} \neq \overline{OC}$ 이므로

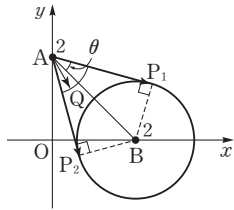
$$m = 1, n = 0 \quad \rightarrow 40\% \text{ 배점}$$

답 $m = 1, n = 0$

14 **문제이해** $|\overline{AQ}| = \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{AP}|} = 1$ 이므로 벡터 \overline{AQ}

는 벡터 \overline{AP} 와 방향이 같은 단위벡터이다. \rightarrow 30% 배점

해결과정 · 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 원 $(x-2)^2 + y^2 = 2$ 에 그은 두 접선의 접점을 각각 P_1, P_2 라 하고, 원의 중심을 B, $\angle BAP_1 = \theta$ 라 하면



$$\sin \theta = \frac{BP_1}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

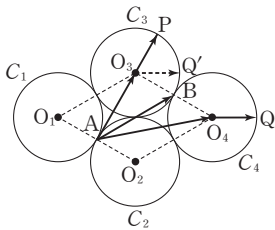
$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6} \quad \rightarrow 40\% \text{ 배점}$$

답구하기 · 따라서 $\angle P_1AP_2 = 2\theta = \frac{\pi}{3}$ 이므로 점 Q가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴의 호이므로 그 길이는 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

$\rightarrow 30\% \text{ 배점}$
 $\text{답 } \frac{\pi}{3}$

15 **전략** 주어진 네 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 사각형이 마름모임을 이용한다.

풀이 다음 그림과 같이 네 원 C_1, C_2, C_3, C_4 의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3, O_4 라 하고, 두 원 C_3, C_4 의 접점을 B라 하자. 사각형 $O_1O_2O_4O_3$ 은 한 변의 길이가 2인 마름모이고, 두 점 A, B는 각각 변 O_1O_2 , 변 O_3O_4 의 중점이다.



$$\therefore \overrightarrow{AO_3} + \overrightarrow{AO_4} = 2\overrightarrow{AB}$$

$$= 2\overrightarrow{O_1O_3}$$

한편 벡터 $\overrightarrow{O_4Q}$ 를 시점이 O_3 이 되도록 평행이동하였을 때의 종점을 Q' 이라 하면

$$\overrightarrow{O_3P} + \overrightarrow{O_4Q} = \overrightarrow{O_3P} + \overrightarrow{O_3Q'}$$

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$$

$$= (\overrightarrow{AO_3} + \overrightarrow{O_3P}) + (\overrightarrow{AO_4} + \overrightarrow{O_4Q})$$

$$= (\overrightarrow{AO_3} + \overrightarrow{AO_4}) + (\overrightarrow{O_3P} + \overrightarrow{O_4Q})$$

$$= 2\overrightarrow{O_1O_3} + \overrightarrow{O_3P} + \overrightarrow{O_3Q'}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}|$$

$$\leq 2|\overrightarrow{O_1O_3}| + |\overrightarrow{O_3P}| + |\overrightarrow{O_3Q'}|$$

$$= 2 \cdot 2 + 1 + 1$$

$$= 6$$

따라서 구하는 최댓값은 6이다.

답 ②

Remark

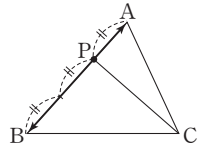
두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여
 $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

16 **전략** 벡터의 덧셈, 뺄셈을 이용하여 \overrightarrow{PB} 를 \overrightarrow{AP} 에 대하여 나타낸다.

풀이 ㄱ. $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AC}$ 에서
 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}$
 $\therefore \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AP}$

ㄴ. ㄱ에서 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AP}$ 이므로
 $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{PA}$
 $= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AP}$

ㄷ. ㄴ에서 $\overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{AP}$, 즉
 $\overrightarrow{PB} = -2\overrightarrow{PA}$ 이므로 오른쪽 그림과 같이 점 P는 변 AB를 1 : 2로 내분하는 점이다.



$$\therefore \triangle ACP : \triangle BCP$$

$$= PA : PB$$

$$= 1 : 2$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

04 평면벡터의 성분

유제

본책 106~116쪽

035-1 두 점 P, Q의 위치벡터를 각각 \vec{p}, \vec{q} 라 하면

$$\vec{p} = \frac{3\vec{b} + 2\vec{a}}{3+2} = \frac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{5},$$

$$\vec{q} = \frac{\vec{b} - 2\vec{a}}{1-2} = 2\vec{a} - \vec{b}$$

따라서 선분 PQ의 중점의 위치벡터를 \vec{m} 이라 하면

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{\vec{p} + \vec{q}}{2} = \frac{\frac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{5} + 2\vec{a} - \vec{b}}{2} \\ &= \frac{2\vec{a} + 3\vec{b} + 10\vec{a} - 5\vec{b}}{10} \\ &= \frac{6\vec{a} - \vec{b}}{5} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{6\vec{a} - \vec{b}}{5}$$

Remark

$\vec{m} = \frac{6\vec{a} - \vec{b}}{5} = \frac{\vec{b} - 6\vec{a}}{1-6}$ 이므로 선분 PQ의 중점은 선분 AB를 1 : 6으로 외분하는 점과 같다.

035-2 \vec{AM} 이 $\triangle ABC$ 의 중선이므로 점 M은 선분 BC의 중점이다. 즉

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

이므로 $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{CG} &= \vec{AG} - \vec{AC} \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} \end{aligned}$$

따라서 $m = \frac{1}{3}, n = -\frac{2}{3}$ 이므로

$$m+n = -\frac{1}{3} \quad \text{답 } -\frac{1}{3}$$

다른 풀이 $\vec{CA} = -\vec{b}, \vec{CM} = \frac{1}{2}\vec{CB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$

이때 점 G는 \vec{AM} 을 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned} \vec{CG} &= \frac{2\vec{CM} + \vec{CA}}{2+1} = \frac{1}{3}\vec{CA} + \frac{2}{3}\vec{CM} \\ &= -\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} \end{aligned}$$

따라서 $m = \frac{1}{3}, n = -\frac{2}{3}$ 이므로

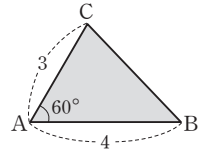
$$m+n = -\frac{1}{3}$$

036-1 조건을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB이다.

따라서 구하는 도형의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(2-3)^2 + (3-2)^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned} \quad \text{답 } \sqrt{2}$$

036-2 조건을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 내부와 그 둘레이다.



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC} \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned} \quad \text{답 } 3\sqrt{3}$$

037-1 (1) $3(-2\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a}$

$$\begin{aligned} &= -6\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{a} \\ &= -7\vec{a} + 3\vec{b} \\ &= -7(2, 3) + 3(3, -2) \\ &= (-14+9, -21-6) \\ &= (-5, -27) \end{aligned}$$

(2) $5\vec{a} - 2(\vec{a} + 3\vec{b}) = 5\vec{a} - 2\vec{a} - 6\vec{b} = 3\vec{a} - 6\vec{b} = 3(2, 3) - 6(3, -2) = (6-18, 9+12) = (-12, 21)$

답 (1) (-5, -27) (2) (-12, 21)

037-2 (1) $\vec{p} = k\vec{a} + h\vec{b}$ (k, h 는 실수)라 하면

$$\begin{aligned} (3, 4) &= k(1, -2) + h(-1, 0) \\ &= (k-h, -2k) \end{aligned}$$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$3 = k-h, 4 = -2k$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$\begin{aligned} k &= -2, h = -5 \\ \therefore \vec{p} &= -2\vec{a} - 5\vec{b} \end{aligned}$$

(2) $\vec{q} = k\vec{a} + h\vec{b}$ (k, h 는 실수)라 하면

$$\begin{aligned} (0, 1) &= k(1, -2) + h(-1, 0) \\ &= (k-h, -2k) \end{aligned}$$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$0 = k - h, 1 = -2k$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$k = -\frac{1}{2}, h = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \vec{q} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\text{답 (1) } -2\vec{a} - 5\vec{b} \quad (2) -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

037-3 $\vec{a} + \vec{b} = (2, 1) + (-3, 2) = (-1, 3)$

$$\begin{aligned} k\vec{a} + (1-k)\vec{b} &= k(2, 1) + (1-k)(-3, 2) \\ &= (5k-3, 2-k) \end{aligned}$$

두 벡터 $\vec{a} + \vec{b}$ 와 $k\vec{a} + (1-k)\vec{b}$ 가 서로 평행하면

$$k\vec{a} + (1-k)\vec{b} = m(\vec{a} + \vec{b})$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 m 이 존재하므로

$$(5k-3, 2-k) = m(-1, 3) = (-m, 3m)$$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$5k-3 = -m, 2-k = 3m$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$m = \frac{1}{2}, k = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

038-1 점 B의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\vec{AB} = (x+1, y-4)$$

$\vec{p} = \vec{AB}$ 이므로

$$(2, -3) = (x+1, y-4)$$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$2 = x+1, -3 = y-4$$

$$\therefore x = 1, y = 1$$

따라서 점 B의 좌표는 $(1, 1)$ 이다. **답** B(1, 1)

039-1 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\vec{AP} = (x+2, y-1), \vec{BP} = (x-4, y+3)$$

(1) $|\vec{AP}| = |\vec{BP}|$ 이므로

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$3x - 2y - 5 = 0$$

(2) $|\vec{AP}| = 2|\vec{BP}|$ 이므로

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = 2\sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$3x^2 + 3y^2 - 36x + 26y + 95 = 0$$

답 풀이 참조

Remark

(1)에서 점 P의 자취는 선분 AB의 수직이등분선이고, (2)에서 점 P의 자취는 선분 AB를 2:1로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원(아폴로니오스의 원)이다.

04 평면벡터의 성질

중단원 연습 문제

◎ 본책 117~119쪽

- | | | |
|--|---|-----------------------------------|
| 01 $-\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}$ | 02 ③ | 03 $\frac{2}{3}$ |
| 04 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ | 05 $\frac{1}{5}$ | 06 ③ 07 $\sqrt{29}$ |
| 08 ② | 09 $\vec{AB} = (5, -\sqrt{3}), \vec{AB} = 2\sqrt{7}$ | |
| 10 P(1, 3) | 11 33 | 12 ⑤ 13 ③ |

01 **해결과정** · 점 M이 \vec{BC} 의 중점이므로

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

이때 점 G가 $\triangle ABC$ 의 무게중심이므로 점 G는 \vec{AM} 을 2:1로 내분한다.

$$\therefore \vec{GM} = \frac{1}{3}\vec{AM} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} \rightarrow 50\% \text{ 배점}$$

답구하기 · $\therefore \vec{MG} = -\vec{GM}$

$$= -\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

$$\text{답 } -\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}$$

02 **전략** 벡터 \vec{a} 와 방향이 같은 벡터는 양수 k 에 대하여 $k\vec{a}$ 로 놓을 수 있다.

풀이 $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 2(1, -1) - (2, 4) + (3, 3)$
 $= (3, -3)$

이므로 $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ 와 방향이 같은 벡터 \vec{p} 를

$$\begin{aligned} \vec{p} &= k(2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \\ &= k(3, -3) \\ &= (3k, -3k) \quad (k \text{는 양수}) \end{aligned}$$

로 놓을 수 있다. 이때 $|\vec{p}| = 2$ 이므로

$$\sqrt{(3k)^2 + (-3k)^2} = 2, \quad 3\sqrt{2}k = 2$$

$$\therefore k = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

따라서 $\vec{p} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 이므로

$$x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$$

$$\therefore x - y = 2\sqrt{2} \quad \text{답 ③}$$

03 **전략** 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 서로 평행하면 $\vec{a} = k\vec{b}$ 를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재함을 이용한다.

풀이 $\vec{a} - \vec{b} = (-1, 3) - (-2, -3) = (1, 6)$

$$\begin{aligned} \vec{a} + m\vec{c} &= (-1, 3) + m\left(3, \frac{9}{2}\right) \\ &= \left(-1 + 3m, 3 + \frac{9}{2}m\right) \end{aligned}$$

이때 두 벡터 $\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + m\vec{c}$ 가 서로 평행하면

$$\vec{a} + m\vec{c} = k(\vec{a} - \vec{b})$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재하므로

$$\left(-1 + 3m, 3 + \frac{9}{2}m\right) = k(1, 6) = (k, 6k)$$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-1 + 3m = k, 3 + \frac{9}{2}m = 6k$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$m = \frac{2}{3}, k = 1 \quad \text{답 } \frac{2}{3}$$

04 **전략** 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하고, 주어진 조건을 이용하여 x, y 사이의 관계식을 구한다.

풀이 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\vec{AP} = (x + 2, y), \vec{BP} = (x - 2, y)$$

$$|\vec{AP}| + |\vec{BP}| = 6 \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{(x + 2)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = 6$$

$$\sqrt{(x + 2)^2 + y^2} = 6 - \sqrt{(x - 2)^2 + y^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$3\sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = -2x + 9$$

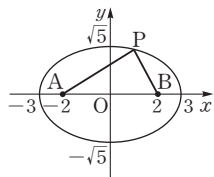
다시 양변을 제곱하여 정리하면 $5x^2 + 9y^2 = 45$

$$\therefore \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \quad \text{답 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

다른 풀이 $|\vec{AP}| + |\vec{BP}| = 6$ 에서 $\vec{AP} + \vec{BP} = 6$ 이므로 점 P는 두 점 A, B에서의 거리의 합이 6인 점이다.

따라서 점 P의 자취는 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B를 초점으로 하고 장축의 길이가 6인 타원이므로

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$



05 **해결과정** · 평행사변형 ABCD에서

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} \quad \dots \text{㉠}$$

변 BC의 중점이 M이므로

$$\vec{AM} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2}$$

$$\therefore \vec{AB} = 2\vec{AM} - \vec{AC} \quad \dots \text{㉡}$$

변 CD를 2 : 1로 내분하는 점이 N이므로

$$\vec{AN} = \frac{2\vec{AD} + \vec{AC}}{3}$$

$$\therefore \vec{AD} = \frac{3}{2}\vec{AN} - \frac{1}{2}\vec{AC} \quad \dots \text{㉢}$$

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$$\vec{AC} = 2\vec{AM} - \vec{AC} + \frac{3}{2}\vec{AN} - \frac{1}{2}\vec{AC}$$

$$\frac{5}{2}\vec{AC} = 2\vec{AM} + \frac{3}{2}\vec{AN}$$

$$\therefore \vec{AC} = \frac{4}{5}\vec{AM} + \frac{3}{5}\vec{AN} \quad \rightarrow 80\% \text{ 배점}$$

답구하기 · 따라서 $x = \frac{4}{5}, y = \frac{3}{5}$ 이므로

$$x - y = \frac{1}{5} \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

$$\text{답 } \frac{1}{5}$$

06 **전략** 세 점 O, A, B에 대하여

$\vec{OP} = m\vec{OA} + n\vec{OB}$ ($0 \leq m + n \leq 1, m \geq 0, n \geq 0$) 를 만족시키는 점 P의 자취는 삼각형 OAB의 내부와 그 둘레임을 이용한다.

풀이 $\vec{OP} = m(2\vec{OA}) + n(3\vec{OB})$

이므로 두 벡터 $2\vec{OA}, 3\vec{OB}$ 의 중점을 각각 A', B'이라 하면 조건을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 $\triangle OA'B'$ 의 내부와 그 둘레이다.

이때

$$\vec{OA'} = 2\vec{OA} = 2(2, 1)$$

$$= (4, 2)$$

$$\vec{OB'} = 3\vec{OB} = 3(1, 2)$$

$$= (3, 6)$$

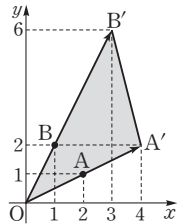
따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\triangle OA'B'$$

$$= 4 \times 6 - \frac{1}{2}(4 \times 2 + 3 \times 6 + 1 \times 4)$$

$$= 9$$

$$\text{답 ③}$$



07 **해결과정** $\vec{a} = \vec{b}$ 에서
 $(x+3, 2y-1) = (1-y, -10-3x)$
 벡터가 서로 같을 조건에 의하여
 $x+3=1-y, 2y-1=-10-3x$
 $\therefore x+y=-2, 3x+2y=-9 \quad \rightarrow 50\% \text{ 배점}$
 위의 두 식을 연립하여 풀면
 $x=-5, y=3 \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$
답구하기 \therefore 따라서 $\vec{a} = (-2, 5)$ 이므로
 $|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2}$
 $= \sqrt{29} \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$
답 $\sqrt{29}$

08 **전략** 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 서로 평행하면 $\vec{a} = m\vec{b}$ 를 만족시키는 0이 아닌 실수 m 이 존재함을 이용한다.
풀이 $\vec{AB} = (4, -1) - (3, 2) = (1, -3)$
 두 벡터 \vec{AB} 와 \vec{p} 가 서로 평행하면
 $\vec{p} = m\vec{AB}$
 를 만족시키는 0이 아닌 실수 m 이 존재하므로
 $(4+2k, -1+5k) = m(1, -3) = (m, -3m)$
 벡터가 서로 같을 조건에 의하여
 $4+2k=m, -1+5k=-3m$
 위의 두 식을 연립하여 풀면
 $k=-1, m=2 \quad \text{답 } ②$

09 **전략** 두 점 A, B의 좌표를 구한다.
풀이 16개의 정삼각형의 한 변의 길이가 2이므로
 $A(2, 2\sqrt{3}), B(7, \sqrt{3})$
 $\therefore \vec{AB} = (7, \sqrt{3}) - (2, 2\sqrt{3}) = (5, -\sqrt{3})$
 $|\vec{AB}| = \sqrt{5^2 + (-\sqrt{3})^2}$
 $= 2\sqrt{7}$
답 $\vec{AB} = (5, -\sqrt{3}), |\vec{AB}| = 2\sqrt{7}$

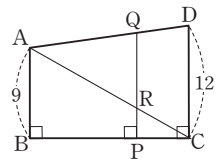
10 **전략** 구하는 점의 좌표를 (x, y) 라 하고 각각의 벡터를 성분으로 나타낸다.
풀이 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
 $\vec{PA} = (-2-x, 6-y), \vec{PB} = (1-x, -2-y),$
 $\vec{PC} = (4-x, 5-y)$
 $\therefore \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}$
 $= (-2-x, 6-y) + (1-x, -2-y)$
 $+ (4-x, 5-y)$
 $= (3-3x, 9-3y)$

이때 $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$ 이므로
 $(3-3x, 9-3y) = (0, 0)$
 벡터가 서로 같을 조건에 의하여
 $3-3x=0, 9-3y=0$
 $\therefore x=1, y=3$
 따라서 점 P의 좌표는 $(1, 3)$ 이다. **답** P(1, 3)

11 **전략** 선분 AD의 내분점의 위치벡터를 이용한다.
풀이 선분 AD를 2 : 1로 내분하는 점을 Q라 하면
 $\vec{PQ} = \frac{\vec{PA} + 2\vec{PD}}{3}$
 $\therefore |\vec{PA} + 2\vec{PD}| = 3|\vec{PQ}|$

따라서 선분 PQ의 길이가 최소일 때 $|\vec{PA} + 2\vec{PD}|$ 가 최소이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P가 점 Q에서 선분 BC에 내린 수선의 발일 때 \vec{PQ} 의 길이가 최소이고, 이때 \vec{QP} 와 \vec{AC} 의 교점을 R라 하자.
 $\vec{AQ} : \vec{AD} = 2 : 3$ 이므로



$\vec{QR} = 12 \cdot \frac{2}{3} = 8$
 $\vec{PC} : \vec{BC} = 1 : 3$ 이므로
 $\vec{RP} = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3$
 $\therefore \vec{PQ} = \vec{QR} + \vec{RP} = 11$
 따라서 $|\vec{PQ}| \geq 11$ 이므로 $|\vec{PA} + 2\vec{PD}|$ 의 최솟값은
 $3 \times 11 = 33$ **답** 33

12 **전략** 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 \vec{a}, \vec{b} 라 할 때, 선분 AB를 $m : n$ ($m > 0, n > 0$)으로 내분하는 점의 위치벡터는 $\frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$ 임을 이용한다.

풀이 $5\vec{AP} + 3\vec{BP} + 4\vec{CP} = \vec{0}$ 에서
 $5\vec{AP} = -3\vec{BP} - 4\vec{CP} = 3\vec{PB} + 4\vec{PC}$
 $\therefore \frac{5}{7}\vec{AP} = \frac{3\vec{PB} + 4\vec{PC}}{3+4}$
 이때 $\frac{3\vec{PB} + 4\vec{PC}}{3+4} = \vec{PD}$ 라 하면 점 D는 선분 BC를 4 : 3으로 내분하는 점이다.
 또 $\frac{5}{7}\vec{AP} = \vec{PD}$ 에서 $5\vec{AP} = 7\vec{PD}$ 이므로
 $|\vec{AP}| : |\vec{PD}| = \vec{AP} : \vec{PD} = 7 : 5$
 즉 점 P는 선분 AD를 7 : 5로 내분하는 점이다.

04 평면벡터의 성질

05 평면벡터의 내적

유제

본책 123~147쪽

따라서 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$ 에서

$$\overline{BD}=4m, \overline{DC}=3m, \\ \overline{AP}=7n, \overline{PD}=5n$$

이라 하면

$$\triangle PAB = \frac{7}{12} \times \triangle ABD \\ = \frac{7}{12} \times \frac{4}{7} \times \triangle ABC = \frac{1}{3} \triangle ABC$$

$$\triangle PBC = \frac{5}{12} \triangle ABC$$

$$\triangle PCA = \frac{7}{12} \times \triangle ADC = \frac{7}{12} \times \frac{3}{7} \times \triangle ABC \\ = \frac{1}{4} \triangle ABC$$

$$\therefore \triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA \\ = \frac{1}{3} \triangle ABC : \frac{5}{12} \triangle ABC : \frac{1}{4} \triangle ABC \\ = 4 : 5 : 3 \quad \text{답 ⑤}$$

13 **전략** $\overline{AB} = \frac{m\overline{AO} + n\overline{AP}}{m+n}$ ($m > 0, n > 0$)일 때, 점 B는 선분 PO를 $m : n$ 으로 내분하는 점임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB} = \frac{1}{4}\overline{AO} + \frac{3}{4}\overline{AP} = \frac{3\overline{AP} + \overline{AO}}{4}$ 이므로

점 B는 선분 OP를 3 : 1로 내분하는 점이다.

오른쪽 그림과 같은 원뿔의 전개도에서 L은 선분 AA'이므로 선분 OA와 선분 OA'을 3 : 1로 내분하는 점을 각각 X, X'이라 하면 점 B의 자취는 선분 XX'이다.

부채꼴 OAA'의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$\widehat{AA'} = 24\theta = 2\pi \times 8 \quad \therefore \theta = \frac{2}{3}\pi$$

이때 $\triangle OAA'$ 은 이등변삼각형이므로

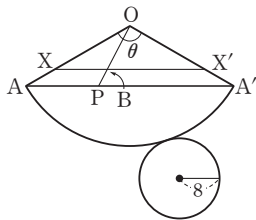
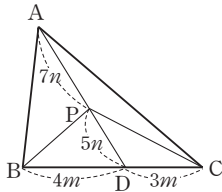
$$\angle OAA' = \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{2}{3}\pi \right) = \frac{\pi}{6}$$

따라서 점 O에서 $\overline{AA'}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AA'} = 2\overline{AH} = 2 \cdot 24 \cos \frac{\pi}{6} = 2 \cdot 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{XX'} = \frac{3}{4} \overline{AA'} = 18\sqrt{3}$$

따라서 구하는 자취의 길이는 $18\sqrt{3}$ 이다. **답 ③**



040-1 $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, $\overline{DE} + \overline{EF} = \overline{DF}$ 이고

$$|\overline{AC}| = |\overline{DF}| = 2\overline{AB} \cos 30^\circ = \sqrt{3}$$

또 \overline{AC} 와 \overline{DF} 는 방향이 반대이므로 두 벡터가 이루는 각의 크기는 π 이다.

$$\therefore (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot (\overline{DE} + \overline{EF}) \\ = \overline{AC} \cdot \overline{DF} \\ = |\overline{AC}| |\overline{DF}| \cos \pi \\ = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times (-1) = -3$$

답 -3

041-1 $\vec{a} + \vec{b} = (-1, 3) + (2, 1) = (1, 4)$ 이므로

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (-1, 3) \cdot (1, 4) \\ = (-1) \times 1 + 3 \times 4 = 11$$

답 11

041-2 점 P의 좌표를 $(m, 2m^2)$ 이라 하면

$$\overline{AP} = (m, 2m^2) - (-3, 2) \\ = (m+3, 2m^2-2) \\ \overline{AB} = (1, 3) - (-3, 2) \\ = (4, 1)$$

이므로

$$\overline{AP} \cdot \overline{AB} = (m+3, 2m^2-2) \cdot (4, 1) \\ = 4(m+3) + 2m^2 - 2 \\ = 2m^2 + 4m + 10 \\ = 2(m+1)^2 + 8$$

따라서 $\overline{AP} \cdot \overline{AB}$ 는 $m = -1$, 즉 $P(-1, 2)$ 일 때 최솟값 8을 갖는다.

답 8

042-1 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (6, 8) \cdot (1, x) = 6 + 8x$

즉 $6 + 8x = -50$ 이므로 $x = -7$

따라서 두 벡터가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-50}{\sqrt{6^2 + 8^2} \sqrt{1^2 + (-7)^2}} \\ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = \frac{3}{4}\pi$$

답 $\frac{3}{4}\pi$

043-1 \vec{b} 와 \vec{c} 가 서로 수직이면 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ 이므로

$$(4, 6) \cdot (3, y) = 0, \quad 12 + 6y = 0$$

$$\therefore y = -2$$

\vec{a} 와 \vec{c} 가 서로 평행하면

$$\vec{a} = k\vec{c}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재하므로

$$(x, 4) = k(3, -2) = (3k, -2k)$$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$x = 3k, \quad 4 = -2k$$

$$\therefore k = -2, \quad x = -6$$

$$\text{답 } x = -6, y = -2$$

$$\begin{aligned} \text{044-1 } |\vec{a} - 3\vec{b}|^2 &= (\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} + 3\vec{b}|^2 &= (\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} |\vec{a} - 3\vec{b}|^2 + |\vec{a} + 3\vec{b}|^2 &= 2|\vec{a}|^2 + 18|\vec{b}|^2 \\ &= 2 \times 2^2 + 18 \times 1^2 \\ &= 26 \end{aligned} \quad \text{답 26}$$

$$\begin{aligned} \text{044-2 } |2\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) \\ &= 4\vec{a} \cdot \vec{a} - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} 7^2 &= 4 \times 4^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 5^2 \\ 4\vec{a} \cdot \vec{b} &= 40 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 10 \end{aligned} \quad \text{답 10}$$

045-1 $\vec{AB} = (-1, 2) - (1, -1) = (-2, 3)$,

$\vec{AC} = (3, 4) - (1, -1) = (2, 5)$ 이므로

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} |(-2) \times 5 - 3 \times 2| = 8 \quad \text{답 8}$$

046-1 $4(x+1) = 3(y-4)$ 에서

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{4}$$

이므로 구하는 직선의 방향벡터를 \vec{u} 라 하면

$$\vec{u} = (3, 4)$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{4} \quad \text{답 } \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{4}$$

다른 풀이 $4(x+1) = 3(y-4)$ 에서

$$4x - 3y + 16 = 0$$

이므로 구하는 직선의 법선벡터를 \vec{n} 이라 하면

$$\vec{n} = (4, -3)$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$4(x-1) - 3(y+1) = 0 \quad \therefore 4x - 3y - 7 = 0$$

046-2 주어진 직선의 방향벡터를 \vec{u} 라 하면

$$\vec{u} = (-3, 4)$$

구하는 직선은 주어진 직선에 수직이므로 법선벡터가

\vec{u} 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$-3(x-2) + 4(y+3) = 0$$

$$\therefore 3x - 4y - 18 = 0$$

$$\text{답 } 3x - 4y - 18 = 0$$

047-1 (1) 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} 라 하면

$$\vec{u} = (2, 3), \quad \vec{v} = (5, 1)$$

이므로 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|2 \times 5 + 3 \times 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2} \sqrt{5^2 + 1^2}} \\ &= \frac{13}{\sqrt{13} \sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

(2) 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} 라 하면

$$\vec{u} = (2, \sqrt{3}), \quad \vec{v} = (\sqrt{3}, 5)$$

이므로 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|2 \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times 5|}{\sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 5^2}} \\ &= \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{7} \sqrt{28}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{답 (1) } \frac{\pi}{4} \quad \text{(2) } \frac{\pi}{6}$$

047-2 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} 라 하면

$$\vec{u} = (-k, 1), \quad \vec{v} = (3, k)$$

두 직선이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{|-3k+k|}{\sqrt{(-k)^2+1^2} \sqrt{3^2+k^2}} = \frac{1}{2}$$

$$4k = \sqrt{(k^2+1)(k^2+9)}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $k^4 - 6k^2 + 9 = 0$

$$(k^2 - 3)^2 = 0, \quad k^2 = 3$$

$$\therefore k = \sqrt{3} (\because k > 0) \quad \text{답 } \sqrt{3}$$

048-1 $x-1 = -ky$ 에서 $\frac{x-1}{-k} = y$

주어진 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} 라 하면

$$\vec{u} = (-2, 5), \quad \vec{v} = (-k, 1)$$

두 직선이 서로 수직이므로 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$2k + 5 = 0 \quad \therefore k = -\frac{5}{2} \quad \text{답 } -\frac{5}{2}$$

048-2 주어진 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} 라 하면

$$\vec{u} = (2, k+1), \quad \vec{v} = (k, 4)$$

두 직선이 서로 평행하므로

$$\vec{u} = t\vec{v} (t \text{는 실수})$$

라 하면 $(2, k+1) = t(k, 4)$

$$\therefore 2 = kt, \quad k+1 = 4t$$

위의 식에서 t 를 소거하면 $\frac{2}{k} = \frac{k+1}{4}$ 이므로

$$k(k+1) = 8$$

$$\therefore k^2 + k - 8 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 실수 k 의 값의 곱은 -8 이다. 답 -8

Remark

이차방정식 $k^2 + k - 8 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 1^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 33 > 0$$

이므로 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

049-1 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\vec{AP} = (x-5, y-2), \quad \vec{BP} = (x+1, y-4)$$

$\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$ 에서

$$(x-5, y-2) \cdot (x+1, y-4) = 0$$

$$(x-5)(x+1) + (y-2)(y-4) = 0$$

$$x^2 - 4x - 5 + y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(2, 3)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 원이므로 구하는 도형의

둘레의 길이는

$$2\pi \times \sqrt{10} = 2\sqrt{10}\pi \quad \text{답 } 2\sqrt{10}\pi$$

다른 풀이 $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$ 에서 $\angle APB = 90^\circ$ 이므로 점 P가 나타내는 도형은 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

$\overline{AB} = \sqrt{(-1-5)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{10}$ 이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는 $2\sqrt{10}\pi$ 이다.

049-2 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 $\vec{p} = (x, y)$ 이므로

$$\vec{p} - \vec{a} = (x-3, y-1), \quad \vec{p} - \vec{b} = (x+1, y-5)$$

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0 \text{에서}$$

$$(x-3, y-1) \cdot (x+1, y-5) = 0$$

$$(x-3)(x+1) + (y-1)(y-5) = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 + y^2 - 6y + 5 = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-3)^2 = 8$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1, 3)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ 인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\pi \times (2\sqrt{2})^2 = 8\pi \quad \text{답 } 8\pi$$

중단원 연습 문제

○ 본책 148~151쪽

01 ① 02 4 03 ② 04 ③ 05 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

06 $\frac{\sqrt{7}}{14}$ 07 1 08 ② 09 $\frac{\pi}{3}$ 10 $\frac{1}{3}$

11 ④ 12 ③ 13 $\frac{2\sqrt{5}}{25}$ 14 2π 15 7

16 17

01 전략 벡터의 내적을 성분으로 나타낸다.

풀이 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (x, -3) \cdot (x+4, 4)$

$$= x^2 + 4x - 12$$

$$= (x+2)^2 - 16$$

따라서 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 는 $x = -2$ 일 때 최솟값 -16 을 갖는다.

답 ①

02 **해결과정** · 두 벡터 \vec{BA}, \vec{BC} 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times 3} \\ &= \frac{1}{3} \quad \rightarrow 40\% \text{ 배점} \\ \therefore \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점} \end{aligned}$$

답구하기 · $\therefore \square ABCD = \overline{AB} \times \overline{BC} \sin \theta$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2} \times 3 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= 4 \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점} \end{aligned}$$

답 4

다른 풀이 $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{BC}| = 3$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \sqrt{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{BA}|^2 |\overrightarrow{BC}|^2 - (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(\sqrt{2})^2 \times 3^2 - (\sqrt{2})^2} = 2 \\ \therefore \square ABCD &= 2\triangle ABC = 4 \end{aligned}$$

03 [전략] $\vec{p} \perp \vec{q}$ 이면 $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$ 임을 이용한다.

풀이 두 벡터 \vec{a} 와 $\vec{a} + t\vec{b}$ 가 서로 수직이므로

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{a} + t\vec{b}) &= 0 \\ |\vec{a}|^2 + t(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= 0 \\ 2^2 + 2t &= 0 \quad \therefore t = -2 \end{aligned}$$

답 ②

04 [전략] $|\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{13}$ 의 양변을 제곱한다.

풀이 $|\vec{b}| = 1$ 이고, 두 벡터 \vec{a} , \vec{b} 가 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ \\ &= |\vec{a}| \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \\ |\vec{a} - 3\vec{b}| &= \sqrt{13} \text{의 양변을 제곱하면} \\ |\vec{a} - 3\vec{b}|^2 &= 13, \quad (\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) = 13 \\ \therefore |\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 &= 13 \end{aligned}$$

이때 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} |\vec{a}|$ 이므로

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 - 6 \times \frac{1}{2} |\vec{a}| + 9 &= 13 \\ |\vec{a}|^2 - 3|\vec{a}| - 4 &= 0 \\ \therefore (|\vec{a}| + 1)(|\vec{a}| - 4) &= 0 \end{aligned}$$

그런데 $|\vec{a}| > 0$ 이므로 $|\vec{a}| = 4$ 답 ③

05 [전략] 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 구한다.

풀이 점 G의 좌표는

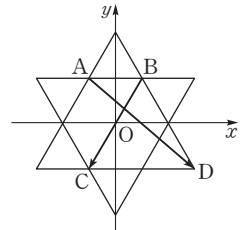
$$G\left(\frac{-1+2+5}{3}, \frac{3+5-2}{3}\right), \text{ 즉 } G(2, 2)$$

두 직선 AG, BG의 방향벡터를 각각 \vec{u} , \vec{v} 라 하면

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{AG} = (3, -1), \quad \vec{v} = \overrightarrow{BG} = (0, -3) \\ \therefore \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \sqrt{(-3)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{10} \end{aligned}$$

답 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

06 문제이해 · 주어진 도형을 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 놓으면 네 점 A, B, C, D의 좌표는



$$\begin{aligned} A &(-1, \sqrt{3}), \\ B &(1, \sqrt{3}), \\ C &(-1, -\sqrt{3}), \\ D &(1, -\sqrt{3}) \end{aligned}$$

→ 30% 배점

해결과정 · $\therefore \overrightarrow{AD} = (3, -\sqrt{3}) - (-1, \sqrt{3})$

$$= (4, -2\sqrt{3})$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= (-1, -\sqrt{3}) - (1, \sqrt{3}) \\ &= (-2, -2\sqrt{3}) \end{aligned}$$

→ 30% 배점

답구하기 · $\therefore \cos \theta$

$$\begin{aligned} &= \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{BC}|} \\ &= \frac{4 \times (-2) - 2\sqrt{3} \times (-2\sqrt{3})}{\sqrt{4^2 + (-2\sqrt{3})^2} \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2}} \\ &= \frac{4}{8\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14} \end{aligned}$$

→ 40% 배점

답 $\frac{\sqrt{7}}{14}$

07 [전략] 두 벡터 \vec{a} , \vec{b} 의 내적을 이용한다.

풀이 $\vec{a} - \vec{b} = (x, 6-x)$ 이므로

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{x^2 + (6-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 12x + 36}$$

이때 $|\vec{a} - \vec{b}| = 5\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{2x^2 - 12x + 36} = 5\sqrt{2}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2 - 6x - 7 = 0$

$$(x+1)(x-7)=0$$

$$\therefore x=-1(\because x<0)$$

따라서 $\vec{a}=(0, 2)$, $\vec{b}=(1, -5)$ 이므로

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{0\times 1+2\times(-5)}{2\sqrt{1^2+(-5)^2}}=-\frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$\therefore \cos^2\theta=\frac{25}{26}$$

즉 $p=26$, $q=25$ 이므로

$$p-q=1 \quad \text{답 1}$$

08 **전략** 두 벡터가 서로 수직이면 두 벡터의 내적이 0임을 이용하여 t 에 대한 항등식을 세운다.

$$\text{풀이 } \vec{a}+t\vec{b}=(x, y)+t(1, -3)=(x+t, y-3t)$$

$$\vec{b}+t\vec{c}=(1, -3)+t(3, 1)=(1+3t, -3+t)$$

두 벡터 $\vec{a}+t\vec{b}$, $\vec{b}+t\vec{c}$ 가 서로 수직이므로

$$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{b}+t\vec{c})=0$$

$$(x+t, y-3t)\cdot(1+3t, -3+t)=0$$

$$(x+t)(1+3t)+(y-3t)(-3+t)=0$$

$$\therefore (3x+y+10)t+(x-3y)=0$$

이 식이 t 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$3x+y+10=0, x-3y=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=-3, y=-1$$

$$\therefore x+y=-4 \quad \text{답 2}$$

09 **전략** 벡터의 내적의 성질을 이용한다.

$$\text{풀이 } \vec{a}+\vec{b}\text{와 } \vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b}\text{가 서로 수직이므로}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\left(\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b}\right)=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{2}{5}\vec{b}\cdot\vec{b}=0$$

$$|\vec{a}|^2+\frac{3}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{2}{5}|\vec{b}|^2=0$$

$$|\vec{b}|=2|\vec{a}| \text{이므로}$$

$$|\vec{a}|^2+\frac{3}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{2}{5}\times 4|\vec{a}|^2=0$$

$$\frac{3}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{5}|\vec{a}|^2$$

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2$$

따라서 두 벡터 \vec{a} , \vec{b} 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|\times 2|\vec{a}|}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{3} \quad \text{답 } \frac{\pi}{3}$$

10 **문제이해** $\cdot |\vec{k}\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{2}|\vec{a}-k\vec{b}|$ 의 양변을 제곱하면

$$k^2|\vec{a}|^2+2k\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2-2k\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2|\vec{b}|^2) \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

해결과정 $\cdot |\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ 이므로

$$k^2+2k\vec{a}\cdot\vec{b}+1=2(1-2k\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2)$$

$$6k\vec{a}\cdot\vec{b}=k^2+1$$

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{k^2+1}{6k}=\frac{k}{6}+\frac{1}{6k} \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

$k>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{k}{6}+\frac{1}{6k}\geq 2\sqrt{\frac{k}{6}\times\frac{1}{6k}}=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

(단, 등호는 $\frac{k}{6}=\frac{1}{6k}$ 일 때 성립)

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}\geq\frac{1}{3} \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

답구하기 \cdot 따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 의 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이다.

$\rightarrow 10\% \text{ 배점}$

$$\text{답 } \frac{1}{3}$$

11 **전략** $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$ 임을 이용하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 를 구한다.

풀이 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ 에서 $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$ 이므로

$$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{c}|, \text{ 즉 } |\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$$

따라서 $|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$ 이므로

$$6^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+10^2=14^2 \quad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=30$$

두 벡터 \vec{a} , \vec{b} 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{30}{6\times 10}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta=60^\circ \quad \text{답 4}$$

12 **전략** $\overline{AB}=\vec{a}$, $\overline{AC}=\vec{b}$ 로 놓고, \overline{BF} , \overline{DE} 를 \vec{a} , \vec{b} 로 나타낸다.

풀이 $\overline{AB}=\vec{a}$, $\overline{AC}=\vec{b}$ 라 하면

$$\overline{AD}=\frac{2}{3}\vec{a}, \overline{AE}=\frac{3}{4}\vec{b}, \overline{AF}=\frac{1}{4}\vec{b}$$

$$\therefore \overline{BF}=\overline{AF}-\overline{AB}=\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{a}$$

$$\overline{DE}=\overline{AE}-\overline{AD}=\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}$$

따라서 $\overline{BF}+\overline{DE}=-\frac{5}{3}\vec{a}+\vec{b}$ 이므로

$$|\overline{BF}+\overline{DE}|^2=\left|-\frac{5}{3}\vec{a}+\vec{b}\right|^2= \frac{25}{9}|\vec{a}|^2-\frac{10}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

이때 $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=3$ 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3} = \frac{9}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore |\overrightarrow{\text{BF}} + \overrightarrow{\text{DE}}|^2 &= \frac{25}{9} \times 3^2 - \frac{10}{3} \times \frac{9}{2} + 3^2 \\ &= 19 \end{aligned} \quad \text{답 ③}$$

13 **전략** 두 직선의 방향벡터와 법선벡터가 이루는 각의 크기를 이용한다.

풀이 직선 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4}$ 의 방향벡터를 \vec{u} 라 하면

$$\vec{u} = (3, 4)$$

이므로 이 직선에 수직인 직선을 l 이라 하면 직선 l 의 법선벡터는 \vec{v} 이다.

또 직선 $\frac{1-x}{2} = y+3$ 을 m 이라 하고, 직선 m 의 방향벡터를 \vec{v} 라 하면

$$\vec{v} = (-2, 1)$$

이때 두 직선 l, m 이 이루는 각의 크기가 θ 이면 두 벡터 \vec{u}, \vec{v} 가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로

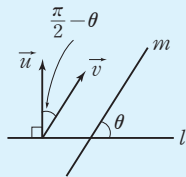
$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ &= \frac{|3 \times (-2) + 4 \times 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2} \sqrt{(-2)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{2}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{25} \end{aligned}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{25}$$

답 $\frac{2\sqrt{5}}{25}$

Remark

직선 l 의 법선벡터가 \vec{u} , 직선 m 의 방향벡터가 \vec{v} 이고 두 직선 l, m 이 이루는 각의 크기가 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 이면 두 벡터 \vec{u}, \vec{v} 가 이루는 각의 크기는 위의 그림과 같이 $\frac{\pi}{2} - \theta$ 이다.



14 **해결과정** $\overrightarrow{\text{PA}} = (-x, 2-y),$

$\overrightarrow{\text{PB}} = (2-x, -2-y)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{PA}} \cdot \overrightarrow{\text{PB}} &= (-x, 2-y) \cdot (2-x, -2-y) \\ &= -x(2-x) + (2-y)(-2-y) \\ &= x^2 - 2x + y^2 - 4 \leq -1 \end{aligned}$$

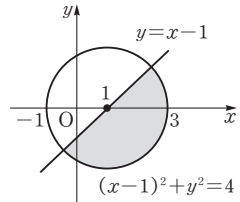
$$\therefore (x-1)^2 + y^2 \leq 4 \quad \dots\dots \text{㉠} \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

$$\overrightarrow{\text{OP}} \cdot \overrightarrow{\text{BO}} = (x, y) \cdot (-2, 2)$$

$$= -2x + 2y \leq -2$$

$$\therefore y \leq x - 1 \quad \dots\dots \text{㉡} \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

즉 점 P가 나타내는 도형은 ㉠, ㉡의 공통부분이므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다. $\rightarrow 20\%$ 배점



답구하기 따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = 2\pi \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

답 2π

15 **전략** 점 P가 선분 AH 위를 움직이므로

$\overrightarrow{\text{AP}} = k\overrightarrow{\text{AH}}$ ($0 \leq k \leq 1$)임을 이용한다.

풀이 $\overrightarrow{\text{AH}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AC}})$ 이고, 점 P가 $\overrightarrow{\text{AH}}$ 위의

점이므로

$$\overrightarrow{\text{AP}} = k\overrightarrow{\text{AH}} \quad (0 \leq k \leq 1)$$

라 하면

$$\overrightarrow{\text{AP}} = \frac{1}{2}k(\overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AC}})$$

한편 $\overrightarrow{\text{PA}} = -\overrightarrow{\text{AP}}, \overrightarrow{\text{PB}} = \overrightarrow{\text{AB}} - \overrightarrow{\text{AP}}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{PA}} \cdot \overrightarrow{\text{PB}} &= -\overrightarrow{\text{AP}} \cdot (\overrightarrow{\text{AB}} - \overrightarrow{\text{AP}}) \\ &= -\overrightarrow{\text{AP}} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} + |\overrightarrow{\text{AP}}|^2 \\ &= -\frac{1}{2}k(\overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AC}}) \cdot \overrightarrow{\text{AB}} + k^2|\overrightarrow{\text{AH}}|^2 \\ &= -\frac{1}{2}k|\overrightarrow{\text{AB}}|^2 - \frac{1}{2}k\overrightarrow{\text{AC}} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} + k^2|\overrightarrow{\text{AH}}|^2 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\text{AC}} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = |\overrightarrow{\text{AC}}| |\overrightarrow{\text{AB}}| \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$$

이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{PA}} \cdot \overrightarrow{\text{PB}} &= -\frac{1}{2}k \times 2^2 - \frac{1}{2}k \times 2 + k^2(\sqrt{3})^2 \\ &= 3k^2 - 3k = 3\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

이때 $0 \leq k \leq 1$ 이므로 $|\overrightarrow{\text{PA}} \cdot \overrightarrow{\text{PB}}|$ 의 최댓값은 $k = \frac{1}{2}$

일 때 $\frac{3}{4}$ 이다.

따라서 $p=4, q=3$ 이므로

$$p+q=7$$

답 7

16 **전략** \overrightarrow{CX} 를 시점을 A로 하는 벡터의 연산으로 나타낸다.

풀이
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CX} &= \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AX} - \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AX} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

에서 세 점 A, C, D는 고정된 점이므로 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$ 는 상수이다. 따라서 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CX}$ 가 최소가 되려면 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AX}$ 가 최소이어야 한다.

이때 두 벡터 \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AX} 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AX} = |\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{AX}| \cos \theta$$

에서 $|\overrightarrow{AD}|$ 는 상수이므로 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AX}$ 가 최소가 되려면 $|\overrightarrow{AX}| \cos \theta$ 의 값이 최소이어야 한다.

점 X에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 Q라 하면 직각삼각형 XAQ에서

$$|\overrightarrow{AX}| \cos \theta = \overline{AQ}$$

$\theta > \frac{\pi}{2}$ 이면 \overline{AQ} 의 길이가

클수록 $|\overrightarrow{AX}| \cos \theta$ 의 값이 작으므로 점 P의 위치는 오른쪽 그림과 같다.

이때 직선 PQ가 원 O의 접선이므로

$$\overline{PO} \perp \overline{PQ}$$

따라서 $\overline{PO} \parallel \overline{AD}$ 이므로

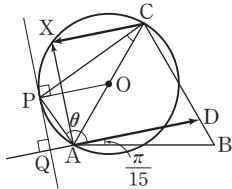
$$\angle POA = \angle OAD = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{15} = \frac{4}{15}\pi$$

$$\therefore \angle ACP = \frac{1}{2} \angle AOP = \frac{1}{2} \times \frac{4}{15}\pi = \frac{2}{15}\pi$$

따라서 $p=15$, $q=2$ 이므로

$$p+q=17$$

답 17



06 평면 운동

유제

본책 155~163쪽

050-1 점 P의 시간 t 에서의 속도를 $v(t)$ 라 하면

$$v(t) = f'(t) = -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} + \frac{1}{4}$$

$t=a$ 에서 점 P의 속력이 0이라 하면

$$\left| -\frac{1}{2} \sin \frac{a}{2} + \frac{1}{4} \right| = 0, \quad \sin \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$$

$a \geq 0$ 이므로

$$\frac{a}{2} = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \dots$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{17\pi}{3}, \dots$$

따라서 점 P의 속력이 처음으로 0이 되는 시간은 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

답 $\frac{\pi}{3}$

050-2 점 P의 시간 t 에서의 속도, 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$ 라 하면

$$v(t) = f'(t) = \frac{\pi}{2} \times m \cos \frac{\pi}{2} t - \frac{\pi}{2} \times n \sin \frac{\pi}{2} t$$

$$a(t) = f''(t)$$

$$= -\frac{\pi^2}{4} \times m \sin \frac{\pi}{2} t - \frac{\pi^2}{4} \times n \cos \frac{\pi}{2} t$$

$t=1$ 에서 점 P의 속도와 가속도는

$$v(1) = \frac{\pi}{2} \times m \cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \times n \sin \frac{\pi}{2}$$

$$= -\frac{n}{2}\pi$$

$$a(1) = -\frac{\pi^2}{4} \times m \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4} \times n \cos \frac{\pi}{2}$$

$$= -\frac{m}{4}\pi^2$$

따라서 $-\frac{n}{2}\pi = -\pi$, $-\frac{m}{4}\pi^2 = \pi^2$ 이므로

$$m = -4, n = 2$$

답 $m = -4, n = 2$

051-1 $\frac{dx}{dt} = 3$, $\frac{dy}{dt} = -4t + 4$ 이므로 점 P의 시

각 t 에서의 속도를 \vec{v} 라 하면

$$\vec{v} = (3, -4t + 4)$$

따라서 점 P의 속력은

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + (-4t+4)^2}$$

$$= \sqrt{16(t-1)^2 + 9}$$

이므로 $t=1$ 일 때 속력이 최소이다.

$t=1$ 일 때 $x=3, y=-2+4=2$ 이므로 점 P의 위치는 (3, 2)이다. ㉠ (3, 2)

051-2 $\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t, \frac{dy}{dt} = -\sin t$ 이므로 점 P

의 시각 t 에서의 속도를 \vec{v} 라 하면

$$\vec{v} = (1 - \cos t, -\sin t)$$

따라서 $t = \frac{\pi}{2}$ 에서 점 P의 속도는

$$\vec{v} = \left(1 - \cos \frac{\pi}{2}, -\sin \frac{\pi}{2}\right) = (1, -1)$$

$$\therefore m = |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

또 $\frac{d^2x}{dt^2} = \sin t, \frac{d^2y}{dt^2} = -\cos t$ 이므로 점 P의 시각 t

에서의 가속도를 \vec{a} 라 하면

$$\vec{a} = (\sin t, -\cos t)$$

따라서 $t = \frac{\pi}{2}$ 에서 점 P의 가속도는

$$\vec{a} = \left(\sin \frac{\pi}{2}, -\cos \frac{\pi}{2}\right) = (1, 0)$$

$$\therefore n = |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

$$\therefore mn = \sqrt{2} \quad \text{㉠ } \sqrt{2}$$

052-1 (1) $t=0$ 에서의 점 P의 위치가 $x=0$ 이므로 구하는 위치 x 는

$$x = 0 + \int_0^t (t+3)e^{-t} dt$$

$$= \left[-(t+3)e^{-t} \right]_0^t - \int_0^t (-e^{-t}) dt$$

$$= -(t+3)e^{-t} + 3 - \left[e^{-t} \right]_0^t$$

$$= -(t+3)e^{-t} + 3 - (e^{-t} - 1)$$

$$= 4 - (t+4)e^{-t}$$

(2) $\int_1^3 |(t+3)e^{-t}| dt$

$$= \int_1^3 (t+3)e^{-t} dt$$

$$= \left[-(t+3)e^{-t} \right]_1^3 - \int_1^3 (-e^{-t}) dt$$

$$= -\frac{6}{e^3} + \frac{4}{e} - \left[e^{-t} \right]_1^3$$

$$= -\frac{6}{e^3} + \frac{4}{e} - \frac{1}{e^3} + \frac{1}{e}$$

$$= -\frac{7}{e^3} + \frac{5}{e}$$

$$\text{㉠ } (1) 4 - (t+4)e^{-t} \quad (2) -\frac{7}{e^3} + \frac{5}{e}$$

053-1 $\frac{dx}{dt} = 6t, \frac{dy}{dt} = 3t^2$ 이므로 $t=0$ 에서 $t=2$ 까

지 점 P가 움직인 거리를 s 라 하면

$$s = \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^2 \sqrt{(6t)^2 + (3t^2)^2} dt$$

$$= \int_0^2 3t\sqrt{4+t^2} dt$$

$4+t^2 = u$ 로 놓으면 $2t = \frac{du}{dt}$ 이고, $t=0$ 일 때 $u=4,$

$t=2$ 일 때 $u=8$ 이므로

$$s = \int_4^8 \frac{3}{2}\sqrt{u} du = \left[\frac{3}{4}u^{\frac{3}{2}} \right]_4^8$$

$$= 16\sqrt{2} - 8 = 8(2\sqrt{2} - 1) \quad \text{㉠ } 8(2\sqrt{2} - 1)$$

054-1 (1) $y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ 이므로 구하는 곡선의

길이는

$$\int_0^2 \sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right\}^2} dx$$

$$= \int_0^2 \sqrt{\frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})} dx$$

$$= \int_0^2 \sqrt{\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 (e^x + e^{-x}) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^x - e^{-x} \right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right)$$

(2) $y' = \sqrt{x} - \frac{1}{4\sqrt{x}}$ 이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_4^9 \sqrt{1 + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{4\sqrt{x}} \right)^2} dx$$

$$= \int_4^9 \sqrt{x + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x}} dx$$

$$= \int_4^9 \sqrt{\left(\sqrt{x} + \frac{1}{4\sqrt{x}} \right)^2} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_4^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{4\sqrt{x}} \right) dx \\
 &= \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} \right]_4^9 \\
 &= \frac{39}{2} - \frac{19}{3} = \frac{79}{6}
 \end{aligned}$$

$$\text{답 (1)} \frac{1}{2} \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right) \quad \text{(2)} \frac{79}{6}$$

054-2 $\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{2}$, $\frac{dy}{dt} = t - \frac{2}{t}$ 이므로 구하는 곡선

의 길이는

$$\begin{aligned}
 &\int_1^2 \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + \left(t - \frac{2}{t}\right)^2} dt \\
 &= \int_1^2 \sqrt{t^2 + 4 + \frac{4}{t^2}} dt \\
 &= \int_1^2 \sqrt{\left(t + \frac{2}{t}\right)^2} dt \\
 &= \int_1^2 \left(t + \frac{2}{t}\right) dt \\
 &= \left[\frac{1}{2}t^2 + 2\ln t \right]_1^2 \\
 &= \frac{3}{2} + 2\ln 2
 \end{aligned}$$

$$\text{답 } \frac{3}{2} + 2\ln 2$$

중단원 연습 문제

○ 본책 164~166쪽

01 ① **02** 1 **03** 2 **04** ⑤ **05** $\frac{3}{4}\pi$

06 8 **07** 14 **08** ③ **09** ③ **10** 5

11 64 **12** ⑤

01 **전략** 점 P의 시각 t 에서의 위치 $f(t)$ 를 미분하여 속도를 구한다.

풀이 점 P의 시각 t 에서의 속도를 $v(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 v(t) &= f'(t) = 2\cos 2t - 2\sin 2t \\
 &= -2(\sin 2t - \cos 2t) \\
 &= -2\sqrt{2} \left(\sin 2t \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos 2t \times \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= -2\sqrt{2} \left(\sin 2t \cos \frac{\pi}{4} - \cos 2t \sin \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= -2\sqrt{2} \sin \left(2t - \frac{\pi}{4} \right)
 \end{aligned}$$

$t=a$ 에서 점 P의 속도가 $2\sqrt{2}$ 라 하면

$$v(a) = -2\sqrt{2} \sin \left(2a - \frac{\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \sin \left(2a - \frac{\pi}{4} \right) = -1 \quad \dots \text{㉠}$$

$0 \leq a \leq \pi$ 에서 $-\frac{\pi}{4} \leq 2a - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7}{4}\pi$ 이므로 ㉠에서

$$2a - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi \quad \therefore a = \frac{7}{8}\pi$$

따라서 구하는 점 P의 위치는

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{7}{8}\pi\right) &= \sin \frac{7}{4}\pi + \cos \frac{7}{4}\pi \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0
 \end{aligned} \quad \text{답 ①}$$

다른 풀이 $f(t) = \sin 2t + \cos 2t$

$$= \sqrt{2} \left(\sin 2t \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos 2t \times \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin 2t \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2t \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(2t + \frac{\pi}{4} \right) \quad \dots \text{㉡}$$

이므로 $v(t) = f'(t) = 2\sqrt{2} \cos \left(2t + \frac{\pi}{4} \right)$

$$v(t) = 2\sqrt{2} \text{에서 } 2\sqrt{2} \cos \left(2t + \frac{\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \cos \left(2t + \frac{\pi}{4} \right) = 1$$

$0 \leq t \leq \pi$ 에서 $\frac{\pi}{4} \leq 2t + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9}{4}\pi$ 이므로

$$2t + \frac{\pi}{4} = 2\pi$$

따라서 구하는 점 P의 위치는 ㉡에서

$$\sqrt{2} \sin 2\pi = 0$$

Remark 삼각함수의 덧셈정리

① $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ (복호동순)

② $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ (복호동순)

③ $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ (복호동순)

02 **전략** 점 P(x, y)의 시각 t 에서의 속도는

$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ 이고, 속력은 $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ 임을 이용한다.

풀이 $\frac{dx}{dt} = 2t + a$, $\frac{dy}{dt} = 4at + 8$ 이므로 점 P의 시

각 t 에서의 속도를 \vec{v} 라 하면

$$\vec{v} = (2t + a, 4at + 8)$$

따라서 $t=1$ 에서 점 P의 속도는

$$\vec{v} = (2+a, 4a+8)$$

속력이 $3\sqrt{17}$ 이므로 $|\vec{v}| = 3\sqrt{17}$

$$\sqrt{(2+a)^2 + (4a+8)^2} = 3\sqrt{17}$$

$$\sqrt{17(a+2)^2} = 3\sqrt{17}$$

$$(a+2)^2 = 9, \quad a+2 = \pm 3$$

$$\therefore a=1 (\because a>0)$$

답 1

03 **해결과정** · 2초 후의 점 P의 위치는

$$\int_0^2 e^t dt = [e^t]_0^2 = e^2 - 1 \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

2초 후의 점 Q의 위치는

$$\begin{aligned} \int_0^2 te^t dt &= [te^t]_0^2 - \int_0^2 e^t dt \\ &= 2e^2 - [e^t]_0^2 = 2e^2 - (e^2 - 1) \\ &= e^2 + 1 \end{aligned} \quad \rightarrow 50\% \text{ 배점}$$

답구하기 · 따라서 두 점 사이의 거리는

$$|(e^2+1) - (e^2-1)| = 2 \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

답 2

04 **전략** 두 점이 서로 반대 방향으로 움직이면 두 점의 시각 t 에서의 속도의 부호가 서로 다름을 이용한다.

풀이 두 점 P, Q의 시각 t 에서의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 하면

$$v_P = \frac{dx_P}{dt} = 2t - a$$

$$v_Q = \frac{dx_Q}{dt} = \frac{2t-1}{t^2-t+1}$$

P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 두 점의 속도의 부호가 다르므로 $v_P v_Q < 0$ 에서

$$\frac{(2t-a)(2t-1)}{t^2-t+1} < 0$$

이때 $t^2-t+1 = (t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ 이므로

$$(2t-a)(2t-1) < 0$$

이 부등식의 해가 $\frac{1}{2} < t < 2$ 이므로

$$\frac{a}{2} = 2 \quad \therefore a = 4 \quad \text{답 5}$$

05 **전략** 두 평면벡터 \vec{u}, \vec{v} 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$ 임을 이용한다.

풀이 $\frac{dx}{dt} = -\sin t + \cos t, \frac{dy}{dt} = \sin t$ 이므로

$$\vec{v} = (-\sin t + \cos t, \sin t)$$

따라서 $t = \frac{\pi}{2}$ 에서 점 P의 속도는

$$\vec{v} = (-1, 1)$$

이때 x 축의 방향벡터를 \vec{u} 라 하면 $\vec{u} = (1, 0)$ 이므로

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = \frac{3}{4}\pi (\because 0 \leq \theta \leq \pi)$$

답 $\frac{3}{4}\pi$

06 **문제이해** · t 초 후 점 P의 위치는

$$\int_0^t \cos t dt = [\sin t]_0^t = \sin t$$

t 초 후 점 Q의 위치는

$$\begin{aligned} \int_0^t 2 \cos 2t dt &= [\sin 2t]_0^t \\ &= \sin 2t \end{aligned} \quad \rightarrow 40\% \text{ 배점}$$

해결과정 · 두 점의 위치가 같을 때 두 점이 만나므로 $\sin t = \sin 2t$ 에서

$$\sin t = 2 \sin t \cos t, \quad \sin t(1-2 \cos t) = 0$$

$$\therefore \sin t = 0 \text{ 또는 } \cos t = \frac{1}{2}$$

이때 $0 < t \leq 4\pi$ 이므로 $\sin t = 0$ 에서

$$t = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$$

$\cos t = \frac{1}{2}$ 에서

$$t = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi, \frac{7}{3}\pi, \frac{11}{3}\pi \quad \rightarrow 50\% \text{ 배점}$$

답구하기 · 따라서 두 점 P, Q가 만난 횟수는 8이다.

$\rightarrow 10\% \text{ 배점}$

답 8

07 **문제이해** · $\frac{dx}{dt} = 6t, \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 3$ 이므로 점 P

의 시각 t 에서의 속도를 \vec{v} 라 하면

$$\vec{v} = (6t, 3t^2 - 3) \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

해결과정 · 따라서 점 P의 속력 $|\vec{v}|$ 는

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{(6t)^2 + (3t^2 - 3)^2} = \sqrt{9t^4 + 18t^2 + 9} \\ &= \sqrt{(3t^2 + 3)^2} = 3t^2 + 3 \end{aligned}$$

$|\vec{v}| = 15$ 에서 $3t^2 + 3 = 15$

$$t^2 = 4 \quad \therefore t = 2 (\because t > 0) \quad \rightarrow 40\% \text{ 배점}$$

답구하기 • 따라서 구하는 거리는 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리이므로

$$\int_0^2 |\vec{v}| dt = \int_0^2 (3t^2+3) dt = \left[t^3+3t \right]_0^2 = 14 \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

답 14

08 **전략** 점 P가 움직인 거리는 속력을 적분하여 구한다.

풀이 $\frac{dx}{dt} = \pi[-\sin t(1+\cos t) - \cos t \sin t]$
 $= -\pi(\sin t + \sin 2t)$

$$\frac{dy}{dt} = \pi\{\cos t(1+\cos t) - \sin^2 t\}$$

$$= \pi(\cos t + \cos 2t)$$

이므로 $t=0$ 에서 $t=\frac{\pi}{2}$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\pi^2(\sin t + \sin 2t)^2 + \pi^2(\cos t + \cos 2t)^2} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\pi^2(1 + \sin t \sin 2t + \cos t \cos 2t)} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\pi^2\{1 + \cos(2t-t)\}} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\pi^2(1 + \cos t)} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\pi^2 \cos^2 \frac{t}{2}} dt$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{t}{2} dt$$

$$= 2\pi \left[2 \sin \frac{t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \quad \text{답 ③}$$

Remark 반각의 공식

① $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos \alpha}{2}$ ② $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos \alpha}{2}$
 ③ $\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}$

09 **전략** 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 의 길이는 $\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx$ 이다.

풀이 $y' = \frac{2x}{x^2-1}$ 이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2} dx$$

$$= \int_2^4 \sqrt{\frac{(x^2-1)^2 + 4x^2}{(x^2-1)^2}} dx$$

$$= \int_2^4 \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} dx = \int_2^4 \frac{x^2+1}{x^2-1} dx$$

$$= \int_2^4 \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right) dx$$

$$= \int_2^4 \left\{1 + \frac{2}{(x-1)(x+1)}\right\} dx$$

$$= \int_2^4 \left(1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= \left[x + \ln|x-1| - \ln|x+1| \right]_2^4$$

$$= 2 + 2 \ln 3 - \ln 5 = 2 + \ln \frac{9}{5}$$

답 ③

10 **전략** 구간을 나누어 적분한다.

풀이 $0 \leq t \leq 1$ 에서 $v(t) \geq 0$ 이고 $t=0$ 에서의 위치가 0이므로 $0 < t \leq 1$ 에서 점 P의 위치는 양수이다.

따라서 점 P의 위치가 $-\frac{2}{5}$ 일 때의 시각을 $t=a$ ($a > 1$)

라 하면

$$\int_0^1 t\sqrt{t} dt + \int_1^a \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\frac{2}{5}$$

$$\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{t}\right]_1^a = -\frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{a} - 1 = -\frac{2}{5}, \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore a = 5$$

답 5

11 **전략** 점 P가 움직인 거리는 속력을 적분하여 구한다.

풀이 $\frac{dx}{dt} = 4(-\sin t + \cos t), \quad \frac{dy}{dt} = -2\sin 2t$ 이

므로 점 P가 $t=0$ 에서 $t=2\pi$ 까지 움직인 거리를 s 라 하면

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{16(\cos t - \sin t)^2 + 4\sin^2 2t} dt$$

07 공간도형

유제

본책 172~192쪽

055-1 주어진 사각뿔에서 5개의 꼭짓점으로 만들 수 있는 서로 다른 평면은

평면 ABCD, 평면 OAB, 평면 OBC,
평면 OCD, 평면 OAD, 평면 OAC, 평면 OBD
의 7개이다.

답 7

Remark

평면 ABC, 평면 ABD, 평면 ACD, 평면 BCD는 모두 평면 ABCD와 같은 평면이다.

056-1 꼬인 위치에 있는 두 직선은

직선 AB와 직선 CD, 직선 AC와 직선 BD,
직선 AD와 직선 BC

이다.

답 풀이 참조

056-2 (1) 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리는 $\overline{CF}, \overline{DF}, \overline{EF}$

(2) 면 ABC와 평행한 모서리는 $\overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FD}$

답 (1) $\overline{CF}, \overline{DF}, \overline{EF}$ (2) $\overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FD}$

057-1 (1) $\overrightarrow{EG} \parallel \overrightarrow{AC}$ 이므로 두 직선 AF와 EG가 이루는 각의 크기는 두 직선 AF와 AC가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 $\triangle AFC$ 는 정삼각형이므로

$$\angle CAF = 60^\circ$$

따라서 두 직선 AF와 EG가 이루는 각의 크기는 60° 이다.

(2) $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ 이므로 두 직선 AD와 BE가 이루는 각의 크기는 두 직선 BC와 BE가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 $\square BCHE$ 는 직사각형이므로

$$\angle EBC = 90^\circ$$

따라서 두 직선 AD와 BE가 이루는 각의 크기는 90° 이다.

답 (1) 60° (2) 90°

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{16(1 - \sin 2t) + 4 \sin^2 2t} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4(2 - \sin 2t)^2} dt$$

이때 $2 - \sin 2t > 0$ 이므로

$$s = \int_0^{2\pi} 2(2 - \sin 2t) dt = \int_0^{2\pi} (4 - 2 \sin 2t) dt$$

$$= [4t + \cos 2t]_0^{2\pi} = 8\pi$$

즉 $a = 8$ 이므로 $a^2 = 64$

답 64

12 **전략** 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 속력이 최소일 때의 시각을 구한다.

풀이 $\frac{dx}{dt} = 8, \frac{dy}{dt} = t + 2 - \frac{16}{t+2}$ 이므로 점 P의

시각 t 에서의 속도를 \vec{v} 라 하면

$$\vec{v} = \left(8, t + 2 - \frac{16}{t+2} \right)$$

따라서 점 P의 속력 $|\vec{v}|$ 는

$$|\vec{v}| = \sqrt{8^2 + \left(t + 2 - \frac{16}{t+2} \right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(t + 2 + \frac{16}{t+2} \right)^2}$$

$$= t + 2 + \frac{16}{t+2}$$

이때 $t + 2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t + 2 + \frac{16}{t+2} \geq 2\sqrt{(t+2) \times \frac{16}{t+2}}$$

$$= 2 \times 4 = 8$$

이때 등호는 $t + 2 = \frac{16}{t+2}$ 일 때 성립하므로

$$(t+2)^2 = 16, \quad t+2 = \pm 4$$

$$\therefore t = 2 \quad (\because t \geq 0)$$

즉 $t = 2$ 일 때 속력이 최소이다.

따라서 점 P가 $t = 0$ 에서 $t = 2$ 까지 움직인 거리는

$$\int_0^2 |\vec{v}| dt = \int_0^2 \left(t + 2 + \frac{16}{t+2} \right) dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2 + 2t + 16 \ln|t+2| \right]_0^2$$

$$= 6 + 16 \ln 2$$

답 ⑤

058-1 \overline{PQ} 를 그으면
 $\overline{PH} \perp \alpha$, $\overline{QH} \perp \overline{AQ}$ 이므로
삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{PQ} \perp \overline{AQ}$$

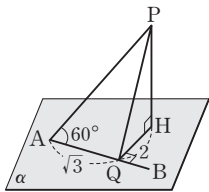
이때 $\angle PAQ = 60^\circ$ 이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{3} \tan 60^\circ \\ = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$$

따라서 직각삼각형 PQH에서

$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{PQ}^2 - \overline{QH}^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

답 $\sqrt{5}$



058-2 $\overline{DH} \perp$ (평면 EFGH), $\overline{DI} \perp \overline{EG}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{HI} \perp \overline{EG}$$

따라서 오른쪽 그림에서

$$\frac{1}{2} \overline{EG} \cdot \overline{HI} = \frac{1}{2} \overline{HE} \cdot \overline{HG}$$

이므로

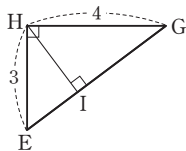
$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \overline{HI} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4$$

$$\therefore \overline{HI} = \frac{12}{5}$$

따라서 직각삼각형 DHI에서

$$\overline{DI} = \sqrt{\overline{DH}^2 + \overline{HI}^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{61}}{5}$$

답 $\frac{2\sqrt{61}}{5}$



059-1 변 BC의 중점을 M이라 하면

$$\overline{AM} \perp \overline{BC},$$

$$\overline{DM} \perp \overline{BC}$$

이므로 두 삼각형 ABC,

DBC가 이루는 각의 크기

는 두 직선 AM, DM이 이루는 각의 크기와 같다.

한편 정삼각형 ABC에서

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$$

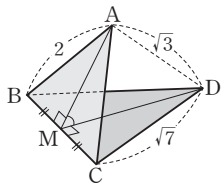
직각삼각형 DMC에서

$$\overline{DM} = \sqrt{\overline{DC}^2 - \overline{MC}^2} = \sqrt{(\sqrt{7})^2 - 1^2} = \sqrt{6}$$

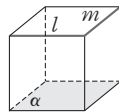
이때 $\overline{AM}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{DM}^2$ 이고, $\overline{AM} = \overline{AD}$ 이므로 삼각형 AMD는 직각이등변삼각형이다.

따라서 $\angle AMD = 45^\circ$ 이므로 구하는 각의 크기는 45° 이다.

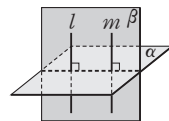
답 45°



060-1 ㄱ. [반례] 오른쪽 그림의 직육면체에서 $l \parallel \alpha$, $m \parallel \alpha$ 이지만 $l \perp m$ 이다.

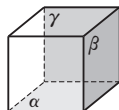


ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 두 직선 l, m을 포함하는 평면을 beta라 하면 beta는 alpha와 수직이다.



이때 m은 평면 beta 위의 직선이므로 $m \perp \alpha$ 이다.

ㄷ. [반례] 오른쪽 그림의 직육면체에서 $\alpha \perp \beta$, $\alpha \perp \gamma$ 이지만 $\beta \perp \gamma$ 이다.



이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

061-1 타원의 장축의 길이를 $2a$ 라 하면 타원의 장축의 밑면 위로의 정사영은 밑면의 지름이므로

$$10 = 2a \cos 45^\circ$$

$$\therefore a = \frac{10}{2 \cos 45^\circ} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

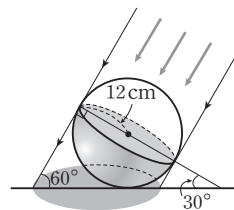
타원의 단축의 길이를 $2b$ 라 하면 타원의 단축의 밑면 위로의 정사영은 밑면의 지름과 같으므로

$$2b = 10 \quad \therefore b = 5$$

이때 $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - 5^2} = 5$ 이므로 타원의 두 초점 사이의 거리는 $5 \cdot 2 = 10$

답 10

061-2 오른쪽 그림과 같이 축구공의 그림자는 햇빛과 수직이고 반지름의 길이가 12 cm인 원의 그림자와 같다.



이때 원을 포함하고 햇빛과 수직인 평면과 지면이

이루는 각의 크기는 30° 이므로 원의 넓이를 S, 축구공의 그림자의 넓이를 S'이라 하면

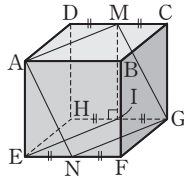
$$S = S' \cos 30^\circ$$

$$\therefore S' = \frac{S}{\cos 30^\circ} = \frac{\pi \cdot 12^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= 96\sqrt{3}\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

답 $96\sqrt{3}\pi \text{ cm}^2$

062-1 \overline{HG} 의 중점을 I라 하면 마름모 ANGM의 평면 EFGH 위로의 정사영은 사각형 ENGI이므로



$$\begin{aligned} & \square ENGI \\ &= \square ANGM \cos \theta \\ \therefore \cos \theta &= \frac{\square ENGI}{\square ANGM} \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} \square ANGM &= \frac{1}{2} \overline{MN} \cdot \overline{AG} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{6} \\ \square ENGI &= 1 \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

이므로 $\cos \theta = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ 답 $\frac{\sqrt{6}}{6}$

062-2 점 O에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 OAH에서

$$\overline{OH} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$$

이므로 $\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$\square ABCD$ 의 두 대각선의 교점을 P라 하면 $\triangle OAB$ 의 평면 ABCD 위로의 정사영은 $\triangle PAB$ 이고

$$\triangle PAB = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2 = 1$$

이때 면 OAB와 면 ABCD가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \triangle PAB &= \triangle OAB \cos \theta \\ \therefore \cos \theta &= \frac{\triangle PAB}{\triangle OAB} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$\square ABCD \cos \theta = 2^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

다른 풀이 \overline{AB} , \overline{CD} 의 중점을 각각 M, N이라 하면 $\overline{AB} \perp \overline{OM}$, $\overline{AB} \perp \overline{MN}$

따라서 평면 OAB와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\angle OMN = \theta$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\frac{1}{2} \overline{MN}}{\overline{OM}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$\square ABCD \cos \theta = 2^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$$

중단원 연습 문제

◆ 본책 193~197쪽

- | | | | |
|----------|--------------------------|--------------------------|-------|
| 01 10 | 02 5 | 03 60° | 04 ③ |
| 05 풀이 참조 | 06 ③ | 07 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 08 ④ |
| 09 ④ | 10 ② | 11 60° | 12 0 |
| | | 13 $\frac{\sqrt{3}}{12}$ | |
| 14 ⑤ | 15 $\frac{\sqrt{15}}{6}$ | 16 ② | 17 40 |
| | | 18 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ | |
| 19 11 | | | |

01 **전략** 평면의 결정 조건을 이용한다.

풀이 한 직선 위에 있지 않은 세 점은 하나의 평면을 결정한다.

따라서 구하는 평면의 개수는 서로 다른 다섯 개에서 세 개를 뽑는 조합의 수와 같으므로

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \quad \text{답 10}$$

02 **해결과정** \overline{AC} 와 교인 위치에 있는 모서리는 \overline{BE} , \overline{DE} , \overline{BF} , \overline{DF}

의 4개이므로 $a = 4$ → 40% 배점

면 ABC와 평행한 면은 면 DEF

의 1개이므로 $b = 1$ → 40% 배점

답구하기 $\therefore a + b = 5$ → 20% 배점

답 5

03 **문제이해** \overline{AB} 의 중점을 M, \overline{CD} 의 중점을 N이라 하면

$$\overline{OM} \perp \overline{AB}, \overline{NM} \perp \overline{AB}$$

따라서 사각뿔의 옆면과 밑면

이 이루는 각의 크기는 두 직선 OM, MN이 이루는 각의 크기와 같다. → 30% 배점

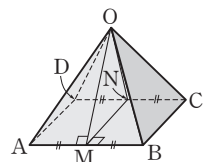
해결과정 직각삼각형 OAM에서

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AM}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2 \end{aligned} \quad \text{→ 30% 배점}$$

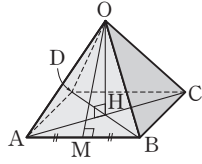
따라서 $\overline{OM} = \overline{MN} = \overline{ON} = 2$ 이므로 $\triangle OMN$ 은 정삼각형이다. → 30% 배점

답구하기 즉 $\angle OMN = 60^\circ$ 이므로 구하는 각의 크기는 60° 이다. → 10% 배점

답 60°



다른 풀이 밑면인 정사각형의 두 대각선의 교점을 H라 하면 꼭짓점 O에서 밑면 ABCD에 내린 수선의 발은 H이고, $\triangle OAB$ 의 평면 ABCD 위로의 정사영은 $\triangle HAB$ 이다.



이때 \overline{AB} 의 중점을 M이라 하면 직각삼각형 OAM에서

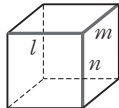
$$\begin{aligned} \overline{OM} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AM}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2 \\ \therefore \triangle OAB &= \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{OM} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

또 $\triangle HAB = \frac{1}{4} \square ABCD = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2 = 1$ 이므로 $\triangle OAB$ 와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

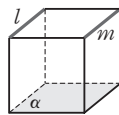
$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\triangle HAB}{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= 60^\circ \end{aligned}$$

04 **전략** 직육면체를 이용하여 반례를 찾아본다.

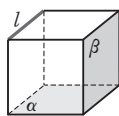
풀이 ① [반례] 오른쪽 그림의 직육면체에서 $l \perp m, l \perp n$ 이지만 $m \perp n$ 이다.



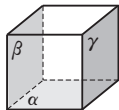
② [반례] 오른쪽 그림의 직육면체에서 $l \parallel \alpha, m \parallel \alpha$ 이지만 $l \parallel m$ 이다.



④ [반례] 오른쪽 그림의 직육면체에서 $l \parallel \alpha, \alpha \perp \beta$ 이지만 $l \perp \beta$ 이다.



⑤ [반례] 오른쪽 그림의 직육면체에서 $\alpha \perp \beta, \alpha \perp \gamma$ 이지만 $\beta \parallel \gamma$ 이다.

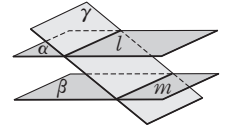


이상에서 옳은 것은 ③이다.

답 ③

05 **전략** 한 평면 위에 있는 두 직선이 만나지 않으면 두 직선은 평행함을 이용한다.

풀이 두 평면 α, β 는 평행하므로 만나지 않는다. 이때 두 직선 l, m 은 각각 두 평면 α, β 위에 있으므로 두 직선 l, m 도 만나지 않는다.



그런데 두 직선 l, m 은 모두 평면 γ 위에 있으므로 $l \parallel m$... 증명 끝

답 풀이 참조

06 **전략** 두 직선이 한 점에서 만나도록 평행이동하여 생각한다.

풀이 ① $\overline{EH} \parallel \overline{AD}$ 이고 $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ 이므로 $\overline{EH} \perp \overline{AB}$

$$\therefore \cos \theta = \cos 90^\circ = 0$$

② $\overline{CG} \parallel \overline{BF}$ 이고 $\overline{BF} \perp \overline{AB}$ 이므로 $\overline{CG} \perp \overline{AB}$

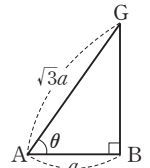
$$\therefore \cos \theta = \cos 90^\circ = 0$$

③ $\overline{FH} \parallel \overline{BD}$ 이고 $\angle DBA = 45^\circ$ 이므로 \overline{FH} 와 \overline{AB} 가 이루는 각의 크기는 45° 이다.

$$\therefore \cos \theta = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

④ 정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면 $\overline{AG} = \sqrt{3}a$ 이므로 오른쪽 그림에서

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



⑤ $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ 이고 $\overline{CF} \perp \overline{EF}$ 이므로 $\overline{CF} \perp \overline{AB}$

$$\therefore \cos \theta = \cos 90^\circ = 0$$

이상에서 $\cos \theta$ 의 값이 가장 큰 것은 ③이다.

답 ③

07 **전략** 직선과 평면의 수직 관계를 이용한다.

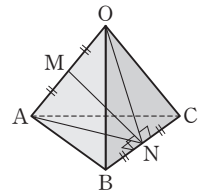
풀이 $\overline{OA}, \overline{BC}$ 의 중점을 각각 M, N이라 하면 $\triangle ABC, \triangle OBC$ 는 모두 정삼각형이므로

$$\overline{AN} \perp \overline{BC}, \overline{ON} \perp \overline{BC}$$

따라서 (평면 OAN) $\perp \overline{BC}$ 이므로

$$\overline{MN} \perp \overline{BC}$$

같은 방법으로 하면 $\overline{MN} \perp \overline{OA}$ 이므로 \overline{MN} 은 꼬인 위치에 있는 두 모서리 $\overline{OA}, \overline{BC}$ 의 공통인 수선이다.



따라서 구하는 두 모서리 사이의 거리는 \overline{MN} 의 길이와 같으므로 직각삼각형 OMN에서

$$\begin{aligned} \overline{MN} &= \sqrt{\overline{ON}^2 - \overline{OM}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

답 ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

08 **전략** 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ 임을 알아낸다.

풀이 직각삼각형 ACD에서

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3 \\ \overline{AD} \perp \overline{BD}, \overline{AD} \perp \overline{CD} &\text{이므로 } \overline{AD} \perp (\text{평면 BCD}) \\ \text{또 } \overline{CD} \perp \overline{BC} &\text{이므로 삼수선의 정리에 의하여} \\ \overline{AC} &\perp \overline{BC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC &= \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{AC} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \end{aligned}$$

답 ④

09 **전략** 평면 ABCD와 점 M에 대하여 삼수선의 정리를 적용한다.

풀이 점 M에서 모서리 CD에 내린 수선의 발을 I라 하면

$$\overline{MI} \perp (\text{평면 ABCD}), \overline{MN} \perp \overline{LD}$$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{NI} \perp \overline{LD}$$

오른쪽 그림에서

$\triangle NDI \sim \triangle ALD$ 이고

$$\overline{AL} = \frac{3}{4} \overline{AB} = 15,$$

$$\overline{DI} = \frac{1}{2} \overline{CD} = 10,$$

$$\begin{aligned} \overline{LD} &= \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AL}^2} \\ &= \sqrt{20^2 + 15^2} = 25 \end{aligned}$$

이므로

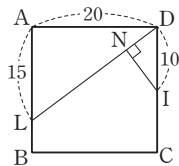
$$\overline{NI} : \overline{AD} = \overline{DI} : \overline{LD}$$

$$\therefore \overline{NI} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{DI}}{\overline{LD}} = \frac{20 \cdot 10}{25} = 8$$

이때 삼각형 MIN은 직각삼각형이므로

$$\begin{aligned} \overline{MN} &= \sqrt{\overline{MI}^2 + \overline{NI}^2} \\ &= \sqrt{20^2 + 8^2} = 4\sqrt{29} \end{aligned}$$

답 ④



10 **전략** 수선을 그어 삼수선의 정리를 이용한다.

풀이 직선 m 위의 한 점 A에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 직선 n 에 내린 수선의 발을 B라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{AB} \perp \overline{PB}$$

한편 $\triangle APH, \triangle HPB$ 가 모두 직각삼각형이므로 $\overline{PA} = a$ 라 하면

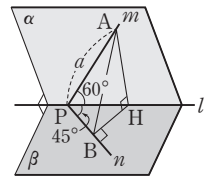
$$\overline{PH} = \overline{PA} \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a,$$

$$\overline{PB} = \overline{PH} \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}a$$

이때 두 직선 m, n 이 이루는 각의 크기 θ 는 $\angle APB$ 의 크기와 같으므로

$$\cos \theta = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}a}{a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 ②



11 **문제이해** · 점 A에서 평면 α 와 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하면

$$\overline{AM} \perp \alpha, \overline{AN} \perp l$$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{MN} \perp l$$

→ 40% 배점

해결과정 · 따라서 점 A와 직선 l 에 의하여 만들어지는 평면이 평면 α 와 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\angle ANM = \theta$$

→ 30% 배점

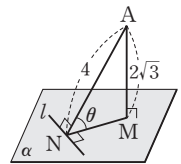
답구하기 · $\triangle ANM$ 에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ (\because 0^\circ < \theta < 90^\circ)$$

→ 30% 배점

답 60°

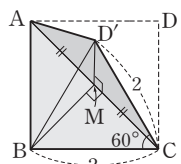


12 **전략** 점 B, D'에서 \overline{AC} 에 각각 수선의 발을 내려 θ 의 값을 구한다.

풀이 $\triangle ABC$ 와 $\triangle ACD'$ 은 모두 직각이등변삼각형이므로 \overline{AC} 의 중점을 M이라 하면

$$\overline{BM} \perp \overline{AC}, \overline{D'M} \perp \overline{AC}$$

따라서 두 평면 ABC, ACD' 이 이루는 각의 크기는 두 직선



BM, D'M이 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle BMD' = \theta$$

이때 $\overline{BC} = \overline{D'C} = 2$ 이고 $\angle BCD' = 60^\circ$ 이므로 $\triangle D'BC$ 는 정삼각형이다.

$$\therefore \overline{BD'} = 2 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

또 $\triangle BCM$ 과 $\triangle CD'M$ 에서

$$\overline{BM} = \overline{D'M} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } \overline{BD'}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{D'M}^2$$

따라서 $\triangle BMD'$ 은 $\angle BMD' = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\cos \theta = \cos 90^\circ = 0 \quad \text{답 0}$$

13 해결과정 • $\triangle OAB$ 의 평면 ABCD 위로의 정사영이 $\triangle MAB$ 이고

$$\triangle OAB = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\triangle MAB = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4} \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

이때 $\triangle OAB$ 와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\triangle MAB = \triangle OAB \cos \theta$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\triangle MAB}{\triangle OAB} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow 40\% \text{ 배점}$$

답구하기 • 따라서 $\triangle MAB$ 의 평면 OAB 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle MAB \cos \theta = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{12} \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

$$\text{답 } \frac{\sqrt{3}}{12}$$

14 전략 원뿔의 밑면을 포함한 평면과 평면 α 가 이루는 각의 코사인 값을 구한다.

풀이 원뿔의 모선의 길이는

$$\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2} = 3$$

원뿔의 밑면을 포함한 평면과 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{1}{3}$$

따라서 원뿔의 밑면의 넓이를 S , 원뿔의 밑면의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S' 이라 하면

$$S' = S \cos \theta = \pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{3} \quad \text{답 ㉡}$$

15 문제이해 • $\overline{AC} \parallel l$,

$\overline{BC} \perp l$ 이 되도록 평면 α

위에 한 점 C를 잡으면

$$\overline{AC} = 20 \cos 60^\circ$$

$$= 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

$$\overline{BC} = 20 \sin 60^\circ$$

$$= 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

$\rightarrow 30\% \text{ 배점}$

해결과정 • 이때 점 C의 평면 β 위로의 정사영을 C' 이라 하면

$$\overline{A'C'} = \overline{AC} \cos 0^\circ = 10$$

$\rightarrow 20\% \text{ 배점}$

직각삼각형 $A'B'C'$ 에서

$$\overline{B'C'} = \sqrt{\overline{A'B'}^2 - \overline{A'C'}^2} = \sqrt{15^2 - 10^2}$$

$$= 5\sqrt{5}$$

$\rightarrow 30\% \text{ 배점}$

답구하기 • 이때 $\overline{B'C'} = \overline{BC} \cos \theta$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{5\sqrt{5}}{10\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

$\rightarrow 20\% \text{ 배점}$

$$\text{답 } \frac{\sqrt{15}}{6}$$

Remark

직선 AB와 직선 A'B'이 이루는 각의 크기가 θ 가 아니므로 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$ 와 같이 생각하지 않도록 주의한다.

16 전략 직선과 평면의 수직 관계에 의하여

$\overline{OM} \perp \overline{MP}$ 임을 이용한다.

풀이 두 삼각형 OAB, OAC가 모두 정삼각형이므로

$$\overline{OM} \perp \overline{BM}, \overline{OM} \perp \overline{CM}$$

$$\therefore \overline{OM} \perp (\text{평면 BCM})$$

$$\therefore \overline{OM} \perp \overline{MP}$$

한편 점 H는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$\overline{AH} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

직각삼각형 OAH에서

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2}$$

$$= \sqrt{4^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$\angle OAH = \theta$ 라 하면

$$\tan \theta = \frac{\overline{OH}}{\overline{AH}} = \frac{\frac{4\sqrt{6}}{3}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{2}$$

이때 직각삼각형 OMP에서 $\angle OPM = \theta$ 이므로

$$\tan \theta = \frac{\overline{OM}}{\overline{MP}}$$

$$\therefore \overline{MP} = \frac{\overline{OM}}{\tan \theta} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \text{답 ②}$$

17 [전략] 점 B에서 선분 EF에 수선의 발을 내린 다음 삼수선의 정리를 이용한다.

[풀이] 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{BD} \perp (\text{평면 AEFD}),$$

$$\overline{BH} \perp \overline{EF}$$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{DH} \perp \overline{EF}$$

$$\therefore \angle BHD = \theta$$

또 오른쪽 그림에서 $\overline{BD} = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$ 이고 $\triangle BDA \sim \triangle BEH$

이므로

$$\overline{BD} : \overline{BE} = \overline{BA} : \overline{BH}$$

$$3\sqrt{10} : 6 = 9 : \overline{BH}$$

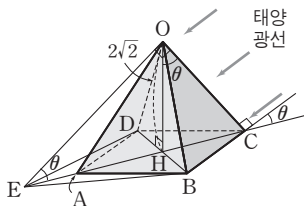
$$\therefore \overline{BH} = \frac{6 \cdot 9}{3\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{5}$$

따라서 $\overline{DH} = 3\sqrt{10} - \frac{9\sqrt{10}}{5} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\overline{DH}}{\overline{BH}} = \frac{\frac{6\sqrt{10}}{5}}{\frac{9\sqrt{10}}{5}} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore 60 \cos \theta = 60 \cdot \frac{2}{3} = 40 \quad \text{답 40}$$

18 문제이해 · 다음 그림과 같이 태양광선과 지면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하고, $\overline{OE} \perp \overline{OC}$ 인 점 E를 \overline{AC} 의 연장선 위에 잡으면



$$\angle OEC = \angle COH = \theta \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

해결과정 · 직각삼각형 OHC에서

$$\tan \theta = \frac{\overline{CH}}{\overline{OH}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

직각삼각형 OEH에서 $\tan \theta = \frac{\overline{OH}}{\overline{EH}}$ 이므로

$$\overline{EH} = \frac{\overline{OH}}{\tan \theta} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}$$

따라서 도형 P의 넓이를 S라 하면

$$S = \triangle DEB - \triangle DAB$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$= 6 \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

한편 태양광선에 수직인 평면 α 는 \overline{OC} 와 평행하므로 지면과 평면 α 가 이루는 각의 크기는 $\angle OCH$ 의 크기와 같다.

이때 $\angle OCH = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로 직각삼각형 OHC에서

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta = \frac{\overline{CH}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CH}}{\sqrt{\overline{OH}^2 + \overline{CH}^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

답구하기 · 따라서 도형 P의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는

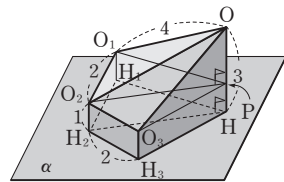
$$S \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = 6 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

$$\text{답 } \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

19 [전략] 네 구의 중심 O, O_1, O_2, O_3 에 대하여 주어진 조건을 그림으로 그려 본다.

[풀이] 다음 그림과 같이 구 S의 중심을 O라 하고 네 점 O, O_1, O_2, O_3 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 각각 H, H_1, H_2, H_3 이라 하면 조건 (가)에 의하여

$$\overline{OH} = 3, \overline{O_1H_1} = \overline{O_2H_2} = \overline{O_3H_3} = 1$$



또 점 O_1 에서 선분 O_1H_1 에 내린 수선의 발을 P라 하면 (평면 $O_1O_2O_3P$) $\perp \overline{OH}$ 이므로

08 공간좌표

유제

본책 204~228쪽

$$\overline{O_2P} \perp \overline{OH}, \overline{O_3P} \perp \overline{OH}$$

두 구 S, S₁이 외접하므로

$$\overline{OO_1} = 3 + 1 = 4$$

같은 방법으로 하면

$$\overline{OO_2} = \overline{OO_3} = 4$$

직각삼각형 OO₁P에서 $\overline{OP} = 3 - 1 = 2$ 이므로

$$\overline{O_1P} = \sqrt{\overline{OO_1}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$

같은 방법으로 하면

$$\overline{O_2P} = \overline{O_3P} = 2\sqrt{3}$$

한편 평면 O₁O₂H₂H₁은 평면 β와 같고, 평면

O₂H₂H₃O₃은 단면 D를 포함한다.

이때 두 평면 O₁O₂H₂H₁,

O₂H₂H₃O₃의 교선이 직선

O₂H₂이므로 오른쪽 그림과

같이 두 평면이 이루는 각의

크기를 θ라 하면

$$\theta = \pi - \angle O_1O_2O_3$$

이등변삼각형 PO₁O₂에서 $\angle O_1O_2P = \gamma$ 라 하면

$$\cos \gamma = \frac{\frac{1}{2}\overline{O_1O_2}}{\overline{O_2P}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

이때 두 삼각형 PO₁O₂, PO₂O₃은 합동이므로

$\angle O_1O_2O_3 = 2\gamma$ 이고

$$\cos 2\gamma = 2 \cos^2 \gamma - 1 = -\frac{5}{6}$$

이므로

$$\cos \theta = \cos(\pi - 2\gamma) = -\cos 2\gamma = \frac{5}{6}$$

이때 단면 D는 반지름의 길이가 1인 원이므로 단면 D의 넓이는 π이다.

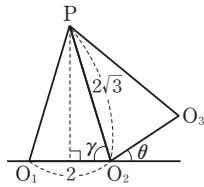
따라서 단면 D의 평면 β 위로의 정사영의 넓이는

$$\pi \cos \theta = \pi \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

즉 p=6, q=5이므로

$$p+q=11$$

답 11



063-1 점 P가 z축 위에 있으므로 P(0, 0, c)라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(-4)^2 + (-1)^2 + (c-3)^2 = (-2)^2 + 3^2 + (c-1)^2$$

$$4c = 12 \quad \therefore c = 3$$

$$\therefore P(0, 0, 3)$$

답 P(0, 0, 3)

064-1 $\overline{AB} = \sqrt{(1-6)^2 + (2+1)^2 + (-2-2)^2}$
 $= 5\sqrt{2}$

두 점 A, B의 yz평면 위로의 정사영을 각각 A', B'이라 하면

$$A'(0, -1, 2), B'(0, 2, -2)$$

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(2+1)^2 + (-2-2)^2} = 5$$

직선 AB와 yz평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$$

이므로

$$\cos \theta = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

답 45°

064-2 $\overline{AB} = \sqrt{(-2-2)^2 + (a-1)^2 + (2-5)^2}$
 $= \sqrt{a^2 - 2a + 26}$

두 점 A, B의 zx평면 위로의 정사영을 각각 A', B'이라 하면

$$A'(2, 0, 5), B'(-2, 0, 2)$$

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-5)^2} = 5$$

이때 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 45^\circ$ 이므로

$$5 = \sqrt{a^2 - 2a + 26} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5\sqrt{2} = \sqrt{a^2 - 2a + 26}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 2a - 24 = 0, \quad (a+4)(a-6) = 0$$

$$\therefore a = 6 \quad (\because a > 0)$$

답 6

065-1 두 점 A, B의 y좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 zx 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

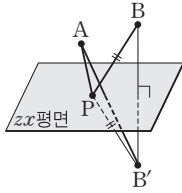
이때 점 B(-1, 2, 6)의 zx 평면에 대한 대칭점을 B'이라 하면 B'(-1, -2, 6)

$\overline{BP} = \overline{B'P}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{AP} + \overline{B'P} \\ &\geq \overline{AB'} \\ &= \sqrt{(-1-5)^2 + (-2-1)^2 + (6-4)^2} \\ &= 7 \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 7이다.

답 7



065-2 두 점 A, B의 x좌표가 0이고 y좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 yz 평면 위에 있고 z축을 기준으로 같은 쪽에 있다.

이때 점 A(0, -2, 5)의 z축에 대한 대칭점을 A'이라 하면

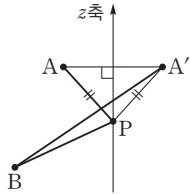
A'(0, 2, 5)

$\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{A'P} + \overline{BP} \\ &\geq \overline{A'B} \\ &= \sqrt{(-4-2)^2 + (-3-5)^2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 10이다.

답 10



066-1 \overline{AB} 를 1 : 3으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1)}{1+3}, \frac{1 \cdot (-6) + 3 \cdot 2}{1+3}, \frac{1 \cdot 0 + 3 \cdot (-4)}{1+3} \right)$$

$\therefore P(0, 0, -3)$

또 \overline{AB} 를 1 : 3으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{1 \cdot 3 - 3 \cdot (-1)}{1-3}, \frac{1 \cdot (-6) - 3 \cdot 2}{1-3}, \frac{1 \cdot 0 - 3 \cdot (-4)}{1-3} \right)$$

$\therefore Q(-3, 6, -6)$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PQ} &= \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-6+3)^2} \\ &= 3\sqrt{6} \end{aligned}$$

답 $3\sqrt{6}$

066-2 점 P의 점 A에 대한 대칭점을 P'이라 하면 점 A는 $\overline{PP'}$ 의 중점이다.

점 P'의 좌표를 (a, b, c)라 하면 $\overline{PP'}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+a}{2}, \frac{2+b}{2}, \frac{1+c}{2} \right)$$

이 점이 점 A(3, -6, -2)와 일치하므로

$$\frac{-2+a}{2} = 3, \quad \frac{2+b}{2} = -6, \quad \frac{1+c}{2} = -2$$

$\therefore a=8, b=-14, c=-5$

$\therefore P'(8, -14, -5)$

답 (8, -14, -5)

067-1 \overline{AC} 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0+4}{2}, \frac{3+(-5)}{2}, \frac{1+5}{2} \right), \text{ 즉 } (2, -1, 3)$$

점 D의 좌표를 (a, b, c)라 하면 \overline{BD} 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{5+a}{2}, \frac{-4+b}{2}, \frac{4+c}{2} \right)$$

이때 사각형 ABCD가 평행사변형이므로 \overline{AC} 의 중점과 \overline{BD} 의 중점이 일치한다. 즉

$$2 = \frac{5+a}{2}, \quad -1 = \frac{-4+b}{2}, \quad 3 = \frac{4+c}{2}$$

$\therefore a=-1, b=2, c=2$

$\therefore D(-1, 2, 2)$

답 D(-1, 2, 2)

067-2 \overline{AC} 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a-1}{2}, \frac{-5+6}{2}, \frac{-3+2}{2} \right)$$

$\therefore \left(\frac{a-1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$

\overline{BD} 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{b+2}{2}, \frac{-1+2}{2}, \frac{2-3}{2} \right)$$

$\therefore \left(\frac{b+2}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$

이때 사각형 ABCD가 마름모이므로 \overline{AC} 의 중점과 \overline{BD} 의 중점이 일치한다. 즉

$$\frac{a-1}{2} = \frac{b+2}{2} \quad \therefore b=a-3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 마름모는 네 변의 길이가 모두 같으므로

$\overline{AD} = \overline{CD}$ 에서

$$\begin{aligned} &\sqrt{(2-a)^2 + (2+5)^2 + (-3+3)^2} \\ &= \sqrt{(2+1)^2 + (2-6)^2 + (-3-2)^2} \end{aligned}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 4a + 53 = 50, \quad (a-1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 2)$$

이를 ①에 대입하면 $b = 0$

$$\therefore a + b = 3$$

답 3

068-1 점 C의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2 + (-1) + a}{3}, \frac{1 + 0 + b}{3}, \frac{1 + 4 + c}{3} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+1}{3}, \frac{b+1}{3}, \frac{c+5}{3} \right)$$

이 점이 점 $(1, 3, 2)$ 와 일치하므로

$$\frac{a+1}{3} = 1, \quad \frac{b+1}{3} = 3, \quad \frac{c+5}{3} = 2$$

$$\therefore a = 2, b = 8, c = 1$$

$$\therefore C(2, 8, 1)$$

답 C(2, 8, 1)

068-2 점 A의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 \overline{AM} 을 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot a}{2+1}, \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot b}{2+1}, \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot c}{2+1} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+4}{3}, \frac{b+8}{3}, \frac{c+6}{3} \right)$$

이 점이 점 G(2, 3, 3)과 일치하므로

$$\frac{a+4}{3} = 2, \quad \frac{b+8}{3} = 3, \quad \frac{c+6}{3} = 3$$

$$\therefore a = 2, b = 1, c = 3$$

$$\therefore A(2, 1, 3)$$

답 A(2, 1, 3)

다른 풀이 $A(x, y, z), B(x_1, y_1, z_1), C(x_2, y_2, z_2)$ 라 하면 \overline{BC} 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

이 점이 점 M(2, 4, 3)과 일치하므로

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 2, \quad \frac{y_1 + y_2}{2} = 4, \quad \frac{z_1 + z_2}{2} = 3$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 4, \quad y_1 + y_2 = 8, \quad z_1 + z_2 = 6$$

또 $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{x + x_1 + x_2}{3}, \frac{y + y_1 + y_2}{3}, \frac{z + z_1 + z_2}{3} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{x+4}{3}, \frac{y+8}{3}, \frac{z+6}{3} \right)$$

이 점이 점 G(2, 3, 3)과 일치하므로

$$\frac{x+4}{3} = 2, \quad \frac{y+8}{3} = 3, \quad \frac{z+6}{3} = 3$$

$$\therefore x = 2, y = 1, z = 3$$

$$\therefore A(2, 1, 3)$$

069-1 구의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$$C\left(\frac{5+3}{2}, \frac{-2+2}{2}, \frac{1+(-5)}{2} \right)$$

$$\therefore C(4, 0, -2)$$

또 구의 반지름의 길이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \overline{AB} &= \frac{1}{2} \sqrt{(3-5)^2 + (2+2)^2 + (-5-1)^2} \\ &= \sqrt{14} \end{aligned}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-4)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 14$$

$$\text{답 } (x-4)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 14$$

다른 풀이 구의 중심이 C(4, 0, -2)이므로 구의 반지름의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{CA} &= \sqrt{(5-4)^2 + (-2)^2 + (1+2)^2} \\ &= \sqrt{14} \end{aligned}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-4)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 14$$

070-1 구가 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 동시에 접하고 점 $(1, -5, 4)$ 를 지나므로 반지름의 길이를 r 라 하면 구의 중심의 좌표는

$$(r, -r, r)$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-r)^2 + (y+r)^2 + (z-r)^2 = r^2$$

이 구가 점 $(1, -5, 4)$ 를 지나므로

$$(1-r)^2 + (-5+r)^2 + (4-r)^2 = r^2$$

$$r^2 - 10r + 21 = 0, \quad (r-3)(r-7) = 0$$

$$\therefore r = 3 \text{ 또는 } r = 7$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9,$$

$$(x-7)^2 + (y+7)^2 + (z-7)^2 = 49$$

답 풀이 참조

070-2 중심의 좌표가 $(k, 3, 2)$ 이고 y 축에 접하는 구의 방정식은

$(x-k)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=k^2+4$
 이때 구의 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$ 이므로
 $k^2+4=20, \quad k^2=16$
 $\therefore k=4 (\because k>0)$

답 4

071-1 중심의 좌표가 $(2, 0, -3)$ 이고 반지름의 길이가 4인 구의 방정식은

$$(x-2)^2+y^2+(z+3)^2=16$$

$$\therefore x^2+y^2+z^2-4x+6z-3=0$$

이 방정식이 $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ 과 일치하므로

$$a=-4, \quad b=0, \quad c=6, \quad d=-3$$

$$\text{답 } a=-4, \quad b=0, \quad c=6, \quad d=-3$$

072-1 점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면
 $\overline{AP} : \overline{BP}=1 : 2$ 에서 $2\overline{AP}=\overline{BP}$, 즉 $4\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$
 이므로

$$4\{x^2+(y-2)^2+(z+2)^2\}$$

$$=x^2+(y+1)^2+(z-1)^2$$

$$\therefore x^2+y^2+z^2-6y+6z+10=0$$

따라서 $a=0, \quad b=-6, \quad c=6, \quad d=10$ 이므로
 $a+b+c+d=10$

답 10

073-1 $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+3-k=0$ 에서
 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=k+11$
 이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(1, 2, 3)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{k+11}$ 이다.

또 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-11=0$ 에서

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=16$$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(1, -2, 0)$, 반지름의 길이는 4이다.

따라서 두 구의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(1-1)^2+(-2-2)^2+(0-3)^2}=5$$

이때 두 구가 내접하므로

$$|\sqrt{k+11}-4|=5$$

$$\therefore \sqrt{k+11}-4=\pm 5$$

그런데 $\sqrt{k+11}>0$ 이므로 $\sqrt{k+11}=9$

양변을 제곱하면 $k+11=81$

$$\therefore k=70$$

답 70

073-2 $x^2+y^2+z^2-4x-2z-11=0$ 에서

$$(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=16$$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(2, 0, 1)$, 반지름의 길이는 4이다.

또 $x^2+y^2+z^2-2x+2ky+k^2-8=0$ 에서

$$(x-1)^2+(y+k)^2+z^2=9$$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(1, -k, 0)$, 반지름의 길이는 3이다.

따라서 두 구의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(1-2)^2+(-k)^2+(0-1)^2}=\sqrt{k^2+2}$$

이때 두 구가 서로 만나려면

$$4-3 \leq \sqrt{k^2+2} \leq 4+3, \quad 1 \leq \sqrt{k^2+2} \leq 7$$

$$1 \leq k^2+2 \leq 49$$

$$\therefore -1 \leq k^2 \leq 47$$

그런데 실수 k 에 대하여 $k^2 \geq 0$ 이므로 $0 \leq k^2 \leq 47$

$$\therefore -\sqrt{47} \leq k \leq \sqrt{47}$$

$$\text{답 } -\sqrt{47} \leq k \leq \sqrt{47}$$

074-1 주어진 구의 방정식에 $y=0$ 을 대입하면

$$(x+1)^2+(-2)^2+(z+3)^2=20$$

$$\therefore (x+1)^2+(z+3)^2=16$$

따라서 주어진 구를 zx 평면으로 자른 단면은 반지름의 길이가 4인 원이므로 구하는 단면의 넓이는

$$\pi \cdot 4^2=16\pi$$

답 16 π

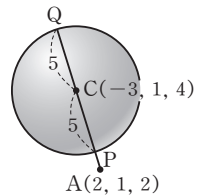
075-1 $x^2+y^2+z^2+6x-2y-8z+1=0$ 에서

$$(x+3)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=25$$

이므로 이 구의 중심의 좌표는

$(-3, 1, 4)$, 반지름의 길이는 5이다.

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C, 직선 AC가 구와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하면



$$\overline{AC}=\sqrt{(-3-2)^2+(1-1)^2+(4-2)^2}$$

$$=\sqrt{29}$$

따라서 선분의 길이의 최댓값은

$$\overline{AQ}=\overline{AC}+\overline{CQ}=\sqrt{29}+5$$

선분의 길이의 최솟값은

$$\overline{AP}=\overline{AC}-\overline{CP}=\sqrt{29}-5$$

이므로 구하는 곱은

$$(\sqrt{29}+5)(\sqrt{29}-5)=29-25$$

$$=4$$

답 4

01 ③ 02 C(-4, 5, -3), D(-6, 7, -1)

03 $\frac{4}{3}$ 04 160π 05 13π

06 C(0, $-\frac{1}{5}$, $-\frac{2}{5}$), C(0, 1, 2) 07 13

08 ② 09 ① 10 -2 11 $2\sqrt{3}\pi$ 12 $2\sqrt{15}$

13 ⑤ 14 ③ 15 $2\sqrt{2}$ 16 17 17 48

18 ② 19 124

01 **전략** 두 점 A, B의 xy 평면 위로의 정사영을 이용한다.

풀이 $\overline{AB} = \sqrt{(4-6)^2 + (-2-2)^2 + (-7+3)^2} = 6$
 두 점 A, B의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 A', B'이라 하면

$$A'(6, 2, 0), B'(4, -2, 0)$$

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(4-6)^2 + (-2-2)^2} = 2\sqrt{5}$$

이때 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{답 ③}$$

02 **전략** 평행사변형의 두 대각선의 교점은 각 대각선의 중점임을 이용한다.

풀이 점 C의 좌표를 (a, b, c)라 하면 \overline{AC} 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+a}{2}, \frac{-1+b}{2}, \frac{3+c}{2} \right)$$

이 점이 점 M(-1, 2, 0)과 일치하므로

$$\frac{2+a}{2} = -1, \frac{-1+b}{2} = 2, \frac{3+c}{2} = 0$$

$$\therefore a = -4, b = 5, c = -3$$

$$\therefore C(-4, 5, -3)$$

또 점 D의 좌표를 (a', b', c')이라 하면 \overline{BD} 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+a'}{2}, \frac{-3+b'}{2}, \frac{1+c'}{2} \right)$$

이 점이 점 M(-1, 2, 0)과 일치하므로

$$\frac{4+a'}{2} = -1, \frac{-3+b'}{2} = 2, \frac{1+c'}{2} = 0$$

$$\therefore a' = -6, b' = 7, c' = -1$$

$$\therefore D(-6, 7, -1)$$

$$\text{답 } C(-4, 5, -3), D(-6, 7, -1)$$

03 **전략** 세 점 A, B, C의 좌표를 구한 후 삼각형의 무게중심의 좌표를 구하는 공식에 대입한다.

풀이 P(1, 5, -2)에서

$$A(1, 5, 2), B(-1, 5, -2),$$

$$C(1, -5, -2)$$

이때 $\triangle ABC$ 의 무게중심이 G(a, b, c)이므로

$$a = \frac{1+(-1)+1}{3} = \frac{1}{3},$$

$$b = \frac{5+5+(-5)}{3} = \frac{5}{3},$$

$$c = \frac{2+(-2)+(-2)}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore a+b+c = \frac{4}{3} \quad \text{답 } \frac{4}{3}$$

04 **해결과정** 점 P의 좌표를 (x, y, z)라 하면 $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$ 에서 $2\overline{AP} = \overline{BP}$, 즉 $4\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로 $\rightarrow 20\%$ 배점

$$4(x^2+y^2+(z+3)^2) = x^2+(y-9)^2+z^2$$

$$x^2+y^2+z^2+6y+8z-15=0$$

$$\therefore x^2+(y+3)^2+(z+4)^2=40 \quad \rightarrow 40\% \text{ 배점}$$

답구하기 따라서 점 P의 자취가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ 인 구이므로 구하는 겉넓이는

$$4\pi \cdot (2\sqrt{10})^2 = 160\pi \quad \rightarrow 40\% \text{ 배점}$$

$$\text{답 } 160\pi$$

05 **해결과정** 구의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$$C\left(\frac{1+3}{2}, \frac{4+4}{2}, \frac{2+(-6)}{2} \right)$$

$$\therefore C(2, 4, -2)$$

또 구의 반지름의 길이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\overline{AB} &= \frac{1}{2}\sqrt{(3-1)^2+(4-4)^2+(-6-2)^2} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

이므로 주어진 구의 방정식은

$$(x-2)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=17 \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

위의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면

$$(-2)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=17$$

$$\therefore (y-4)^2+(z+2)^2=13 \quad \rightarrow 40\% \text{ 배점}$$

답구하기 따라서 주어진 구와 yz 평면이 만나서 생기는 단면은 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$ 인 원이므로 구하는 단

면의 넓이는

$$\pi \cdot (\sqrt{13})^2 = 13\pi$$

→ 30% 배점

답 13π

06 **전략** yz 평면 위의 점 C에 대하여 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ 이어야 함을 이용한다.

풀이 점 C가 yz 평면 위에 있으므로 $C(0, b, c)$ 라 하자.

이때 $\triangle ABC$ 가 정삼각형이려면

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}, \text{ 즉 } \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$$

이어야 하므로 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서

$$(2-1)^2 + (-2)^2 + 1^2 = (-2)^2 + b^2 + (c-1)^2$$

$$\therefore b^2 + c^2 - 2c - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{A}$$

또 $\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$ 에서

$$(-2)^2 + b^2 + (c-1)^2 = 1^2 + (2-b)^2 + (-c)^2$$

$$\therefore c = 2b \quad \cdots \textcircled{B}$$

ⓐ을 ⓑ에 대입하여 정리하면

$$5b^2 - 4b - 1 = 0, \quad (5b+1)(b-1) = 0$$

$$\therefore b = -\frac{1}{5} \text{ 또는 } b = 1 \quad \cdots \textcircled{C}$$

ⓒ을 ⓑ에 대입하면

$$b = -\frac{1}{5} \text{ 일 때 } c = -\frac{2}{5}, \quad b = 1 \text{ 일 때 } c = 2$$

$$\therefore C\left(0, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right), C(0, 1, 2)$$

$$\text{답 } C\left(0, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right), C(0, 1, 2)$$

07 **전략** 점 A에서 xy 평면에 내린 수선의 발 H의 좌표를 구한 후 $\overline{AP} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HP}^2}$ 임을 이용한다.

풀이 점 A에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(9, 0, 0)$

$$\therefore \overline{AP} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HP}^2} = \sqrt{5^2 + \overline{HP}^2}$$

$P(-3, 0, 0)$ 일 때 \overline{HP} 의 길이가 최대이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP} &\leq \sqrt{5^2 + (-3-9)^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \end{aligned}$$

답 13

08 **전략** xy 평면 위의 점은 z 좌표가 0임을 이용한다.

풀이 선분 AB를 2:1로 내분하는 점을 P라 하면 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 4}{2+1}, \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 0}{2+1}, \frac{2 \cdot a + 1 \cdot 2}{2+1}\right)$$

$$\therefore P\left(\frac{8}{3}, 2, \frac{2a+2}{3}\right)$$

이때 점 P가 xy 평면 위에 있으므로

$$\frac{2a+2}{3} = 0 \quad \therefore a = -1$$

답 ②

09 **전략** 먼저 내분점의 좌표를 구하는 공식을 이용하여 두 점 P, Q의 좌표를 구한다.

풀이 선분 BC를 2:1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{2+1}, \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot 3}{2+1}, \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 0}{2+1}\right)$$

$$\therefore P(0, 1, 2)$$

선분 AC를 1:2로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 3}{1+2}, \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 0}{1+2}, \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 0}{1+2}\right)$$

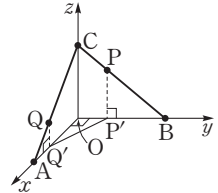
$$\therefore Q(2, 0, 1)$$

따라서 $P'(0, 1, 0)$,

$Q'(2, 0, 0)$ 이므로 오른쪽

그림에서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$$



답 ①

10 **문제이해** 주어진 구의 방정식에서

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - az - b = 0 \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y+2)^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + b + 8$$

따라서 이 구의 중심의 좌표는 $\left(2, -2, \frac{a}{2}\right)$, 반지름

의 길이는 $\sqrt{\frac{a^2}{4} + b + 8}$ 이다.

→ 30% 배점

해결과정 이 구가 xy 평면에 접하므로

$$\left|\frac{a}{2}\right| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b + 8}$$

양변을 제곱하면

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + b + 8$$

$$\therefore b = -8$$

→ 30% 배점

또 점 $(5, -2, 3)$ 이 구 위의 점이므로 ㉠에 대입하면

$$25 + 4 + 9 - 20 - 8 - 3a + 8 = 0$$

$$3a = 18 \quad \therefore a = 6$$

→ 30% 배점

답구하기 $\therefore a + b = -2$

→ 10% 배점

답 -2

11 전략 점 C에서 평면 PQR에 내린 수선의 발이 $\triangle PQR$ 의 무게중심임을 이용하여 원뿔의 높이를 구한다.

풀이 $x^2+y^2+z^2-6x-6y-6z+18=0$ 에서
 $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9$

이므로

- C(3, 3, 3),
- P(3, 3, 0),
- Q(0, 3, 3),
- R(3, 0, 3)

점 C에서 평면 PQR에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 정삼각형 PQR의 무게중심이므로

$$H\left(\frac{3+0+3}{3}, \frac{3+3+0}{3}, \frac{0+3+3}{3}\right)$$

$$\therefore H(2, 2, 2)$$

또 점 H는 원뿔의 밑면인 원의 중심이므로 밑면의 반지름의 길이는

$$\overline{HP} = \sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

원뿔의 높이는

$$\overline{CH} = \sqrt{(2-3)^2 + (2-3)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{3}$$

따라서 구하는 원뿔의 부피는

$$\frac{1}{3}\pi \cdot (\sqrt{6})^2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi$$

답 $2\sqrt{3}\pi$

12 해결과정 구의 중심의 좌표를 (a, b, c)라 하면 구의 반지름의 길이가 5이므로 구의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 25$$

xy평면 위의 점은 z좌표가 0이므로 구의 방정식에 z=0을 대입하면

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (-c)^2 = 25$$

$$\therefore (x-a)^2 + (y-b)^2 = 25 - c^2 \quad \rightarrow 40\% \text{ 배점}$$

이 방정식이 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$ 과 일치하므로

$$a=2, b=3, 25-c^2=10$$

$$\therefore a=2, b=3, c=\pm\sqrt{15} \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

답구하기 따라서 두 구의 중심의 좌표가 각각

$$(2, 3, \sqrt{15}), (2, 3, -\sqrt{15})$$

이므로 두 구의 중심 사이의 거리는 $2\sqrt{15}$ 이다.

$\rightarrow 30\% \text{ 배점}$

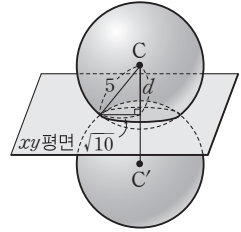
답 $2\sqrt{15}$

다른 풀이 두 구의 중심을 각각 C, C'이라 하고, 점 C에서 xy평면까지의 거리를 d라 하면 오른쪽 그림에서

$$d = \sqrt{5^2 - (\sqrt{10})^2} = \sqrt{15}$$

따라서 두 구의 중심 사이의 거리는

$$\overline{CC'} = 2d = 2\sqrt{15}$$



13 전략 y축 위의 점은 x좌표와 z좌표가 모두 0임을 이용한다.

풀이 y축 위의 점은 x좌표, z좌표가 모두 0이므로 주어진 구의 방정식에 x=0, z=0을 대입하면

$$y^2 - 2y - 24 = 0, \quad (y+4)(y-6) = 0$$

$$\therefore y = -4 \text{ 또는 } y = 6$$

따라서 주어진 구와 y축의 두 교점 A, B의 좌표는

$$(0, -4, 0), (0, 6, 0)$$

$$\therefore \overline{AB} = |6 - (-4)| = 10$$

답 ⑤

Remark 구와 좌표축의 교점의 좌표

구 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ 과 좌표축의 교점의 좌표는 다음과 같이 구한다.

- ① x축: 구의 방정식에 y=0, z=0을 대입한 후 x에 대한 이차방정식을 푼다.
- ② y축: 구의 방정식에 x=0, z=0을 대입한 후 y에 대한 이차방정식을 푼다.
- ③ z축: 구의 방정식에 x=0, y=0을 대입한 후 z에 대한 이차방정식을 푼다.

14 전략 구의 중심 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하고 \overline{CH} 의 길이를 구한다.

풀이 $x^2+y^2+z^2+4x-6y-2z-2=0$ 에서

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 16$$

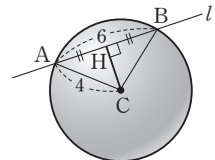
이므로 이 구의 반지름의 길이는 4이다.

구의 중심을 C, 점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 3$$

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$



따라서 구의 중심과 직선 l 사이의 거리는 $\sqrt{7}$ 이다.

답 ③

15 문제이해 · 주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$$

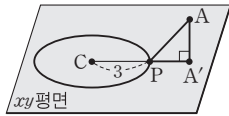
$$\therefore (x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$$

따라서 주어진 구와 xy 평면의 교선은 중심의 좌표가 $(-2, -1, 0)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원이다.

→ 40% 배점

해결과정 · 오른쪽 그림과

같이 이 원의 중심을 C , 점 A 에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 A' , $\overline{CA'}$ 이 원과 만나는 점을 P 라 하면 점 A 에서 이 원 위의 점까지의 거리의 최솟값은 \overline{AP} 의 길이와 같다.



$A'(1, 3, 0)$ 이므로

$$\overline{CA'} = \sqrt{(1+2)^2 + (3+1)^2} = 5$$

$$\therefore \overline{PA'} = \overline{CA'} - \overline{CP} = 5 - 3 = 2 \quad \rightarrow 40\% \text{ 배점}$$

답구하기 · 이때 $\overline{AA'} = 2$ 이므로 직각삼각형 APA' 에서

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{PA'}^2 + \overline{AA'}^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

답 $2\sqrt{2}$

16 문제이해 · 오른쪽 그림과 같이 점 A 를 원점으로 하고, 선분 AD , AE 가 각각 x 축, y 축의 양의 방향과 일치하도록 \overline{AB} , \overline{AC} 를 좌표공간에 놓자. → 10% 배점

해결과정 · 삼각형 ABD 에서

$$\overline{AD} = \overline{AB} \cos 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

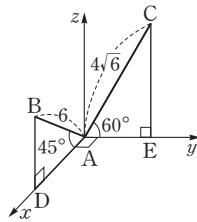
$$\overline{BD} = \overline{AB} \sin 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore B(3\sqrt{2}, 0, 3\sqrt{2}), D(3\sqrt{2}, 0, 0) \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

삼각형 CAE 에서

$$\overline{AE} = \overline{AC} \cos 60^\circ = 4\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{6}$$

$$\overline{CE} = \overline{AC} \sin 60^\circ = 4\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{2}$$



$\therefore C(0, 2\sqrt{6}, 6\sqrt{2}), E(0, 2\sqrt{6}, 0) \rightarrow 20\% \text{ 배점}$
한편 선분 BC 의 평면 α 위로의 정사영은 선분 DE 이고

$$\overline{BC} = \sqrt{(-3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{6})^2 + (6\sqrt{2} - 3\sqrt{2})^2}$$

$$= 2\sqrt{15}$$

$$\overline{DE} = \sqrt{(-3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{6})^2}$$

$$= \sqrt{42}$$

이므로 $\overline{DE} = \overline{BC} \cos \theta$ 에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$$

$$= \frac{\sqrt{42}}{2\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{70}}{10}$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{7}{10} \quad \rightarrow 40\% \text{ 배점}$$

답구하기 · 따라서 $p=10, q=7$ 이므로

$$p+q=17 \quad \rightarrow 10\% \text{ 배점}$$

답 17

17 전략 점 H 를 원점으로 하는 좌표공간을 설정하여 각 점의 좌표를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 H 를 원점으로 하고, 세 모서리 HE, HG, HD 가 각각 x 축, y 축, z 축의 양의 방향과 일치하도록 정육면체를 좌표공간에 놓자.

이때 두 선분 IJ, KL 의 중점을 각각 M, N 이라 하면 $A(8, 0, 8), C(0, 8, 8), D(0, 0, 8)$ 이므로

$$I(2, 0, 8), J(0, 2, 8)$$

$$\therefore M(1, 1, 8)$$

또 $E(8, 0, 0), G(0, 8, 0), H(0, 0, 0)$ 이므로

$$K(6, 0, 0), L(0, 6, 0)$$

$$\therefore N(3, 3, 0)$$

따라서 $\square IKLJ$ 에서

$$\overline{IJ} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

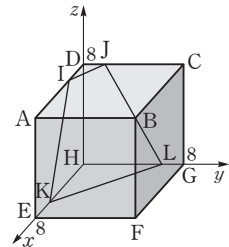
$$\overline{KL} = \sqrt{(-6)^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$$

$$\overline{MN} = \sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2 + (-8)^2}$$

$$= 6\sqrt{2}$$

이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2} + 6\sqrt{2}) \cdot 6\sqrt{2} = 48 \quad \text{답 48}$$



18 **전략** 구의 중심의 좌표를 (a, b, c) 라 하고, 반지름의 길이를 a, b, c 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 구 S 의 반지름의 길이를 r , 중심의 좌표를 $C(a, b, c)$ ($a > 0, b > 0, c > 0$)라 하자.
구 S 가 x 축과 y 축에 접하는 점을 각각 A, B 라 하면

$$A(a, 0, 0), B(0, b, 0)$$

$$r = \overline{AC} = \overline{BC} \text{이므로}$$

$$r^2 = b^2 + c^2 = a^2 + c^2$$

$$\therefore a = b \quad (\because a > 0, b > 0)$$

따라서 구 S 의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-c)^2 = a^2 + c^2 \quad \text{--- ㉠}$$

한편 구 S 가 xy 평면과 만나서 생기는 원의 방정식은 ㉠에 $z=0$ 을 대입하면 되므로

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 + (-c)^2 = a^2 + c^2$$

$$\therefore (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$$

이 원의 넓이가 64π 이므로

$$a^2\pi = 64\pi, \quad a^2 = 64$$

$$\therefore a = 8 \quad (\because a > 0)$$

$a=8$ 을 ㉠에 대입하면

$$(x-8)^2 + (y-8)^2 + (z-c)^2 = 64 + c^2 \quad \text{--- ㉡}$$

또 구 S 가 z 축과 만나는 두 점의 z 좌표는 $x=0, y=0$ 을 ㉡에 대입하면 되므로

$$64 + 64 + (z-c)^2 = 64 + c^2$$

$$(z-c)^2 = c^2 - 64$$

$$\therefore z = c \pm \sqrt{c^2 - 64}$$

구 S 가 z 축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8이므로

$$(c + \sqrt{c^2 - 64}) - (c - \sqrt{c^2 - 64}) = 8$$

$$\sqrt{c^2 - 64} = 4, \quad c^2 - 64 = 16$$

$$\therefore c^2 = 80$$

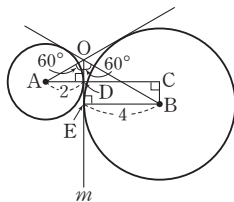
따라서 구 S 의 반지름의 길이는

$$r = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{64 + 80} = 12$$

답 ②

19 **전략** 먼저 세 반평면과 두 구를 모두 평면 π 위로 정사영시켜 본다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 반평면 α, β, γ 와 두 구의 평면 π 위로의 정사영에서 반평면 β 의 정사영을 m , 반지름의 길이가 2, 4인 구의 중심의 정사영을 각각 A, B 라 하자.



또 직선 l 과 평면 π 의 교점을 O , 두 점 A, B 에서 반직선 m 에 내린 수선의 발을 각각 D, E 라 하면

$$\overline{AD} = 2, \overline{BE} = 4$$

직각삼각형 OAD 에서

$$\begin{aligned} \overline{OD} &= \overline{AD} \tan 30^\circ \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

직각삼각형 OEB 에서

$$\begin{aligned} \overline{OE} &= \overline{BE} \tan 30^\circ \\ &= 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$\overline{BC} = \overline{DE} = \overline{OE} - \overline{OD} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이므로 직각삼각형

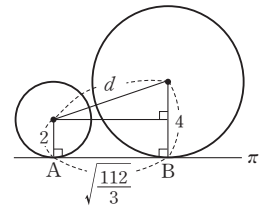
ABC 에서

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{(2+4)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{112}{3}} \end{aligned}$$

또 두 구의 반지름의 길이의 차가 2이므로 오른쪽 그림에서

$$\begin{aligned} d^2 &= 2^2 + \left(\sqrt{\frac{112}{3}}\right)^2 \\ &= \frac{124}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore 3d^2 = 124$$



답 124

IV. 공간벡터

09 공간벡터

유제

본책 240~249쪽

076-1 $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b}$ 이므로

$$\begin{aligned} (-4, 12, 5) &= k(1, 3, -2) + h(-2, 2, 3) \\ &= (k-2h, 3k+2h, -2k+3h) \end{aligned}$$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-4 = k - 2h, \quad 12 = 3k + 2h, \quad 5 = -2k + 3h$$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$$k = 2, \quad h = 3$$

$$\text{답 } k=2, h=3$$

076-2 $3(\vec{a} + \vec{b}) + 2(\vec{a} - 3\vec{c})$

$$\begin{aligned} &= 5\vec{a} + 3\vec{b} - 6\vec{c} \\ &= 5(-1, 1, 1) + 3(4, 1, -3) - 6(1, 2, 0) \\ &= (-5 + 12 - 6, 5 + 3 - 12, 5 - 9 + 0) \\ &= (1, -4, -4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore |3(\vec{a} + \vec{b}) + 2(\vec{a} - 3\vec{c})| &= \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{33} \end{aligned}$$

$$\text{답 } \sqrt{33}$$

076-3 두 벡터 $\vec{a} - \vec{b}$, $-\vec{a} + \vec{c}$ 가 서로 평행하려면

$$\vec{a} - \vec{b} = k(-\vec{a} + \vec{c})$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다. 이때

$$\begin{aligned} \vec{a} - \vec{b} &= (-3, 0, 2) - (m-1, -n+2, 0) \\ &= (-m-2, n-2, 2), \\ -\vec{a} + \vec{c} &= -(-3, 0, 2) + (-7, -2, 3) \\ &= (-4, -2, 1) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} (-m-2, n-2, 2) &= k(-4, -2, 1) \\ &= (-4k, -2k, k) \end{aligned}$$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-m-2 = -4k, \quad n-2 = -2k, \quad 2 = k$$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$$k = 2, \quad m = 6, \quad n = -2$$

$$\text{답 } m=6, n=-2$$

077-1 $\overrightarrow{AB} = (3, 3, -4) - (1, 2, -2)$

$$= (2, 1, -2)$$

이므로 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$

따라서 \overrightarrow{AB} 와 방향이 같고 크기가 9인 벡터는

$$\begin{aligned} 9 \times \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} &= 9 \times \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB} \\ &= 3(2, 1, -2) \\ &= (6, 3, -6) \end{aligned}$$

$$\text{답 } (6, 3, -6)$$

077-2 점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$\overrightarrow{AP} = (x, y, z-1)$$

$$\overrightarrow{BP} = (x-2, y-1, z-3)$$

$\sqrt{2}|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}|$ 이므로

$$\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}$$

$$= \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2}$$

$$2(x^2 + y^2 + (z-1)^2) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2$$

$$\therefore (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 18$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\sqrt{18}$ 인 구이므로 구하는 도형의 겉넓이는

$$4\pi \times (\sqrt{18})^2 = 72\pi$$

$$\text{답 } 72\pi$$

078-1 (1) $\triangle ABE$ 는 정삼각형이므로 두 벡터 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AE} 가 이루는 각의 크기는 60° 이다.

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} &= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AE}| \cos 60^\circ \\ &= 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

(2) $\square ABFD$ 는 정사각형이므로 $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{BD}$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BD} &= |\overrightarrow{AF}| |\overrightarrow{BD}| \cos 90^\circ \\ &= 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{답 } (1) 2 \quad (2) 0$$

079-1 $|\vec{a}| = 7$ 이므로

$$\sqrt{(x-4)^2 + 3^2 + x^2} = 7$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 - 4x - 12 = 0, \quad (x+2)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = 6 \quad (\because x > 0)$$

즉 $\vec{a} = (2, 3, 6)$, $\vec{b} = (12, 1, 1)$ 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 12 + 3 \times 1 + 6 \times 1 = 33$$

$$\text{답 } 33$$

079-2 $t\vec{a} + \vec{b} = t(1, -1, 0) + (-3, 1, 4)$

$$= (t-3, -t+1, 4),$$

$$\vec{a} + t\vec{b} = (1, -1, 0) + t(-3, 1, 4)$$

$$= (-3t+1, t-1, 4t)$$

이므로

$$\begin{aligned}
 f(t) &= (t\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + t\vec{b}) \\
 &= (t-3, -t+1, 4) \cdot (-3t+1, t-1, 4t) \\
 &= (t-3)(-3t+1) + (-t+1)(t-1) + 16t \\
 &= -4t^2 + 28t - 4 \\
 &= -4\left(t - \frac{7}{2}\right)^2 + 45
 \end{aligned}$$

따라서 $f(t)$ 는 $t = \frac{7}{2}$ 일 때 최댓값 45를 갖는다.

답 $\frac{7}{2}$

080-1 두 벡터 \vec{a} , \vec{b} 가 이루는 각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{2}{3}\pi &= \frac{1 \times 2 + 3 \times (-1) - 3x}{\sqrt{1^2 + 3^2 + x^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2}} \\
 -\frac{1}{2} &= \frac{-3x - 1}{\sqrt{x^2 + 10} \sqrt{14}} \\
 6x + 2 &= \sqrt{14}(x^2 + 10)
 \end{aligned}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$\begin{aligned}
 11x^2 + 12x - 68 &= 0, & (11x + 34)(x - 2) &= 0 \\
 \therefore x &= 2 \quad (\because x > 0) & &
 \end{aligned}$$

답 2

080-2 $\vec{AB} = (1, -1, 2) - (1, -1, -1) = (0, 0, 3)$,

$\vec{AC} = (2, 0, 1) - (1, -1, -1) = (1, 1, 2)$

두 벡터 \vec{AB} , \vec{AC} 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} \\
 &= \frac{3 \times 2}{3\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}
 \end{aligned}$$

따라서 $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \Delta ABC &= \frac{1}{2} \times \vec{AB} \times \vec{AC} \times \sin \theta \\
 &= \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

081-1 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 이면 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 (1, 2, x) \cdot (-1, y, 7) &= 0 \\
 -1 + 2y + 7x &= 0
 \end{aligned}$$

..... ㉠

$\vec{b} \perp \vec{c}$ 이면 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 (-1, y, 7) \cdot (z, -1, 1) &= 0 \\
 -z - y + 7 &= 0
 \end{aligned}$$

..... ㉡

$\vec{c} \perp \vec{a}$ 이면 $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 (z, -1, 1) \cdot (1, 2, x) &= 0 \\
 z - 2 + x &= 0
 \end{aligned}$$

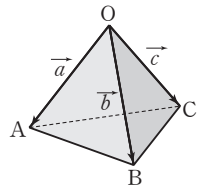
..... ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$x = -1, y = 4, z = 3$$

답 $x = -1, y = 4, z = 3$

081-2 오른쪽 그림과 같이 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ 라 하면



$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = \vec{c} - \vec{b}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \vec{OA} \cdot \vec{BC} &= \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \\
 &= \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b}
 \end{aligned}$$

..... ㉠

이때 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$ 이고 $\angle AOC = \angle AOB = \frac{\pi}{3}$ 이므로 ㉠에서

$$\begin{aligned}
 \vec{OA} \cdot \vec{BC} &= |\vec{a}| |\vec{c}| \cos \frac{\pi}{3} - |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3} = 0 \\
 \therefore \vec{OA} \perp \vec{BC}, &\text{ 즉 } \vec{OA} \perp \vec{BC}
 \end{aligned}$$

답 풀이 참조

중단원 연습 문제

● 본책 250~253쪽

01 ㉠ 02 ㉢ 03 $-\frac{8}{3}$ 04 $\frac{1}{3}$

05 $P\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ 06 $\frac{14}{17}$ 07 12

08 $-\frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ 09 ㉠ 10 ㉣ 11 12

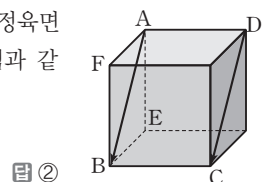
12 $\frac{11}{2}$ 13 ㉢ 14 ㉠ 15 ㉤ 16 106

17 40 18 12

01 (전략) 주어진 전개도로 정육면체를 만들어 \vec{AB} 와 같은 벡터를 찾는다.

(풀이) 주어진 전개도로 정육면체를 만들면 오른쪽 그림과 같으므로

$$\vec{AB} = \vec{DC}$$



답 ㉠

02 **전략** 주어진 벡터를 꼭짓점 A를 시점으로 하는 벡터로 나타낸다.

풀이 $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{AB} + \vec{AD} - \vec{AE}$
 $= (\vec{AB} + \vec{BC}) - \vec{AE}$
 $= \vec{AC} - \vec{AE} = \vec{EC}$

답 ③

Remark

① $\vec{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ② $\vec{DF} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$
 ④ $\vec{FH} = -\vec{a} + \vec{b}$ ⑤ $\vec{HB} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

03 **문제이해** · 두 벡터 $\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{a} - \vec{c}$ 가 서로 평행하면

$$\vec{a} - \vec{c} = k(\vec{a} + 2\vec{b})$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재한다.

→ 30% 배점

해결과정 · $\vec{a} + 2\vec{b} = (-1, 4, 0) + 2(2, 1, -1)$
 $= (3, 6, -2)$,

$\vec{a} - \vec{c} = (-1, 4, 0) - (m+2, 2, n)$
 $= (-m-3, 2, -n)$

이므로

$$(-m-3, 2, -n) = k(3, 6, -2)$$

$$= (3k, 6k, -2k)$$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-m-3=3k, 2=6k, -n=-2k \quad \rightarrow 40\% \text{ 배점}$$

답구하기 · 위의 세 식을 연립하여 풀면

$$k = \frac{1}{3}, m = -4, n = \frac{2}{3}$$

$$\therefore mn = -\frac{8}{3} \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

답 $-\frac{8}{3}$

04 **전략** 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 $\vec{AC} = k\vec{AB}$ 를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.

풀이 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$\vec{AC} = k\vec{AB}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다. 이때

$$\vec{AB} = (x, 2, y) - (2, 3, 5)$$

$$= (x-2, -1, y-5),$$

$$\vec{AC} = (-y+1, 5, 2x-3) - (2, 3, 5)$$

$$= (-y-1, 2, 2x-8)$$

이므로

$$(-y-1, 2, 2x-8) = k(x-2, -1, y-5)$$

$$= (k(x-2), -k, k(y-5))$$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-y-1 = k(x-2), 2 = -k,$$

$$2x-8 = k(y-5)$$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$$k = -2, x = \frac{14}{3}, y = \frac{13}{3}$$

$$\therefore x - y = \frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

05 **전략** $\vec{PA} = \vec{OA} - \vec{OP}$ 임을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

풀이 $2\vec{PA} + \vec{PB} + 3\vec{PC}$
 $= 2(\vec{OA} - \vec{OP}) + (\vec{OB} - \vec{OP}) + 3(\vec{OC} - \vec{OP})$
 $= 2\vec{OA} + \vec{OB} + 3\vec{OC} - 6\vec{OP}$

이므로 $2\vec{OA} + \vec{OB} + 3\vec{OC} - 6\vec{OP} = \vec{0}$

$$\therefore \vec{OP} = \frac{1}{6}(2\vec{OA} + \vec{OB} + 3\vec{OC})$$

이때 $\vec{OA} = (2, 1, -3)$, $\vec{OB} = (-1, 4, 2)$,
 $\vec{OC} = (1, -1, 2)$ 이므로

$$\vec{OP} = \frac{1}{6}\{2(2, 1, -3) + (-1, 4, 2)$$

$$+ 3(1, -1, 2)\}$$

$$= \frac{1}{6}(6, 3, 2)$$

$$= \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ 이다.

답 $P\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

다른 풀이 $2\vec{PA} + \vec{PB} + 3\vec{PC} = \vec{0}$ 에서

$$2\vec{PA} + \vec{PB} = 3\vec{CP}$$

$$\therefore \frac{2\vec{PA} + \vec{PB}}{3} = \vec{CP}$$

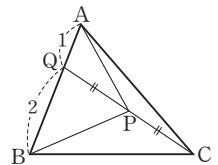
이때 $\frac{2\vec{PA} + \vec{PB}}{3} = \vec{PQ}$ 라

하면 점 Q는 선분 BA를

2 : 1로 내분하는 점이므로

점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{4-1}{3}, \frac{2+4}{3}, \frac{-6+2}{3}\right), \text{ 즉 } \left(1, 2, -\frac{4}{3}\right)$$



또 $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{PQ}$ 에서 점 P는 선분 CQ의 중점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1+1}{2}, \frac{-1+2}{2}, \frac{2+\left(-\frac{4}{3}\right)}{2} \right), \text{ 즉 } \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)$$

06 **전략** 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 의 크기와 내적을 이용한다.

풀이 $\vec{a} = (2, -3, 2), \vec{b} = (1, -4, 0)$ 에서

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, -3, 2) \cdot (1, -4, 0) = 14$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{17}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{17}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos\theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{14}{\sqrt{17}\sqrt{17}} \\ &= \frac{14}{17} \end{aligned}$$

답 $\frac{14}{17}$

07 **해결과정** $\vec{a} \perp \vec{b}$ 이면 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 이므로

$$(9, x+1, -12) \cdot (-8, x, 7) = 0 \quad \rightarrow 50\% \text{ 배점}$$

답구하기 $-72 + x(x+1) - 84 = 0$

$$x^2 + x - 156 = 0$$

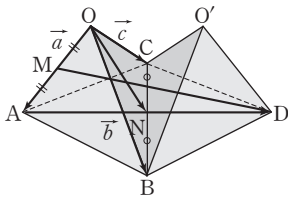
$$(x+13)(x-12) = 0$$

$$\therefore x = 12 (\because x > 0) \quad \rightarrow 50\% \text{ 배점}$$

답 12

08 **전략** $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}$ 이므로 두 벡터 \overrightarrow{MA} 와 \overrightarrow{AD} 를 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 로 나타낸다.

풀이 다음 그림과 같이 선분 BC의 중점을 N이라 하자.



이때 $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$ 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a} \\ &= -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \end{aligned}$$

$\square ABDC$ 가 마름모이므로

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AN}$$

$$\therefore \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AN}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

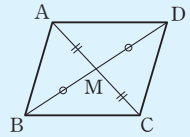
$$= -\frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\text{답 } -\frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Remark 평행사변형에서 벡터의 성질

평행사변형 ABCD에서 두 대각선은 서로를 이등분하므로 두 대각선의 교점을 M이라 하면

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \end{aligned}$$



09 **전략** 점 P가 xy 평면 위의 점임을 이용하여 주어진 벡터를 성분으로 나타낸다.

풀이 점 P의 좌표를 $(x, y, 0)$ 이라 하면

$$\overrightarrow{PA} = (3-x, 4-y, 5),$$

$$\overrightarrow{PB} = (4-x, 8-y, 6),$$

$$\overrightarrow{PC} = (5-x, 3-y, 7)$$

따라서 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = (12-3x, 15-3y, 18)$ 이므로

$$\frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3} = (4-x, 5-y, 6)$$

$$\therefore \left| \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3} \right| = \sqrt{(4-x)^2 + (5-y)^2 + 6^2}$$

따라서 $x=4, y=5$ 일 때 구하는 최솟값은 6이다.

답 ②

다른 풀이 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면

$$G\left(\frac{3+4+5}{3}, \frac{4+8+3}{3}, \frac{5+6+7}{3}\right), \text{ 즉}$$

$$G(4, 5, 6)$$

$$\left| \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3} \right| = |\overrightarrow{PG}| \text{ 이고, } |\overrightarrow{PG}| \text{의 값이 최소}$$

이려면 점 G에서 xy 평면에 내린 수선의 발이 점 P이어야 하므로 $P(4, 5, 0)$

따라서 $|\overrightarrow{PG}|$ 의 최솟값은 6이다.

10 **전략** 중심이 각각 A, B인 두 구가 원점 O에서 서로 접하면 세 점 O, A, B는 한 직선 위에 있어야 한다.

풀이 구 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$ 의 중심을 A라 하면

$$A(1, 2, 1)$$

$$x^2+y^2+z^2+6x+2ay+2bz=0$$

$$(x+3)^2+(y+a)^2+(z+b)^2=9+a^2+b^2$$

이 구의 중심을 B라 하면

$$B(-3, -a, -b)$$

두 구가 원점 O에서 서로 접하면 세 점 O, A, B가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}$$

를 만족시키는 실수 k 가 존재한다. 즉

$$(-3, -a, -b)=k(1, 2, 1)=(k, 2k, k)$$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-3=k, -a=2k, -b=k$$

이므로 $k=-3, a=6, b=3$

$$\therefore a+b=9$$

답 ④

11 **전략** 주어진 입체도형을 좌표공간에 놓고 각 꼭짓점의 좌표를 구한다.

풀이 주어진 도형을 점 B를 원점, $\triangle BCD$ 를 xy 평면, \overrightarrow{BD} 를 y 축의 양의 방향으로 하는 좌표공간에 나타내면

$$B(0, 0, 0), D(0, 6, 0), C(3\sqrt{3}, 3, 0)$$

따라서 $\triangle BCD$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{3\sqrt{3}}{3}, \frac{6+3}{3}, 0\right), \text{ 즉 } (\sqrt{3}, 3, 0)$$

이고, 두 점 A, E에서 xy 평면에 내린 수선의 발이 $\triangle BCD$ 의 무게중심과 일치하므로

$$A(\sqrt{3}, 3, 2\sqrt{6}), E(\sqrt{3}, 3, -2\sqrt{6})$$

$$\text{따라서 } \overrightarrow{BA}=(\sqrt{3}, 3, 2\sqrt{6}),$$

$$\overrightarrow{DE}=(\sqrt{3}, -3, -2\sqrt{6}) \text{ 이므로}$$

$$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DE}=(2\sqrt{3}, 0, 0)$$

$$\therefore |\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DE}|^2=(2\sqrt{3})^2=12$$

답 12

12 **해결과정** 점 P의 좌표를 (x, y, z) 로 놓으면

$$\overrightarrow{PA}=(-3-x, 4-y, -3-z),$$

$$\overrightarrow{PB}=(5-x, -y, 3-z)$$

$$\therefore \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=(2-2x, 4-2y, -2z)$$

$$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=1 \text{ 에서}$$

$$\sqrt{(2-2x)^2+(4-2y)^2+(-2z)^2}=1$$

$$\therefore (x-1)^2+(y-2)^2+z^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \dots\dots \textcircled{1}$$

→ 30% 배점

점 Q의 좌표를 (x, y, z) 로 놓으면

$$\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OA}=(x-3, y+4, z-3)$$

$$|\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OA}|=1 \text{ 에서}$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2+(z-3)^2}=1$$

$$\therefore (x-3)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=1 \dots \textcircled{2}$$

→ 30% 배점

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 두 점 P, Q는 중심의 좌표가 각각

$(1, 2, 0), (3, -4, 3)$ 이고 반지름의 길이가 각각

$\frac{1}{2}, 1$ 인 구 위의 점이다.

→ 10% 배점

답구하기 · 이때 두 구의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(3-1)^2+(-4-2)^2+3^2}=7$$

이므로 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값은

$$7-\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{11}{2}$$

→ 30% 배점

답 $\frac{11}{2}$

13 **전략** 정사면체 ABCD의 각 면은 한 변의 길이가 2인 정삼각형을 이용한다.

풀이 $\triangle ABC, \triangle DBC$ 는 정삼각형이므로

$$\overline{MA}=\overline{MD}=\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2=\sqrt{3}$$

점 A에서 $\triangle BCD$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 $\triangle BCD$ 의 무게중심이므로

$$\overline{MH}=\frac{1}{3} \overline{MD}$$

$\angle AMH=\theta$ 라 하면

$$\cos \theta=\frac{\overline{MH}}{\overline{MA}}=\frac{\frac{1}{3} \overline{MD}}{\overline{MD}}=\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{MA} \cdot \overline{MD} &=|\overline{MA}| |\overline{MD}| \cos \theta \\ &=\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{3}=1 \end{aligned}$$

답 ③

14 **전략** $\overline{AB}=\vec{a}, \overline{AD}=\vec{b}, \overline{AE}=\vec{c}$ 로 놓고, 각각의 벡터를 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 로 나타낸다.

풀이 $\overline{AB}=\vec{a}, \overline{AD}=\vec{b}, \overline{AE}=\vec{c}$ 라 하면

$$\vec{a} \cdot \vec{b}=0, \vec{b} \cdot \vec{c}=0, \vec{c} \cdot \vec{a}=0$$

$$\therefore \overline{AF}=\overline{AB}+\overline{AE}=\vec{a}+\vec{c},$$

$$\overline{FC}=\overline{ED}=\overline{AD}-\overline{AE}=\vec{b}-\vec{c} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{FC} &= (\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{c} \\ &= -|\vec{c}|^2 < 0\end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c},$$

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = \vec{a} - \vec{c} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EB} &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{a} \\ &\quad - \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} - \vec{c} \cdot \vec{c} \\ &= |\vec{a}|^2 - |\vec{c}|^2\end{aligned}$$

$$\text{이때 } \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EB} = 0 \text{ 이면}$$

$$|\vec{a}|^2 - |\vec{c}|^2 = 0$$

$$\therefore |\vec{a}| = |\vec{c}|$$

따라서 사각형 AEFB는 정사각형이다.

$$\text{ㄷ. } \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CE} &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \\ &= -\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \\ &\quad - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} \\ &\quad - \vec{c} \cdot \vec{a} - \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} \\ &= -|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2\end{aligned}$$

$$\text{이때 } \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \text{ 이면}$$

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

따라서 직육면체 ABCD-EFGH는 정육면체가 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㉔

Remark

세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 가 서로 수직이면
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = 0, \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$

15 **전략** 주어진 입체도형을 좌표공간에 놓고 각 꼭짓점의 좌표를 구한다.

풀이 주어진 도형을 점 D를 원점으로 하고 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DF}$ 를 각각 z축, y축의 양의 방향으로 하는 좌표공간에 나타내면

$$A(0, 0, 2), B(\sqrt{3}, 1, 2), C(0, 2, 2),$$

$$D(0, 0, 0), E(\sqrt{3}, 1, 0), F(0, 2, 0)$$

0 이상 2 이하의 실수 p, q, r, s 에 대하여

$$P(0, 0, p), Q(0, 0, q), R(\sqrt{3}, 1, r),$$

$$S(0, 2, s)$$

라 하면

$$\overrightarrow{PR} = (\sqrt{3}, 1, r-p), \overrightarrow{QS} = (0, 2, s-q)$$

$$\therefore \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{QS} = (\sqrt{3}, 3, -p-q+r+s)$$

$$\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{QS} = (\sqrt{3}, -1, -p+q+r-s)$$

$$\begin{aligned}\therefore |\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{QS}| &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2 + (-p-q+r+s)^2} \\ &= \sqrt{(-p-q+r+s)^2 + 12}\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{QS}|$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2 + (-p+q+r-s)^2}$$

$$= \sqrt{(-p+q+r-s)^2 + 4}$$

따라서 $p=q=0, r=s=2$ 일 때 $|\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{QS}|$ 가 최대
 이므로

$$M = \sqrt{4^2 + 12} = 2\sqrt{7}$$

$p=s=0, q=r=2$ 일 때 $|\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{QS}|$ 가 최대이므로

$$m = \sqrt{4^2 + 4} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore M^2 + m^2 = 28 + 20 = 48$$

답 ㉕

16 **전략** 삼수선의 정리를 이용하여 먼저 두 벡터가 이루는 각의 크기에 대한 코사인 값을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직사각형 모양의 종이를 접기 전에 $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB'}$ 이므로

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'}$$

점 B에서 평면 ACD에 내린 수선의 발을 E, 점 E에서 선분 AB'에 내린 수선의 발을 F라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$$\overrightarrow{BF} \perp \overrightarrow{AB'}$$

이때 $\angle BAE = \angle CAB' = \theta$ 로 놓으면 $\triangle CAB'$ 에서

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}$$

따라서 $\triangle AEB$ 에서

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \cos \theta = 3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$$

$\triangle AFE$ 에서

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} \cos \theta = \frac{9}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{27}{25}$$

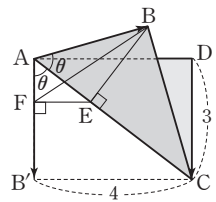
이므로 $\triangle BAF$ 에서

$$\cos(\angle BAF) = \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\frac{27}{25}}{3} = \frac{9}{25}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'}$$

$$= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB'} \times \cos(\angle BAB')$$

$$= 3 \times 3 \times \frac{9}{25} = \frac{81}{25}$$



따라서 $a=25, b=81$ 이므로
 $a+b=106$

답 106

17 문제이해 · 선분 AB의 중점을 M이라 하면

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2}$$

$$\therefore \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CM}$$

두 벡터 $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{CM}$ 이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{OC} &= 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= 2|\overrightarrow{CM}| |\overrightarrow{OC}| \cos \theta \end{aligned}$$

→ 30% 배점

해결과정 · $\overline{AB}=2$ 에서

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CM}| &= \sqrt{|\overrightarrow{CA}|^2 - |\overrightarrow{MA}|^2} \\ &= \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

이고 $C(3, 4, 5)$ 에서

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OC}| &= \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

또 $\cos \theta$ 의 값은 위의 그림과 같이 두 벡터 $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{CM}$ 의 방향이 서로 같을 때 최대이므로

$$\cos \theta \leq 1 \quad \rightarrow 50\% \text{ 배점}$$

답구하기 · 따라서 구하는 최댓값은

$$2 \times 2\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \times 1 = 40 \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

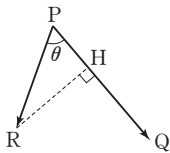
답 40

18 전략 점 R에서 선분 PQ에 수선의 발을 내려 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$ 를 정사영을 이용한 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하고, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} &= |\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{PR}| \cos \theta \\ &= |\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{PR}| \times \frac{|\overrightarrow{PH}|}{|\overrightarrow{PR}|} \\ &= |\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{PH}| \end{aligned}$$

이때 $|\overrightarrow{PQ}|$ 는 일정하므로 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$ 는 $|\overrightarrow{PH}|$, 즉 PH의 길이가 최대, 최소일 때 각각 최댓값과 최솟값을 갖는다.



한편 두 점 A, C에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 라 하면 점 H는 선분 H_1H_2 위에 놓이므로

$$\overline{PH_1} \leq \overline{PH} \leq \overline{PH_2}$$

이때

$$\begin{aligned} \overline{PH_1} = \overline{QH_2} &= \frac{1}{2}(\overline{PQ} - \overline{H_1H_2}) \\ &= \frac{1}{2}(\overline{PQ} - \overline{AC}) \\ &= \frac{1}{2}(2\sqrt{2} - \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

이므로

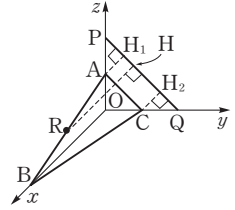
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \overline{PH} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore M = 2\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = 6$$

$$m = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

$$\therefore Mm = 12$$

답 12



10 도형의 방정식

유제

본책 259~288쪽

082-1 (1) $x-1=6(y+1)=3(5-z)$ 에서

$$\frac{x-1}{6}=y+1=\frac{z-5}{-2}$$

이므로 방향벡터는

$$(6, 1, -2)$$

따라서 이 직선에 평행한 직선의 방향벡터를 \vec{u} 라 하면

$$\vec{u}=(6, 1, -2)$$

이므로 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{6}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-2}$$

$$\therefore \frac{x-3}{6}=y-1=\frac{z+1}{-2}$$

(2) z축에 평행한 직선의 방향벡터를 \vec{u} 라 하면

$$\vec{u}=(0, 0, 1)$$

이므로 구하는 직선의 방정식은

$$x=1, y=2$$

$$\text{답 (1) } \frac{x-3}{6}=y-1=\frac{z+1}{-2} \quad (2) x=1, y=2$$

083-1 $4(x+1)=2(y-5)=-z$ 에서

$$x+1=\frac{y-5}{2}=-\frac{z}{4}=t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=t-1, y=2t+5, z=-4t \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } \frac{x+6}{2}=5-y=\frac{10-z}{3}=s \quad (s \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=2s-6, y=5-s, z=10-3s \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$t=-1, s=2$$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $(-2, 3, 4)$ 이다.

$$\text{답 } (-2, 3, 4)$$

다른 풀이 $4(x+1)=2(y-5)=-z$ 에서 y, z 를 x 로 나타내면

$$y=2x+7, z=-4x-4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } \frac{x+6}{2}=5-y=\frac{10-z}{3} \text{에서 } y, z \text{를 } x \text{로 나타내면}$$

$$y=\frac{-x+4}{2}, z=\frac{-3x+2}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$x=-2, y=3, z=4$$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $(-2, 3, 4)$ 이다.

083-2 $x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z=0$ 에서

$$(x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=14 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=5-z=t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=2t-1, y=2t+1, z=5-t \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면

$$(2t+1)^2+(2t)^2+(2-t)^2=14$$

$$9t^2=9, \quad t^2=1$$

$$\therefore t=\pm 1$$

$t=-1, t=1$ 을 ②에 대입하면 구하는 교점의 좌표는

$$(-3, -1, 6), (1, 3, 4)$$

$$\text{답 } (-3, -1, 6), (1, 3, 4)$$

084-1 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} , 두

직선이 이루는 각의 크기를 $\theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ 라 하자.

(1) $\vec{u}=(-2, 3, 1), \vec{v}=(1, 2, 3)$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} \\ &= \frac{|(-2) \times 1 + 3 \times 2 + 1 \times 3|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} \\ &= \frac{7}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

(2) $\vec{u}=(3, -2, 1), \vec{v}=(1, 2, 1)$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} \\ &= \frac{|3 \times 1 + (-2) \times 2 + 1 \times 1|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} \\ &= \frac{0}{\sqrt{14} \sqrt{6}} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

$$\text{답 (1) } \frac{\pi}{3} \quad (2) \frac{\pi}{2}$$

084-2 두 점 A(2, 1, 3), B(1, -3, 4)를 지나는 직선의 방향벡터를 \vec{u} 라 하면

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{AB} = (1, -3, 4) - (2, 1, 3) \\ &= (-1, -4, 1) \end{aligned}$$

또 두 점 C(-3, 2, -1), D(-1, 4, 0)을 지나는 직선의 방향벡터를 \vec{v} 라 하면

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{CD} = (-1, 4, 0) - (-3, 2, -1) \\ &= (2, 2, 1)\end{aligned}$$

두 점 A, B를 지나는 직선과 두 점 C, D를 지나는 직선이 이루는 각의 크기를 $\theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ 라 하면

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ &= \frac{|(-1) \times 2 + (-4) \times 2 + 1 \times 1|}{\sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} \\ &= \frac{9}{3\sqrt{2} \times 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{4} \quad \left(\because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{답 } \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

085-1 직선 m 의 방정식에서

$$\frac{x-1}{2k} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{3}$$

따라서 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} 라 하면

$$\vec{u} = (-2, 5, k+1), \vec{v} = (2k, -2, 3)$$

이때 두 직선이 서로 수직이면 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$\begin{aligned}(-2, 5, k+1) \cdot (2k, -2, 3) &= 0 \\ -4k - 10 + 3(k+1) &= 0 \\ -4k - 10 + 3k + 3 &= 0 \\ -k - 7 &= 0 \quad \therefore k = -7\end{aligned}$$

답 -7

085-2 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} 라 하면

$$\vec{u} = (a, b, 3), \vec{v} = (2, a+1, 4)$$

이때 두 직선이 서로 평행하므로

$$\vec{u} = t\vec{v} \quad (t \neq 0)$$

$$(a, b, 3) = t(2, a+1, 4)$$

$$\therefore a = 2t, b = (a+1)t, 3 = 4t$$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$$t = \frac{3}{4}, a = \frac{3}{2}, b = \frac{15}{8}$$

$$\text{답 } a = \frac{3}{2}, b = \frac{15}{8}$$

다른 풀이 두 직선이 서로 평행하려면 두 직선의 방향벡터가 서로 평행해야 한다.

두 직선 l, m 의 방향벡터가 각각 $(a, b, 3), (2, a+1, 4)$ 이므로

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{a+1} = \frac{3}{4} \quad \therefore a = \frac{3}{2}, b = \frac{15}{8}$$

086-1 $x-2 = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2} = t$ (t 는 실수)로 놓으면

$$x = t+2, y = 3t, z = 2t+1$$

점 A에서 주어진 직선에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 이 직선 위의 점이므로 $H(t+2, 3t, 2t+1)$ 이라 할 수 있다.

$$\begin{aligned}\therefore \vec{AH} &= (t+2, 3t, 2t+1) - (3, 5, 7) \\ &= (t-1, 3t-5, 2t-6)\end{aligned}$$

이때 주어진 직선의 방향벡터를 \vec{u} 라 하면

$$\vec{u} = (1, 3, 2) \text{이고, } \vec{AH} \perp \vec{u} \text{이므로}$$

$$\vec{AH} \cdot \vec{u} = 0$$

$$(t-1, 3t-5, 2t-6) \cdot (1, 3, 2) = 0$$

$$t-1+3(3t-5)+2(2t-6)=0$$

$$14t-28=0 \quad \therefore t=2$$

따라서 $\vec{AH} = (1, 1, -2)$ 이므로 구하는 거리는

$$\begin{aligned}|\vec{AH}| &= |\vec{AH}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{6} \quad \text{답 } \sqrt{6}\end{aligned}$$

다른 풀이 점 A와 주어진 직선 사이의 거리는 점 A와 그 직선 위의 임의의 점 사이의 거리의 최솟값과 같다. 주어진 직선 위의 임의의 점을 P라 하면 점 P의 좌표는 $(t+2, 3t, 2t+1)$ (t 는 실수)이므로

$$\begin{aligned}|\vec{AP}| &= \sqrt{(t-1)^2 + (3t-5)^2 + (2t-6)^2} \\ &= \sqrt{14t^2 - 56t + 62} \\ &= \sqrt{14(t-2)^2 + 6}\end{aligned}$$

따라서 $|\vec{AP}|$ 의 길이의 최솟값은 $t=2$ 일 때 $\sqrt{6}$ 이다.

086-2 $\frac{x-2}{2} = y+1 = z+2 = t$ (t 는 실수)로 놓으면

$$x = 2t+2, y = t-1, z = t-2$$

점 A에서 주어진 직선에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 이 직선 위의 점이므로 $H(2t+2, t-1, t-2)$ 라 할 수 있다.

$$\begin{aligned}\therefore \vec{AH} &= (2t+2, t-1, t-2) - (2, -1, a-2) \\ &= (2t, t, t-a)\end{aligned}$$

이때 주어진 직선의 방향벡터를 \vec{u} 라 하면

$$\vec{u} = (2, 1, 1) \text{이고, } \vec{AH} \perp \vec{u} \text{이므로}$$

$$\vec{AH} \cdot \vec{u} = 0$$

$$(2t, t, t-a) \cdot (2, 1, 1) = 0$$

$$4t + t + t - a = 0, \quad 6t - a = 0$$

$$\therefore a = 6t$$

따라서 $\vec{AH} = (2t, t, -5t)$ 이므로

$$\begin{aligned}|\vec{AH}| &= |\vec{AH}| = \sqrt{(2t)^2 + t^2 + (-5t)^2} \\ &= \sqrt{30t^2}\end{aligned}$$

즉 $\sqrt{30t^2} = \sqrt{30}$ 이므로 $t = \pm 1$

$\therefore a = 6$ ($\because a > 0$)

답 6

087-1 (1) 주어진 직선의 방향벡터가 $(-1, 3, 2)$ 이므로 구하는 평면의 법선벡터를 \vec{n} 이라 하면

$\vec{n} = (-1, 3, 2)$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$-(x-4) + 3(y+1) + 2(z-2) = 0$

$\therefore x - 3y - 2z - 3 = 0$

(2) 주어진 평면의 법선벡터가 $(4, -3, 5)$ 이므로 구하는 평면의 법선벡터를 \vec{n} 이라 하면

$\vec{n} = (4, -3, 5)$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$4(x-2) - 3(y-3) + 5(z+2) = 0$

$\therefore 4x - 3y + 5z + 11 = 0$

답 풀이 참조

088-1 구하는 평면의 방정식을

$ax + by + cz + d = 0$ ㉠

이라 하면 이 평면이 세 점 A, B, C를 지나므로

$a + b - c + d = 0,$

$-a + 2b + c + d = 0,$

$-2a + b - 4c + d = 0$

위의 세 식에서 b, c, d 를 a 로 나타내면

$b = 4a, c = -a, d = -6a$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$ax + 4ay - az - 6a = 0$

$a \neq 0$ 이므로 위의 식의 양변을 a 로 나누면 구하는 평면의 방정식은

$x + 4y - z - 6 = 0$

답 $x + 4y - z - 6 = 0$

다른 풀이 구하는 평면의 법선벡터를 $\vec{n} = (a, b, c)$ 라 하면

$\vec{AB} \perp \vec{n}, \vec{AC} \perp \vec{n}$

$\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$ 에서

$(-2, 1, 2) \cdot (a, b, c) = 0$

$\therefore -2a + b + 2c = 0$ ㉢

$\vec{AC} \cdot \vec{n} = 0$ 에서

$(-3, 0, -3) \cdot (a, b, c) = 0$

$\therefore -3a - 3c = 0$ ㉣

㉢, ㉣에서 b, c 를 a 로 나타내면

$b = 4a, c = -a$

따라서 구하는 평면은 점 A(1, 1, -1)을 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (a, 4a, -a)$ 이므로 그 방정식은

$a(x-1) + 4a(y-1) - a(z+1) = 0$

$a \neq 0$ 이므로 위의 식의 양변을 a 로 나누면 구하는 평면의 방정식은

$x + 4y - z - 6 = 0$

089-1 두 점 $(-1, 6, 8), (3, 0, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x - (-1)}{3 - (-1)} = \frac{y - 6}{0 - 6} = \frac{z - 8}{4 - 8}$

$\therefore \frac{x+1}{2} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-8}{-2}$

$\frac{x+1}{2} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-8}{-2} = t$ (t 는 실수)로 놓으면

$x = 2t - 1, y = -3t + 6, z = -2t + 8$

이교 직선과 평면의 교점을 A라 하면 점 A는 직선 위의 점이므로 $A(2t-1, -3t+6, -2t+8)$ 로 놓을 수 있다.

이때 점 A는 평면 $x - 2y + z = 1$ 위의 점이므로

$2t - 1 - 2(-3t + 6) + (-2t + 8) = 1$

$6t = 6 \quad \therefore t = 1$

따라서 A(1, 3, 6)이므로 교점의 z좌표는 6이다.

답 6

089-2 벡터 \vec{AH} 와 평면

$4x - 5y + 3z = 0$ 은 서로 수직

이므로 직선 AH의 방향벡터

는 주어진 평면의 법선벡터

$(4, -5, 3)$ 과 같다.

따라서 직선 AH의 방정식은

$\frac{x-7}{4} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-9}{3}$ ㉠

$\frac{x-7}{4} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-9}{3} = t$ (t 는 실수)로 놓으면

$x = 4t + 7, y = -5t + 1, z = 3t + 9$

이교 점 H는 직선 ㉠ 위의 점이므로

$H(4t+7, -5t+1, 3t+9)$ 로 놓을 수 있다.

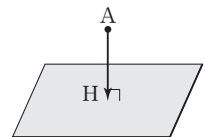
이때 점 H는 평면 $4x - 5y + 3z = 0$ 위의 점이므로

$4(4t+7) - 5(-5t+1) + 3(3t+9) = 0$

$50t + 50 = 0 \quad \therefore t = -1$

따라서 점 H의 좌표는 $(3, 6, 6)$ 이다.

답 H(3, 6, 6)



090-1 평면 α 에 대하여 점 A와 대칭인 점을 $A'(a, b, c)$ 라 하면 선분 AA' 의 중점

$(\frac{a-4}{2}, \frac{b+1}{2}, \frac{c+3}{2})$ 은 평면 α 위에 있으므로

$$3 \times \frac{a-4}{2} - \frac{b+1}{2} + 2 \times \frac{c+3}{2} = 7$$

$$\therefore 3a - b + 2c - 21 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

이때 평면 α 의 법선벡터를 \vec{n} 이라 하면 $\vec{n} = (3, -1, 2)$ 이고, $\overline{AA'} \parallel \vec{n}$ 이므로

$$\overline{AA'} = t\vec{n} \quad (t \neq 0)$$

이때 $\overline{AA'} = (a+4, b-1, c-3)$ 이므로

$$(a+4, b-1, c-3) = t(3, -1, 2)$$

$$a+4 = 3t, \quad b-1 = -t, \quad c-3 = 2t$$

$$\therefore a = 3t - 4, \quad b = -t + 1, \quad c = 2t + 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$3(3t-4) - (-t+1) + 2(2t+3) - 21 = 0$$

$$14t - 28 = 0 \quad \therefore t = 2$$

$t=2$ 를 ②에 대입하면 $a=2, b=-1, c=7$ 이므로 구하는 점의 좌표는

$$(2, -1, 7) \quad \text{답} (2, -1, 7)$$

091-1 $2x+3y+z-4=0$ $\cdots \textcircled{1}$

$x-y+z-1=0$ $\cdots \textcircled{2}$

①, ②에서 z 를 소거하면

$$x+4y-3=0 \quad \therefore y = \frac{3-x}{4} \quad \cdots \textcircled{3}$$

또 ①, ②에서 x 를 소거하면

$$5y-z-2=0 \quad \therefore y = \frac{z+2}{5} \quad \cdots \textcircled{4}$$

③, ④에서 구하는 교선의 방정식은

$$\frac{3-x}{4} = y = \frac{z+2}{5} \quad \text{답} \frac{3-x}{4} = y = \frac{z+2}{5}$$

091-2 주어진 두 평면의 교선을 포함하는 평면의 방정식을

$$x-2y+z+3+k(3x+y-z-1)=0$$

(k 는 실수)

이라 하면 이 평면이 점 $(1, -1, 2)$ 를 지나므로

$$1+2+2+3+k(3-1-2-1)=0$$

$$8-k=0 \quad \therefore k=8$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$x-2y+z+3+8(3x+y-z-1)=0$$

$$\therefore 25x+6y-7z-5=0$$

$$\text{답} 25x+6y-7z-5=0$$

092-1 두 평면의 법선벡터를 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 라 하면 $\vec{n}_1 = (3, -1, 2), \vec{n}_2 = (2, 1, 3)$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

$$= \frac{|3 \times 2 + (-1) \times 1 + 2 \times 3|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}}$$

$$= \frac{11}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = \frac{11}{14}$$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{14}\right)^2}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{14} \quad \text{답} \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

092-2 두 평면의 법선벡터를 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 라 하면 $\vec{n}_1 = (1, k-1, 2-k), \vec{n}_2 = (1, 2, -2)$

두 평면이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{|1 \times 1 + 2(k-1) - 2(2-k)|}{\sqrt{1^2 + (k-1)^2 + (2-k)^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{|4k-5|}{3\sqrt{2(k^2-3k+3)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|4k-5| = 3\sqrt{k^2-3k+3}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$16k^2 - 40k + 25 = 9(k^2 - 3k + 3)$$

$$7k^2 - 13k - 2 = 0, \quad (7k+1)(k-2) = 0$$

$$\therefore k = -\frac{1}{7} \quad (\because k < 0) \quad \text{답} -\frac{1}{7}$$

093-1 직선의 방향벡터와 평면의 법선벡터를 각각 \vec{u}, \vec{n} 이라 하면

$$\vec{u} = (3, 5, 4), \quad \vec{n} = (4, 5, -3)$$

직선과 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|}$$

$$= \frac{|3 \times 4 + 5 \times 5 + 4 \times (-3)|}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 4^2} \sqrt{4^2 + 5^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{25}{\sqrt{50} \sqrt{50}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6} \quad (\because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \quad \text{답} \frac{\pi}{6}$$

094-1 두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 라 하면

$$\vec{n}_1 = (2, k-3, 1), \vec{n}_2 = (k+2, -2, 2)$$

두 평면이 서로 평행하면

$$\vec{n}_1 = t\vec{n}_2 \quad (t \text{는 실수})$$

$$(2, k-3, 1) = t(k+2, -2, 2)$$

즉 $2 = t(k+2), k-3 = -2t, 1 = 2t$ 이므로

$$t = \frac{1}{2}, k = 2$$

답 2

094-2 직선의 방향벡터와 평면의 법선벡터를 각각 \vec{u}, \vec{n} 이라 하면

$$\vec{u} = (4, 1-k, k), \vec{n} = (1, k, 2)$$

직선과 평면이 평행하려면 $\vec{u} \perp \vec{n}$ 이어야 하므로

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0, \quad (4, 1-k, k) \cdot (1, k, 2) = 0$$

$$4 + k(1-k) + 2k = 0$$

$$k^2 - 3k - 4 = 0, \quad (k+1)(k-4) = 0$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 4$$

답 -1, 4

095-1 법선벡터가 $\vec{n} = (3, -5, 4)$ 이므로 평면의 방정식을 $3x - 5y + 4z + d = 0$ 이라 하자.

원점과 이 평면 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|d|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + 4^2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{|d|}{5\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \therefore d = \pm 10$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$3x - 5y + 4z - 10 = 0,$$

$$3x - 5y + 4z + 10 = 0$$

$$\text{답 } 3x - 5y + 4z - 10 = 0, 3x - 5y + 4z + 10 = 0$$

095-2 평면의 법선벡터는 $\vec{OA} = (-3, 5, 4)$ 이므로 점 A를 지나고 직선 OA에 수직인 평면의 방정식은

$$-3(x+3) + 5(y-5) + 4(z-4) = 0$$

$$\therefore 3x - 5y - 4z + 50 = 0$$

점 $(a, 0, 7)$ 과 평면 $3x - 5y - 4z + 50 = 0$ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|3a - 5 \times 0 - 4 \times 7 + 50|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-4)^2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{|3a + 22|}{5\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \quad |3a + 22| = 10$$

$$3a + 22 = -10 \text{ 또는 } 3a + 22 = 10$$

$$\therefore a = -\frac{32}{3} \text{ 또는 } a = -4$$

따라서 구하는 정수 a 의 값은 -4 이다.

답 -4

096-1 점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$\vec{AP} = (x-3, y+4, z),$$

$$\vec{BP} = (x-1, y-2, z+3)$$

$\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$ 에서

$$(x-3, y+4, z) \cdot (x-1, y-2, z+3) = 0$$

$$(x-3)(x-1) + (y+4)(y-2) + z(z+3) = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 + y^2 + 2y - 8 + z^2 + 3z = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\frac{7}{2}$

인 구이므로 구하는 겉넓이는

$$4\pi \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 49\pi$$

답 49 π

다른 풀이 $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$ 에서 $\angle APB = 90^\circ$ 이므로 점 P가 나타내는 도형은 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 구이다.

$AB = \sqrt{(1-3)^2 + (2+4)^2 + (-3)^2} = 7$ 이므로 구의

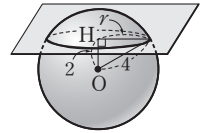
반지름의 길이는 $\frac{7}{2}$

따라서 구하는 겉넓이는

$$4\pi \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 49\pi$$

097-1 오른쪽 그림과 같이

구의 중심을 $O(0, 0, 0)$, 점 O에서 주어진 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{OH} = \frac{|-6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{6}{3} = 2$$

이때 구의 반지름의 길이는 4이므로 단면인 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$r^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

따라서 구하는 단면의 넓이는

$$\pi r^2 = 12\pi$$

답 12 π

098-1 $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 6 = 0$ 에서

$$x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 11$$

이므로 구의 중심을 C라 하면 C(0, 1, -2)

$$\begin{aligned} \therefore \vec{CA} &= (1, -2, -3) - (0, 1, -2) \\ &= (1, -3, -1) \end{aligned}$$

이때 벡터 \vec{CA} 는 구하는 평면에 수직이므로 구하는 평면의 법선벡터를 \vec{n} 이라 하면

$$\vec{n} = (1, -3, -1)$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$x - 1 - 3(y + 2) - (z + 3) = 0$$

$$\therefore x - 3y - z - 10 = 0$$

답 $x - 3y - z - 10 = 0$

098-2 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y + 3 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 17$$

이므로 중심이 (2, -4, 0)이고 반지름의 길이가 $\sqrt{17}$ 인 구이다.

구와 평면이 접하면 구의 중심 (2, -4, 0)과 평면 $2x + ay + 2z - 9 = 0$ 사이의 거리가 구의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|2 \times 2 - 4a + 2 \times 0 - 9|}{\sqrt{2^2 + a^2 + 2^2}} = \sqrt{17}$$

$$\frac{|-4a - 5|}{\sqrt{a^2 + 8}} = \sqrt{17}$$

$$|-4a - 5| = \sqrt{17(a^2 + 8)}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 40a + 111 = 0, \quad (a-3)(a-37) = 0$$

이때 $0 < a < 10$ 이므로 $a = 3$

답 3

중단원 연습 문제

◆ 본책 289~293쪽

01 ③ 02 $\frac{3-x}{2} = \frac{1-y}{3} = \frac{z+1}{5}$ 03 5

04 ③ 05 $x+y-z-1=0$ 06 ⑤ 07 10

08 3 09 $6x+9y-7z-3=0$ 10 ③

11 ① 12 $\frac{\sqrt{30}}{4}$ 13 ② 14 ② 15 ②

16 풀이 참조 17 53 18 -2 19 36

20 $\frac{27\sqrt{5}}{4}$ 21 ① 22 $3\sqrt{3}$ 23 $8\sqrt{5}$

01 [전략] 방향벡터가 서로 같은 직선을 찾은 후 같은 점을 지나는지 확인한다.

풀이 ㄱ. 직선 $\vec{x} = (3, 1, 1) + t(-1, 2, 1)$ 의 방향벡터는 (-1, 2, 1)

ㄴ. 직선 $-x+2=2y+3=z+2$ 에서

$$\frac{x-2}{-2} = y + \frac{3}{2} = \frac{z+2}{2}$$

이므로 이 직선의 방향벡터는 (-2, 1, 2)

ㄷ. 직선 $-x = \frac{y-1}{2} = z-1$ 의 방향벡터는

$$(-1, 2, 1)$$

ㄹ. 주어진 식에서 t 를 소거하면

$$-x+7 = \frac{y+7}{2} = z+3$$

이므로 이 직선의 방향벡터는

$$(-1, 2, 1)$$

ㄱ, ㄷ, ㄹ의 방향벡터가 서로 같으므로 ㄱ, ㄷ, ㄹ은 서로 평행한 직선이다.

이때 ㄱ의 직선이 점 (3, 1, 1)을 지나므로 ㄷ, ㄹ의 직선이 점 (3, 1, 1)을 지나는지 확인해야 한다.

ㄷ의 방정식에 $x=3, y=1, z=1$ 을 대입하면 등식이 성립하지 않으므로 이 직선은 점 (3, 1, 1)을 지나지 않는다.

ㄹ의 방정식에 $x=3, y=1, z=1$ 을 대입하면 등식이 성립하므로 이 직선은 점 (3, 1, 1)을 지난다.

이상에서 ㄱ과 ㄹ은 서로 같은 직선이다.

답 ③

02 [전략] 두 직선을 각각 매개변수방정식으로 나타낸다.

풀이 $x-2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2} = t$ (t 는 실수)로 놓으면

$$x=t+2, \quad y=2t-1, \quad z=2t-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{3-z}{4} = s$ (s 는 실수)로 놓으면

$$x=2s+1, \quad y=3s-2, \quad z=3-4s \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$t=1, \quad s=1$$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 (3, 1, -1)이므로 두 점 (3, 1, -1), (1, -2, 4)를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{1-3} = \frac{y-1}{-2-1} = \frac{z+1}{4+1}$$

$$\therefore \frac{3-x}{2} = \frac{1-y}{3} = \frac{z+1}{5}$$

$$\text{답} \quad \frac{3-x}{2} = \frac{1-y}{3} = \frac{z+1}{5}$$

03 **전략** 두 직선이 평행하면 두 직선의 방향벡터가 평행함을 이용한다.

풀이 주어진 두 직선의 방정식을 변형하면

$$l: \frac{2x+1}{a} = \frac{y}{4} = \frac{z+6}{8}$$

$$m: \frac{x+5}{b} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-1}{a}$$

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} 라 하면

$$\vec{u} = \left(\frac{a}{2}, 4, 8\right), \vec{v} = (b, 2, a)$$

두 직선 l, m 이 서로 평행하므로

$$\vec{u} = k\vec{v} \quad (k \text{는 실수})$$

$$\left(\frac{a}{2}, 4, 8\right) = k(b, 2, a) = (bk, 2k, ak)$$

$$\text{즉 } \frac{a}{2} = bk, 4 = 2k, 8 = ak \text{이므로}$$

$$k=2, a=4, b=1$$

$$\therefore a+b=5$$

답 5

04 **전략** 직선과 평면이 서로 수직이면 직선의 방향벡터와 평면의 법선벡터가 서로 평행함을 이용한다.

풀이 두 점 P(2, 3, 4), Q(1, 4, 3)을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\vec{PQ} = (1, 4, 3) - (2, 3, 4)$$

$$= (-1, 1, -1)$$

이므로 두 점 P, Q를 지나는 직선과 수직인 평면의 법선벡터는 벡터 $\vec{PQ} = (-1, 1, -1)$ 과 평행하다.

따라서 보기 중 법선벡터가 $(-1, 1, -1)$ 과 평행한 평면은 ③이다.

답 ③

05 **문제이해** 주어진 두 평면의 교선을 포함하는 평면의 방정식은

$$2x+5y-6z-3+k(x-2y+3z)=0$$

$$(k \text{는 실수})$$

즉 $(2+k)x + (5-2k)y + (-6+3k)z - 3 = 0$ 으로 놓자.

→ 30% 배점

해결과정 이 평면의 법선벡터를 \vec{n} 이라 하면

$$\vec{n} = (2+k, 5-2k, -6+3k)$$

이때 벡터 \vec{h} 와 구하는 평면이 평행하므로 두 벡터 \vec{h}, \vec{n} 은 서로 수직이다.

즉 $\vec{h} \perp \vec{n}$ 이므로 $\vec{h} \cdot \vec{n} = 0$ → 30% 배점

$$(2, -1, 1) \cdot (2+k, 5-2k, -6+3k) = 0$$

$$4+2k-5+2k-6+3k=0, \quad 7k-7=0$$

$$\therefore k=1 \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

답구하기 따라서 구하는 평면의 방정식은

$$3x+3y-3z-3=0$$

$$\therefore x+y-z-1=0 \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

$$\text{답} \quad x+y-z-1=0$$

06 **전략** 두 평면이 평행하면 두 평면의 법선벡터가 평행하고, 두 평면이 수직이면 두 평면의 법선벡터가 수직임을 이용한다.

풀이 두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 라 하면

$$\vec{n}_1 = (2, k, -1), \vec{n}_2 = (k, 8, 2)$$

α, β 가 서로 평행하므로 $\vec{n}_1 = s\vec{n}_2$ (s 는 실수)

$$(2, k, -1) = s(k, 8, 2) = (sk, 8s, 2s)$$

즉 $2=sk, k=8s, -1=2s$ 이므로

$$s = -\frac{1}{2}, k = -4$$

두 평면 γ, δ 의 법선벡터를 각각 \vec{n}_3, \vec{n}_4 라 하면

$$\vec{n}_3 = (1, 1, -2a), \vec{n}_4 = (3, a, 1)$$

γ, δ 가 서로 수직이므로

$$\vec{n}_3 \cdot \vec{n}_4 = 0$$

$$(1, 1, -2a) \cdot (3, a, 1) = 0$$

$$3+a-2a=0 \quad \therefore a=3$$

$$\therefore a-k=7$$

답 ⑤

07 **전략** 구가 평면에 접하면 구의 반지름의 길이는 구의 중심과 평면 사이의 거리와 같다.

풀이 구의 반지름의 길이를 r 라 하면 구가 평면에 접하므로 구의 중심 (1, 1, 1)과 평면

$x+2y-2z=31$, 즉 $x+2y-2z-31=0$ 사이의 거리는 구의 반지름의 길이 r 와 같다.

$$\therefore r = \frac{|1 \times 1 + 2 \times 1 - 2 \times 1 - 31|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{30}{3} = 10$$

답 10

08 문제이해 · 주어진 평면의 법선벡터를 \vec{n} 이라 하면 $\vec{n}=(a, 1, -1)$ 이고 이 평면과 수직인 직선의 방향벡터는 \vec{n} 과 평행하다. 따라서 점 $(0, 2, -3)$ 을 지나고 방향벡터가 \vec{n} 에 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$$

$$\therefore \frac{x}{a} = y-2 = -z-3$$

$\frac{x}{a} = y-2 = -z-3 = t$ (t 는 실수)로 놓으면

$$x=at, y=t+2, z=-t-3$$

따라서 이 직선 위의 점의 좌표를 $(at, t+2, -t-3)$ 으로 놓을 수 있다. \rightarrow 30% 배점

해결과정 · 점 $(at, t+2, -t-3)$ 을 $x^2+y^2+z^2=8$ 에 대입하면

$$(at)^2 + (t+2)^2 + (-t-3)^2 = 8$$

$$\therefore (a^2+2)t^2 + 10t + 5 = 0 \quad \cdots \textcircled{1} \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

이때 t 에 대한 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 서로 다른 실근의 개수가 구와 직선의 교점의 개수와 같으므로 구와 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 5^2 - 5(a^2+2) > 0, \quad a^2 < 3$$

$$\therefore -\sqrt{3} < a < \sqrt{3} \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

답구하기 · 따라서 구하는 정수 a 의 개수는 $-1, 0, 1$ 의 3이다. \rightarrow 10% 배점

답 3

09 문제이해 · 구하는 평면의 법선벡터를 $\vec{n}=(a, b, c)$ 라 하면 평면의 방정식은

$$a(x-2) + b(y+1) + cz = 0$$

$$\therefore ax + by + cz - 2a + b = 0 \quad \cdots \textcircled{1} \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

해결과정 · $\frac{x-1}{2} = y-2 = \frac{z-3}{3} = t$ (t 는 실수)로 놓으면

$$x=2t+1, y=t+2, z=3t+3$$

이므로 직선 위의 임의의 점을 P라 하면 $P(2t+1, t+2, 3t+3)$ 으로 놓을 수 있다.

이때 점 P는 평면 $\textcircled{1}$ 위의 점이므로

$$a(2t+1) + b(t+2) + c(3t+3) - 2a + b = 0$$

$$\therefore (2a+b+3c)t - a + 3b + 3c = 0 \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

위의 식은 t 에 대한 항등식이므로

$$2a+b+3c=0, \quad -a+3b+3c=0$$

앞의 두 식에서 b, c 를 a 로 나타내면

$$b = \frac{3}{2}a, \quad c = -\frac{7}{6}a \quad \cdots \textcircled{2} \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

답구하기 · $\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$ax + \frac{3}{2}ay - \frac{7}{6}az - 2a + \frac{3}{2}a = 0$$

$a \neq 0$ 이므로 위의 식의 양변을 a 로 나누면 구하는 평면의 방정식은

$$6x + 9y - 7z - 3 = 0 \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

$$\textcircled{2} \quad 6x + 9y - 7z - 3 = 0$$

다른 풀이 구하는 평면의 법선벡터를 $\vec{n}=(a, b, c)$ 라 하면 평면의 방정식은

$$a(x-2) + b(y+1) + cz = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

이때 주어진 직선 위의 두 점 $(1, 2, 3), (-1, 1, 0)$ 은 평면 $\textcircled{1}$ 위에 있으므로

$$-a + 3b + 3c = 0, \quad -3a + 2b = 0$$

위의 두 식에서 b, c 를 a 로 나타내면

$$b = \frac{3}{2}a, \quad c = -\frac{7}{6}a \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$6x + 9y - 7z - 3 = 0 \quad (\because a \neq 0)$$

10 전략 점 H의 좌표를 매개변수로 나타낸다.

풀이 평면 α 의 법선벡터를 \vec{n} 이라 하면 $\vec{n}=(1, -1, -1)$ 이고 α 와 수직인 직선은 \vec{n} 과 평행하다. 따라서 점 P(1, 1, 2)를 지나고 \vec{n} 에 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$$

$$\therefore x-1 = 1-y = 2-z \quad \cdots \textcircled{1}$$

$x-1 = 1-y = 2-z = t$ (t 는 실수)로 놓으면

$$x=t+1, y=1-t, z=2-t$$

점 H는 직선 $\textcircled{1}$ 위의 점이므로 $H(t+1, 1-t, 2-t)$ 로 놓을 수 있다.

이때 점 H는 평면 α 위의 점이므로

$$t+1 - (1-t) - (2-t) = 0$$

$$3t-2=0 \quad \therefore t = \frac{2}{3}$$

$$\therefore H\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

따라서 $\vec{OH} = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 이고, $\vec{OA} = (3, 3, 0)$,

$\vec{OB} = (2, 0, 2)$ 이므로 $\vec{OH} = a\vec{OA} + b\vec{OB}$ 에서

$$\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = a(3, 3, 0) + b(2, 0, 2)$$

$$= (3a+2b, 3a, 2b)$$

즉 $3a+2b=\frac{5}{3}$, $3a=\frac{1}{3}$, $2b=\frac{4}{3}$ 이므로

$$a=\frac{1}{9}, b=\frac{2}{3}$$

$$\therefore a+b=\frac{7}{9}$$

답 ③

11 **전략** 두 평면의 교선의 방정식은 두 평면의 방정식을 연립하여 한 문자에 대한 방정식으로 나타낸다.

풀이 $x-2z-7=0$ 에서 $z=\frac{x-7}{2}$

$y-3z-14=0$ 에서 $z=\frac{y-14}{3}$

따라서 직선 l 의 방정식은

$$\frac{x-7}{2} = \frac{y-14}{3} = z$$

$$\frac{x-7}{2} = \frac{y-14}{3} = z = t \text{ (} t \text{는 실수)} \text{로 놓으면}$$

$$x=2t+7, y=3t+14, z=t$$

따라서 원점에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 점 H 는 직선 l 위의 점이므로 $H(2t+7, 3t+14, t)$ 로 놓을 수 있다.

이때 직선 l 의 방향벡터를 \vec{u} 라 하면 $\vec{u}=(2, 3, 1)$

이고, $\vec{OH} \perp \vec{u}$ 이므로

$$\vec{OH} \cdot \vec{u} = 0$$

$$(2t+7, 3t+14, t) \cdot (2, 3, 1) = 0$$

$$2(2t+7) + 3(3t+14) + t = 0$$

$$14t + 56 = 0 \quad \therefore t = -4$$

따라서 $H(-1, 2, -4)$ 이므로

$$a = -1, b = 2, c = -4$$

$$\therefore a+b+c = -3$$

답 ①

12 **전략** 두 벡터 \vec{OA} , \vec{OB} 가 이루는 각의 크기를 이용하여 $\triangle OAB$ 의 넓이를 구한다.

풀이 직선 l 은 두 평면 $x-y=2$, $2x-z=5$ 의 교선이다.

$x-y=2$ 에서 $x=y+2$

$2x-z=5$ 에서 $x=\frac{z+5}{2}$

이므로 직선 l 의 방정식은

$$x=y+2 = \frac{z+5}{2}$$

두 점 A, B 의 좌표는 각각 $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $(2, 0, -1)$

이므로

$$\vec{OA} = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \vec{OB} = (2, 0, -1)$$

두 벡터 \vec{OA} , \vec{OB} 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|}$$

$$= \frac{\frac{5}{2} \times 2}{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{\frac{10}{13}}$$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{10}{13}}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{39}}{13}$$

따라서 $\triangle OAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} |\vec{OA}| |\vec{OB}| \sin \theta = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{26}}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{\sqrt{39}}{13}$$

$$= \frac{\sqrt{30}}{4}$$

답 $\frac{\sqrt{30}}{4}$

13 **전략** 점 D 에서 면 ABC 에 내린 수선의 발이 $\triangle ABC$ 의 무게중심과 일치함을 이용한다.

풀이 점 D 의 좌표를 (a, b, c) 라 하고 $\triangle ABC$ 의 무게중심을 G 라 하면

$$\vec{GD} = (a-1, b-1, c-3)$$

점 D 에서 면 ABC 에 내린 수선의 발은 점 G 와 일치하므로 \vec{GD} 는 평면 $2x-y+z=4$ 에 수직이다.

따라서 \vec{GD} 는 평면 $2x-y+z=4$ 의 법선벡터

$\vec{n} = (2, -1, 1)$ 과 평행하므로

$$\vec{GD} = t\vec{n} \text{ (} t \text{는 실수)}$$

$$(a-1, b-1, c-3) = t(2, -1, 1)$$

$$a-1=2t, b-1=-t, c-3=t$$

$$\therefore a=2t+1, b=-t+1, c=t+3$$

이때 점 $D(2t+1, -t+1, t+3)$ 은 평면

$x+y+z=3$ 위의 점이므로

$$(2t+1) + (-t+1) + (t+3) = 3$$

$$2t+5=3 \quad \therefore t=-1$$

따라서 $a = -1, b = 2, c = 2$ 이므로

$$\overrightarrow{GD} = (-2, 1, -1)$$

$$\therefore |\overrightarrow{GD}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

정사면체 ABCD의 한 모서리의 길이를 x 라 하면

$$\overline{AG} = \frac{\sqrt{3}}{2}x \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

따라서 $\triangle ADG$ 에서

$$x^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2 + (\sqrt{6})^2, \quad \frac{2}{3}x^2 = 6$$

$$\therefore x = 3 (\because x > 0)$$

답 ②

14 **전략** 한 평면 위의 점과 다른 평면 사이의 거리를 구한다.

풀이 점 (a, b, c) 가 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 위에 있으므로 $a^2 + b^2 + c^2 = 4$

두 평면 α, β 는 서로 평행하므로 두 평면 사이의 거리는 평면 β 위의 한 점 $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ 과 평면 α 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$$\frac{\left| a \times \frac{1}{a} + b \times \frac{1}{b} + c \times \frac{1}{c} - 1 \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$$

답 ②

다른 풀이 점 (a, b, c) 가 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 위의 점이므로 $a^2 + b^2 + c^2 = 4$

원점과 평면 α 사이의 거리는

$$\frac{|-1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

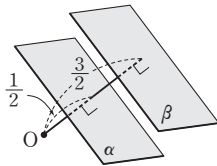
또 원점과 평면 β 사이의 거리는

$$\frac{|-3|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{3}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

이때 두 평면이 평행하므로

오른쪽 그림에서 구하는 두 평면 사이의 거리는

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$



15 **전략** 구의 중심과 평면 사이의 거리를 이용한다.

풀이 구의 중심의 좌표가 $(1, 2, 3)$ 이므로 구의 중심과 평면 $x + y + z = 10$ 사이의 거리는

$$\frac{|1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 - 10|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

구의 반지름의 길이가 1이므로 구하는 최솟값은

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} - 1 = \frac{4\sqrt{3} - 3}{3}$$

답 ②

Remark

구 위의 점과 평면 사이의 거리의 최댓값은 구의 중심과 평면 사이의 거리에서 구의 반지름의 길이를 더한 값과 같다. 즉 반지름의 길이가 r 인 구의 중심과 평면 사이의 거리가 l 일 때, 구 위의 점과 평면 사이의 거리의 최댓값은 $l+r$, 최솟값은 $l-r$ 이다. (단, $l > r$)

10
도형의 방정식

16 **문제해해** 주어진 등식에서

$$3|\vec{p}|^2 + (2\vec{a} - 8\vec{b}) \cdot \vec{p} + (2\vec{b} + \vec{a}) \cdot (2\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$(3\vec{p} - (2\vec{b} + \vec{a})) \cdot (\vec{p} - (2\vec{b} - \vec{a})) = 0$$

$$\therefore \left(\vec{p} - \frac{2\vec{b} + \vec{a}}{3}\right) \cdot \left(\vec{p} - (2\vec{b} - \vec{a})\right) = 0$$

→ 30% 배점

해결과정 이때 $\frac{2\vec{b} + \vec{a}}{3} = \frac{2\vec{b} + \vec{a}}{2+1}$ 는 선분 AB를

2:1로 내분하는 점의 위치벡터이고,

$2\vec{b} - \vec{a} = \frac{2\vec{b} - \vec{a}}{2-1}$ 는 선분 AB를 2:1로 외분하는 점의 위치벡터이다.

→ 30% 배점

답구하기 따라서 점 P의 자취는 선분 AB를 2:1로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 구이다.

→ 40% 배점

답 풀이 참조

17 **전략** 점 A의 좌표를 구하여 구의 반지름의 길이를 구한다.

풀이 $\frac{x}{2} = y = z + 3 = t$ (t 는 실수)로 놓으면

$$x = 2t, y = t, z = t - 3$$

점 A가 이 직선 위에 있으므로 점 A의 좌표를

$A(2t, t, t-3)$ 으로 놓을 수 있다.

또 점 A는 평면 α 위의 점이므로

$$2t + 2t + 2(t-3) = 6, \quad 6t - 6 = 6$$

$$\therefore t = 2$$

$$\therefore A(4, 2, -1)$$

중심이 점 $(1, -1, 5)$ 이고 점 $A(4, 2, -1)$ 을 지나는 구의 반지름의 길이는

$$\sqrt{(4-1)^2 + (2+1)^2 + (-1-5)^2} = 3\sqrt{6}$$

구의 중심 (1, -1, 5)와 평면 α 사이의 거리는

$$\frac{|1 \times 1 + 2 \times (-1) + 2 \times 5 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 1$$

따라서 구와 평면이 만나서 생기는 도형인 원의 반지름의 길이는

$$\sqrt{(3\sqrt{6})^2 - 1^2} = \sqrt{53}$$

이므로 원의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{53})^2 = 53\pi$$

$$\therefore k = 53$$

답 53

18 **전략** 평면과 구가 접하면 구의 중심과 평면 사이의 거리는 구의 반지름의 길이와 같다.

풀이 구 $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1$ 의 중심 (1, 0, -1)과 평면 $x-2y+2z+d=0$ 사이의 거리는 구의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|1 \times 1 - 2 \times 0 + 2 \times (-1) + d|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 1$$

$$|d-1| = 3$$

$$d-1 = -3 \text{ 또는 } d-1 = 3$$

$$\therefore d = -2 \text{ 또는 } d = 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

구 $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 1$ 의 중심 (-1, 1, 4)와 평면 $x-2y+2z+d=0$ 사이의 거리도 구의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|1 \times (-1) - 2 \times 1 + 2 \times 4 + d|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 1$$

$$|d+5| = 3$$

$$d+5 = -3 \text{ 또는 } d+5 = 3$$

$$\therefore d = -8 \text{ 또는 } d = -2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

주어진 평면이 두 구에 동시에 접하므로 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서

$$d = -2$$

답 -2

19 **해결과정** $P\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$ 이라 하면 평면 α 는 \overrightarrow{OP} 를 법선벡터로 하고 점 P를 지나므로 평면 α 의 방정식은

$$\frac{4}{5}\left(x - \frac{4}{5}\right) + \frac{3}{5}\left(y - \frac{3}{5}\right) + 0 \times (z - 0) = 0$$

$$\therefore 4x + 3y - 5 = 0 \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

또 $Q\left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 라 하면 평면 β 는 \overrightarrow{OQ} 를 법선벡터로 하고 점 Q를 지나므로 평면 β 의 방정식은

$$0 \times (x-0) + \frac{3}{5}\left(y - \frac{3}{5}\right) + \frac{4}{5}\left(z - \frac{4}{5}\right) = 0$$

$$\therefore 3y + 4z - 5 = 0 \quad \rightarrow 20\% \text{ 배점}$$

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 라 하면

$$\vec{n}_1 = (4, 3, 0), \vec{n}_2 = (0, 3, 4)$$

이고 두 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|3 \times 3|}{\sqrt{4^2 + 3^2} \sqrt{3^2 + 4^2}} \\ &= \frac{9}{25} \end{aligned}$$

$\rightarrow 40\% \text{ 배점}$

답구하기 \cdot 따라서 평면 α 위의 넓이가 100인 삼각형의 평면 β 위로의 정사영의 넓이는

$$\begin{aligned} 100 \cos \theta &= 100 \times \frac{9}{25} \\ &= 36 \end{aligned}$$

$\rightarrow 20\% \text{ 배점}$

답 36

20 **전략** 점 B를 평면 α 에 대하여 대칭이동한 점이 직선 l 위의 점임을 이용한다.

풀이 점 A(1, 1, 1)의 좌표를 $x+y+2z=4$ 에 대입하면 등식이 성립하므로 점 A는 평면 α 위의 점이다.

점 B를 평면 α 에 대하여 대칭이동한 점을

$B'(a, b, c)$ 라 하면

$$\overrightarrow{BB'} = (a-3, b-p, c-q)$$

$\overrightarrow{BB'}$ 과 평면 α 의 법선벡터 (1, 1, 2)는 서로 평행하므로

$$(a-3, b-p, c-q) = t(1, 1, 2) \quad (t \neq 0)$$

$$a-3 = t, \quad b-p = t, \quad c-q = 2t$$

$$\therefore a = t+3, \quad b = t+p, \quad c = 2t+q$$

이때 점 $B'(t+3, t+p, 2t+q)$ 는 직선 l 위의 점이므로

$$t+2 = \frac{t-1+p}{4} = \frac{2t-1+q}{2}$$

$$\therefore p = 3t+9, \quad q = 5$$

따라서 $B(3, 3t+9, 5), B'(t+3, 4t+9, 2t+5)$ 이므로 선분 BB' 의 중점을 M이라 하면

$$M\left(\frac{t+6}{2}, \frac{7t+18}{2}, t+5\right)$$

점 M은 평면 α 위의 점이므로

$$\frac{t+6}{2} + \frac{7t+18}{2} + 2(t+5) = 4$$

$$12t = -36 \quad \therefore t = -3$$

$$\therefore B(3, 0, 5), B'(0, -3, -1),$$

$$M\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 2\right)$$

조건 (나)에서 \vec{BC} 는 평면 α 의 법선벡터와 평행하므로 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 점 C는 두 점 B, B'을 지나는 직선 위의 점이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 높이는 \overline{AM} 의 길이와 같다. 이때

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= \frac{3}{2} \overline{BB'} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{3^2 + 3^2 + 6^2} \\ &= \frac{9\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{AM} &= \sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}-1\right)^2 + (2-1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{30}}{2} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \overline{BC} \times \overline{AM} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{9\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{30}}{2} \\ &= \frac{27\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{27\sqrt{5}}{4}$

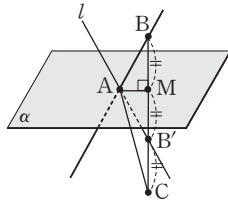
21 **전략** 평면 ABC와 yz 평면이 이루는 각을 이용하여 평면 ABC와 평면 $x-2y+2z=1$ 이 이루는 각의 크기를 구한다.

풀이 삼각형 ABC를 포함한 평면과 yz 평면이 이루는 각의 크기를 θ_1 이라 하면 조건 (가), (나)에 의하여

$$\begin{aligned} 6 \cos \theta_1 &= 3 \\ \therefore \cos \theta_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

평면 $x-2y+2z=1$ 과 yz 평면이 이루는 각의 크기를 θ_2 라 하면 평면 $x-2y+2z=1$ 의 법선벡터는 $(1, -2, 2)$ 이고 yz 평면의 법선벡터는 $(1, 0, 0)$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos \theta_2 &= \frac{|1 \times 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$



삼각형 ABC의 평면 $x-2y+2z=1$ 위로의 정사영의 넓이가 최대가 되려면 삼각형 ABC를 포함한 평면과 평면 $x-2y+2z=1$ 이 이루는 각의 크기가 최소가 되어야 한다.

즉 삼각형 ABC를 포함한 평면과 평면 $x-2y+2z=1$ 이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\theta = \theta_2 - \theta_1$$

$$\cos \theta_1 = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\sin \theta_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{3} \text{에서}$$

$$\sin \theta_2 = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ &= \cos \theta_2 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \sin \theta_1 \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이의 최댓값은

$$\begin{aligned} 6 \cos \theta &= 6 \times \left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \\ &= 1 + 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

답 ①

22 **전략** 두 점 A, B의 xy 평면 위로의 정사영을 이용한다.

풀이 직선 l 의 방향벡터와 xy 평면의 법선벡터를 각각 \vec{u}, \vec{n} 이라 하면

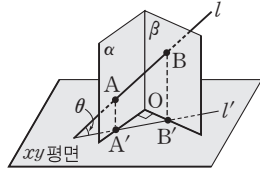
$$\vec{u} = (-1, 1, 1), \vec{n} = (0, 0, 1)$$

직선 l 과 xy 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} \\ &= \frac{|1 \times 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (\because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

한편 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 A' , B' 이라 하고, $\overline{OA'}=a$, $\overline{OB'}=b$ 라 하면 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여



$$\overline{A'B'} = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{2ab}$$

이때 등호는 $a=b$ 일 때 성립하므로 $\overline{A'B'}$ 의 길이의 최솟값은 $a=b$ 일 때, 즉 $\triangle OA'B'$ 이 직각이등변삼각형일 때의 빗변의 길이와 같다.

두 점 A' , B' 을 지나는 직선의 방정식을 l' 이라 하면 직선 l' 은 직선 l 의 xy 평면 위로의 정사영이므로 직선 l' 의 방정식은

$$3-x=y, z=0$$

$$\therefore x+y-3=0, z=0$$

이때 원점과 직선 $x+y-3=0, z=0$ 사이의 거리는

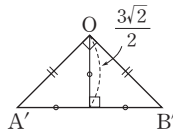
$$\frac{|-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서

$$\overline{A'B'} \geq 2 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

이므로 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$ 에서

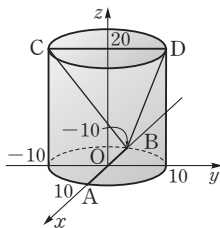
$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \frac{\overline{A'B'}}{\cos \theta} \\ &\geq \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$



따라서 \overline{AB} 의 길이의 최솟값은 $3\sqrt{3}$ 이다.

☐ $3\sqrt{3}$

23 문제이해 · 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B가 있는 원기둥의 밑면의 중심이 원점 O, 두 점 A, B가 x 축 위에 오도록 원기둥을 좌표 공간에 놓으면



$$A(10, 0, 0),$$

$$B(-10, 0, 0),$$

$$C(0, -10, 20), D(0, 10, 20) \quad \rightarrow 30\% \text{ 배점}$$

해결과정 · 이때 세 점 B, C, D를 지나는 평면의 방정식을

$$ax+by+cz+d=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이라 하면

$$-10a+d=0, -10b+20c+d=0,$$

$$10b+20c+d=0$$

위의 세 식에서 a, b, c 를 d 로 나타내면

$$a = \frac{1}{10}d, b=0, c = -\frac{1}{20}d \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{1}{10}dx - \frac{1}{20}dz + d = 0$$

$d \neq 0$ 이므로 위의 식의 양변을 d 로 나누면 평면의 방정식은

$$\frac{1}{10}x - \frac{1}{20}z + 1 = 0$$

$$\therefore 2x - z + 20 = 0 \quad \rightarrow 50\% \text{ 배점}$$

답구하기 · 따라서 구하는 거리는 점 $A(10, 0, 0)$ 과 평면 $2x - z + 20 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\begin{aligned} \frac{|2 \times 10 - 1 \times 0 + 20|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2}} &= \frac{40}{\sqrt{5}} \\ &= 8\sqrt{5} \end{aligned}$$

$\rightarrow 20\% \text{ 배점}$

☐ $8\sqrt{5}$

MEMO

MEMO